

UNIVERSIDADE FEDERAL DE GOIÁS
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

MATHEUS DANTAS E LIMA

Sobre a Invariância do Produto Tensorial não Abeliano de Grupos

Goiânia
2015

TERMO DE CIÊNCIA E DE AUTORIZAÇÃO PARA DISPONIBILIZAR AS TESES E DISSERTAÇÕES ELETRÔNICAS (TEDE) NA BIBLIOTECA DIGITAL DA UFG

Na qualidade de titular dos direitