

UNIVERSIDADE FEDERA DE GOIÁS
ESCOLA DE ENGENHARIA CIVIL
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM GEOTECNIA
ESTRUTURAS E CONSTRUÇÃO CIVIL

**ESTABILIDADE DE TRELIÇA ABATIDA DE
MATERIAL HIPERELÁSTICO**

ANTÔNIO ADRYEL LIMA DOS SANTOS

D0246E21
GOIÂNIA
2021



UFG

UNIVERSIDADE FEDERAL DE GOIÁS
ESCOLA DE ENGENHARIA CIVIL E AMBIENTAL

TERMO DE CIÊNCIA E DE AUTORIZAÇÃO (TECA) PARA DISPONIBILIZAR VERSÕES ELETRÔNICAS DE TESES

E DISSERTAÇÕES NA BIBLIOTECA DIGITAL DA UFG

Na qualidade de titular dos direitos de autor, autorizo a Universidade Federal de Goiás (UFG) a disponibilizar, gratuitamente, por meio da Biblioteca Digital de Teses e Dissertações (BDTD/UFG), regulamentada pela Resolução CEPEC nº 832/2007, sem ressarcimento dos direitos autorais, de acordo com a [Lei 9.610/98](#), o documento conforme permissões assinaladas abaixo, para fins de leitura, impressão e/ou download, a título de divulgação da produção científica brasileira, a partir desta data.

O conteúdo das Teses e Dissertações disponibilizado na BDTD/UFG é de responsabilidade exclusiva do autor. Ao encaminhar o produto final, o autor(a) e o(a) orientador(a) firmam o compromisso de que o trabalho não contém nenhuma violação de quaisquer direitos autorais ou outro direito de terceiros.

1. Identificação do material bibliográfico

Dissertação Tese

2. Nome completo do autor

Antônio Adryel Lima dos Santos

3. Título do trabalho

Estabilidade de treliça abatida de material hiperelástico

4. Informações de acesso ao documento (este campo deve ser preenchido pelo orientador)

Concorda com a liberação total do documento SIM NÃO¹

[1] Neste caso o documento será embargado por até um ano a partir da data de defesa. Após esse período, a possível disponibilização ocorrerá apenas mediante:

- a) consulta ao(à) autor(a) e ao(à) orientador(a);
- b) novo Termo de Ciência e de Autorização (TECA) assinado e inserido no arquivo da tese ou dissertação.

O documento não será disponibilizado durante o período de embargo.

Casos de embargo:

- Solicitação de registro de patente;
- Submissão de artigo em revista científica;
- Publicação como capítulo de livro;
- Publicação da dissertação/tese em livro.

Obs. Este termo deverá ser assinado no SEI pelo orientador e pelo autor.



Documento assinado eletronicamente por **Renata Machado Soares, Professor do Magistério Superior**, em 16/07/2021, às 08:04, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do [Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015](#).



Documento assinado eletronicamente por **ANTONIO ADRYEL LIMA DOS SANTOS, Discente**, em 16/07/2021, às 08:08, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do [Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015](#).



A autenticidade deste documento pode ser conferida no site https://sei.ufg.br/sei/controlador_externo.php?acao=documento_conferir&id_orgao_acesso_externo=0, informando o código verificador **2213498** e o código CRC **20DDEF4**.

ANTÔNIO ADRYEL LIMA DOS SANTOS

**ESTABILIDADE DE TRELIÇA ABATIDA DE
MATERIAL HIPERELÁSTICO**

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Geotecnia, Estruturas e Construção Civil da Universidade Federal de Goiás para obtenção do título de Mestre em Engenharia Civil.

Área de concentração: Estruturas.

Orientadora: Renata Machado Soares, DSc.

D0246E21
GOIÂNIA
2021

Ficha de identificação da obra elaborada pelo autor, através do Programa de Geração Automática do Sistema de Bibliotecas da UFG.

Santos, Antônio Adryel Lima dos
Estabilidade de treliça abatida de material hiperelástico
[manuscrito] / Antônio Adryel Lima dos Santos. - 2021.
80 f.: il.

Orientador: Profa. Dra. Renata Machado Soares.
Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal de Goiás, Escola de Engenharia Civil e Ambiental (EECA), Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil - Geotecnia, Estruturas e Construção Civil, Goiânia, 2021.

Bibliografia.

Inclui siglas, lista de figuras, lista de tabelas.

1. Treliça abatida. 2. Material hiperelástico. 3. Energia de flexão. I. Soares, Renata Machado, orient. II. Título.

CDU 624



UNIVERSIDADE FEDERAL DE GOIÁS

ESCOLA DE ENGENHARIA CIVIL E AMBIENTAL

ATA DE DEFESA DE DISSERTAÇÃO

Ata nº **246** da sessão de Defesa de Dissertação de **Antônio Adryel Lima dos Santos** que confere o título de Mestre(a) em Geotecnia, Estruturas e Construção Civil, na área de concentração em **Estruturas**.

Aos **vinte e sete dias do mês de agosto do ano de dois mil e vinte e um**, a partir das **08:30**, por meio de **videoconferência**, realizou-se a sessão pública de Defesa de Dissertação intitulada “**Estabilidade de treliça abatida de material hiperelástico**”. Os trabalhos foram instalados pelo Orientador(a), Professor(a) Doutor(a) **Renata Machado Soares (PPGGECON/UFG)** com a participação dos demais membros da Banca Examinadora: Professor(a) Doutor(a) **Zenon José Guzman del Prado (PPGGECON/UFG)**, membro titular interno; Professor(a) Doutor(a) **Arthur Álax de Araújo Albuquerque (EECA-UFG)**, membro titular externo(a). Durante a arguição os membros da banca **não fizeram** sugestão de alteração do título do trabalho. A Banca Examinadora reuniu-se em sessão secreta a fim de concluir o julgamento da Dissertação tendo sido o(a) candidato(a) **aprovado(a)** pelos seus membros. Proclamados os resultados pelo(a) o(a) Professor(a) Doutor(a) **Renata Machado Soares**, Presidente da Banca Examinadora, foram encerrados os trabalhos e, para constar, lavrou-se a presente ata que é assinada pelos Membros da Banca Examinadora, aos **vinte e sete dias do mês de agosto do ano de dois mil e vinte e um**.



Documento assinado eletronicamente por **Zenon Jose Guzman Nunez Del Prado, Professor do Magistério Superior**, em 27/08/2021, às 10:56, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do [Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015](#).



Documento assinado eletronicamente por **Arthur Alax De Araujo Albuquerque, Professor do Magistério Superior**, em 27/08/2021, às 10:56, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do [Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015](#).



Documento assinado eletronicamente por **Renata Machado Soares, Professor do Magistério Superior**, em 27/08/2021, às 10:57, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do [Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015](#).



Documento assinado eletronicamente por **ANTONIO ADRYEL LIMA DOS SANTOS, Discente**, em 27/08/2021, às 11:02, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do [Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015](#).



A autenticidade deste documento pode ser conferida no site https://sei.ufg.br/sei/controlador_externo.php?acao=documento_conferir&id_orgao_acesso_externo=0, informando o código verificador **2219703** e o código CRC **C2F0C833**.

Referência: Processo nº 23070.037434/2021-70

SEI nº 2219703

AGRADECIMENTOS

Quero agradecer à minha mãe Tereza pelo incentivo e apoio para que eu ingressasse e concluísse a minha graduação, sem você eu não teria chegado até aqui.

À minha orientadora, professora Renata Machado Soares, que desde a época da graduação torna mais fácil e prazeroso o meu aprendizado na área de estruturas. Obrigado pela disposição e paciência em me auxiliar, sinto que cresci bastante sob sua orientação.

Agradeço à minha sogra Weslene por constantemente acreditar no meu sucesso, sua torcida e empolgação já me fizeram seguir em frente várias vezes.

Quero agradecer à tia Nisinha por me inspirar com sua trajetória de conquistas através do estudo. Obrigado pelo apoio, seu presente foi meu laboratório no desenvolvimento desta pesquisa.

Meu grande obrigado à minha namorada Agatha, por ser companheira, compreensível, paciente e ótima conselheira ao longo desta jornada. Eu dedico este trabalho a você.

Aos meus amigos do mestrado, que serão designados aqui pelos seus apelidos, obrigado pela convivência neste período, em especial a Mimimi, Dudu, John-John, Lorrano, Jeffo, Hansen e Yuyu.

Por fim, agradeço ao corpo docente da área de estruturas do PPGGECON pelos aprendizados e à Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES) pela concessão da bolsa de estudos.

RESUMO

O estudo da estabilidade de treliça abatida de material hiperelástico insere-se na linha de pesquisa de estabilidade dinâmica não linear de elementos estruturais. Neste trabalho, inicialmente utiliza-se solução analítica, onde as equações que governam o sistema estrutural de uma treliça plana de duas barras, hiperelástica, simétrica e assimétrica, são obtidas a partir da variação do funcional de energia do sistema, utilizando as equações de Euler-Lagrange. O material hiperelástico incompressível é descrito pelo modelo constitutivo neo-Hookeano, considerando-se também a não linearidade geométrica no estudo. Utiliza-se o Método dos Elementos Finitos (MEF) através do programa comercial de elementos finitos ABAQUS®, para realizar análises estáticas e dinâmicas, com o intuito de verificar a influência dos esforços de flexão no comportamento das treliças estudadas. Desta forma, obtém-se na análise estática as tensões principais, carga de flambagem e os caminhos de equilíbrio das forças externas e das cargas axiais nas barras. Da análise dinâmica são obtidas as curvas frequência-carga, frequência deslocamento, planos fase e respostas no tempo sob vibração forçada. Os resultados obtidos permitem concluir que a presença dos esforços de flexão acarretou maiores valores para a frequência natural e carga limite da estrutura.

Palavras-chave: Treliça abatida. Material hiperelástico neo-Hookeano. Energia de Flexão. Não linearidade geométrica. Método dos Elementos Finitos. Análise estática. Análise dinâmica.

ABSTRACT

The study of the stability of truss slaughtered hyperelastic material is part of the research line of nonlinear dynamic stability of structural elements. In this work, an analytical solution is initially used, where the equations that govern the structural system of a flat truss of two bars, hyperelastic, symmetrical and asymmetric, are obtained from the variation of the system's energy functional, using the Euler-Lagrange equations. The incompressible hyperelastic material is described by the neo-Hookean constitutive model, also considering geometric nonlinearity in the study. The Finite Element Method (FES) is used through the ABAQUS® finite element commercial program to perform static and dynamic analyses to verify the influence of bending efforts on the behavior of the trusses studied. Thus, the main stresses, buckling load and the balance paths of the external forces and axial loads on the bars are obtained in static analysis. From dynamic analysis, frequency-load, frequency displacement, phase planes and responses in time under forced vibration are obtained. The results obtained allow us to conclude that the presence of bending efforts led to higher values for the natural frequency and limit load of the structure.

Keywords: Truss down. Neo-Hookean hyperelastic material. Bending Energy. Geometric nonlinearity. Finite Element Method. Static analysis. Dynamic analysis.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1.1- Cobertura em treliça de um supermercado em construção	16
Figura 1.2- Treliças esbelta e abatida	17
Figura 1.3- Metamaterial com elementos biestáveis	22
Figura 1.4- Metamateriais acústicos ajustáveis	23
Figura 1.5- Metamaterial arquitetado para absorção de energia	23
Figura 1.6- Metamateriais mecânicos com geometria treliçada	24
Figura 1.7- Metamaterial com ressonadores internos.....	25
Figura 2.1-Treliça simétrica na indeformada	30
Figura 2.2-Treliça assimétrica indeformada.....	31
Figura 2.3-Carga estática vertical.....	38
Figura 2.4-Energia cinética infinitesimal	39
Figura 2.5-Deslocamentos u_{x1} e u_{y1}	40
Figura 2.6-Modos e vibração da treliça simétrica	49
Figura 2.7-Elemento unidimensional	50
Figura 3.1-Caminhos de equilíbrio e carga crítica	52
Figura 3.2-Caminhos de equilíbrio via estudo analítico.....	53
Figura 3.3-Salto dinâmico	53
Figura 3.4-Equilíbrio nodal de forças.....	55
Figura 3.5-Tensões principais	56
Figura 3.6-Frequência Ω_2 versus carga	57
Figura 3.7-Relação frequência Ω_2 versus deslocamento-Treliça simétrica.....	59
Figura 3.8-Relação frequência Ω_2 versus deslocamento-Treliça assimétrica	60
Figura 3.9-Planos fase-Treliça simétrica T2D2. Carga limite:208.792N.....	61
Figura 3.10-Planos fase-Treliça simétrica B21. Carga limite: 255.617N	63
Figura 3.11-Planos fase-Treliça assimétrica T2D2. Carga limite: 241.8N	64

Figura 3.12-Planos fase-Treliça assimétrica B21. Carga limite: 281N.....	66
Figura 3.13-Resposta de vibração forçada-Treliça simétrica T2D2.....	68
Figura 3.14-Resposta de vibração forçada-Treliça simétrica B21	69
Figura 3.15-Resposta de vibração forçada-Treliça assimétrica T2D2	71
Figura 3.16-Resposta de vibração forçada-Treliça assimétrica B21	72
Figura 3.17-Deslocamentos horizontais-Treliça assimétrica T2D2	74
Figura 3.18-Deslocamentos horizontais-Treliça assimétrica B21	75

LISTA DE QUADROS

Quadro 3.1- Cargas limites e cargas críticas	54
Quadro 3.2- Carga não linear versus carga linear	54
Quadro 3.3- Frequências naturais (rad/s) S-Simétrica, A-Assimetrica	56

LISTA DE SIMBOLOS

Símbolos romanos

A_f	área deformada da seção transversal da barra
A_0	área indeformada da seção transversal da barra
A	amplitude de deslocamentos na direção x
ap_{ij}	variável de apoio
aux_i	variáveis auxiliares
B	amplitude de deslocamentos na direção y
b_0	base da treliça perfeita
b_1	base da treliça imperfeita
b_2	base da treliça imperfeita
b_0	base da treliça imperfeita
C_1	parâmetro do material
C_2	parâmetro do material
c	amortecimento de Rayleigh
dm_1	massa por unidade de comprimento da barra um
dm_2	massa por unidade de comprimento da barra dois
ds_1	comprimento infinitesimal da barra um indeformada
ds_2	comprimento infinitesimal da barra dois indeformada
ds'_1	comprimento infinitesimal da barra um deformada
ds'_2	comprimento infinitesimal da barra dois deformada
dT	energia cinética infinitesimal
dW	energia específica de deformação infinitesimal
$d\varepsilon_{ln}$	deformação logarítmica infinitesimal
d_λ	fator de deformação infinitesimal
E	módulo de elasticidade
F	carga axial na barra da treliça
G	módulo cisalhante elástico linear
h_0	altura da treliça perfeita
h_1	altura da treliça imperfeita
h	altura da treliça imperfeita
I_1	primeiro invariante de deformação
I_2	segundo invariante de deformação

I_3	terceiro invariante de deformação
k	porcentagem de perturbação dinâmica
K	matriz de rigidez
l_0	comprimento indeformado da barra da treliça perfeita
l	comprimento deformado
l_1	comprimento indeformado da barra da treliça imperfeita
l_2	comprimento indeformado da barra da treliça imperfeita
L	Lagrangiano do sistema
m	massa da barra da treliça
M	matriz de massa
N	Esforço axial na barra da treliça
n	modo de flambagem
N_{cr}	carga crítica da barra da treliça
p_e	parcela de carga estática
p_y	carga estática vertical
P_{ylim}	carga crítica do sistema
P_{euler}	carga crítica de Euler
Q	matriz dos coeficientes quadráticos
r	razão entre comprimentos indeformados da treliça imperfeita
r_y	raio de giração relativo à flexão em y
r_z	raio de giração relativo à flexão em z
s_1	eixo axial da barra um
s_2	eixo axial da barra dois
s_1'	eixo axial deformado da barra um
s_2'	eixo axial deformado da barra dois
T	energia cinética total
t	variável tempo
u_1	média dos deslocamentos de dois picos positivos sucessivos
u_2	deslocamento negativo entre dois picos positivos
u	amplitude do deslocamento
u_x	deslocamento do nó superior da treliça na direção x
u_y	deslocamento do nó superior da treliça na direção y

u_{x1}	deslocamento do comprimento infinitesimal ds_1 na direção x
u_{y1}	deslocamento do comprimento infinitesimal ds_1 na direção y
u_{x2}	deslocamento do comprimento infinitesimal ds_2 na direção x
u_{y2}	deslocamento do comprimento infinitesimal ds_2 na direção y
U	energia de deformação total
V	trabalho das cargas externas
V_{p_x}	trabalho da carga estática horizontal
V_{p_y}	trabalho da carga estática vertical
w	relação entre área, comprimento, massa e parâmetro do material
W	energia de deformação específica
x	direção horizontal do plano cartesiano
x_{final}	posição final da carga p_x
x_{s1}	distância horizontal do nó inferior esquerdo da treliça à ds_1
$x_{s1'}$	distância horizontal do nó inferior esquerdo da treliça à ds'_1
y_{s1}	distância vertical do nó inferior esquerdo da treliça à ds_1
$y_{s1'}$	distância vertical do nó inferior esquerdo da treliça à ds'_1
y	direção vertical do plano cartesiano
y_{final}	posição final da carga p_y

Símbolos gregos

α_x	grau de liberdade adimensional na direção x
α_y	grau de liberdade adimensional na direção y
α_{xd}	grau de liberdade adimensional dinâmico na direção x
α_{yd}	grau de liberdade adimensional dinâmico na direção y
α_{xe}	grau de liberdade adimensional estático na direção x
α_{ye}	grau de liberdade adimensional estático na direção y
α_i	constante do material
γ	ângulo entre barra l_2 e a horizontal
ε_{ln}	deformação logarítmica
ζ	coeficiente de amortecimento
θ	ângulo de abatimento
λ	fatores de deformação principal axial

λ_1	fator de deformação principal
λ_2	fator de deformação principal
λ_3	fator de deformação principal
λ_m	parâmetro do material
λ_{b1}	fator de deformação principal axial da barra um
λ_{b2}	fator de deformação principal axial da barra dois
μ	relação entre área da seção transversal deformada e indeformada
μ_i	constante do material
ν	coeficiente de Poisson
Π	energia potencial
ρ	massa específica
σ	tensão de Cauchy
ω	frequência normalizada
Ω	frequência de vibração
$\Omega_{1,2}$	frequências naturais
Ω_e	frequência de excitação
Ω_x	frequência de vibração na direção x
Ω_y	frequência de vibração na direção y

Símbolos matemáticos

$(\dot{\ })$	derivada de uma função em relação ao tempo
$(\ddot{\ })$	derivada segunda de uma função em relação ao tempo
det	determinante de uma matriz

SUMÁRIO

CAPÍTULO 1-INTRODUÇÃO	16
1.1 REVISÃO BIBLIOGRÁFICA	17
1.1.1 Modelo de Mooney-Rivlin.....	25
1.1.2 Modelo neo-Hookeano	25
1.1.3 Modelo Blatz-Ko	25
1.1.4 Modelo Yeoh	26
1.1.5 Modelo de Ogden	26
1.1.6 Modelo Polinomial	26
1.1.7 Modelo Arruda-Boyce	27
1.1.8 Modelo Hadamard	27
1.2 JUSTIFICATIVA	27
1.3 OBJETIVOS	28
1.4 METODOLOGIA	28
1.5 ORGANIZAÇÃO DO TEXTO	29
CAPÍTULO 2-FORMULAÇÃO MATEMÁTICA	30
2.1 RELAÇÕES GEOMÉTRICAS PARA TRELIÇA PLANA	30
2.2 MODELO CONSTITUTIVO NEO-HOOKEANO	33
2.3 ENERGIA POTENCIAL TOTAL	34
2.3.1 Energia de deformação	34
2.3.2 Trabalho das forças externas.....	38
2.4 ENERGIA CINÉTICA	39
2.5 ANÁLISE ESTÁTICA	41
2.6 ANÁLISE DINÂMICA	44
2.6.1 Equações de movimento.....	44
2.6.2 Frequências naturais-Treliça assimétrica	46

2.6.3	Frequências naturais-Treliça simétrica.....	49
2.7	ANÁLISE VIA MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS	49
	CAPÍTULO 3-RESULTADOS NUMÉRICOS.....	51
3.1	ANÁLISE ESTÁTICA	51
3.1.1	Carga crítica e caminhos de equilíbrio	51
3.1.2	Tensões principais	55
3.2	ANÁLISE DINÂMICA	56
3.2.1	Frequências naturais	56
3.2.2	Curvas frequência versus carga	57
3.2.3	Curvas frequência versus deslocamento	58
3.2.4	Planos fase	60
3.2.5	Resposta no tempo sob vibração forçada	67
	CAPÍTULO 4-CONCLUSÕES E SUGESTOES PARA TRABALHOS FUTUROS.....	77
	REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	79

CAPÍTULO 1

INTRODUÇÃO

As treliças são estruturas formadas por elementos lineares, ligados entre si pelas extremidades, através de nós. São estruturas leves capazes de vencer grandes vãos e com valor estético agregado, principalmente quando empregadas em fachadas. Este tipo de estrutura é bastante utilizado em torres de transmissão de energia, na construção de pontes e em estruturas de coberturas, conforme exemplo apresentado na Figura 1.1.

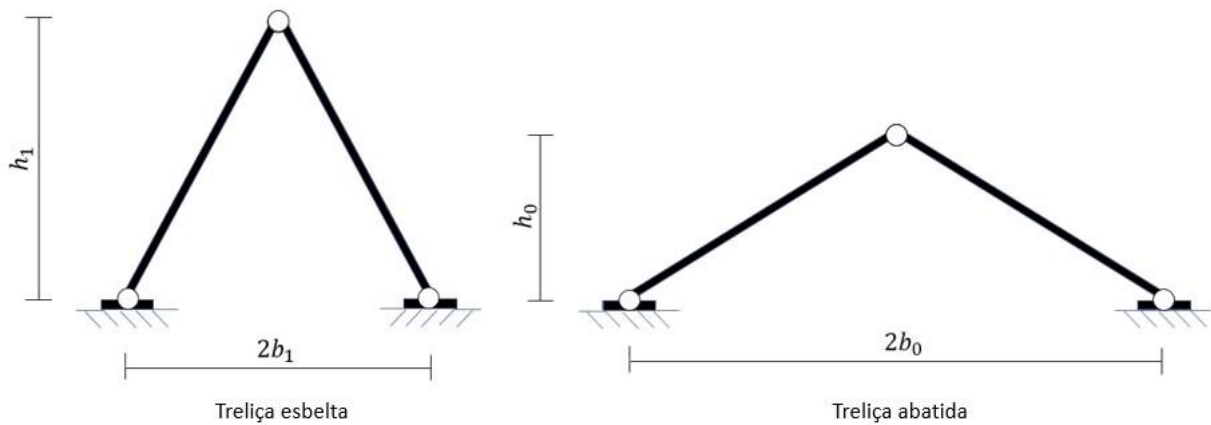
Figura 1.1-Cobertura em treliça de um supermercado em construção.



Fonte: Fotografado pelo autor.

As treliças são estruturas que podem apresentar geometria abatida ou esbelta. O abatimento da estrutura é definido através da relação geométrica entre a altura e a base da treliça, conforme ilustrado na Figura 1.2.

Figura 1.2-Treliças esbelta e abatida.



Fonte: Autor.

Uma treliça plana de duas barras, também conhecida por treliça de Von Mises, é um sistema biestável, pois de forma geral sua trajetória de equilíbrio apresenta dois trechos estáveis de equilíbrio, a partir do qual o sistema estrutural pode atingir o ponto limite, situação em que a estrutura inverte sua posição repentinamente, caracterizando um comportamento que recebe o nome de salto dinâmico ou *snap through*.

Na análise de uma treliça abatida podem surgir caminhos de equilíbrio primários e secundários, estas ramificações de configurações de equilíbrio podem apresentar várias soluções estáveis (multiestabilidade) ou instáveis. A investigação da multiestabilidade em sistemas estruturais é uma área de pesquisa em engenharia relativamente nova. Esta área de pesquisa encontra possibilidades de aplicações em engenharia aeroespacial, civil, mecânica e bioengenharia, compreendendo o desenvolvimento de novos materiais (metamateriais), estruturas ajustáveis, sistemas de controle de vibrações, sistemas estruturais com padrão repetitivo, entre outros. (Fonseca, 2018)

1.1 REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

Dentre as estruturas abatidas, têm-se as treliças planas simétricas de duas barras, conhecidas por treliça de Von Mises. Kassimali e Bidhendi (1988) estudaram a resposta à grandes deformações e a estabilidade da treliça de Von Mises e de um domo geodésico com 24 barras, ambos submetidos a três tipos de cargas dinâmicas: carga constante, impulso triangular e carga senoidal. A resposta carga versus deflexão é gerada por integração numérica das

equações de movimento e utiliza-se o Método de Newton-Raphson em cada passo de tempo para satisfazer as equações de movimento. As cargas críticas são determinadas pelo critério de Budinsky-Roth. Os autores concluíram que os resultados numéricos apresentados serão úteis no desenvolvimento de uma melhor compreensão do comportamento da estabilidade de estruturas sob condições dinâmicas de carregamento.

Barbosa (2017) realiza uma análise dinâmica não linear de duas estruturas abatidas: uma Treliça de Von Mises e um arco abatido senoidal. Para ambas as estruturas considera-se um comportamento elástico linear e formulação das equações de equilíbrio na configuração deformada da estrutura. O estudo é realizado com a obtenção dos planos fase, mapas de Poincaré, diagramas de bifurcação e fronteiras de escape, de forma que o autor conclui que a magnitude de carregamento estático e a frequência de vibração da carga modifica de forma expressiva a capacidade de carga dinâmica da estrutura.

Já Ario (2004) aplica a equação de Duffing à uma treliça plana de duas barras com não linearidade geométrica e massa concentrada no nó superior da treliça, para realizar uma análise da estabilidade dinâmica, do comportamento bifurcacional e oscilações não periódicas e periódicas, considerando fenômenos caóticos. Obtém-se as trajetórias de plano fase e resposta no tempo através do método numérico de Runge-Kutta. Deduz-se que um modelo dinâmico simples também se comporta caoticamente quando sujeito a força periódica.

Ainda considerando o efeito da não linearidade geométrica no estudo do sistema estrutural do tipo treliça, Lacerda (2014) propõe o uso do método dos elementos finitos posicional para analisar exemplos de treliças presentes na literatura com o intuito de comprovar a eficiência do método frente ao método dos elementos finitos padrão. Para isso utiliza-se três medidas de deformação: Green, Engenharia e Logarítmica. As barras da treliça são consideradas em duas configurações: com volume incompressível e barras com mudança de volume. E são feitas formulações utilizando o princípio da energia potencial mínima e o princípio dos trabalhos virtuais. A formulação posicional se mostrou uma alternativa satisfatória frente às formulações tradicionais do Método dos Elementos Finitos, devido ao desempenho apresentado nas aplicações numéricas e pela praticidade na implementação computacional.

Não se limitando apenas à consideração da não linearidade geométrica no estudo de estruturas do tipo treliça, Souza (2015) considera a presença do efeito da não linearidade física, que é descrita por um modelo constitutivo baseado na Mecânica do Dano Contínuo. São

considerados três problemas encontrados na literatura: treliças planas com 3 e 13 barras e uma treliça plana hiperestática com 31 barras. A modelagem da treliça é feita utilizando-se o Método dos Elementos Finitos e o sistema de equações não lineares é resolvido utilizando o Método de Newton-Raphson associado à técnica de continuação Controle de Deslocamento Generalizado. O autor constata que modelos constitutivos baseados na Mecânica do Dano Contínuo é uma alternativa válida para análise do comportamento estrutural.

No que se refere à mensuração correta de grandes deslocamentos e deformações em sistemas estruturais do tipo treliça, Souza (2017) realiza uma análise estática não linear geométrica de uma treliça plana com duas barras, submetida a uma força vertical; e de uma treliça plana abatida e não simétrica, com dezoito nós e 33 barras submetida ao efeito de três forças concentradas de igual magnitude. O objetivo da análise é comparar as soluções obtidas utilizando três diferentes medidas de deformações: Green, Engenharia e logarítmica. Isto é feito com o desenvolvimento de um algoritmo baseado no método iterativo de Potra-Pták com convergência cúbica, por meio da formulação posicional do método dos elementos finitos. Conclui-se que a deformação de Green é adequada para estruturas com grandes deslocamentos, mas com pequenas deformações. E para deformações muito grandes, como ocorre em materiais hiperelásticos, a medida de deformação mais adequada é a deformação logarítmica.

Oliveira *et al.* (2017) realizaram análise dinâmica de um arco treliçado raso e de uma treliça de Von Mises, para investigar a influência da não linearidade geométrica na resposta no tempo para diferentes carregamentos dinâmicos: carga constante, carga rampa, pulso de carga e carga senoidal. Para isso discretizaram as treliças pelo Método dos Elementos Finitos (MEF), utilizando o método corrotacional. Por meio dos eixos corrotacionais separaram os movimentos de corpo rígido dos movimentos deformacionais. Observaram-se para as duas estruturas analisadas, que devido à presença da não linearidade geométrica, para um intervalo de tempo maior as amplitudes tendem a aumentar.

Um aspecto importante a ser considerado na resposta final das treliças planas abatidas é a influência da variação dos ângulos de abatimento. Kwasniewski (2008) determina os possíveis caminhos de equilíbrio para a treliça de Von Mises submetida a um carregamento estático vertical aplicado ao nó superior. O sistema é considerado com dois graus de liberdade e a análise é feita para diferentes ângulos de abatimento. Realizou-se a localização dos pontos limites, bem como a determinação dos estados de equilíbrio estável e instável, traçando desta

forma as trajetórias de equilíbrio. Analisando os caminhos de equilíbrio para a treliça mais e menos abatida, observa-se um padrão onde há apenas um caminho de equilíbrio primário ou adicionalmente dois ou três caminhos de equilíbrio secundário. Todos os caminhos secundários de equilíbrio são instáveis e descrevem deformações assimétricas.

Posteriormente, Fonseca (2018) investiga o comportamento não linear, vibrações, bifurcações e instabilidade de uma treliça plana de duas barras feita de material hiperelástico e descrita pelo modelo neo-Hookeano. O autor realiza uma análise paramétrica de treliças abatidas e não abatidas, submetidas a carregamento estático horizontal ou vertical, considerando imperfeições geométricas e imperfeições de carga. A consideração simultânea da não linearidade do material e geométrica dá origem a novos caminhos de equilíbrio, resultando em várias soluções estáveis e instáveis.

Além de pesquisas envolvendo treliças planas, há na literatura estudos com treliças espaciais. No trabalho de Ligarò e Valvo (2006) os autores estudaram a estabilidade do equilíbrio de uma treliça espacial elástica na forma de pirâmide regular com n barras, que se trata da generalização tridimensional da treliça de Von Mises. O sistema estrutural é resolvido para três condições de carregamento diferentes: carga vertical, carga horizontal e carga oblíqua, com ponto de aplicação no nó superior da treliça. Os autores constataram que além dos ramos primários e secundários, que se cruzam de várias formas, surgiram casos de ramos com equilíbrio neutro.

Trabalhando com uma treliça espacial similar à estudada por Ligarò e Valvo (2006), Castro (2014) analisou o comportamento axissimétrico da treliça sob cargas verticais, estáticas e dinâmicas, investigando as oscilações não lineares e a instabilidade dinâmica. Para isso utiliza as respostas no tempo e planos de fase, diagramas de bifurcação, perfis de energia e bacias de atração.

Além do que foi observado em Fonseca (2018), o modelo constitutivo hiperelástico neo-Hookeano também é utilizado por Soares (2009) que aborda as vibrações não lineares livres e forçadas de grande amplitude, de membranas hiperelásticas circulares, previamente tracionadas, constituídas de material hiperelástico neo-Hookeano, isotrópico e incompressível. As equações de movimento são obtidas pelo princípio de Hamilton e também utilizando elementos finitos através do programa comercial ABAQUS[®]. Desta forma obteve-se as curvas de frequência-amplitude, curvas de ressonância, diagramas de bifurcação, coexistência de soluções e bacias de atração. Observa-se que o aumento da amplitude de

vibração da membrana hiperelástica resulta na diminuição da não linearidade da resposta da membrana. No que se refere às curvas de ressonância e diagramas de bifurcação constata-se que há a coexistência de vibrações de pequena e grande amplitude, podendo acarretar mudanças bruscas na amplitude de vibração.

Já Silva (2015) investiga o comportamento dinâmico linear e não linear de uma membrana retangular composta por um material elastomérico, isotrópico, homogêneo e incompressível e realiza uma análise paramétrica para avaliar a influência do material e da geometria da membrana nas frequências naturais. Para descrever o material da membrana, utiliza-se três modelos constitutivos: neo-Hookeano, Mooney-Rivlin e Yeoh, sendo a modelagem da membrana embasada na teoria da elasticidade para grandes deformações. Aplica-se o princípio de Hamilton na função de Lagrange do sistema estrutural para obter o sistema de equações de movimento, que é resolvido utilizando o método de Runge-Kutta de quarta ordem. O método da força bruta e o método da continuação são aplicados para obter a curva frequência-amplitude, cujo comportamento é semelhante para os três modelos constitutivos, para pequenas amplitudes. Para valores maiores de amplitudes, o modelo de Yeoh apresenta curva crescente, enquanto os demais modelos tendem a convergir assintoticamente para um valor da frequência de excitação.

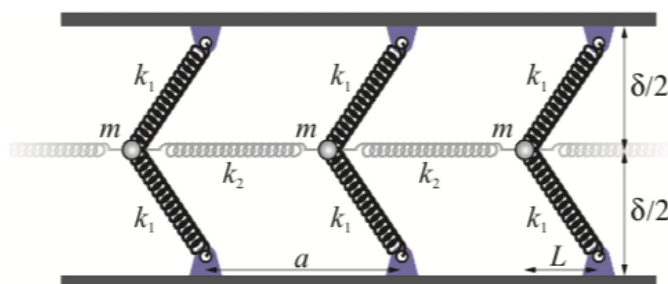
A aplicação de matérias hiperelásticos não fica restrita a geometrias planas, tem-se que Amaral (2018) estuda os comportamentos mecânicos não lineares, estático e dinâmico, de uma membrana esférica submetida a uma pressão radial uniformemente distribuída na sua superfície interna e composta por um material hiperelástico, incompressível, homogêneo e isotrópico descrito pelos modelos constitutivos neo-Hookeano e Mooney-Rivlin. As equações de equilíbrio são obtidas a partir da formulação variacional utilizando a teoria de grandes deformações e a partir da análise estática encontram-se as relações entre a pressão interna aplicada na membrana e as tensões principais. Com a análise dinâmica obtêm-se as curvas frequência-amplitude, resposta no tempo, diagramas de bifurcação, as curvas de ressonância e as bacias de atração. Conclui-se da análise estática que o modelo neo-Hookeano apresenta um pré carregamento crítico menor que o observado no modelo de Mooney-Rivlin. Analisando-se as bacias de atração obtidas para os dois modelos, afirma-se que o modelo neo-Hookeano apresenta valores mais conservadores em relação aos critérios de deslocamento e instabilidade.

O estudo de estruturas do tipo treliça não fica restrito a materiais elásticos e hiperelásticos, em Souza *et al* (2018) realiza-se análises estáticas, utilizando o Método dos Elementos Finitos, de treliças planas, idealizadas por dois modelos constitutivos inelásticos uniaxiais, o primeiro modelo é baseado na teoria da Elastoplasticidade e o segundo na mecânica do dano. A treliça é submetida a ciclos de carregamento e descarregamento, e o sistema de equações não lineares de equilíbrio é resolvido pelo método de Newton-Raphson associado à técnica de continuação de comprimento de arco linear. Os autores constataam que o descarregamento da estrutura acarreta caminhos de equilíbrio distintos.

A hiperelasticidade acarreta o aparecimento de variadas trajetórias de equilíbrio devido ao aumento da capacidade da estrutura de se deformar. Esta multiestabilidade costuma ser desejável nas aplicações envolvendo metamateriais, pois estes elementos podem sofrer grandes deformações e deslocamentos. Os metamateriais são materiais artificiais com propriedades mecânicas que não são encontradas na natureza.

Nadkarni *et al* (2014) investigaram a dinâmica não-linear de um metamaterial formado por uma cadeia periódica de elementos biestáveis que consiste em massas conectadas por molas elásticas, ver Figura 1.3, o efeito da rigidez negativa resultante é capaz de propagar ondas de impacto em três regimes diferentes, dependendo da amplitude de excitação. Os resultados obtidos destacam oportunidades para projetar estruturas mecânicas periódicas e metamateriais contendo elementos biestáveis que dão origem a um desempenho dinâmico benéfico, servindo de modelo para a criação de metamateriais acústicos não lineares com elementos estáticos de rigidez negativa.

Figura 1.3-Metamaterial com elementos biestáveis.



Fonte: Nadkarni *et al* (2014).

Wang *et al* (2014) desenvolveram uma nova classe de metamateriais acústicos ajustáveis, formados por unidades ressonantes dispersas em uma malha elástica. Os ressonadores são capazes de sintonizar em uma grande faixa de frequências e consistem em um núcleo metálico conectado à malha por meio de filetes elásticos, cuja flambagem é explorada como forma de controlar a propagação de ondas no domínio da malha, conforme ilustrado na Figura 1.4.

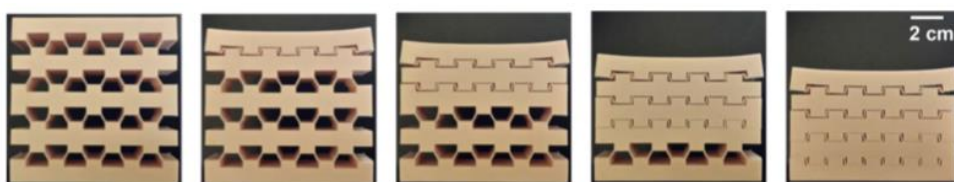
Figura 1.4-Metamateriais acústicos ajustáveis.



Fonte: Wang *et al* (2014).

Shan *et al* (2015) utilizam análise numérica e impressão 3D para projetar uma nova classe de metamateriais, onde a energia inserida em um sistema durante o carregamento, seja através de carga quasi-estática de baixa taxa ou via impacto, é retida na forma de deformação elástica, isso é feito através de estruturas programadas que contém elementos de vigas inclinadas, projetadas para permitir grandes deformações locais biestáveis. Essa capacidade de absorção de energia decorre unicamente da geometria estrutural dos elementos que compõem o metamaterial, ver Figura 1.5. Esses materiais arquitetados oferecem uma nova estratégia para melhorar significativamente a absorção de energia em acidentes envolvendo automóveis, aplicação em proteção pessoal e confecção de embalagem protetora de componentes delicados.

Figura 1.5-Metamaterial arquitetado para absorção de energia.



Fonte: Shan *et al* (2015).

Já Rafsanjani *et al* (2015) estudaram uma nova classe de metamaterial mecânico, formado por um arranjo periódico de unidades com geometria próxima à de uma treliça. Quando o metamaterial é submetido à tensão de tração, conforme ensaio apresentado na Figura 1.6 este apresenta uma extensão provocada por instabilidades de encaixe sequenciais, passando de um padrão com forma ondulada não deformada, para uma configuração geométrica de losango. Consideraram o material sendo neo-Hookeano para realizar simulações numéricas e desenvolveram experimentos em protótipos impressos em 3D, demonstrando que a arquitetura de encaixe pode ser ajustada para diferentes razões entre a altura e largura das unidades que compõem o metamaterial, para gerar variadas respostas mecânicas não lineares, tornando este material adequado para o design de estruturas adaptáveis. Ressaltam ainda que a energia dissipada do fenômeno de *snap through* pode ser usada para aplicações de isolamento e amortecimento de vibrações.

Figura 1.6-Metamateriais mecânicos com geometria treliçada.



Fonte: Rafsanjani *et al* (2015).

Posteriormente, Schmied *et al* (2017) exploram o uso de metamateriais localmente ressonantes para redução de vibração em aplicações de suporte de carga, este metamaterial é composto por elementos estruturais periódicos multifuncionais, que além de permitirem um desempenho de amortecimento em uma faixa de frequência de interesse, contribuem para preservar a rigidez estrutural, ver Figura 1.7. Modela-se o metamaterial por elementos finitos para analisar a resposta de frequência do quadro, sendo a solução analítica simplificada comparada com esta solução numérica, e na sequência validações experimentais são apresentadas para um protótipo impresso em 3D. Conclui-se que é possível fabricar estruturas de suporte de carga com ressonadores integrados e obter graus de liberdade adicionais para moldar sua resposta dinâmica. Além disso, também é possível projetar os ressonadores de tal

maneira que eles sejam multifuncionais, não atuando apenas como ressonadores, mas também contribuindo para a capacidade de carga e aumento da rigidez ao cisalhamento da estrutura.

Figura 1.7-Metamaterial com ressonadores internos.



Fonte: Wang *et al* (2014).

As características dos metamateriais podem ser representadas por modelos constitutivos hiperelásticos. Estes modelos descrevem o comportamento mecânico do material por meio da energia de deformação específica (W). Na sequência, apresentam-se algumas formulações para a energia de deformação de matérias hiperelásticos encontrados na literatura (ARRUDA E BOYCE, 1993; SELVADURAI, 2006; SOARES, 2009; SILVA, 2015).

1.1.1. Modelo de Mooney-Rivlin

A equação constitutiva segundo o modelo de Mooney-Rivlin para a energia de deformação é descrita na equação (1.1).

$$W = C_1(I_1 - 3) + C_2(I_2 - 3) \quad (1.1)$$

onde C_1 e C_2 são parâmetros do material, obtidos experimentalmente; I_1 e I_2 são, respectivamente, o primeiro e segundo invariante

1.1.2. Modelo neo-Hookeano

A equação constitutiva neo-Hookeana para a energia de deformação é descrita na equação (1.2) e obtida a partir da equação (1.1) para $C_2 = 0$.

$$W = C_1(I_1 - 3) \quad (1.2)$$

1.1.3. Modelo Blatz-Ko

Blatz e Ko usaram resultados experimentais de materiais hiperelásticos compressíveis para propor o modelo constitutivo descrito na equação (1.3) dependente do segundo e terceiro invariante de deformação.

$$W = \frac{G}{2} \left(\frac{I_2}{I_3} + 2\sqrt{I_3} - 5 \right) \quad (1.3)$$

onde G é o módulo cisalhante elástico linear.

1.1.4. Modelo Yeoh

Este modelo constitutivo estabelece que a formulação para a energia de deformação é independente do segundo invariante de deformação, conforme descrito na equação (1.4).

$$W = \sum_{i=1}^N C_i (I_1 - 3)^i \quad (1.4)$$

onde N é o número de termos da série e C_i os parâmetros do material. Para uma série com um termo ($i = 1$), o modelo de Yeoh se reduz a forma neo-Hookeana.

1.1.5. Modelo de Ogden

A equação constitutiva segundo o modelo de Ogden para a energia de deformação de um material hiperelástico é descrita na equação (1.5) e possui um número suficiente de parâmetros que podem ser obtidos experimentalmente.

$$W = \sum_{i=1}^N \frac{2\mu_i}{\alpha_i^2} (\lambda_1^{-\alpha_i} + \lambda_2^{-\alpha_i} + \lambda_3^{-\alpha_i} - 3) \quad (1.5)$$

onde μ_i , α_i e N são constantes relacionadas com as propriedades do material. E λ_i são os fatores de deformação.

1.1.6. Modelo Polinomial

O modelo constitutivo Polinomial apresenta a forma apresentada na equação (1.6) para a função energia de deformação.

$$W = \sum_{i+j=1}^N C_{ij} (I_1 - 3)^i (I_2 - 3)^j \quad (1.6)$$

Para valores adequados de C_{ij} é possível obter as funções do modelo de Mooney-Rivlin e do modelo neo-Hookeano.

1.1.7. Modelo Arruda-Boyce

O modelo constitutivo de Arruda-Boyce descrito na equação (1.7) baseia-se nas grandes deformações de borrachas e considera o estado de deformações tridimensional dependente de um sistema reticulado.

$$W = \mu \left[\frac{(I_1 - 3)}{2} + \frac{(I_1^2 - 9)}{20\lambda_m^2} + \frac{11(I_1^3 - 27)}{1050\lambda_m^4} + \frac{19(I_1^4 - 81)}{7000\lambda_m^6} + \frac{519(I_1^5 - 243)}{673750\lambda_m^8} \right] \quad (1.7)$$

onde μ e λ_m são parâmetros relacionados com as propriedades do material.

1.1.8. Modelo Hadamard

A equação constitutiva segundo o modelo de Hadamard para a energia de deformação é descrita na equação (1.8).

$$W = C_1(I_1 - 3) + C_2(I_2 - 3) + H(I_3) \quad (1.8)$$

onde C_1 e C_2 são parâmetros do material; I_1, I_2 e I_3 são os invariantes de deformação. E $H(I_3)$ é uma função arbitrária a ser determinada com base em argumentos constitutivos.

No que se refere ao estudo da estabilidade de treliças abatidas, conclui-se da revisão da literatura que a maioria dos trabalhos investigam treliças compostas por várias barras (arcos treliçados), objetivando maior proximidade com a possibilidade de aplicação prática para o estudo. Nas pesquisas com foco em treliças de Von Mises, bem como nas com foco em arcos treliçados, os autores tendem a não considerar a não linearidade do material e nem a presença de assimetria geométrica. Constata-se que a presença das não linearidades física e geométrica, bem como a consideração de cargas dinâmicas aplicadas, são aspectos relevantes a serem considerados no estudo do comportamento de treliças.

1.2 JUSTIFICATIVA

Há na literatura pesquisas que estudam a estabilidade e vibrações de treliças. Porém estes trabalhos, em sua grande maioria, tendem a não considerar a não linearidade do material e a não adicionar a energia de flexão na formulação das equações que governam o comportamento da treliça.

A presença da hiperelasticidade ao se considerar um material hiperelástico, acarreta o aparecimento de variadas trajetórias de equilíbrio com várias soluções estáveis e instáveis, devido ao aumento da capacidade da estrutura de se deformar. Essa multiestabilidade costuma ser desejável nas aplicações envolvendo metamateriais, pois estes elementos podem sofrer grandes deformações e deslocamentos, sendo necessário considerar a não linearidade geométrica e física. As características destes materiais especiais podem ser representadas por modelos constitutivos hiperelásticos, juntamente com uma forma geométrica de treliça.

1.3 OBJETIVOS

O objetivo geral da pesquisa desenvolvida neste trabalho é verificar, utilizando o Método dos Elementos Finitos, a influência da presença dos esforços de flexão, no comportamento de uma treliça hiperelástica, considerando a presença da não linearidade geométrica. Como objetivo geral secundário, deseja-se verificar a interferência da assimetria nos resultados obtidos.

Desta forma, se estabelece os seguintes objetivos específicos:

- Obter as tensões principais, carga de flambagem e caminhos de equilíbrio das forças externas e cargas axiais nas barras;
- Obter a relação entre frequência e deslocamento;
- Obter a relação entre frequência e força externa aplicada;
- Obter os planos fases e resposta no tempo sob vibração forçada.

1.4 METODOLOGIA

A pesquisa se inicia com o estudo analítico da instabilidade estática e vibrações da treliça, onde utilizando o modelo constitutivo hiperelástico neo-Hookeano monta-se as expressões para a energia potencial total e energia cinética. Na análise estática desenvolvida obtém-se as tensões principais, carga de flambagem das barras e os caminhos de equilíbrio das forças externas e das cargas axiais nas barras. Na análise dinâmica das treliças se obtém das frequências naturais e os modos de vibração.

Na sequência, utiliza-se o Método dos Elementos Finitos (MEF) com o uso de um elemento de treliça e um elemento de viga. Inicialmente realiza-se as análises estáticas desenvolvidas no estudo analítico. Posteriormente, o comportamento dinâmico das treliças consideradas no

estudo são estudadas com a obtenção das curvas frequência-carga, frequência deslocamento, planos fase e respostas no tempo sob vibração forçada.

1.5 ORGANIZAÇÃO DO TEXTO

Este capítulo se inicia com a introdução das características de utilização da estrutura do tipo treliça, seguida por uma revisão da literatura com foco em aspectos pertinentes ao estudo. Na sequência apresenta-se a justificativa de estudo do tema e objetivos da pesquisa.

No Capítulo 2 aborda-se a formulação matemática desenvolvida para realizar o estudo analítico e o estudo via Método dos Elementos (MEF) para duas configurações de treliça, simétrica e assimétrica, submetida à força externa vertical em seu nó superior.

No Capítulo 3 apresentam-se os resultados obtidos em ambas as análises, analítico e MEF.

No Capítulo 4 encontra-se as conclusões da pesquisa desenvolvida nesta dissertação de mestrado e sugestões para trabalhos futuros.

CAPÍTULO 2

FORMULAÇÃO MATEMÁTICA

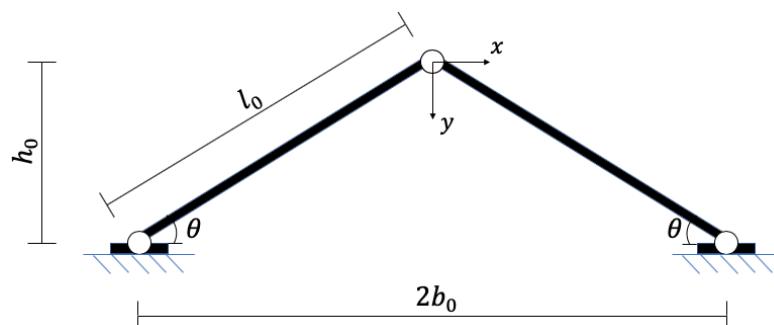
Apresenta-se neste capítulo a formulação matemática desenvolvida por Fonseca (2018), para o estudo das respostas estática e dinâmica de uma treliça plana abatida constituída por material hiperelástico incompressível, isotrópico e homogêneo, cujo comportamento é descrito pelo modelo constitutivo neo-Hookeano.

2.1 RELAÇÕES GEOMÉTRICAS PARA A TRELIÇA PLANA DE DUAS BARRAS

Para o estudo da instabilidade estática e vibrações da treliça abatida de material hiperelástico neo-Hookeano, considera-se duas configurações geométricas: treliça simétrica e treliça assimétrica. Para a configuração assimétrica a projeção horizontal do comprimento de uma das barras da treliça é 5% maior do que a da treliça simétrica.

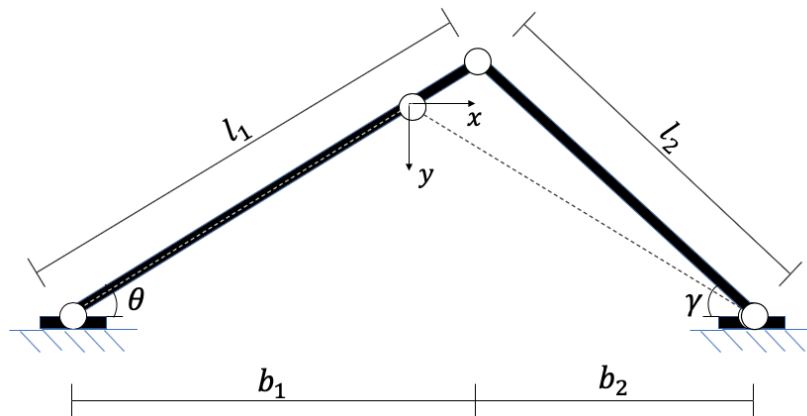
A treliça simétrica na configuração indeformada ilustrada na Figura 2.1 apresenta ângulo de abatimento θ , base $2b_0$ e altura h_0 . As barras da treliça apresentam comprimento l_0 com área de seção transversal A_0 e massa específica ρ . A origem do sistema de coordenadas se situa no nó superior da treliça que pode se deslocar nas direções x e y .

Figura 2.1-Treliça simétrica na configuração indeformada.



Na Figura 2.2 apresenta-se a configuração da treliça assimétrica abatida e em tracejado ilustra-se configuração da treliça simétrica. A barra de comprimento l_1 mantém a inclinação θ com a horizontal, o comprimento total da base permanece inalterado: $b_1 + b_2 = 2b_0$ e a origem do sistema de coordenadas permanece nas coordenadas do nó superior da treliça simétrica.

Figura 2.2-Treliça assimétrica indeformada.



Fonte: Adaptado de FONSECA, 2018.

Utiliza-se a relação entre a altura e o comprimento da base de uma treliça para indicar se ela é abatida ou esbelta. Conforme Bazant e Cedolin (2010), se a relação apresentada na Equação (2.1) for verdadeira, a treliça é abatida, caso contrário é considerada esbelta.

$$\frac{h_0}{2b_0} \leq \frac{\sqrt{2}}{2} \quad (2.1)$$

A relação geométrica entre os comprimentos das barras da treliça assimétrica é expressa por uma variável auxiliar $r = \frac{l_1}{l_2}$, conforme desenvolvimento a seguir.

$$h = \tan \gamma \cdot b_2 \quad (2.2)$$

Considerando-se a tangente do ângulo θ , tem-se:

$$h = \tan \theta \cdot b_1 \quad (2.3)$$

Igualando as Equações (2.2) e (2.3):

$$\tan \gamma = \frac{b_1 \cdot \tan \theta}{b_2} \quad (2.4)$$

Logo, o ângulo γ pode ser escrito em termos de θ :

$$\gamma = \arctan\left(\frac{b_1 \cdot \tan \theta}{b_2}\right) \quad (2.5)$$

Os comprimentos l_1 e l_2 são descritos pela equação (2.6).

$$l_1 = \frac{h}{\sin \theta} \quad (2.6)$$

$$l_2 = \frac{h}{\sin \gamma}$$

Portanto, o parâmetro r é obtido como descrito na equação (2.7).

$$r = \frac{l_1}{l_2} = \frac{h}{\sin \theta} \cdot \frac{\sin \gamma}{h} = \frac{\sin\left(\arctan\left(\frac{b_1 \cdot \tan \theta}{b_2}\right)\right)}{\sin \theta} \quad (2.7)$$

Para a descrição das deformações no problema em estudo, considera-se a elevada capacidade de deformação e não linearidade física dos materiais hiperelásticos. Assim, para grandes deformações, os tensores adotados para pequenas deformações não são capazes de representar corretamente o comportamento do material. Diante disso, adota-se a deformação logarítmica descrita na equação (2.8). (FONSECA, 2018; SOUZA, 2017).

$$\varepsilon_{ln} = \ln(\lambda) \quad (2.8)$$

A contração da seção transversal, para um coeficiente de Poisson constante é dada pela equação (2.9).

$$\varepsilon_d = \ln(\mu) = -\nu \cdot \ln(\lambda) \quad (2.9)$$

Onde, $\mu = \sqrt{\frac{A_f}{A_0}}$, A_f é área deformada da seção transversal da barra e A_0 a área indeformada.

Com o intuito de obter uma relação entre a área da seção transversal deformada e a área da seção indeformada, aplica-se a propriedade logarítmica $\text{Log}_a b = x \leftrightarrow a^x = b$ na equação (2.9):

$$e^{-\nu \cdot \ln(\lambda)} = \sqrt{\frac{A_f}{A_0}} \quad (2.10)$$

onde ν é o coeficiente de Poisson.

Da propriedade logarítmica $e^{x \ln a} = a^x$ pode-se modificar a equação (2.10) para:

$$\lambda^{-2\nu} = \frac{A_f}{A_0} \quad (2.11)$$

Adotando-se o coeficiente de Poisson $\nu = 0,5$ na equação (2.11) chega-se na relação entre as áreas deformadas e indeformadas da seção transversal da barra da treliça:

$$A_f = A_0 \lambda^{-1} \quad (2.12)$$

2.2 MODELO CONSTITUTIVO NEO-HOOKEANO

Será utilizado neste trabalho o modelo neo-Hookeano, que se trata de um caso particular da formulação de Mooney-Rivlin, uma vez que descreve o comportamento não linear do material utilizando um parâmetro do material e um invariante de deformação, conforme apresentado na equação (1.2).

O primeiro invariante é dado pela equação (2.13).

$$I_1 = \lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2 \quad (2.13)$$

O material hiperelástico é considerado incompressível, logo, tem-se a relação apresentada na equação (2.14) para os fatores de deformação principais.

$$\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 = 1 \quad (2.14)$$

Escreve-se os fatores de deformação principais λ_i em termos do fator de deformação principal axial λ , conforme descrito nas equações (2.15) e (2.16). A deformação principal axial representa a razão entre o comprimento deformado (l) e indeformado (l_0) da barra da treliça.

$$\lambda_1 = \lambda = \frac{l}{l_0} \quad (2.15)$$

$$\lambda_2 = \lambda_3$$

Substituindo as relações da equação (2.15) na equação (2.14) tem-se:

$$\lambda_2 = \lambda_3 = \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \quad (2.16)$$

A partir das relações da equação (2.16) reescreve-se o primeiro invariante conforme desenvolvimento da equação (2.17).

$$I_1 = \lambda^2 + \frac{2}{\lambda} \quad (2.17)$$

Substituindo a equação anterior na equação (1.2), chega-se na forma simplificada da função de energia de deformação específica:

$$W = C_1 \left(\lambda^2 + \frac{2}{\lambda} - 3 \right) \quad (2.18)$$

2.3 ENERGIA POTENCIAL TOTAL

A seguir desenvolve-se a expressão da energia potencial total para a treliça assimétrica, Figura 2.2.

Na configuração deformada da treliça, o fator de deformação principal axial para a barra um e barra dois é expressa respectivamente pelas equações (2.19) e (2.20).

$$\lambda_{b1} = \frac{\sqrt{(h_0 - u_y)^2 + (b_0 + u_x)^2}}{l_1} \quad (2.19)$$

$$\lambda_{b2} = \frac{\sqrt{(h_0 - u_y)^2 + (b_0 - u_x)^2}}{l_2} \quad (2.20)$$

Nas Equações (2.19) e (2.20) a projeção vertical do comprimento de barra deformada é dada pelo termo $(h_0 - u_y)$, pois uma vez que o sentido positivo do eixo vertical está orientado para baixo, para valores positivos cada vez maiores de u_y , isso resulta em uma altura cada vez menor para a treliça. O mesmo raciocínio se aplica a projeção horizontal da barra de comprimento l_2 .

2.3.1. Energia de deformação

Para montar a expressão da energia interna de deformação utiliza-se a equação (2.18) considerando a presença das duas barras da treliça na formulação:

$$W = C_1 \cdot \left(\lambda_{b1}^2 + \frac{2}{\lambda_{b1}} - 3 \right) + C_1 \cdot \left(\lambda_{b2}^2 + \frac{2}{\lambda_{b2}} - 3 \right) \quad (2.21)$$

Substituindo as equações (2.19) e (2.20) na equação (2.21):

$$\begin{aligned}
W = C_1 \cdot & \left[\frac{(h_0 - u_y)^2 + (b_0 + u_x)^2}{l_1^2} + \frac{2 \cdot l_1}{\sqrt{(h_0 - u_y)^2 + (b_0 + u_x)^2}} \right. \\
& \left. - 3 \right] + \\
& + C_1 \cdot \left[\frac{(h_0 - u_y)^2 + (b_0 - u_x)^2}{l_2^2} + \frac{2 \cdot l_2}{\sqrt{(h_0 - u_y)^2 + (b_0 - u_x)^2}} \right. \\
& \left. - 3 \right]
\end{aligned} \tag{2.22}$$

A partir da geometria da Figura 2.2 juntamente com o cosseno de θ , extrai-se a expressão (2.23) para o comprimento l_1 da barra 1:

$$l_1 = \frac{b_1 \cdot l_0}{b_0} \tag{2.23}$$

Utilizando as relações geométricas na Equação (2.7) temos para o comprimento l_2 da barra 2 da treliça:

$$l_2 = \frac{l_1}{r} = \frac{b_1 l_0}{b_0 r} \tag{2.24}$$

Substituindo as Equações (2.23) e (2.24) na equação (2.22) e expandindo os termos, obtém-se:

$$\begin{aligned}
W = C_1 \cdot & \left[\left(\frac{b_0}{b_1} \right)^2 \frac{h_0^2 - 2h_0u_y + u_y^2 + b_0^2 + 2b_0u_x + u_x^2}{l_0^2} + \right. \\
& \left. + \left(\frac{b_1}{b_0} \right) \frac{2 \cdot l_0}{\sqrt{(h_0 - u_y)^2 + (b_0 + u_x)^2}} - 3 \right] + \\
& + C_1 \cdot \left[\left(\frac{b_0 r}{b_1} \right)^2 \frac{h_0^2 - 2h_0u_y + u_y^2 + b_0^2 - 2b_0x + u_x^2}{l_0^2} + \right. \\
& \left. + \left(\frac{b_1}{b_0 r} \right) \frac{2 \cdot l_0}{\sqrt{(h_0 - u_y)^2 + (b_0 + u_x)^2}} - 3 \right]
\end{aligned} \tag{2.25}$$

Extrai-se da Figura 2.2 as relações das equações (2.26) e (2.27).

$$\cos\theta = \frac{b_0}{l_0} \quad (2.26)$$

$$\sen\theta = \frac{h_0}{l_0} \quad (2.27)$$

Substituindo as Equações (2.26) e (2.27) na Equação (2.25) e simplificando:

$$\begin{aligned} W = C_1 \cdot & \left[\left(\frac{b_0}{b_1} \right)^2 \left(\sen\theta - \frac{u_y}{l_0} \right)^2 + \left(\cos\theta + \frac{u_x}{l_0} \right)^2 + \right. \\ & \left. + \left(\frac{b_1}{b_0} \right) \frac{2 \cdot l_0}{\sqrt{(h_0 - u_y)^2 + (b_0 + u_x)^2}} - 3 \right] + \\ & + C_1 \cdot \left[\left(\frac{b_0 r}{b_1} \right)^2 \left(\sen\theta - \frac{u_y}{l_0} \right)^2 + \left(\cos\theta + \frac{u_x}{l_0} \right)^2 + \right. \\ & \left. + \left(\frac{b_1}{b_0 r} \right) \frac{2 \cdot l_0}{\sqrt{(h_0 - u_y)^2 + (b_0 + u_x)^2}} - 3 \right] \end{aligned} \quad (2.28)$$

Os graus de liberdade do modelo são os deslocamentos u_x e u_y do nó superior da treliça nas direções horizontal x e vertical y , respectivamente. Obtém-se os graus de liberdade adimensionais dividindo u_x e u_y pelas dimensões horizontal b_0 e vertical h_0 respectivamente da treliça simétrica:

$$\alpha_x = \frac{u_x}{b_0} \quad (2.29)$$

$$\alpha_y = \frac{u_y}{h_0} \quad (2.30)$$

Substituindo as Equações (2.29) e (2.30) na equação (2.28) e simplificando:

$$\begin{aligned} W = C_1 \cdot & \left[\left(\frac{b_0}{b_1} \right)^2 (\sen\theta - \alpha_y \sen\theta)^2 + (\cos\theta + \alpha_x \cos\theta)^2 + \right. \\ & \left. + \left(\frac{b_1}{b_0} \right) \frac{2}{\sqrt{(\sen\theta - \alpha_y \sen\theta)^2 + (\cos\theta + \alpha_x \cos\theta)^2}} - 3 \right] + \\ & + C_1 \cdot \left[\left(\frac{b_0 r}{b_1} \right)^2 (\sen\theta - \alpha_y \sen\theta)^2 + (\cos\theta + \alpha_x \cos\theta)^2 + \right. \end{aligned} \quad (2.31)$$

$$\left. + \left(\frac{b_1}{b_0 r} \right) \frac{2}{\sqrt{(\operatorname{sen}\theta - \alpha_y \operatorname{sen}\theta)^2 + (\operatorname{cos}\theta + \alpha_x \operatorname{cos}\theta)^2}} - 3 \right]$$

Uma vez que W é a energia de deformação específica, para obter a energia de deformação total do sistema, integra-se W ao longo do volume da treliça, conforme descrito na equação (2.32).

$$U = \int_0^{l_1} \int_0^{A_0} W \, dA \, ds + \int_0^{l_2} \int_0^{A_0} W \, dA \, ds \quad (2.32)$$

Portanto, a energia de deformação total U da treliça assimétrica é dada pela equação a seguir:

$$\begin{aligned} U = C_1 A_0 \frac{b_1 \cdot l_0}{b_0} & \left[\left(\frac{b_0}{b_1} \right)^2 (\operatorname{sen}\theta - \alpha_y \operatorname{sen}\theta)^2 + (\operatorname{cos}\theta + \alpha_x \operatorname{cos}\theta)^2 + \right. \\ & \left. + \left(\frac{b_1}{b_0} \right) \frac{2}{\sqrt{(\operatorname{sen}\theta - \alpha_y \operatorname{sen}\theta)^2 + (\operatorname{cos}\theta + \alpha_x \operatorname{cos}\theta)^2}} - 3 \right] + \\ & + C_1 A_0 \frac{b_1 l_0}{b_0 r} \left[\left(\frac{b_0 r}{b_1} \right)^2 (\operatorname{sen}\theta - \alpha_y \operatorname{sen}\theta)^2 + (\operatorname{cos}\theta - \alpha_x \operatorname{cos}\theta)^2 + \right. \\ & \left. + \left(\frac{b_1}{b_0 r} \right) \frac{2}{\sqrt{(\operatorname{sen}\theta - \alpha_y \operatorname{sen}\theta)^2 + (\operatorname{cos}\theta - \alpha_x \operatorname{cos}\theta)^2}} - 3 \right] \end{aligned} \quad (2.33)$$

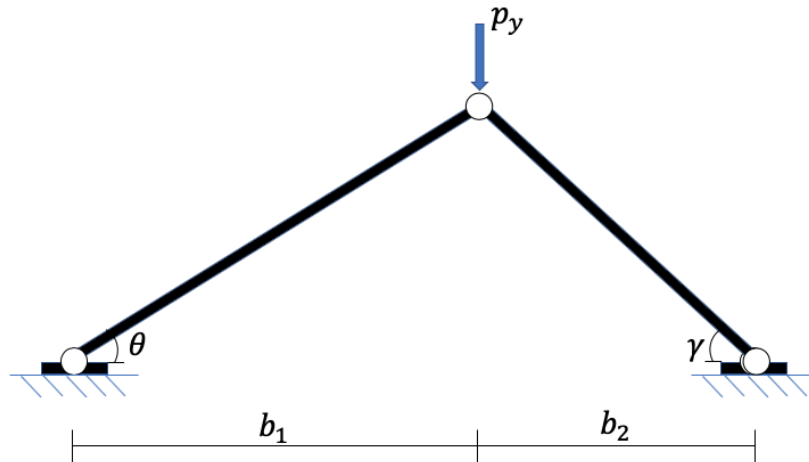
Obtém-se da equação (2.33) a expressão da energia de deformação total para a configuração simétrica da treliça, adotando-se $b_1 = b_0$ e $r = 1$, tal que:

$$\begin{aligned} U = C_1 A_0 l_0 & \left[(\operatorname{sen}\theta - \alpha_y \operatorname{sen}\theta)^2 + (\operatorname{cos}\theta + \alpha_x \operatorname{cos}\theta)^2 + \right. \\ & \left. + \frac{2}{\sqrt{(\operatorname{sen}\theta - \alpha_y \operatorname{sen}\theta)^2 + (\operatorname{cos}\theta + \alpha_x \operatorname{cos}\theta)^2}} - 3 \right] + \\ & + C_1 A_0 l_0 \left[r^2 (\operatorname{sen}\theta - \alpha_y \operatorname{sen}\theta)^2 + (\operatorname{cos}\theta - \alpha_x \operatorname{cos}\theta)^2 + \right. \\ & \left. + \frac{2}{\sqrt{(\operatorname{sen}\theta - \alpha_y \operatorname{sen}\theta)^2 + (\operatorname{cos}\theta - \alpha_x \operatorname{cos}\theta)^2}} - 3 \right] \end{aligned} \quad (2.34)$$

2.3.2. Trabalho das forças externas

A energia devido ao trabalho da carga estática vertical é calculada a partir da configuração indeformada na treliça assimétrica conforme Figura 2.3.

Figura 2.3-Carga estática vertical.



Fonte: Adaptado de FONSECA, 2018.

O deslocamento total da carga p_y é obtido subtraindo da sua posição final a posição inicial. A posição inicial é a projeção em y do comprimento de barra l_1 , como segue:

$$h_1 = \text{sen } \theta l_1 \quad (2.35)$$

A expressão para a posição final da carga é dada pela medida vertical h_0 mais um deslocamento u_y , que pode ser positivo ou negativo, conforme expressão a seguir:

$$y_{\text{final}} = h_0 + u_y \quad (2.36)$$

Logo, o trabalho da carga p_y é obtido como segue:

$$V_{p_y} = -p_y (h_0 + u_y - \text{sen } \theta l_1) \quad (2.37)$$

Substituindo as equações (2.23), (2.27) e (2.30) na equação (2.37) e simplificando a expressão resultante, obtém-se:

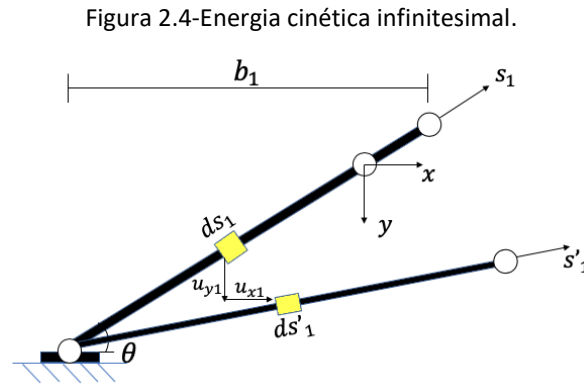
$$V_{p_y} = -p_y \text{sen } \theta l_0 \left[\alpha_y - \left(\frac{b_1}{b_0} - 1 \right) \right] \quad (2.38)$$

Obtém-se da equação (2.38) a expressão para o trabalho da carga externa para a configuração simétrica da treliça, adotando-se $b_1 = b_0$.

A energia potencial total é obtida pela soma da energia de deformação com o trabalho das forças externas.

2.4 ENERGIA CINÉTICA

Calcula-se a energia cinética para o sistema da treliça assimétrica, a partir do arranjo apresentado na Figura 2.4, onde considera-se um comprimento infinitesimal ds_1 na barra l_1 com massa por unidade de comprimento $dm_1 = \rho A_0 ds_1$, que se desloca nas direções x e y por uma quantidade u_{x1} e u_{y1} , respectivamente. As grandezas s_1 e s'_1 são as direções axiais da barra, indeformada e deformada, respectivamente. O mesmo raciocínio é aplicado para a barra de comprimento l_2 .



Fonte: Adaptado de FONSECA, 2018.

A energia cinética do comprimento infinitesimal é descrita na equação (2.39).

$$dT = \frac{dm_i}{2} (\dot{u}_{xi}^2 + \dot{u}_{yi}^2) \quad (2.39)$$

Onde, ($\dot{}$) se refere à derivada ordinária de primeira ordem em relação ao tempo.

Uma vez que o material neo-Hookeano é incompressível, a massa deformada ou indeformada serão as mesmas:

$$dm_i = \rho A_0 ds_i = \rho A_0 ds'_i = \rho \frac{A_0}{\lambda_i} \lambda_i ds_i \quad (2.40)$$

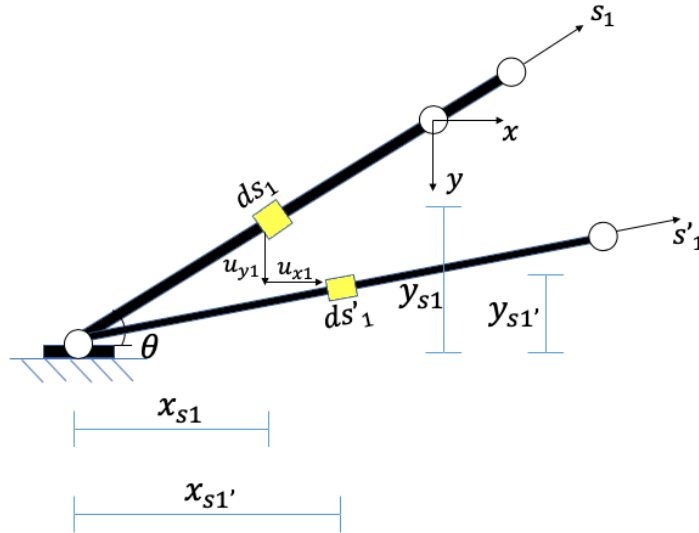
Os deslocamentos u_{x1} e u_{y1} referentes à barra de comprimento l_1 são obtidos pelas equações (2.41) e (2.42).

$$u_{x1} = x_{s1'} - x_{s1} \quad (2.41)$$

$$u_{y1} = y_{s1} - y_{s1'} \quad (2.42)$$

Utilizando semelhança de triângulos com o auxílio da Figura 2.5, obtém-se as equações (2.43) e (2.44) para u_{x1} e u_{y1} , respectivamente.

Figura 2.5-Deslocamentos u_{x1} e u_{y1} .



Fonte: Adaptado de (Fonseca, 2018).

$$u_{x1} = s_1 \left[\frac{\lambda_{b1} \left(b_1 + u_x \frac{b_1}{b_0} \right)}{\lambda_{b1} l_1} - \frac{b_1}{l_1} \right] \quad (2.43)$$

$$u_{y1} = s_1 \left[h_0 \frac{b_1}{l_1 b_0} - \frac{\lambda_{b1} \left(h_0 \frac{b_1}{b_0} - u_y \frac{b_1}{b_0} \right)}{\lambda_{b1} l_1} \right] \quad (2.44)$$

Os deslocamentos u_{x2} e u_{y2} referentes à barra de comprimento l_2 são obtidos com o mesmo procedimento citado anteriormente, e apresentam as seguintes expressões:

$$u_{x2} = s_2 \left[\frac{b_2}{l_2} - \frac{\lambda_{b2} \left(b_2 - u_x \frac{b_1}{b_0} \right)}{\lambda_{b2} l_2} \right] \quad (2.45)$$

$$u_{y2} = s_2 \left[h_0 \frac{b_1}{l_2 b_0} - \frac{\lambda_{b2} \left(h_0 \frac{b_1}{b_0} - u_y \frac{b_1}{b_0} \right)}{\lambda_{b2} l_2} \right] \quad (2.46)$$

Substituindo as equações (2.23) e (2.24) nas expressões obtidas para os deslocamentos u_{xi} e u_{yi} e simplificando as expressões obtidas, deriva-se estes em relação ao tempo, obtendo-se as velocidades \dot{u}_{xi} e \dot{u}_{yi} a seguir:

$$\dot{u}_{x1} = s_1 \left(\frac{\dot{u}_x}{l_0} \right) \quad (2.47)$$

$$\dot{u}_{y1} = s_1 \left(\frac{\dot{u}_y}{l_0} \right) \quad (2.48)$$

$$\dot{u}_{x2} = s_2 \left(\frac{\dot{u}_x r}{l_0} \right) \quad (2.49)$$

$$\dot{u}_{y2} = s_2 \left(\frac{\dot{u}_y r}{l_0} \right) \quad (2.50)$$

Substituindo as expressões anteriores, (2.47) - (2.50) e a equação (2.40) na expressão infinitesimal da energia cinética, equação (2.39), obtém-se:

$$dT = \frac{\rho A_0 ds_1 s_1^2}{2 l_0^2} (\dot{u}_x^2 + \dot{u}_y^2) + \frac{\rho A_0 ds_2 s_2^2}{2 l_0^2} (\dot{u}_x^2 r^2 + \dot{u}_y^2 r^2) \quad (2.51)$$

Integrando ao longo do comprimento:

$$T = \frac{\rho A_0}{2 l_0^2} \int_0^{l_1} s_1^2 ds_1 (\dot{u}_x^2 + \dot{u}_y^2) + \frac{\rho A_0 r^2}{2 l_0^2} \int_0^{l_2} s_2^2 ds_2 (\dot{u}_x^2 + \dot{u}_y^2) \quad (2.52)$$

Substituindo as equações (2.23), (2.24), (2.26) e (2.27) no resultado da integração da equação (2.51), obtém-se a expressão para a energia cinética da treliça assimétrica a seguir:

$$T = \frac{m l_0^2}{6} \left(\frac{b_1}{b_0} \right)^3 (\dot{\alpha}_x^2 \cos^2 \theta + \dot{\alpha}_y^2 \sin^2 \theta) + \frac{m l_0^2}{6r} \left(\frac{b_1}{b_0} \right)^3 (\dot{\alpha}_x^2 \cos^2 \theta + \dot{\alpha}_y^2 \sin^2 \theta) \quad (2.53)$$

Onde m é a massa da treliça.

Na equação (2.53), igualando-se $b_1 = b_0$ e $r = 1$, obtém-se a expressão equivalente para a configuração assimétrica.

2.5 ANÁLISE ESTÁTICA

Realiza-se a análise da estabilidade estática da treliça simétrica hiperelástica, Figura 2.1, submetida a carga vertical aplicada no nó superior.

Calculam-se as cargas verticais e as cargas axiais na barra, ao longo dos seus respectivos caminhos de equilíbrio, bem como a carga de flambagem das barras, com o intuito de se obter certa sensibilidade acerca das deformações e tensões do sistema estrutural.

A carga crítica para uma coluna hiperelástica neo-Hookeana, submetida a uma carga axial de compressão, é descrita pela equação (2.54). (ATTARD, 2008).

$$P_{cr} = \frac{n^2 P_{euler}}{1 - \frac{1}{4} \frac{n^2 P_{euler}}{EA} \left(1 - \frac{r_y^2}{r_z^2}\right)} \quad (2.54)$$

Onde, n – modo de flambagem; P_{euler} – carga crítica de Euler; r_y – raio de giração relativo à flexão em y ; r_z – raio de giração relativo à flexão em z .

Calcula-se a carga de flambagem da barra da treliça utilizando a equação (2.54). Para obter as cargas verticais ao longo do caminho de equilíbrio monta-se a energia potencial para o sistema da treliça simétrica hiperelástica, submetida à uma carga vertical, conforme descrito na equação (2.55).

$$\begin{aligned} \Pi = & C_1 A_0 l_0 \left[(\sin\theta - \alpha_y \sin\theta)^2 + (\cos\theta + \alpha_x \cos\theta)^2 + \right. \\ & \left. + \frac{2}{\sqrt{(\sin\theta - \alpha_y \sin\theta)^2 + (\cos\theta + \alpha_x \cos\theta)^2}} - 3 \right] + \\ & + C_1 A_0 l_0 \left[(\sin\theta - \alpha_y \sin\theta)^2 + (\cos\theta - \alpha_x \cos\theta)^2 + \right. \\ & \left. + \frac{2}{\sqrt{(\sin\theta - \alpha_y \sin\theta)^2 + (\cos\theta - \alpha_x \cos\theta)^2}} - 3 \right] \\ & - p_y l_0 \sin\theta \alpha_y \end{aligned} \quad (2.55)$$

Derivando a equação (2.55) em relação aos graus de liberdade α_x e α_y , obtém-se as equações de equilíbrio a seguir:

$$\begin{aligned} C_1 A_0 l_0 \left[2\cos\theta(\cos\theta + \alpha_x \cos\theta) - \right. \\ \left. - \frac{2\cos\theta(\cos\theta + \alpha_x \cos\theta)}{\left((\sin\theta - \alpha_y \sin\theta)^2 + (\cos\theta + \alpha_x \cos\theta)^2\right)^{3/2}} \right] + \\ + C_1 A_0 l_0 \left[-2\cos\theta(\cos\theta - \alpha_x \cos\theta) - \right. \\ \left. - \frac{2\cos\theta(\cos\theta - \alpha_x \cos\theta)}{\left((\sin\theta - \alpha_y \sin\theta)^2 + (\cos\theta - \alpha_x \cos\theta)^2\right)^{3/2}} \right] = 0 \end{aligned} \quad (2.56)$$

$$C_1 A_0 l_0 \left[-2\sin\theta(\sin\theta - \alpha_y \sin\theta) + \right. \quad (2.57)$$

$$\begin{aligned}
& \left. + \frac{2\text{sen}\theta(\text{sen}\theta - \alpha_y \text{sen}\theta)}{\left((\text{sen}\theta - \alpha_y \text{sen}\theta)^2 + (\text{cos}\theta + \alpha_x \text{cos}\theta)^2\right)^{3/2}} \right] + \\
& + C_1 A_0 l_0 \left[-2\text{sen}\theta(\text{sen}\theta - \alpha_y \text{sen}\theta) + \right. \\
& \left. + \frac{2\text{sen}\theta(\text{sen}\theta - \alpha_y \text{sen}\theta)}{\left((\text{sen}\theta - \alpha_y \text{sen}\theta)^2 + (\text{cos}\theta - \alpha_x \text{cos}\theta)^2\right)^{3/2}} \right] - p_y l_0 \text{sen}\theta = 0
\end{aligned}$$

Resolvem-se as equações de equilíbrio obtidas, equações (2.56) e (2.57), utilizando o método numérico de Newton-Raphson.

As cargas axiais nas barras da treliça ao longo do caminho de equilíbrio são obtidas a partir das tensões atuantes na seção transversal da barra. Utiliza-se a tensão de Cauchy que pode ser descrita pela variação infinitesimal da energia específica de deformação conforme equação (2.58).

$$dW = \sigma d\varepsilon_{ln} \quad (2.58)$$

Isolando a tensão σ na equação anterior:

$$\sigma = \frac{dW}{d\varepsilon_{ln}} = \frac{dW}{d\lambda} \frac{d\lambda}{d\varepsilon_{ln}} \quad (2.59)$$

Utilizando as equações (2.7) e (2.17) têm-se:

$$\frac{dW}{d\lambda} = C_1 \cdot \left(2 \cdot \lambda - \frac{2}{\lambda^2} \right) \quad (2.60)$$

$$\frac{d\lambda}{d\varepsilon_{ln}} = e^{\varepsilon_{ln}} \quad (2.61)$$

Desta forma obtém-se a expressão para a tensão de Cauchy:

$$\sigma = 2 \cdot C_1 \cdot \left(\lambda^2 - \frac{1}{\lambda} \right) \quad (2.62)$$

Utilizando a definição do fator de deformação principal axial dado pela equação (2.15) e considerando a geometria da treliça, pode-se reescrever a expressão para a tensão de Cauchy, de acordo com a equação a seguir.

$$\sigma = 2C_1 \left(\sqrt{(\text{sen}\theta - \alpha_y \text{sen}\theta)^2 + \text{cos}\theta^2} - \frac{1}{\left(\text{sen}\theta - \alpha_y \text{sen}\theta\right)^2 + \text{cos}\theta^2} \right) \quad (2.63)$$

A carga axial na barra da treliça é obtida multiplicando a tensão de Cauchy, equação (2.62), pela expressão da área da seção transversal:

$$F = 2 \cdot C_1 \cdot A_0 \quad (2.64)$$

Desenvolve-se a equação (2.64) considerando a relação para o fator de deformação descrito na equação (2.8) e aplicando o raciocínio desenvolvido para a obtenção da expressão da energia de deformação apresentada na equação (2.33):

$$F = 2 \cdot C_1 \cdot A_0 \cdot \left(\sqrt{(\sin \theta - \alpha_y \sin \theta)^2 + \cos^2 \theta} - \frac{1}{(\sin \theta - \alpha_y \sin \theta)^2 + \cos^2 \theta} \right) \quad (2.65)$$

A análise da estabilidade das configurações de equilíbrio obtidas é feita utilizando a forma quadrática da expressão da energia potencial total, que é dada pela segunda variação de um incremento da função, conforme descrito na equação (2.66).

$$\delta^2 \Delta \Pi \cong \left. \frac{\partial^2 \Delta \Pi}{\partial \alpha_x^2} \right|_{\alpha_i} \Delta \alpha_x^2 + 2 \left. \frac{\partial^2 \Delta \Pi}{\partial \alpha_x \partial \alpha_y} \right|_{\alpha_i} \Delta \alpha_x \Delta \alpha_y + \left. \frac{\partial^2 \Delta \Pi}{\partial \alpha_y^2} \right|_{\alpha_i} \Delta \alpha_y^2 + \dots \quad (2.66)$$

Escreve-se a expressão resultante da aplicação da equação (2.66), em forma matricial, onde obtém-se uma matriz chamada de matriz dos coeficientes quadráticos (Q). Se os autovalores da matriz Q forem todos positivos, o equilíbrio é classificado como estável. Se pelo menos um autovalor for negativo, então o equilíbrio é instável.

2.6 ANÁLISE DINÂMICA

Para análise dinâmica são obtidas as equações de movimento para as treliças simétrica e assimétrica conforme apresentado a seguir.

2.6.1. Equações de movimento

O Lagrangiano da treliça assimétrica descarregada (L) é dado pela energia cinética (T) menos a energia potencial total (Π) e descrito pela equação (2.67).

$$L = \frac{ml_0^2}{6} \left(\frac{b_1}{b_0} \right)^3 (\dot{\alpha}_x^2 \cos^2 \theta + \dot{\alpha}_y^2 \sin^2 \theta) + \frac{ml_0^2}{6r} \left(\frac{b_1}{b_0} \right)^3 (\dot{\alpha}_x^2 \cos^2 \theta + \dot{\alpha}_y^2 \sin^2 \theta) - \quad (2.67)$$

$$\begin{aligned}
& -C_1 A_0 \frac{b_1 \cdot l_0}{b_0} \left[\left(\frac{b_0}{b_1} \right)^2 (\text{sen}\theta - \alpha_y \text{sen}\theta)^2 + (\text{cos}\theta + \alpha_x \text{cos}\theta)^2 + \right. \\
& \quad \left. + \left(\frac{b_1}{b_0} \right) \frac{2}{\sqrt{(\text{sen}\theta - \alpha_y \text{sen}\theta)^2 + (\text{cos}\theta + \alpha_x \text{cos}\theta)^2}} - 3 \right] - \\
& -C_1 A_0 \frac{b_1 l_0}{b_0 r} \left[\left(\frac{b_0 r}{b_1} \right)^2 (\text{sen}\theta - \alpha_y \text{sen}\theta)^2 + (\text{cos}\theta - \alpha_x \text{cos}\theta)^2 + \right. \\
& \quad \left. + \left(\frac{b_1}{b_0 r} \right) \frac{2}{\sqrt{(\text{sen}\theta - \alpha_y \text{sen}\theta)^2 + (\text{cos}\theta - \alpha_x \text{cos}\theta)^2}} - 3 \right]
\end{aligned}$$

Aplica-se a equação de Euler-Lagrange ao funcional da equação (2.67) para cada grau de liberdade α_i , conforme descrito nas equações (2.68) e (2.69).

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\alpha}_x} \right) - \frac{\partial L}{\partial \alpha_x} = 0 \quad (2.68)$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\alpha}_y} \right) - \frac{\partial L}{\partial \alpha_y} = 0 \quad (2.69)$$

Aplicando a variação no Lagrangiano e substituindo o parâmetro $w = \sqrt{\frac{C_1 A_0}{m l_0}}$ obtém-se as equações não lineares de movimento:

$$\begin{aligned}
& \ddot{\alpha}_x + 3w^2 \left(\frac{r}{r+1} \right) \left[2 \left(\frac{b_0}{b_1} \right)^4 (1 + \alpha_x) - 2r \left(\frac{b_0}{b_1} \right)^4 (1 - \alpha_x) - \right. \\
& \quad - \left(\frac{b_0}{b_1} \right) \frac{2(1 + \alpha_x)}{\left((\text{sen}\theta - \alpha_y \text{sen}\theta)^2 + (\text{cos}\theta + \alpha_x \text{cos}\theta)^2 \right)^{\frac{3}{2}}} + \\
& \quad \left. + \left(\frac{b_0}{b_1 r^2} \right) \frac{2(1 - \alpha_x)}{\left((\text{sen}\theta - \alpha_y \text{sen}\theta)^2 + (\text{cos}\theta - \alpha_x \text{cos}\theta)^2 \right)^{\frac{3}{2}}} \right] = 0
\end{aligned} \quad (2.70)$$

$$\begin{aligned}
& \ddot{\alpha}_y + 3w^2 \left(\frac{r}{r+1} \right) \left[-2 \left(\frac{b_0}{b_1} \right)^4 (1 - \alpha_y) - 2r \left(\frac{b_0}{b_1} \right)^4 (1 + \alpha_y) - \right. \\
& \quad - \left(\frac{b_0}{b_1} \right) \frac{2(1 - \alpha_y)}{\left((\text{sen}\theta - \alpha_y \text{sen}\theta)^2 + (\text{cos}\theta + \alpha_x \text{cos}\theta)^2 \right)^{\frac{3}{2}}} + \\
& \quad \left. + \left(\frac{b_0}{b_1 r^2} \right) \frac{2(1 + \alpha_y)}{\left((\text{sen}\theta - \alpha_y \text{sen}\theta)^2 + (\text{cos}\theta - \alpha_x \text{cos}\theta)^2 \right)^{\frac{3}{2}}} \right] = 0
\end{aligned} \quad (2.71)$$

$$+ \left(\frac{b_0}{b_1 r^2} \right) \frac{2(1 - \alpha_y)}{\left((\sin\theta - \alpha_y \sin\theta)^2 + (\cos\theta - \alpha_x \cos\theta)^2 \right)^{\frac{3}{2}}} = 0$$

Onde, $(\ddot{}) = \frac{d^2()}{dt^2}$

Na treliça assimétrica, para que a origem das coordenadas generalizadas coincida com os deslocamentos do nó superior, adotam-se as relações a seguir:

$$\alpha_x(t) = \alpha_{xd}(t) + \alpha_{xe} \quad (2.72)$$

$$\alpha_y(t) = \alpha_{yd}(t) + \alpha_{ye} \quad (2.73)$$

Onde o subscrito d indica dinâmico, referindo-se aos deslocamentos da parcela dinâmica, e o subscrito e indica estático, referindo-se à posição de equilíbrio estático inicial do nó da treliça imperfeita. Na análise estática tem-se $\alpha_i = \alpha_{ie}$.

2.6.2. Frequências Naturais - Treliça assimétrica

Para obtenção das frequências naturais de vibração da treliça assimétrica, lineariza-se os termos não lineares das equações de movimento, (2.70) e (2.71), utilizando expansão em série de Taylor. Desta forma obtém-se as equações de movimento linearizadas (2.74) e (2.75).

$$\alpha_{\ddot{x}d} + ap_{11}\alpha_{xd} + ap_{12}\alpha_{yd} = 0 \quad (2.74)$$

$$\alpha_{\ddot{y}d} + ap_{21}\alpha_{xd} + ap_{22}\alpha_{yd} = 0 \quad (2.75)$$

Onde as variáveis de apoio ap_{ij} possuem as expressões descritas a seguir:

$$ap_{11} = \frac{6w^2 b_0}{b_1^4 r(r+1)} \left\{ \frac{r^2 aux_1 [b_0^3 (r+1) aux_2 + b_1^3 aux_4] + b_1^3 aux_2 aux_3}{aux_1 aux_2} \right\} \quad (2.76)$$

$$ap_{12} = \frac{18w^2 b_0 \sin^2 \theta}{b_1 r(r+1)} (\alpha_{ye} - 1) \left[\frac{r^2 (\alpha_{xe} + 1) aux_1 + (\alpha_{xe} - 1) aux_2}{aux_1 aux_2} \right] \quad (2.77)$$

$$ap_{21} = \frac{18w^2 b_0 \cos^2 \theta}{b_1 r(r+1)} (\alpha_{ye} - 1) \left[\frac{r^2 (\alpha_{xe} + 1) aux_1 + (\alpha_{xe} - 1) aux_2}{aux_1 aux_2} \right] \quad (2.78)$$

$$ap_{22} = \frac{6w^2 b_0}{b_1^4 r(r+1)} \left\{ \frac{r^2 aux_1 [b_0^3 (r+1) aux_2 - b_1^3 aux_6] - b_1^3 aux_2 aux_5}{aux_1 aux_2} \right\} \quad (2.79)$$

e as variáveis auxiliares aux_i :

$$aux_1 = [(\alpha_{xe}^2 - \alpha_{ye}^2 - 2\alpha_{xe} + 2\alpha_{ye}) \cos^2 \theta + (\alpha_{ye} - 1)^2]^{5/2} \quad (2.80)$$

$$aux_2 = [(\alpha_{xe}^2 - \alpha_{ye}^2 + 2\alpha_{xe} + 2\alpha_{ye}) \cos^2 \theta + (\alpha_{ye} - 1)^2]^{5/2} \quad (2.81)$$

$$aux_3 = (2\alpha_{xe}^2 + \alpha_{ye}^2 - 4\alpha_{xe} - 2\alpha_{ye} + 3) \cos^2 \theta - (\alpha_{ye} - 1)^2 \quad (2.82)$$

$$aux_4 = (2\alpha_{xe}^2 + \alpha_{ye}^2 + 4\alpha_{xe} - 2\alpha_{ye} + 3) \cos^2 \theta - (\alpha_{ye} - 1)^2 \quad (2.83)$$

$$aux_5 = (\alpha_{xe}^2 + 2\alpha_{ye}^2 - 2\alpha_{xe} - 4\alpha_{ye} + 3) \cos^2 \theta - 2(\alpha_{ye} - 1)^2 \quad (2.84)$$

$$aux_6 = (\alpha_{xe}^2 + 2\alpha_{ye}^2 + 2\alpha_{xe} - 4\alpha_{ye} + 3) \cos^2 \theta - 2(\alpha_{ye} - 1)^2 \quad (2.85)$$

Escrevendo o sistema formado pelas equações (2.74) e (2.75) na forma matricial, conforme desenvolvimento para obtenção de frequências naturais em Soriano (2014), obtém-se:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{\alpha}_{xd} \\ \ddot{\alpha}_{yd} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} ap_{11} & ap_{12} \\ ap_{21} & ap_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \alpha_{xd} \\ \alpha_{yd} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (2.86)$$

onde, $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ é a matriz de massa \mathbf{M} do sistema; $\begin{bmatrix} ap_{11} & ap_{12} \\ ap_{21} & ap_{22} \end{bmatrix}$ é a matriz de rigidez \mathbf{K} do sistema.

Utiliza-se como aproximação para os graus de liberdade α_{id} as expressões descritas nas equações (2.87) e (2.88). Essa solução é um vetor de amplitudes de deslocamentos multiplicado por uma função no tempo, que expressa oscilações harmônicas. (SORIANO, 2014).

$$\alpha_{xd}(t) = A \cos(\Omega t) \quad (2.87)$$

$$\alpha_{yd}(t) = B \cos(\Omega t) \quad (2.88)$$

Escrevendo as equações anteriores em forma matricial:

$$\alpha_d = \begin{Bmatrix} A \\ B \end{Bmatrix} \cos(\Omega t) \quad (2.89)$$

Derivando a equação (2.89) duas vezes em relação ao tempo:

$$\ddot{\alpha}_d = - \begin{Bmatrix} A \\ B \end{Bmatrix} \Omega^2 \cos(\Omega t) \quad (2.90)$$

Substituindo as equações (2.89) e (2.90) no sistema descrito na equação (2.86) e rearranjando, obtém-se:

$$(\mathbf{K} - \mathbf{M}\Omega^2) \begin{Bmatrix} A \\ B \end{Bmatrix} \cos(\Omega t) = \mathbf{0} \quad (2.91)$$

A equação anterior só é satisfeita para qualquer valor de t , se a igualdade da equação (2.92) for satisfeita, caracterizando um problema de autovalor e autovetor.

$$(\mathbf{K} - \mathbf{M}\Omega^2) = \mathbf{0} \quad (2.92)$$

A matriz resultante da operação matricial descrita na equação anterior é descrita pela equação (2.93).

$$\begin{bmatrix} ap_{11} - \Omega^2 & ap_{12} \\ ap_{21} & ap_{22} - \Omega^2 \end{bmatrix} \quad (2.93)$$

Calculando o determinante da matriz descrita na equação (2.93) obtém-se uma equação que é resolvida para Ω^2 , desta forma chega-se nas frequências naturais descritas nas equações a seguir:

$$\Omega_1^2 = \frac{ap_{22} + ap_{11}}{2} - \frac{1}{2} \sqrt{ap_{11}^2 - 2ap_{11}ap_{22} + 4ap_{12}ap_{21} + ap_{22}^2} \quad (2.94)$$

$$\Omega_2^2 = \frac{ap_{22} + ap_{11}}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{ap_{11}^2 - 2ap_{11}ap_{22} + 4ap_{12}ap_{21} + ap_{22}^2} \quad (2.95)$$

Substitui-se cada uma das soluções anteriores, equações (2.94) e (2.95), no sistema da equação (2.92) e resolve-se o sistema de equações algébricas homogêneas resultante, obtendo-se os autovetores que representam os modos naturais de vibração:

$$modo1 = \begin{Bmatrix} 1 \\ \frac{\Omega_1^2 - ap_{11}}{ap_{12}} \end{Bmatrix} \quad (2.96)$$

$$modo2 = \begin{Bmatrix} 1 \\ \frac{\Omega_2^2 - ap_{11}}{ap_{12}} \end{Bmatrix} \quad (2.97)$$

2.6.3. Frequências Naturais - Treliça simétrica

Para obtenção das frequências naturais de vibração da treliça simétrica, substitui-se $b_1 = b_0$ e $r = 1$ nas equações não lineares de movimento (2.70) e (2.71). E lineariza-se os termos não lineares utilizando expansão em série de Taylor. Desta forma obtém-se as equações de movimento linearizadas (2.98) e (2.99).

$$\alpha_{xd}'' + 6w^2 \alpha_{xd} - 6w^2 \sin^2 \theta \alpha_{xd} + 12w^2 \cos^2 \theta \alpha_{xd} \quad (2.98)$$

$$\alpha_{yd}'' + 6w^2 \alpha_{yd} + 12w^2 \sin^2 \theta \alpha_{yd} - 6w^2 \cos^2 \theta \alpha_{yd} \quad (2.99)$$

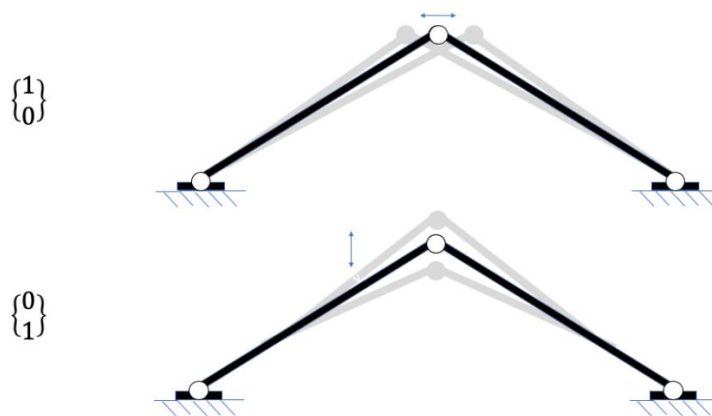
Utiliza-se como aproximação para os graus de liberdade α_{id} as expressões descritas nas equações (2.87) e (2.88). As frequências de vibração nas direções x e y são descritas pelas equações (2.100) e (2.101), pois não há acoplamento entre as direções x e y dos seus modos de vibração.

$$\Omega_x = 3\sqrt{2}w \cos \theta \quad (2.100)$$

$$\Omega_y = 3\sqrt{2}w \sin \theta \quad (2.101)$$

Na Figura 2.6 estão ilustrados os modos de vibração da treliça simétrica.

Figura 2.6-modos de vibração treliça simétrica.



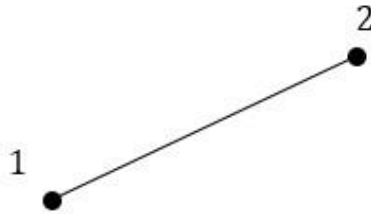
Fonte: Adaptado de Fonseca, 2018.

2.7 ANÁLISE VIA MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS

Com o objetivo de considerar a presença da energia de flexão no estudo do comportamento das treliças ilustradas nas Figuras 2.1 e 2.2, submetidas a uma carga vertical aplicada em seu nó superior, utilizou-se o Método dos Elementos Finitos (MEF), através do programa comercial de elementos finitos ABAQUS®.

Utilizou-se neste estudo um elemento finito de treliça e um elemento finito de viga, ambos formados por dois nós, conforme apresentado na Figura 2.7. O elemento de treliça é considerado no estudo para calibrar alguns dos resultados obtidos via MEF, com aqueles obtidos no processamento analítico.

Figura 2.7-Elementos unidimensionais.



Fonte: Adaptado pelo autor de ABAQUS Manual.

O elemento de treliça utilizado é representado no ABAQUS pelas siglas T2D2 e apresenta dois graus de liberdade por nó: deslocamentos horizontal e vertical no plano. Além disso, este elemento admite apenas esforços axiais à barra. Para considerar a influência da energia de flexão nos resultados usou-se o elemento de viga representado pelas siglas B21, que apresenta três graus de liberdade por nó: deslocamentos horizontal e vertical e rotação, todos no plano. O elemento de viga admite esforços axiais, cortante e de momento fletor.

Para ambos os elementos finitos considerados no estudo, o ABAQUS® calcula os graus de liberdade nos nós do elemento, e em qualquer outro ponto do elemento os graus de liberdade são calculados por interpolação, a ordem da interpolação é determinada pelo número de nós usados no elemento.

Nas análises estáticas e dinâmicas empregando os elementos finitos de treliça e de viga, o ABAQUS® utiliza a formulação Lagrangiana, onde se considera que o elemento finito se deforma junto com material. Além disso, o software avalia a resposta do material em cada ponto de integração utilizando a quadratura Gaussiana.

CAPÍTULO 3

RESULTADOS NUMÉRICOS

Neste capítulo apresentam-se os resultados obtidos para a treliça simétrica e assimétrica com duas barras compostas de material hiperelástico neo-Hookeano. Para isso considera-se os parâmetros geométricos utilizados por Fonseca (2018), onde para a treliça simétrica adota-se comprimento de barra $l_0 = 1\text{ m}$ e base com dimensão $b_0 = 0.966\text{ m}$. E para a treliça assimétrica adota-se para as barras os comprimentos $l_1 = 1.05\text{ m}$ e $l_2 = 0.957\text{ m}$, relação entre os comprimentos igual a $r = 1.097$, e base da treliça com dimensão $b_1 = 1.014\text{ m}$. Para ambas as configurações da treliça adota-se área da seção transversal da barra indeformada igual a $A_0 = 2.89 \times 10^{-2}\text{ m}^2$, ângulo $\theta = 15^\circ$ e parâmetro $w = 8.79$. Considera-se para as treliças analisadas os parâmetros físicos utilizados por Selvadurai (2006), onde o parâmetro do material assume $C_1 = 0,17\text{ MPa}$ e $\rho = 2200\frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$ para a massa específica.

3.1 ANÁLISE ESTÁTICA

Na análise estática estuda-se a carga crítica, caminhos de equilíbrio e tensões principais para a treliça simétrica submetida à uma carga externa vertical aplicada em seu nó superior.

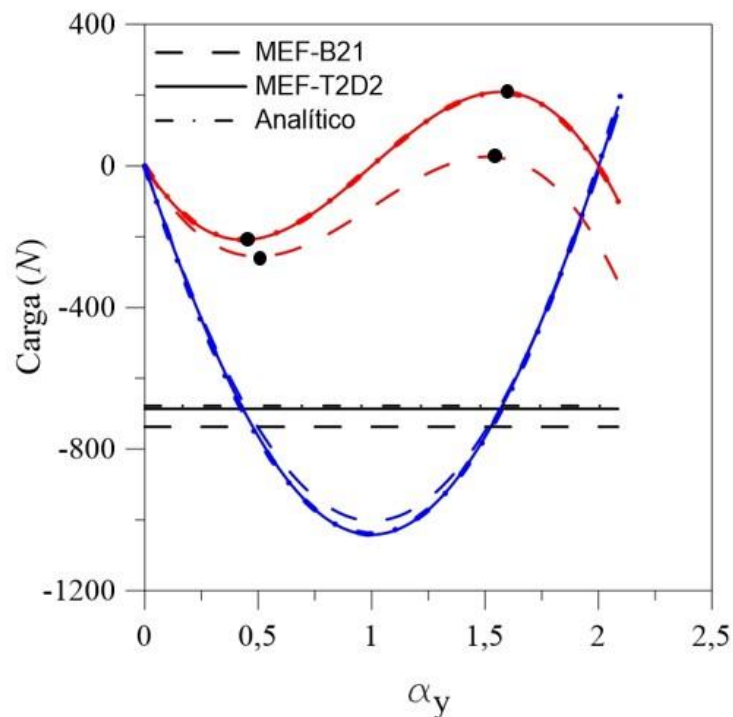
3.1.1. Carga Crítica e Caminhos de Equilíbrio

Na análise estática realizada no processamento analítico, inicialmente é obtido o valor de carga crítica (P_{cr}) de Euler descrita na Eq. (2.54) para a treliça simétrica considerando os parâmetros físicos e geométricos descritos anteriormente. Posteriormente são obtidos os caminhos não lineares de equilíbrio relativos à carga vertical aplicada (p_y) e ao esforço axial (N) na barra conforme descrito no item 2.5.

Já na análise estática utilizando o MEF, inicialmente utilizou-se o elemento finito T2D2 para calibrar os resultados obtidos para os caminhos não lineares de equilíbrio, com aqueles obtidos via processamento analítico. Na sequência empregou-se o elemento finito B21 para verificar a influência da energia de flexão nos resultados.

Na Figura 3.1 apresentam-se os caminhos não lineares de equilíbrio e carga crítica da barra da treliça, obtidos no processamento analítico e via MEF. Em vermelho apresentam-se os caminhos de equilíbrio da carga vertical aplicada, em azul os caminhos de equilíbrio do esforço axial nas barras e em preto a carga crítica da barra. Os pontos em preto indicam os pontos de inflexão das curvas em vermelho, referindo-se à posição dos pontos limites. Para cada curva, em vermelho, entre os pontos limites tem-se um equilíbrio do tipo instável. Para as demais regiões das curvas em vermelho o equilíbrio é estável.

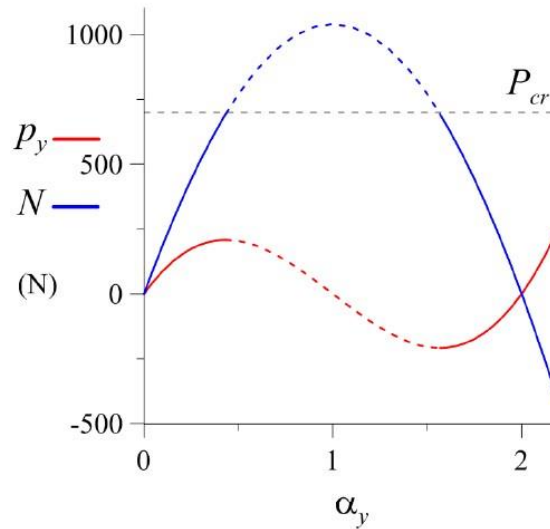
Figura 3.1-Caminho de equilíbrio e Carga crítica.



Fonte: Autor.

Os caminhos de equilíbrio e carga crítica obtidos pelo processamento analítico e apresentados na Figura 3.1 são semelhantes aos obtidos por Fonseca (2018), ver Figura 3.2. Na Figura a seguir as curvas estão invertidas em relação às curvas observadas na Figura 3.1, pois o autor considerou forças de compressão com sinal positivo.

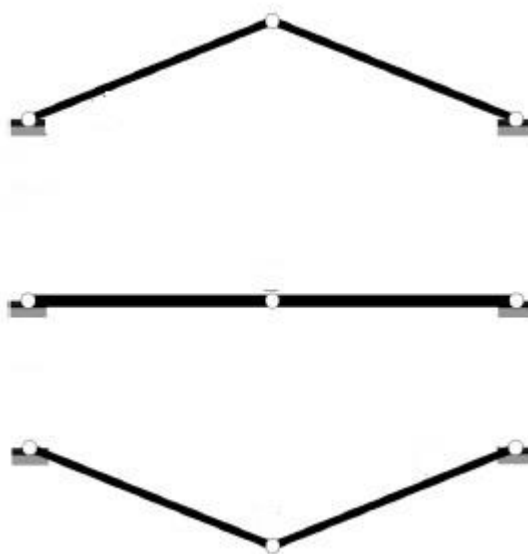
Figura 3.2-Caminho de equilíbrio via estudo analítico.



Fonte: Fonseca (2018)

Observa-se das curvas em vermelho da Figura 3.1, que ao atingir o ponto limite a treliça inverte sua posição repentinamente saltando para um segundo trecho estável, caracterizando o fenômeno de *snap through*, conforme ilustrado na Figura 3.3. O comportamento da curva em azul mostra que as barras da treliça são comprimidas por uma intensidade de força cada vez crescente até a estrutura atingir o ponto limite.

Figura 3.3-Salto dinâmico.



Fonte: Adaptado de Fonseca (2018).

A partir da Figura 3.1 apresenta-se o Quadro 3.1 onde se compara o valor da carga limite do sistema (p_{ylim}) e carga crítica da barra (N_{cr}), obtidos em cada análise. O p_{ylim} é a carga observada no ponto limite, sendo a geradora da carga crítica na barra da treliça.

Quadro 3.1-Cargas limites e cargas críticas.

Cargas	Analítico	MEF-T2D2	MEF-B21
P_{ylim}	208.235 N	208.792 N	255.617N
N_{cr}	677.992 N	686.361 N	737.042 N

Fonte: Autor.

Observa-se dos resultados apresentados no Quadro 3.1 para o p_{ylim} e N_{cr} , que há uma precisão entre os resultados obtidos via MEF para o elemento de treliça (T2D2) com os valores obtidos no processamento analítico. Observando-se uma diferença de apenas 0,3% para os valores de p_{ylim} e de 1,2% para os valores do N_{cr} . No que se refere aos resultados obtidos utilizando o elemento de viga (B21), nota-se uma diferença maior (22%) para os valores de p_{ylim} em relação ao obtido para o elemento T2D2, e de 7% para os valores do N_{cr} . Observa-se também que a consideração dos esforços de flexão aumenta o valor de carga limite e o valor de carga crítica da barra, sendo que a influência nos esforços críticos é menor.

No Quadro 3.2 compara-se os valores de carga limite do sistema, apresentados no Quadro 3.1, com os valores de carga crítica do sistema obtidos por análise linear. Os valores de carga crítica provenientes da análise linear são obtidos a partir da solução de um problema de autovalor, utilizando o comando *Buckle* do *software* Abaqus.

Quadro 3.2-Carga não linear versus carga linear.

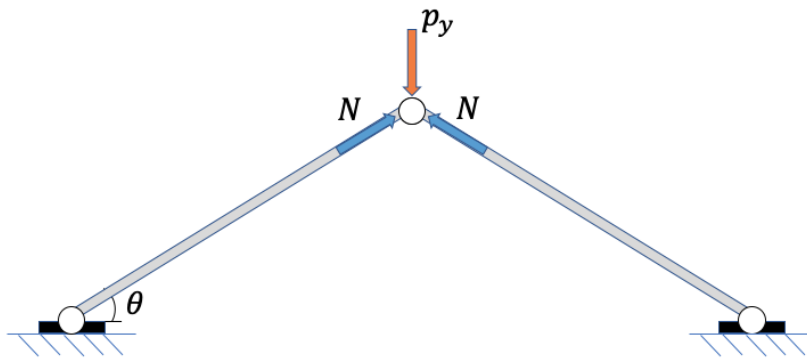
T2D2 (não linear)	T2D2 (linear)	B21 (não linear)	B21 (linear)
208.792 N	1182.6 N	255.617N	1349.7 N

Fonte: Autor.

Nos valores apresentados no Quadro 3.2 observa-se que a análise linear não é adequada para estudar o comportamento da treliça abatida, para o elemento T2D2 observa-se uma diferença de 466% e para o elemento B21 uma diferença de 428%, estas diferenças ocorrem pois o sistema estrutural estudado se caracteriza como um problema de ponto limite.

Observa-se na Figura 3.1 que os valores das curvas em vermelho estão relativamente distantes do valor da carga de flambagem, em preto, isso ocorre devido a geometria abatida da treliça, uma vez que ângulos de abatimento pequenos, fazem com que valores pequenos de carga p_y acarretem cargas axiais com magnitudes mais altas através da relação $p_y = 2 \operatorname{sen} \theta N$, obtida por equilíbrio do nó superior da treliça ilustrada na Figura 3.4.

Figura 3.4-Equilíbrio nodal de forças.



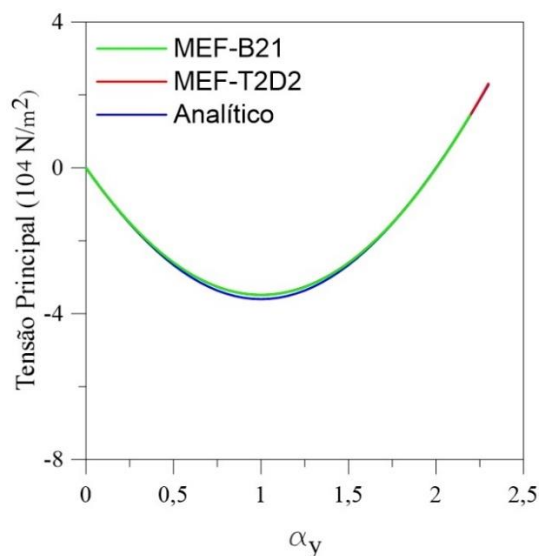
Fonte: Autor.

3.1.2. Tensões Principais

As tensões principais são obtidas para a treliça simétrica para o caso analítico e via Método dos Elementos Finitos. Para obter a curva das tensões principais no processamento analítico variou-se o valor do grau de liberdade adimensional α_y de 0 a 2.3 com incrementos de 0.05 na expressão da tensão de Cauchy apresentada na Equação (2.63), escrita em termos de α_y e do ângulo θ .

Na análise via MEF, utilizou-se ambos os elementos finitos unidimensionais, de treliça e de viga. Na Figura 3.5 apresenta-se as curvas obtidas nas análises, onde observa-se que para as três análises realizadas não houve diferença significativa entre as curvas obtidas. A coincidência das curvas obtidas no processamento analítico e via MEF para o elemento de treliça (T2D2) é adequado, pois em ambos são utilizadas formulações sem a consideração dos esforços de flexão. Já a coincidência da curva obtida via MEF utilizando o elemento de viga (B21) com as outras duas curvas também são coerentes, uma vez que a tensão principal para o sistema de treliça se trata de uma tensão axial, mostrando que o tipo de elemento utilizado na solução por MEF não interfere nessa solução.

Figura 3.5-Tensões Principais.



Fonte: Autor.

3.2 ANÁLISE DINÂMICA

Na análise dinâmica realiza-se para as treliças simétrica e assimétrica o estudo das frequências naturais utilizando o processamento analítico, e as curvas frequência deslocamento, curvas frequência carga, planos fase e respostas no tempo forçadas utilizando o MEF.

3.2.1. Frequências Naturais

Na análise dinâmica inicialmente realiza-se uma análise linear obtendo-se as duas primeiras frequências naturais para as treliças simétrica e assimétrica. Os valores obtidos para três ângulos θ distintos são apresentados no Quadro 3.3 e comparados com os obtidos por Fonseca (2018). Os valores de Ω_1 e Ω_2 equivalem, respectivamente, às frequências de vibrações nas direções x e y .

Quadro 3.3-Frequências naturais (rad/s) S - Simétrica, A - Assimétrica.

θ	Ω_1						Ω_2					
	Presente Trabalho		Fonseca (2018)		%-S	%-A	Presente Trabalho		Fonseca (2018)		%-S	%-A
	S	A	S	A			S	A	S	A		
15°	36.02	34.10	36.04	34.11	0.06%	0.03%	9.65	9.58	9.67	9.58	0.21%	0.00%
45°	26.37	25.16	26.37	25.14	0.00%	0.08%	26.37	23.81	26.37	23.82	0.00%	0.04%
75°	36.02	32.88	36.04	32.88	0.06%	0.00%	9.65	8.39	9.67	8.35	0.21%	0.48%

Fonte: Autor.

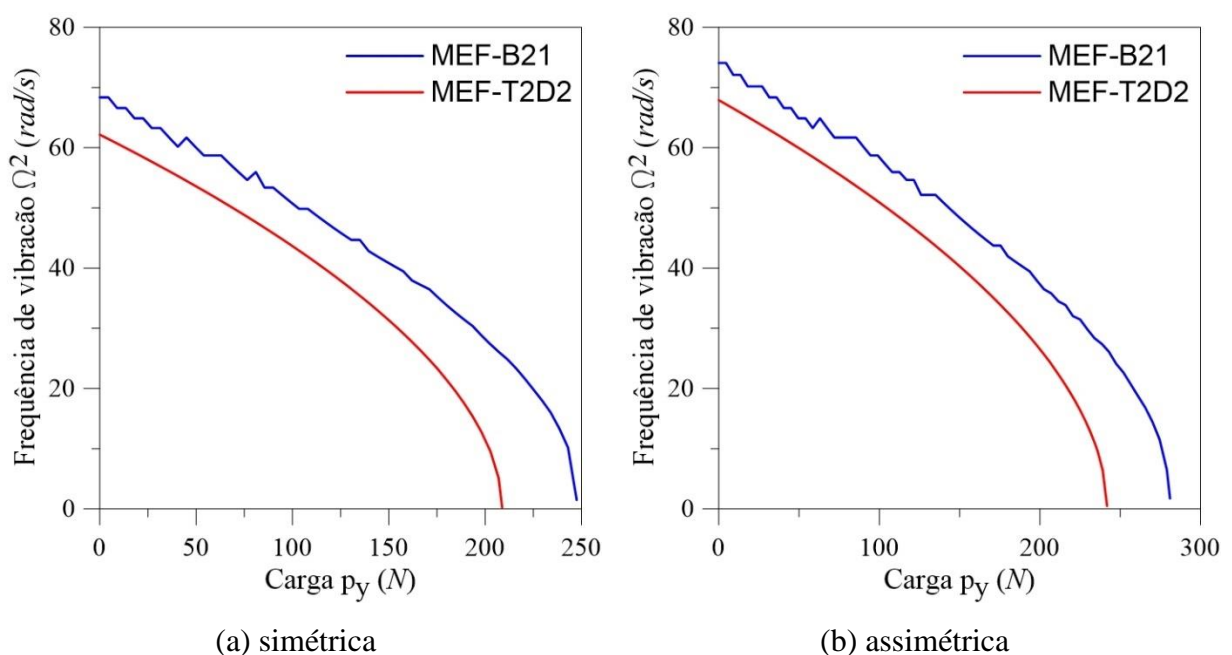
Para os três ângulos analisados no Quadro 3.3, as frequências naturais da treliça assimétrica são menores que os valores observados para a treliça simétrica. Observa-se que para o ângulo θ igual a 45° , para a treliça simétrica, em ambas as frequências de vibração, não houve diferença entre os valores obtidos por Fonseca (2018) e os valores calculados neste trabalho.

Observa-se do Quadro 3.3 que não há divergência significativa entre os valores calculados para as frequências de vibração neste trabalho com os valores obtidos por Fonseca (2018), sendo a maior diferença percentual igual à 0.48%, desta forma verifica-se a precisão do modelo analítico desenvolvido neste trabalho.

3.2.2. Curvas Frequência versus Carga

Para a obtenção das curvas de frequência versus carga inicialmente aplicou-se uma carga estática p_y ao nó superior da treliça, e obteve-se uma resposta no tempo não amortecida, a partir do período da resposta no tempo obtém-se a frequência associada ao carregamento aplicado. Isso foi feito para vários incrementos de carga até que se atingisse um valor de frequência próximo de zero. Na Figura 3.6 apresentam-se as relações de frequência versus carga aplicada para os sistemas estruturais da treliça simétrica e assimétrica. Para ambos os sistemas se utilizou os elementos finitos unidimensionais de treliça e de viga.

Figura 3.6-Frequência Ω_2 versus Carga.



Fonte: Autor.

Nos gráficos da Figura 3.6, o decréscimo na frequência natural de vibração é provocado pelo aumento da carga p_y aplicada até atingir um valor limite, ponto em que ela se torna instável, momento em que a frequência natural se torna nula conforme o critério dinâmico de estabilidade. Para a treliça simétrica, Figura 3.6 (a), tem-se que o valor de carga limite utilizando o elemento T2D2 corresponde a 208.8 N, e para o elemento B21 o valor é igual a 247.5 N, ambos os valores são próximos dos valores obtidos para a carga limite (P_{ylim}) dos caminhos de equilíbrio para estes elementos, Figura 3.1, cujos valores são apresentados no Quadro 3.1.

Em ambos os gráficos apresentados na Figura 3.6, observa-se um comportamento semelhante entre as curvas obtidas utilizando o elemento T2D2 e B21, ou seja, para um mesmo valor de carga p_y a treliça modelada com o elemento finito B21 apresenta um valor de frequência maior que o observado para a treliça modelada com o elemento T2D2. Através dos resultados da Figura 3.6 também se ratifica o que foi observado no Quadro 3.1, que a carga limite do sistema treliça é maior quando se considera a energia de flexão.

Na Figura 3.6 (b) a carga limite do sistema estrutural da treliça assimétrica para o elemento T2D2 e B21 são respectivamente de, 241.8 N e 281 N, sendo maiores que os valores de carga limite obtidos para a configuração da treliça simétrica.

3.2.3. Curvas Frequência versus Deslocamento

Para a obtenção das curvas de frequência versus deslocamento, considerou-se ambas as configurações de treliça, simétrica e assimétrica, submetidas à um pulso de carga aplicado ao nó superior da treliça, desta forma obteve-se uma resposta no tempo amortecida, com um amortecimento igual à 1% do amortecimento crítico. Para a obtenção de cada ponto do gráfico frequência versus deslocamento, utilizou-se a metodologia proposta por Nandakumar e Chatterjee (2005), onde na curva da resposta no tempo considera-se a média dos valores de deslocamentos de dois picos positivos e sucessivos nos tempos t_1 e t_2 , a média é designada neste trabalho por u_1 . Na sequência, toma-se o deslocamento negativo u_2 entre os picos positivos, definindo-se a amplitude do deslocamento u conforme Equação (3.1).

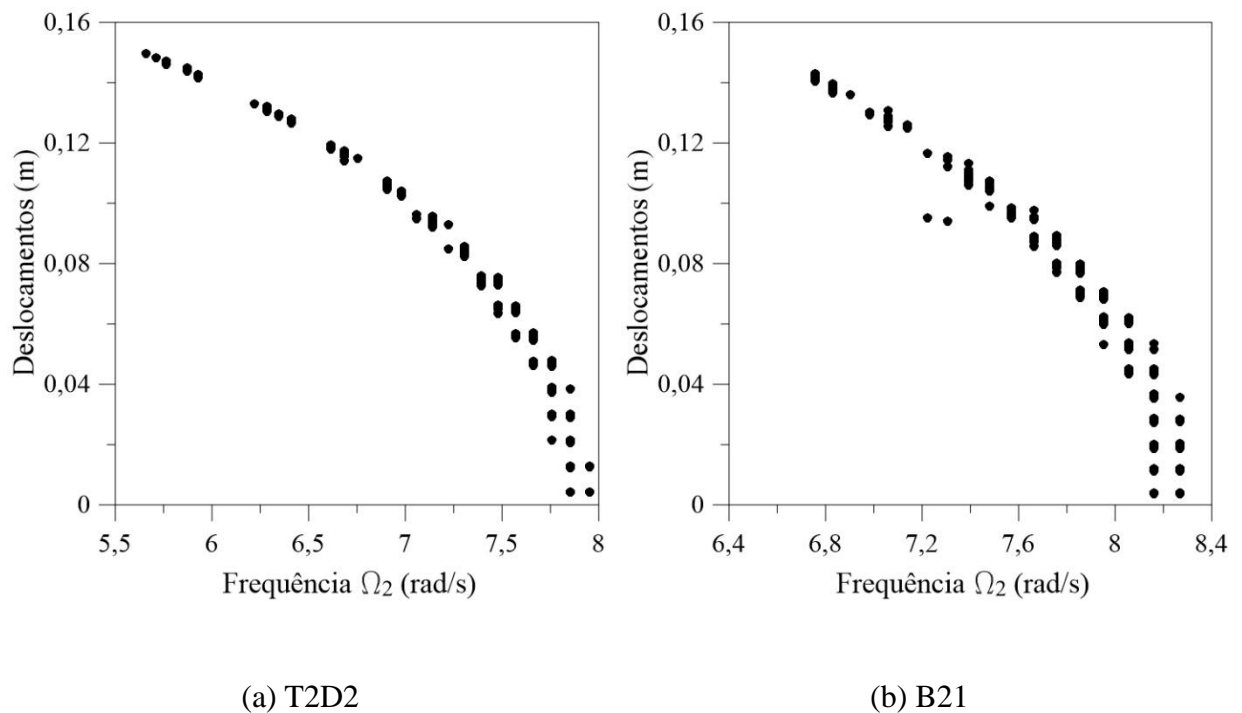
$$u = \frac{u_1 + |u_2|}{2} \quad (3.1)$$

A frequência associada ao deslocamento calculado na Equação (3.1) é obtida pelo inverso do período conforme a Equação (3.2).

$$\Omega = \frac{1}{t_2 - t_1} \quad (3.2)$$

Na Figura 3.7 apresenta-se a relação frequência versus deslocamentos para a treliça simétrica. Obteve-se o gráfico da Figura 3.7 (a) empregando o elemento de treliça, enquanto no gráfico da Figura 3.7 (b) utilizou-se o elemento de viga.

Figura 3.7- Relação frequência Ω_2 versus deslocamento-Treliça simétrica.

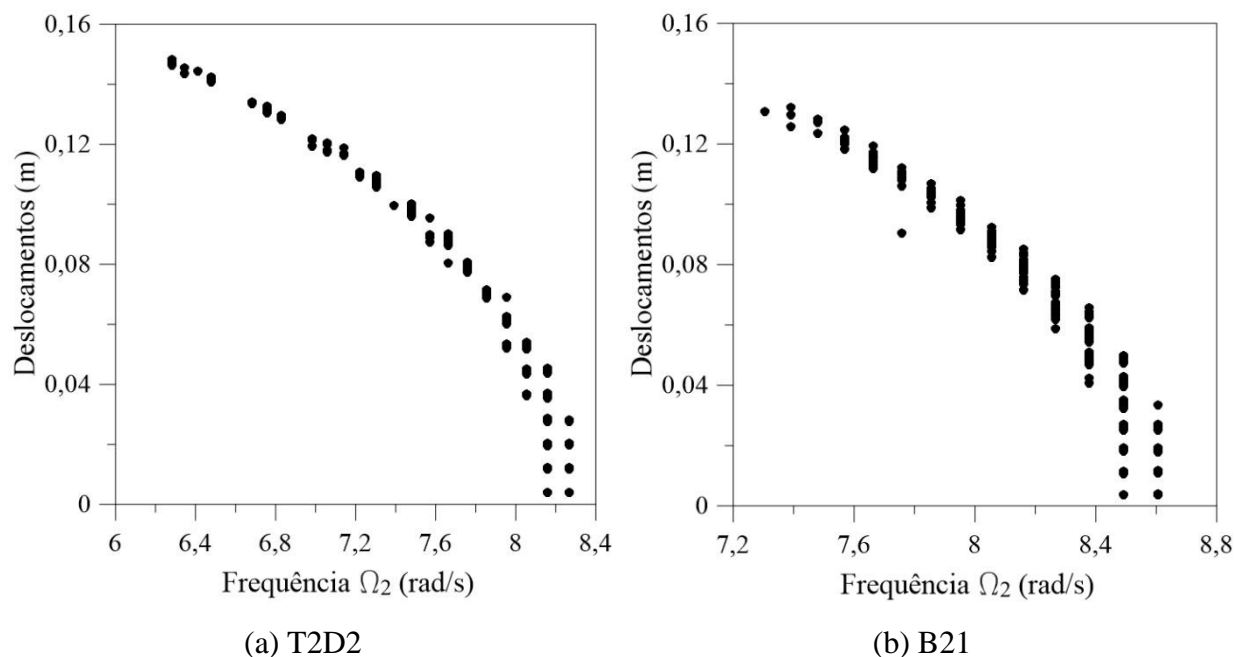


Fonte: Autor.

Observa-se dos gráficos da Figura 3.7 que para ambos os elementos finitos unidimensionais considerados a treliça simétrica está amolecendo com o aumento da amplitude de vibração. Para valores de deslocamentos próximos à zero obtém-se a frequência natural de vibração para o elemento T2D2 igual à 7.85 rad/s e para o elemento B21 obtém-se o valor de 8.27 rad/s . Observa-se que a consideração da energia de flexão na análise resultou em uma frequência natural para o sistema de treliça 5.35% maior do que o valor observado para a treliça modelada com elemento o T2D2.

Na Figura 3.8 apresenta-se a relação frequência versus deslocamentos para a treliça assimétrica. Obteve-se o gráfico da Figura 3.8 (a) empregando o elemento de treliça, enquanto no gráfico da Figura 3.8 (b) utilizou-se o elemento de viga.

Figura 3.8- Relação frequência Ω_2 versus deslocamento-Treliça assimétrica.



Fonte: Autor.

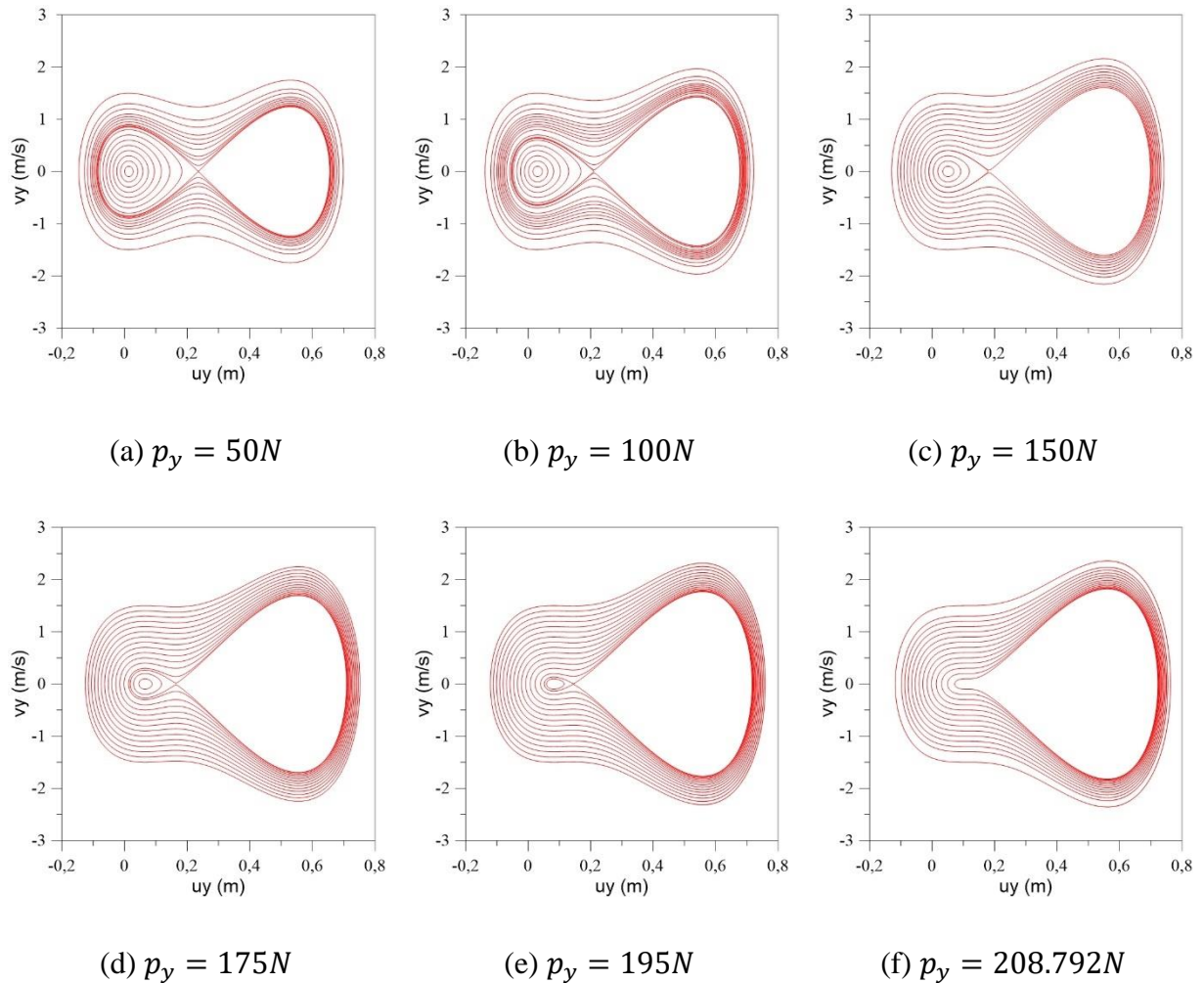
Observa-se, a partir das Figuras 3.7 e 3.8, que a assimetria da treliça não interfere no comportamento de amolecimento com o aumento da amplitude de vibração. Para valores de deslocamentos próximos à zero obtém-se a frequência natural de vibração para o elemento T2D2 igual à 8.27 rad/s e para o elemento B21 obtém-se o valor de 8.61 rad/s . Observa-se, conforme esperado, que a consideração da energia de flexão na análise resultou em uma frequência natural para o sistema de treliça 4.11% maior do que o valor observado para a treliça modelada com elemento o elemento T2D2.

3.2.4. Planos Fase

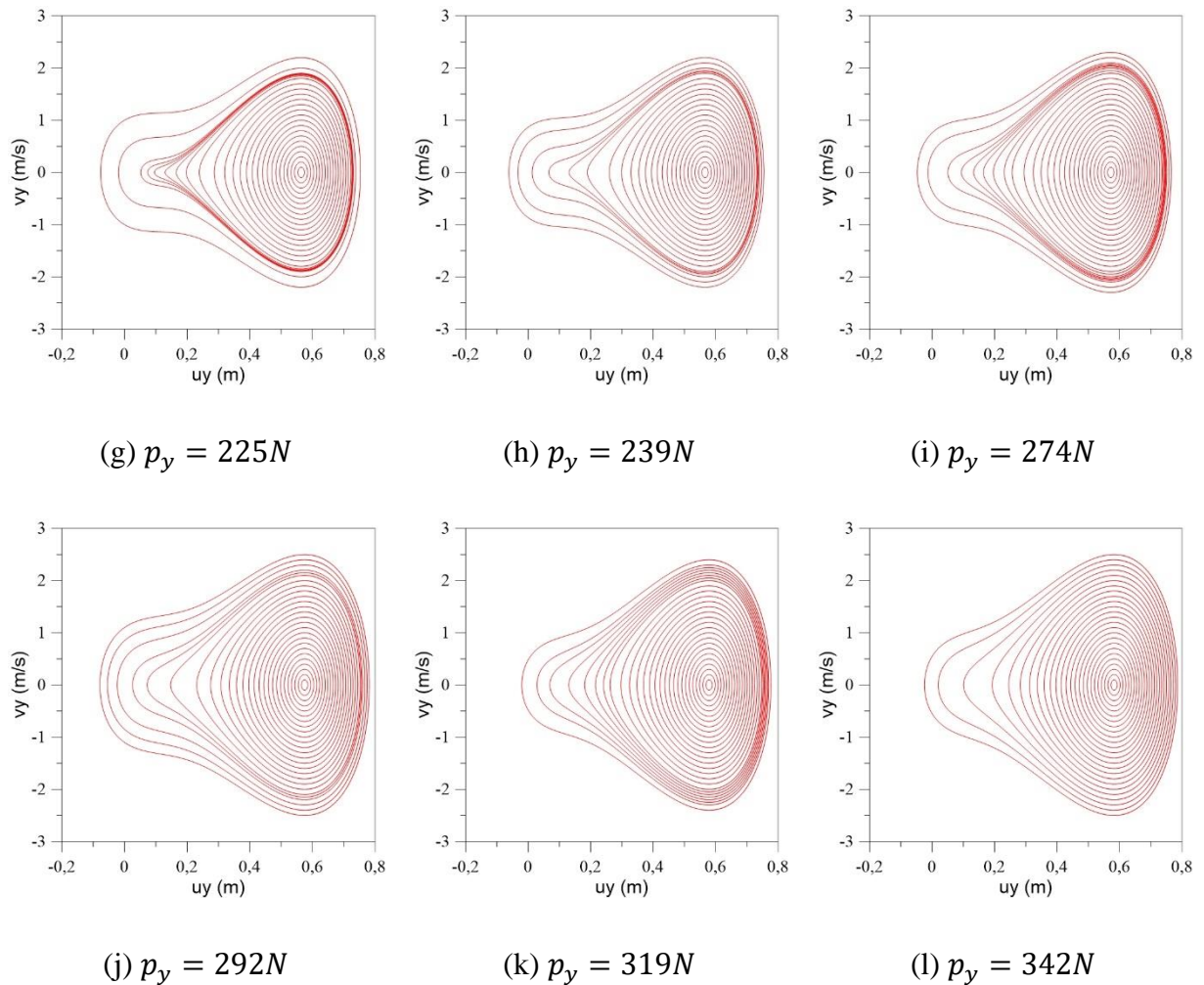
Para a obtenção dos planos fase, considerou-se ambas as configurações de treliça, simétrica e assimétrica, modeladas com os elementos finitos unidimensionais T2D2 e B21. As treliças foram submetidas à um carregamento estático vertical aplicado em seu nó superior e neste mesmo nó aplicou-se uma perturbação de velocidade. Desta forma, os gráficos de plano fase são obtidos variando-se os valores de carregamento externo aplicado e da perturbação de velocidade.

Nas Figura 3.9 a 3.12 apresentam-se os planos fase para as configurações de treliça simétrica e assimétrica, modeladas com os elementos finitos T2D2 e B21. São utilizados para a carga aplicada na treliça, valores menores, iguais e maiores que o valor da carga limite para cada caso considerado.

Figura 3.9- Planos Fase-Treliça simétrica T2D2. Carga limite: 208.792 N.



Continua.



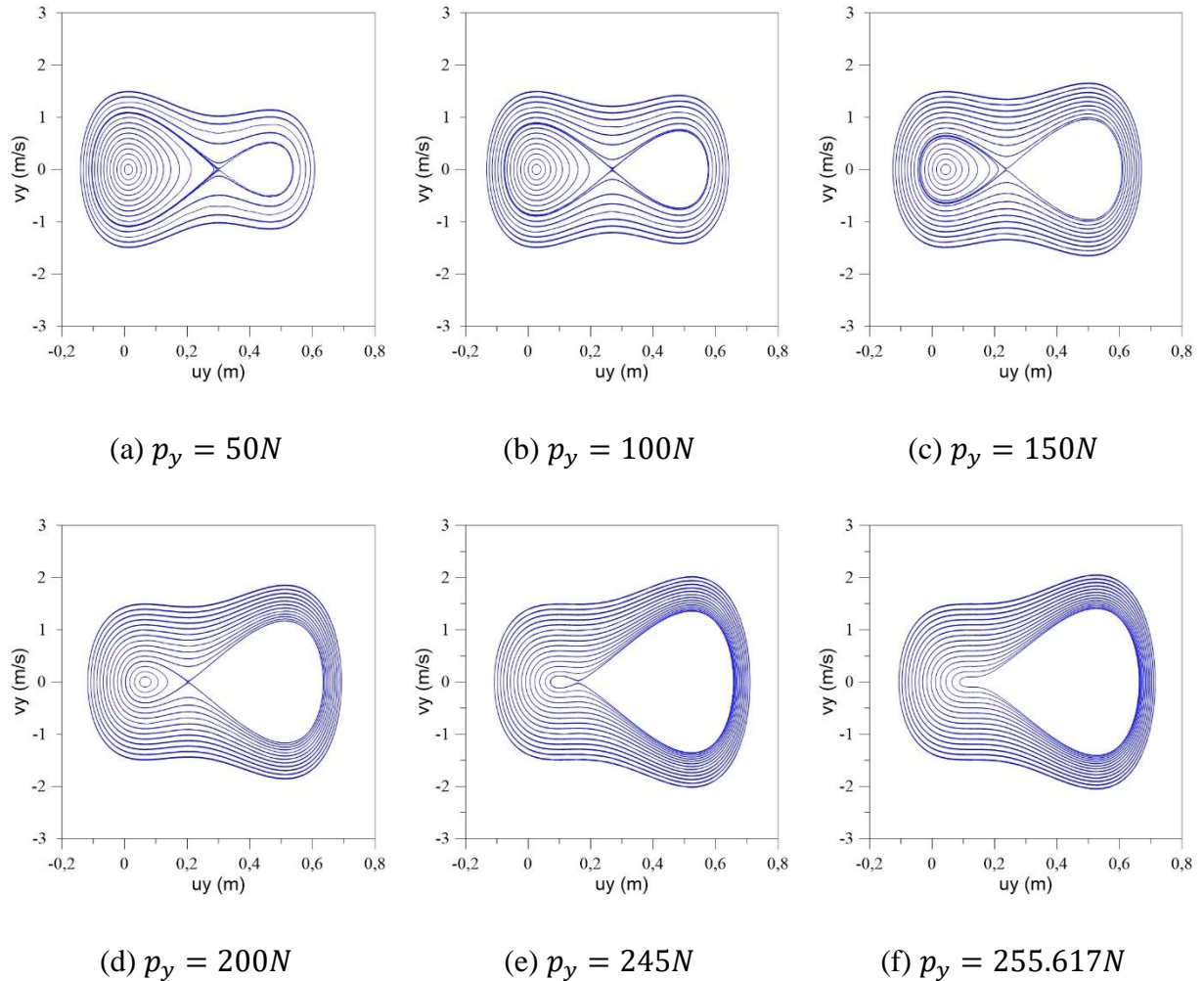
Fonte: Autor.

Observa-se a presença de dois centros, que correspondem a posições de equilíbrio estável e um ponto de sela, que corresponde a uma posição de equilíbrio instável (Figuras 3.9 (a)-(e)) para valores de carga p_y menores que o limite. Com o aumento dos valores de carga p_y a região de convergência para o centro com atrator de deslocamento negativo diminui de tamanho, enquanto a região de centro com atrator de deslocamento positivo aumenta. Anteriormente ao carregamento limite o atrator para o ponto de sela apresenta localização próxima à localização com coordenadas ($u_y = 0.2m$ e $v_y = 0$).

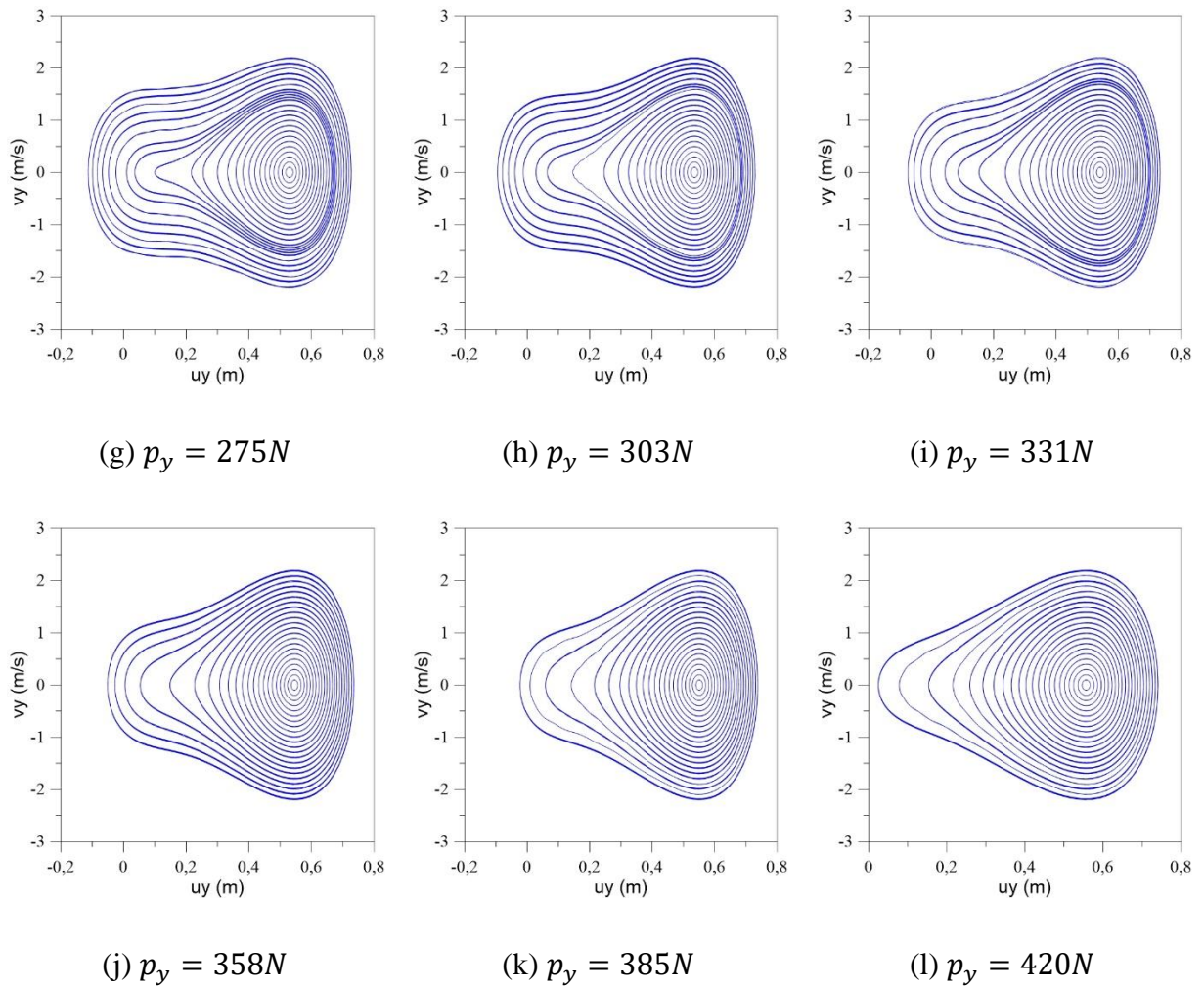
Quando p_y atinge o valor limite (Figuras 3.9 (f)) o atrator instável, sela, desaparece, permanecendo apenas um atrator estável, centro. Com o aumento do carregamento p_y com valores maiores que o limite (Figuras 3.9 (g) – (l)), o plano fase continua apresentando apenas um trator estável com coordenadas próximas a ($u_y = 0.57$ e $v_y = 0$).

O mesmo comportamento observado para a treliça simétrica modelada com o elemento T2D2 (Figura 3.9) é visto para a treliça simétrica modelada com o elemento B21 (Figura 3.10) com a presença de dois centros (estáveis) e uma sela (instável) antes da carga p_y atingir o valor limite e a presença apenas de um centro após o valor de carga ser maior que o limite.

Figura 3.10- Planos Fase-Treliça simétrica B21. Carga limite: 255.617 N.

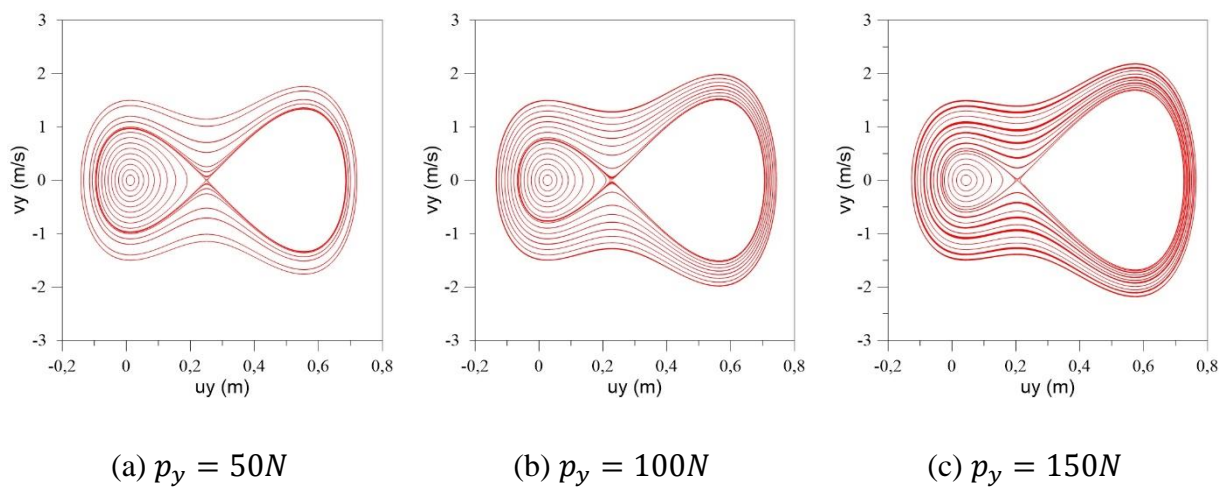


Continua.

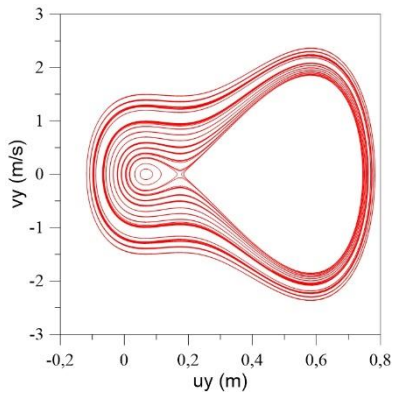


Fonte: Autor.

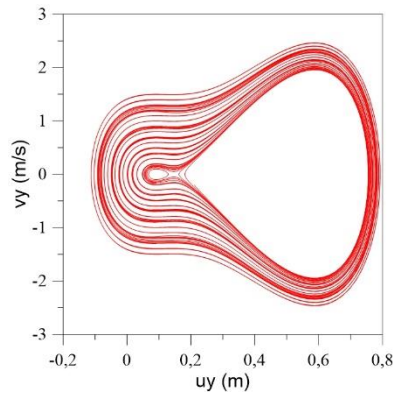
Figura 3.11- Planos Fase-Treliça assimétrica T2D2. Carga limite: 241.8 N.



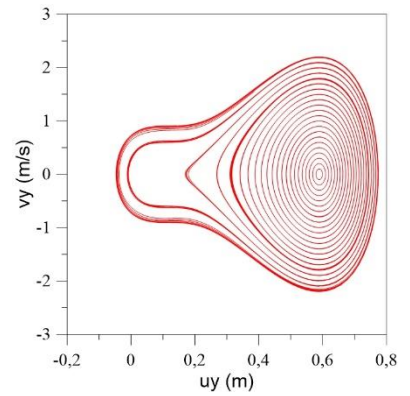
Continua.



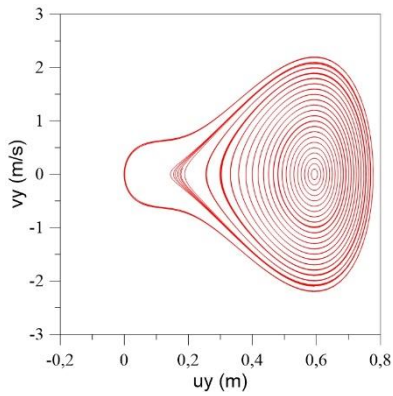
(d) $p_y = 200N$



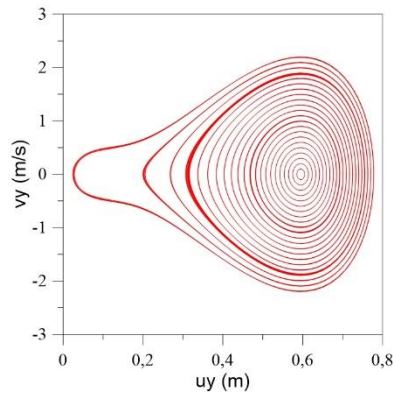
(e) $p_y = 230N$



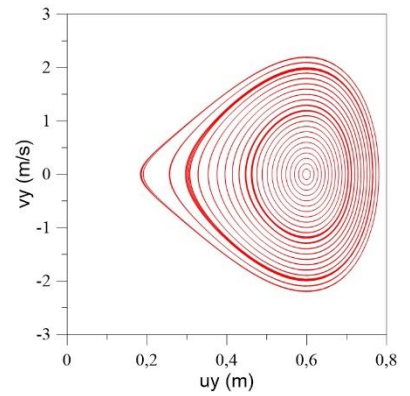
(f) $p_y = 241,8N$



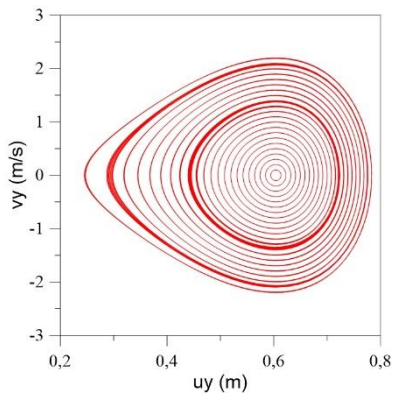
(g) $p_y = 270N$



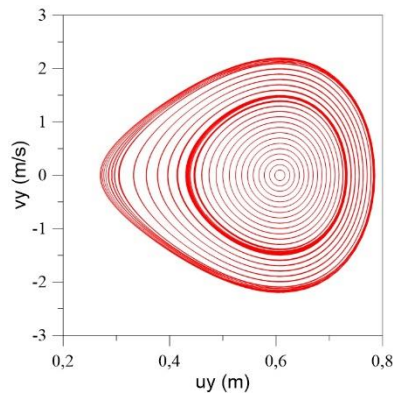
(h) $p_y = 280N$



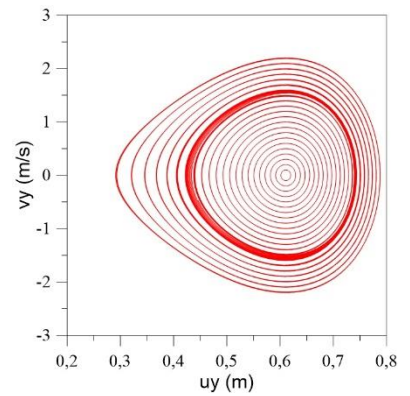
(i) $p_y = 309N$



(j) $p_y = 340N$



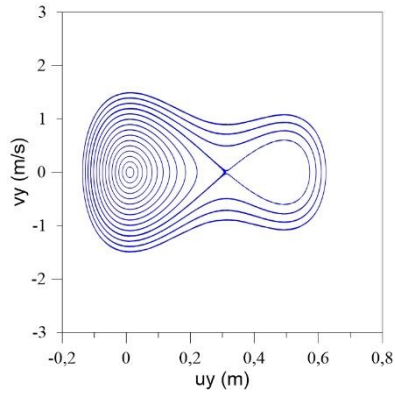
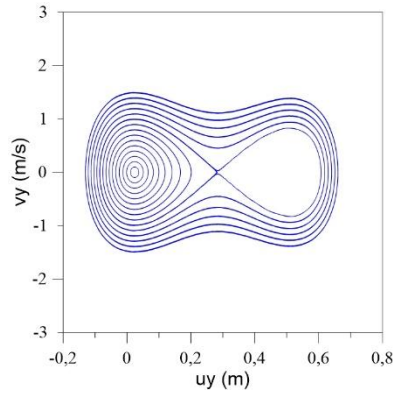
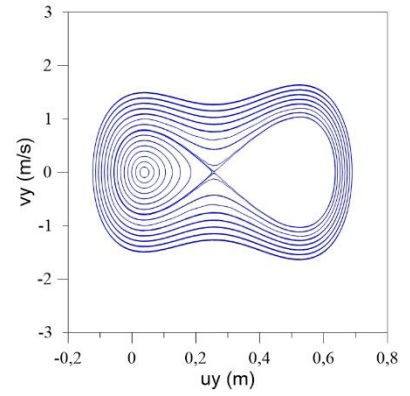
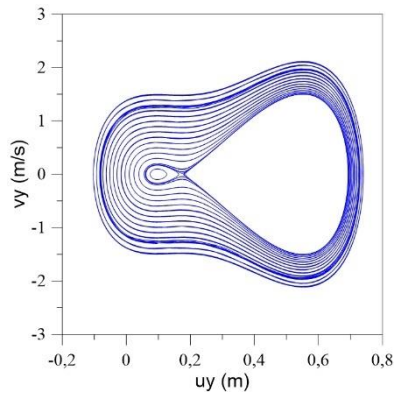
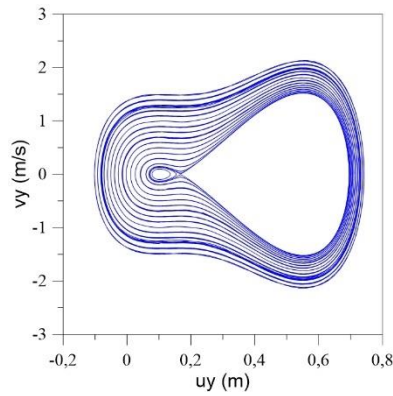
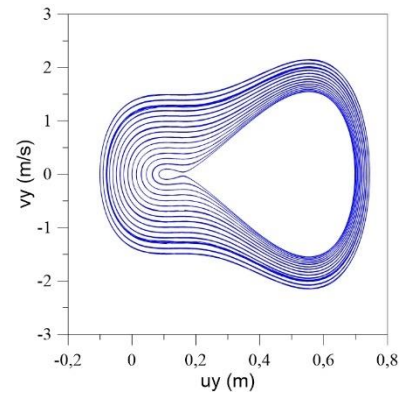
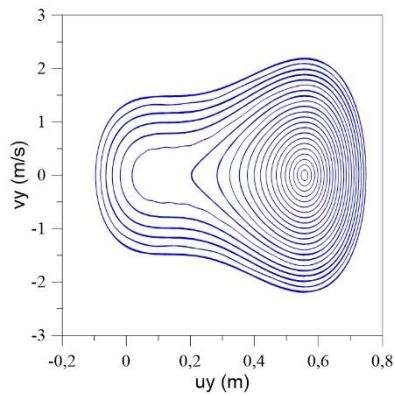
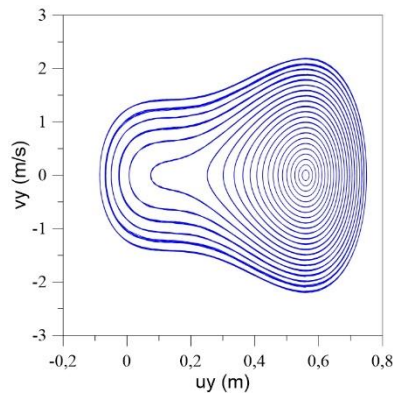
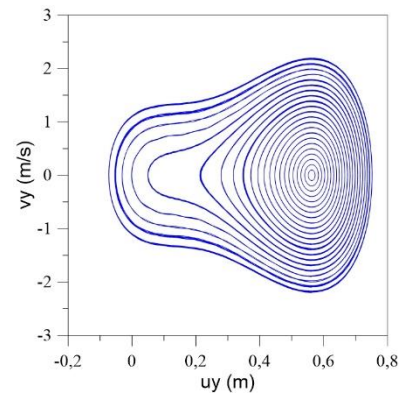
(k) $p_y = 362N$



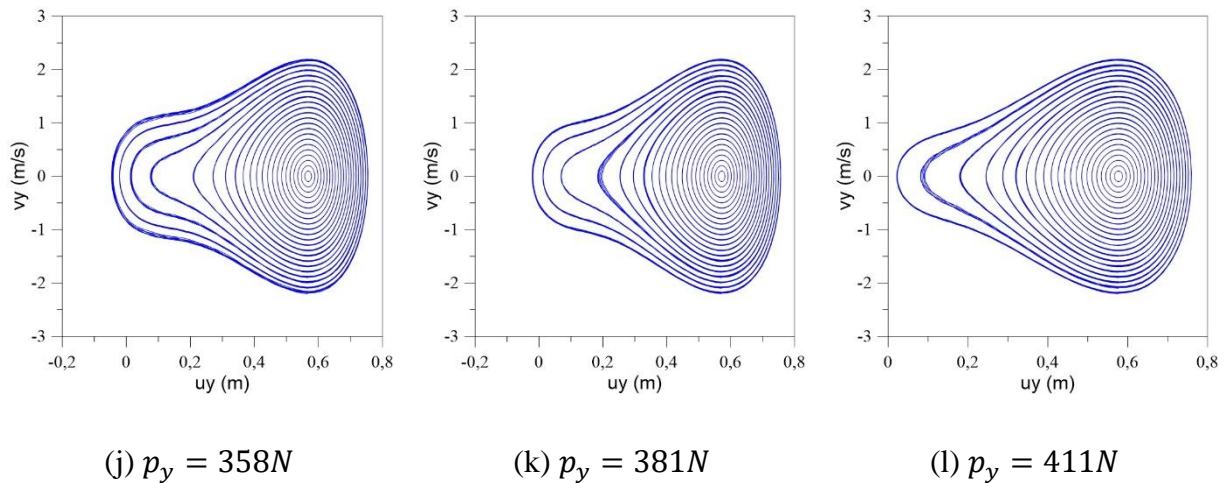
(l) $p_y = 388N$

Fonte: Autor.

Figura 3.12- Planos Fase-Treliça assimétrica B21. Carga limite: 281 N.

(a) $p_y = 50N$ (b) $p_y = 100N$ (c) $p_y = 150N$ (d) $p_y = 270N$ (e) $p_y = 275N$ (f) $p_y = 281N$ (g) $p_y = 296N$ (h) $p_y = 311N$ (i) $p_y = 328N$

Continua.



Fonte: Autor.

Novamente, nas Figuras 3.11 e 3.12, observa-se o mesmo comportamento de dois centros e uma sela visto para a treliça simétrica, antes de p_y assumir o valor limite e o desaparecimento de um centro e da sela para p_y maiores que o valor de carga limite. Além disso, observa-se que em todos os casos estudados, o atrator estável que permanece possui coordenadas de deslocamentos próximas à $(u_y = 0.56 \text{ e } v_y = 0)$, este valor de deslocamento é aproximadamente igual ao dobro do valor da altura da treliça indeformada, desta forma a estrutura está sendo atraída para a posição em que a treliça fica totalmente invertida. Comportamento esperado para valores de carga maiores que o limite.

Observa-se que a consideração dos esforços de flexão, a partir da utilização do elemento B21, não influencia no comportamento da treliça, apenas alterando as posições dos atratores.

3.2.5. Resposta no tempo sob Vibração Forçada

Para se obter a resposta no tempo em vibração forçada considerou-se uma carga $p(t)$ composta por uma parcela de carga estática mais uma parcela de perturbação dinâmica, conforme apresentado na Equação (3.3)

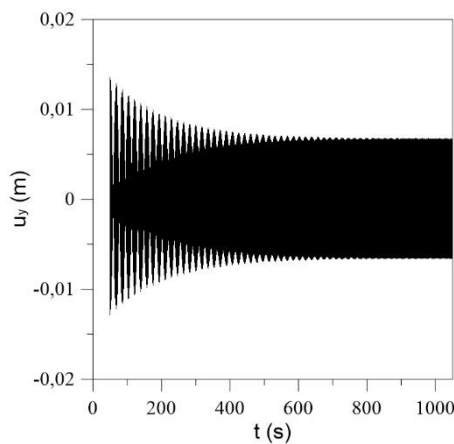
$$p(t) = p_e [1 + k \cos(\Omega_e t)] \quad (3.3)$$

Na Equação (3.3) p_e é a parcela de carga estática e uma proporção desse valor (k) é aplicada como uma perturbação harmônica. A frequência de excitação Ω_e é a frequência assumida pela treliça quando submetida à carga estática p_e .

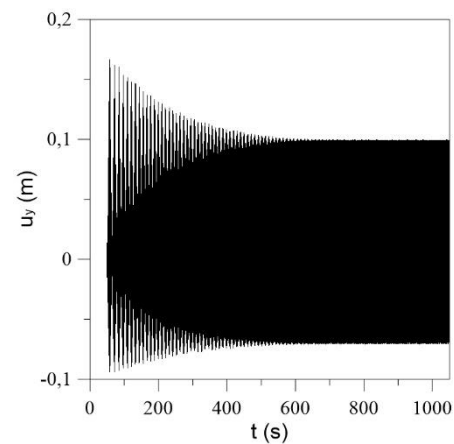
Nessa subsecção apresentam-se as respostas no tempo sob vibração forçada sempre considerando-se três valores distintos de carga estática aplicada à treliça, um próximo ao valor de carga limite da treliça, um com valor inferior e distante da carga limite e outro com valor superior e distante da carga limite. Além disso, utilizam-se dois valores de perturbação dinâmica $k = 0.05$ e $k = 0.4$. Essas respostas no tempo foram obtidas para as treliças simétrica, assimétrica com os elementos T2D2 e B21 e são apresentadas nas Figuras 3.13 a 3.16.

Na Figura 3.13 apresentam-se as respostas de vibração forçada para a treliça simétrica modelada com o elemento finito T2D2 cujo valor de carga limite é de $p_{ylim} = 208.792N$.

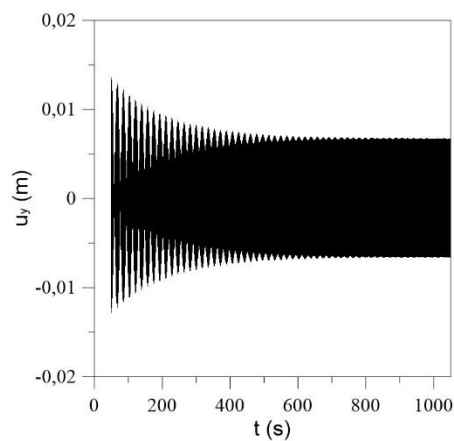
Figura 3.13- Resposta de Vibração Forçada-Treliça simétrica-T2D2



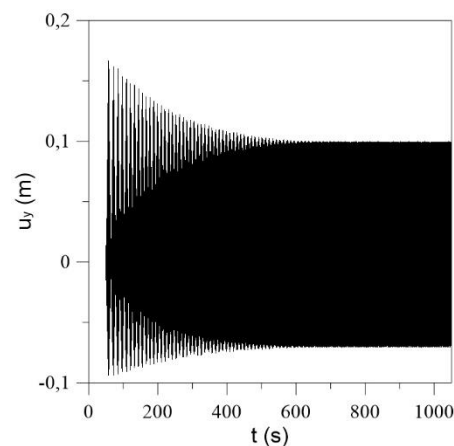
(a) $p_e = 50N; k = 0.05$



(b) $p_e = 50N; k = 0.4$

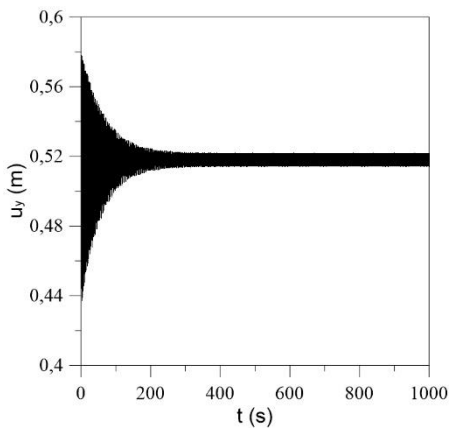
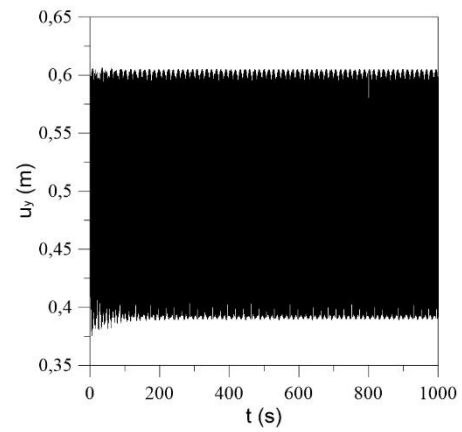


(c) $p_e = 205N; k = 0.05$



(d) $p_e = 205N; k = 0.4$

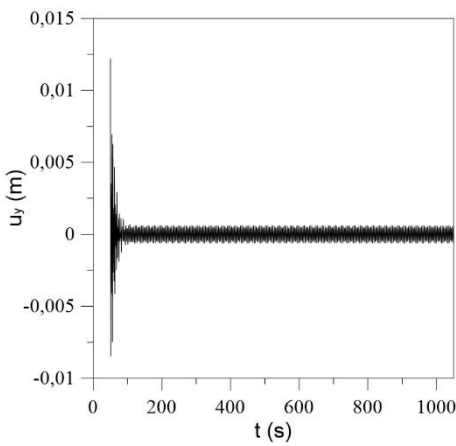
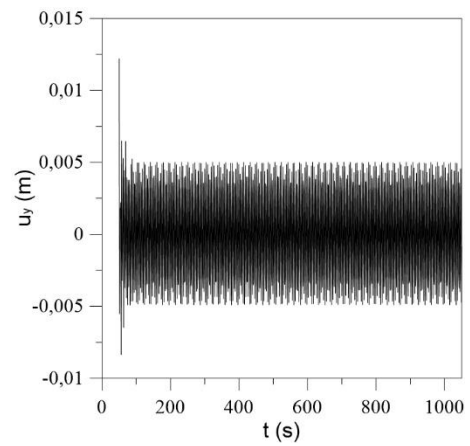
Continua.

(e) $p_e = 292N; k = 0.05$ (f) $p_e = 292N; k = 0.4$

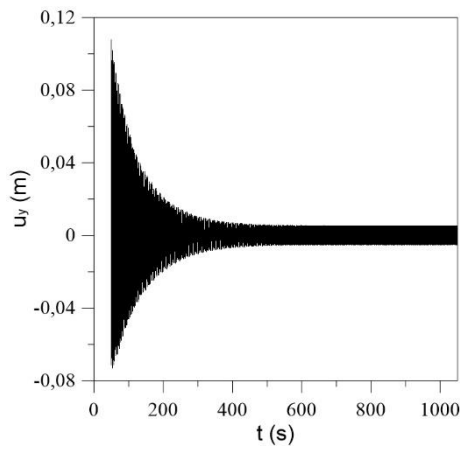
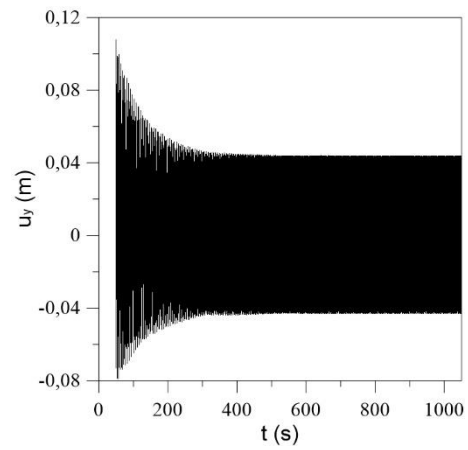
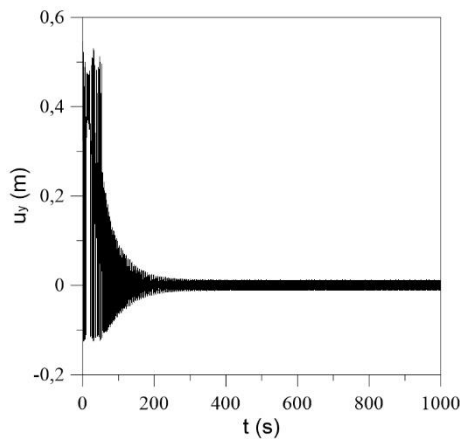
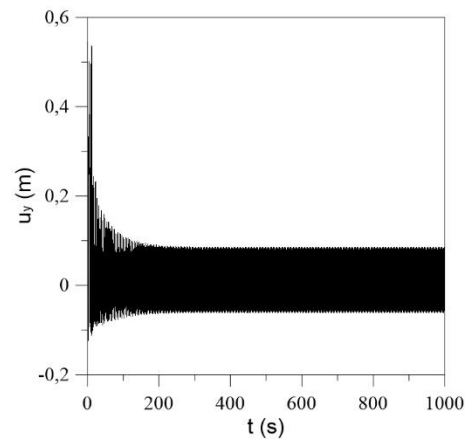
Fonte: Autor.

Na Figura 3.14 apresentam-se as respostas de vibração forçada para a treliça simétrica modelada com o elemento finito B21 cujo valor de carga limite é de $p_{ylim} = 255.617N$.

Figura 3.14- Resposta de Vibração Forçada-Treliça simétrica-B21

(a) $p_e = 50N; k = 0.05$ (b) $p_e = 50N; k = 0.4$

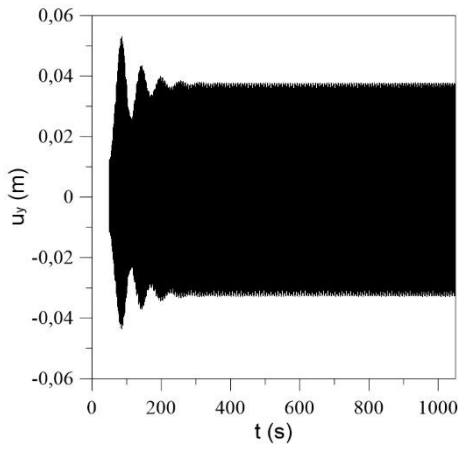
Continua.

(c) $p_e = 250N; k = 0.05$ (d) $p_e = 250N; k = 0.4$ (e) $p_e = 358N; k = 0.05$ (f) $p_e = 358N; k = 0.4$

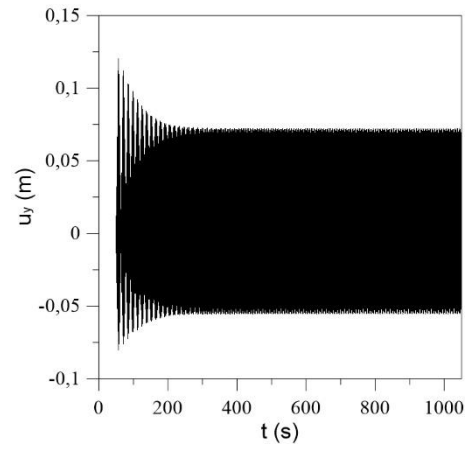
Fonte: Autor.

Na Figura 3.15 apresentam-se as respostas de vibração forçada para a treliça assimétrica modelada com o elemento finito T2D2 cujo valor de carga limite é de $p_{ylim} = 241.8N$

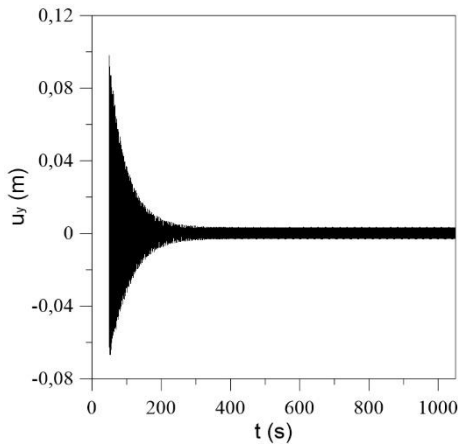
Figura 3.15- Resposta de Vibração Forçada-Treliça assimétrica-T2D2



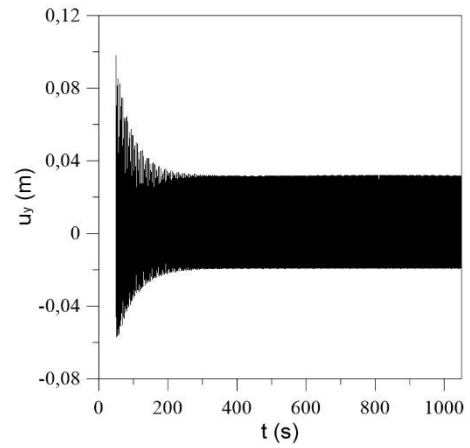
(a) $p_e = 50N; k = 0.05$



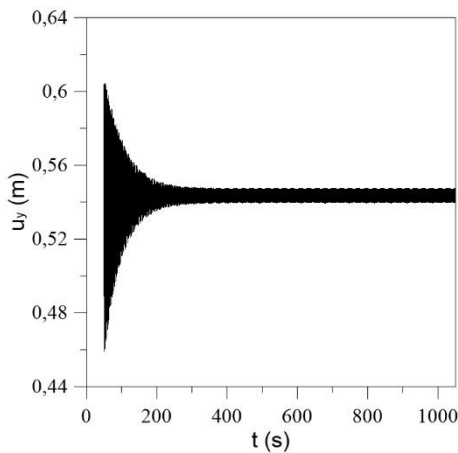
(b) $p_e = 50N; k = 0.4$



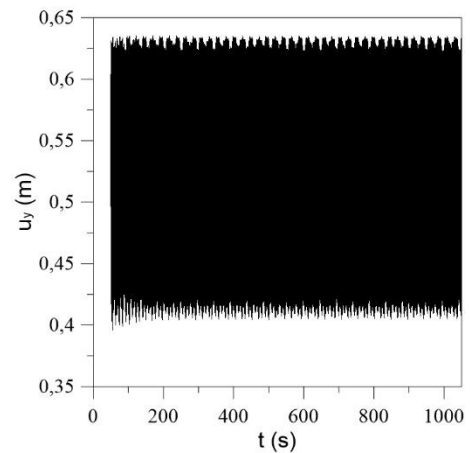
(c) $p_e = 235N; k = 0.05$



(d) $p_e = 235N; k = 0.4$



(e) $p_e = 340N; k = 0.05$

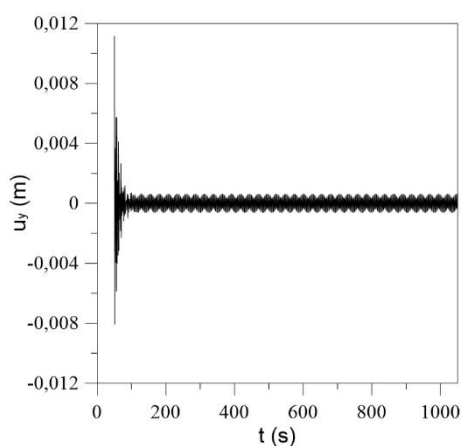


(f) $p_e = 340N; k = 0.4$

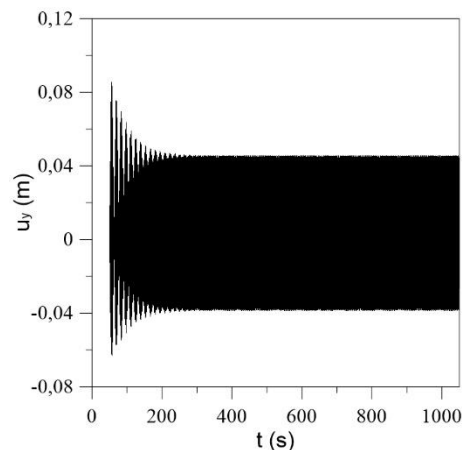
Fonte: Autor.

Na Figura 3.16 apresentam-se as respostas de vibração forçada para a treliça assimétrica modelada com o elemento finito B21, cujo valor de carga limite é de $p_{ylim} = 281N$.

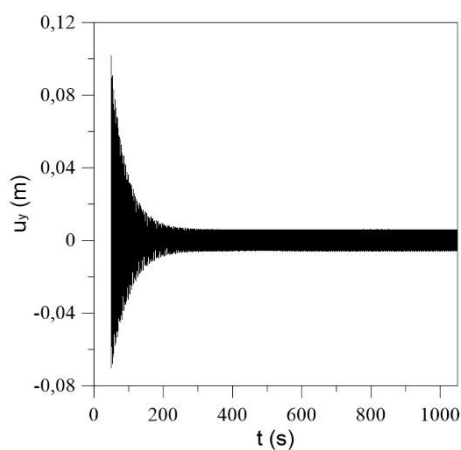
Figura 3.16- Resposta de Vibração Forçada-Treliça assimétrica-B21



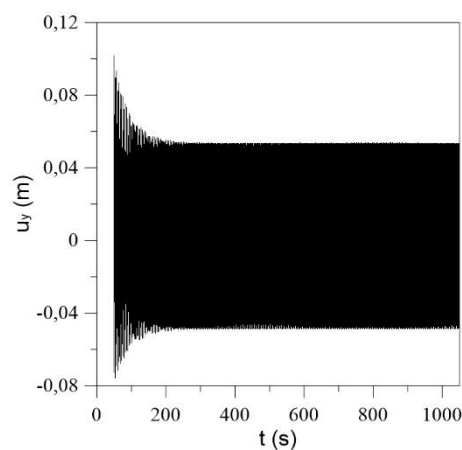
(a) $p_e = 50N; k = 0.05$



(b) $p_e = 50N; k = 0.4$

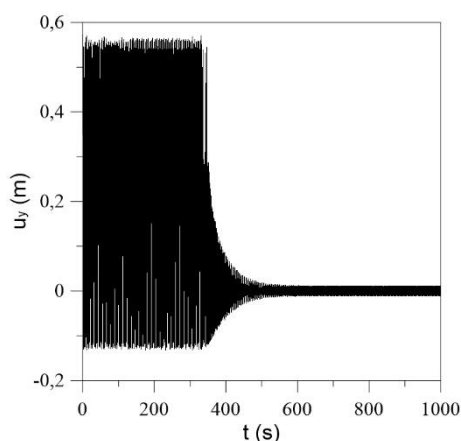
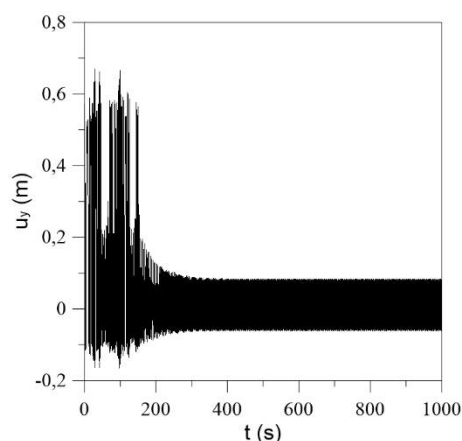


(c) $p_e = 275N; k = 0.05$



(d) $p_e = 275N; k = 0.4$

Continua.

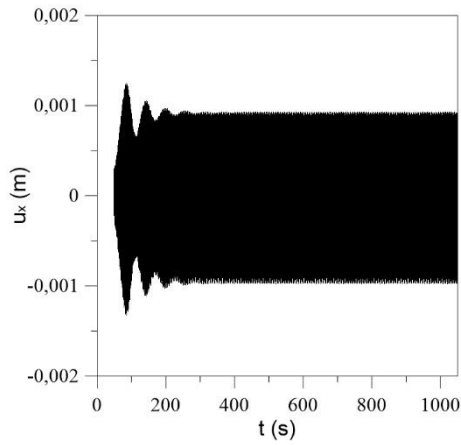
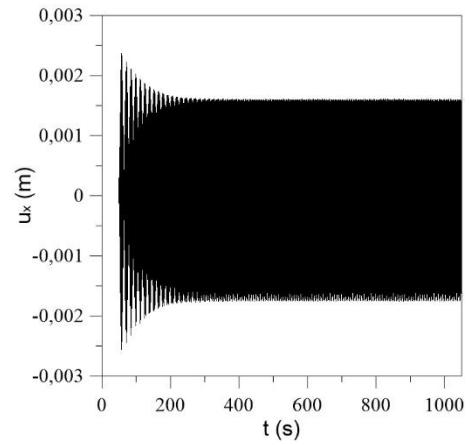
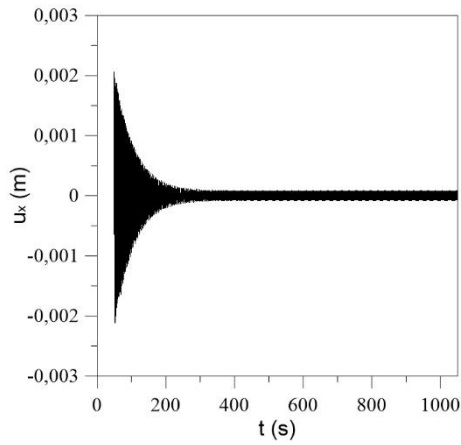
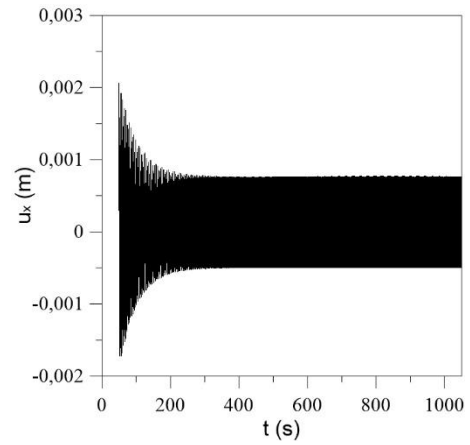
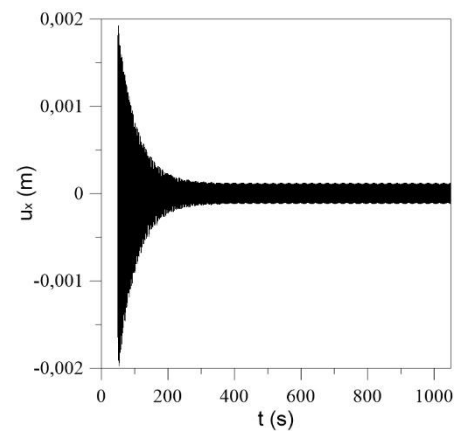
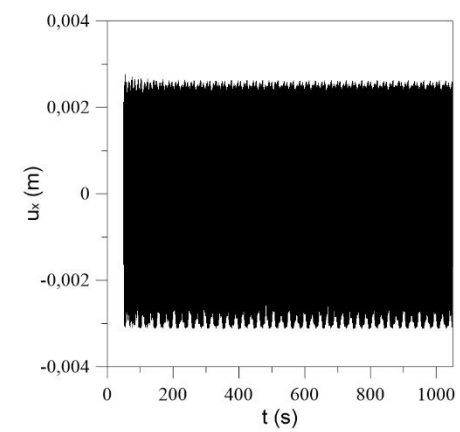
(e) $p_e = 381N; k = 0.05$ (f) $p_e = 381N; k = 0.4$

Fonte: Autor.

Para a treliça simétrica, Figuras 3.13 e 3.14, e para a treliça assimétrica, Figuras 3.15 e 3.16, para um mesmo valor de carga estática p_e , observa-se que com o aumento do valor da perturbação dinâmica k , a treliça deixa de oscilar em torno de uma posição de equilíbrio de menor magnitude e passa a oscilar em magnitudes maiores. Para ambas as configurações de treliça, simétrica e assimétrica, observa-se que as magnitudes dos deslocamentos são maiores para o elemento T2D2 do que utilizando o elemento B21 que considera os esforços de flexão. Observa-se nas Figuras de 3.13-3.16, para os dois valores de perturbação dinâmica considerados, que o aumento no valor da carga estática p_e acarreta o aumento da amplitude de oscilação dos deslocamentos.

Nas Figuras 3.15 e 3.16 não se observa nenhuma diferença significativa devido à presença da assimetria, em relação a treliça simétrica, Figura 3.13 e 3.14. Contudo, para a treliça assimétrica submetida à uma carga vertical em seu nó superior, além dos deslocamentos verticais previstos, ocorre deslocamentos horizontais de menor magnitude. Na Figura 3.17 apresentam-se as respostas de vibração forçada para os deslocamentos horizontais considerando os mesmos carregamentos e perturbações dinâmicas apresentados na Figura 3.15.

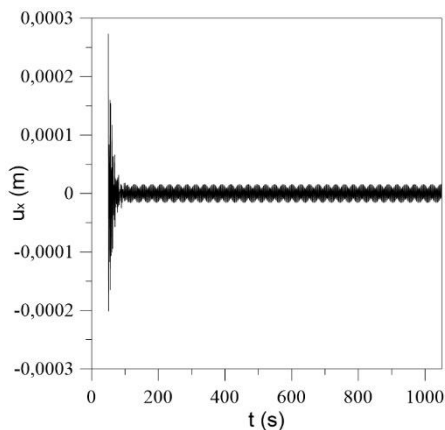
Figura 3.17- Resposta de Vibração Forçada deslocamentos horizontais-Treliça assimétrica-T2D2.

(a) $p_e = 50N; k = 0.05$ (b) $p_e = 50N; k = 0.4$ (c) $p_e = 235N; k = 0.05$ (d) $p_e = 235N; k = 0.4$ (e) $p_e = 340N; k = 0.05$ (f) $p_e = 340N; k = 0.4$

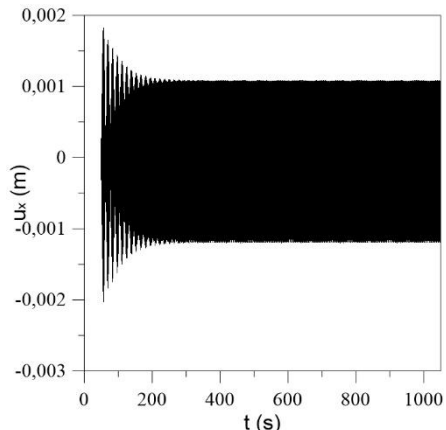
Fonte: Autor.

Na Figura 3.18 apresentam-se as respostas de vibração forçada para os deslocamentos horizontais considerando os mesmos carregamentos e perturbações dinâmicas apresentados na Figura 3.16.

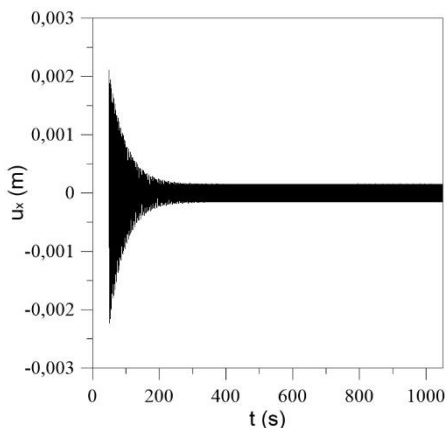
Figura 3.18- Resposta de Vibração Forçada deslocamentos horizontais-Treliça assimétrica-B21.



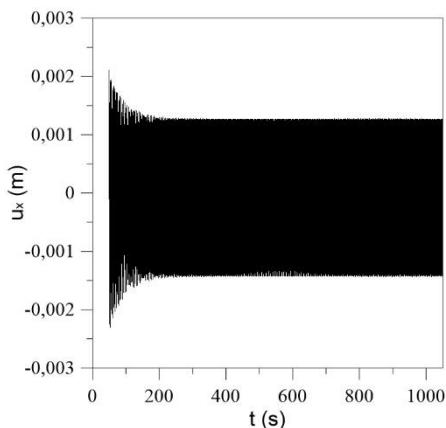
(a) $p_e = 50N; k = 0.05$



(b) $p_e = 50N; k = 0.4$

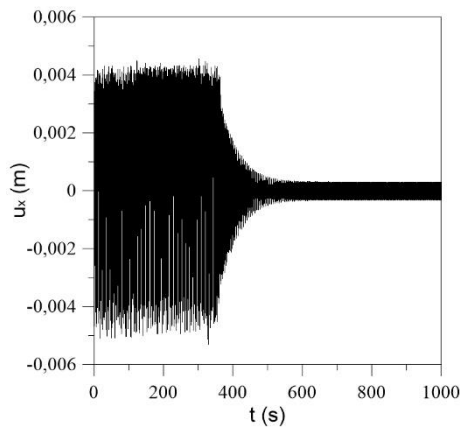
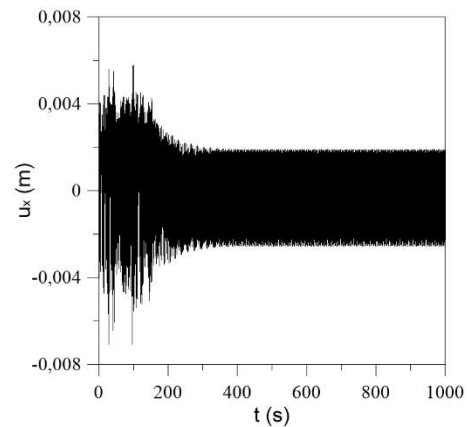


(c) $p_e = 275N; k = 0.05$



(d) $p_e = 275N; k = 0.4$

Continua

(e) $p_e = 381N; k = 0.05$ (f) $p_e = 381N; k = 0.4$

Fonte: Autor.

Observa-se das Figuras 3.17 e 3.18 que os deslocamentos para todas as cargas e perturbações dinâmicas consideradas apresentam magnitude muito pequena se comparado com a magnitude dos deslocamentos verticais. Tem-se que as magnitudes dos deslocamentos são maiores para o elemento B21 do que para o elemento T2D2, com exceção apenas para a carga estática de $50N$, Figuras 3.17 (a) e 3.18 (a). Para o elemento T2D2, Figura 3.17, observa-se uma diminuição da amplitude de oscilação dos deslocamentos com o aumento da carga estática para valores menores que o crítico, para ambos os níveis de perturbação dinâmica. Enquanto para o elemento B21 ocorre o aumento das amplitudes de oscilação. O comportamento oscilatório da treliça ao se aumentar o nível de perturbação dinâmica, para um mesmo valor de carga estática, é semelhante ao observado na resposta de vibração dos deslocamentos verticais, Figuras 3.13 a 3.16.

CAPÍTULO 4

CONCLUSÕES E SUGESTÕES PARA TRABALHOS FUTUROS

O principal objetivo deste trabalho é verificar o efeito dos esforços de flexão no comportamento da treliça. Nos resultados referentes aos caminhos de equilíbrio constata-se que a treliça modelada com o elemento B21, que considera os esforços de flexão, apresentou uma carga limite de 255,617 *N*, frente ao valor de carga limite de 208,792 *N* observada ao se utilizar o elemento T2D2, ou seja, um valor 22% maior. Desta forma a treliça modelada com o elemento B21 suporta mais carga antes da ocorrência do fenômeno de *snaphthrough*.

Observa-se também o efeito dos esforços de flexão nos resultados obtidos com as curvas frequência versus carga, onde para o sistema estrutural da treliça simétrica modelada com o elemento B21 constata-se um valor de frequência natural 5% maior em relação ao obtido para o caso modelado com o elemento T2D2. Para o sistema estrutural da treliça assimétrica observou-se o mesmo fenômeno, mas com uma diferença percentual entre os valores de frequência natural de 4.5%. Desta forma, constata-se que não houve uma influência relevante da assimetria nestes resultados. Contudo, os valores de diferenças percentuais observados são significativos, uma vez que a treliça abatida tem como característica uma alta não linearidade geométrica.

Além disso, nos resultados obtidos para as curvas de frequência versus deslocamento, confirma-se o comportamento de uma frequência natural mais alta para o sistema modelado com o elemento B21 do que para com o elemento T2D2. Conclui-se também que a assimetria não interfere no comportamento de amolecimento da treliça ao se aumentar a amplitude de vibrações da treliça.

Para as duas configurações de treliça consideradas na pesquisa, simétrica e assimétrica, modeladas cada qual com os elementos finitos T2D2 e B21, obteve-se planos fase semelhantes, com dois centros e uma sela para valores de carga menor que a carga limite e um único centro para valores de carga maiores que a carga limite. Tem-se que a consideração dos

esforços de flexão e da assimetria não influenciam no comportamento da treliça, apenas alterando as posições dos atratores.

Por fim, nos resultados para as respostas no tempo sobre vibração forçada, os esforços de flexão presentes no elemento B21 acarretou deslocamentos com magnitudes menores do que os valores observados para o caso utilizando o elemento T2D2. A assimetria não influenciou nos resultados obtidos, mas sua presença resultou na ocorrência de deslocamentos horizontais do nó superior da treliça, com ordem de grandeza muito menor do que os deslocamentos verticais previstos.

Conclui-se que os esforços de flexão considerados nas análises ao se utilizar o elemento finito B21 apresentou uma influência significativa nos resultados obtidos para a carga limite da treliça, nas frequências naturais do sistema estrutural e nos deslocamentos da treliça submetida a vibração forçada. Por outro lado, a assimetria da treliça não interferiu nos resultados obtidos, acarretando apenas o surgimento de deslocamentos horizontais de baixa magnitude.

Sugere-se para trabalhos futuros o estudo analítico considerando a energia de flexão na formulação das equações que governam o comportamento da treliça. Além disso, recomenda-se a análise paramétrica dos modelos constitutivos hiperelásticos e a consideração de uma treliça com geometria espacial.

REFERÊNCIA BIBLIOGRÁFICAS

ARRUDA, E. M.; BOYCE, M. C. A three-dimensional constitutive model for the large stretch behavior of rubber elastic membranes. **Journal of the Mechanics and Physics of Solids**, v. 41, n. 2, p. 389-412, 1993.

AMARAL, P.F. T. **Análise dinâmica não-linear de uma membrana hiperelástica esférica**. 2018. 90 p. Dissertação (Mestrado em engenharia civil) – Universidade Federal de Goiás, Goiás, 2018.

ARIO, I. Homoclinic bifurcation and chaos attractor in elastic two-bar truss. **International Journal of non-Linear Mechanics**, v 39, p. 605 – 617, 2004.

ATTARD, M.M.; HUNT, G. W. Column buckling with shear deformations- A hyperelastic formulation. **International Journal of Solids and Structures**. Netherlands, v 45, n.14-15, p. 4322 – 4339, 2008.

BAZANT, Z P.; CEDOLIN, L. **Energy Methods. Stability of Structures**. WORLD SCIENTIFIC, 2010. p.018. 118 p. 199-304.

CASTRO, C.H.L. **Vibrações não lineares e estabilidade de treliças piramidais abatidas**. 2014. 92 p. Dissertação (Mestrado em engenharia civil) - Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2014.

DAZIO, A. **Course: Fundamentals of Structural Dynamics**. An-Najah National University: UME Graduate School, 2013. p. 434.

FONSECA, F.M. **Comportamento não linear, bifurcações e instabilidade de uma treliça hiperelástica**. 2018. 152 p. Dissertação (Mestrado em engenharia civil) - Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2018.

GONÇALVES, P. B. **Uma introdução à instabilidade das estruturas**. Departamento de Engenharia Civil - Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 1993. p. 58.

KASSIMALI, A.; BIDHENDI E. Stability of trusses under dynamic loads. **Computers & structures**, v 29, n.3, p 381 – 392, 1988.

KALINA, M. Stability problems of pyramidal Von Mises planar trusses with geometrical imperfection. **International Journal of Theoretical and Applied Mechanics**, v 1, 2016.

KWASNIEWSKI, L. Complete equilibrium paths for Mises trusses. **International Journal of non-Linear Mechanics**, v 44, p. 19 – 26, 2008.

LIGARO, S.S.; VALVO, P. S. Large displacement analysis of elastic pyramidal trusses. **International Journal of Solids and Structures**, v 43, p. 4867 – 4887, 2006.

NADKARNI, N.; DARAIIO, C.; KOCHMANN, D. M. Dynamics of periodic mechanical structures containing bistable elastic elements: From elastic to solitary wave propagation. **Physical review**, v 90, p. 23204, 2014.

NANDAKUMAR, K.; CHATTERJEE, A. **Resonance, Parameter Estimation, and Modal Interactions in a Strongly Nonlinear Benchmark Oscillator. introdução à instabilidade das estruturas**. Nonlinear Dynamics. v. 40, p. 149-167, 2005.

OLIVEIRA, L. D.; SILVA, W.A.; SILVA, W. T. M.; DELALIBERA, R. G. Análise dinâmica não linear geométrica de treliças planas. **REEC-Revista Eletrônica de Engenharia Civil**, v 13, n.2, p. 84 – 98, 2017.

RAFSANJANI, A.; AKBARZADEH, A.; PASINI, D. Snapping mechanical metamaterials under tension. **Advanced materials**, v 27, n. 39, p. 5931-5935, 2015.

SCHMIED, J. U.; SUGINO, C.; BERGAMINI A.; ERMANNI, P.; RUZZENE, M. et al. Toward structurally integrated locally resonant metamaterials for vibration attenuation. **Active and passive smart structures and integrated systems 2017**, v 10164, p. 1016413, 2017.

SHAN, S.; KANG, S. H.; RANEY J. R.; WANG, P.; FANG, L.; CANDIDO, F.; LEWIS J. A.; BERTOLDI, K. Multistable architected materials for trapping elastic strain energy. **Advanced materials**, v 27, n. 29, p. 4296-4301, 2015.

SILVA, R.S. **Estudo do comportamento dinâmico de membranas retangulares hiperelásticas**. 2015. 94 p. Dissertação (Mestrado em engenharia civil) – Universidade Federal de Goiás, Goiás, 2015.

SOARES, R.M. **Análise dinâmica de membranas circulares hiperelásticas**. 2009. 214 p. Tese (Doutorado em engenharia civil) - Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2009.

SOUZA, L.A.F. Análise não linear de treliças planas considerando as deformações de Green, engenharia e logarítmica. **Encontro internacional de produção científica**, Paraná, 2017.

SORIANO, H.L. **Introdução à dinâmica das estruturas**. 1º Edição. Rio de Janeiro: Elsevier, 2014. 464 p.

SELVADURAI, A.P.S. Deflections of a rubber membrane. **Journal of the Mechanics and Physics of Solids**. Netherlands, v 54, p. 1093 – 1119, 2006.

WANG, P.; CASADEI, F.; SHAN, S.; WEAVER, J. C.; BERTOLDI, K. Harnessing buckling to design tunable locally resonant acoustic metamaterials. **PHYSICAL REVIEW LETTERS**, v 113, n. 1, p. 014301, 2014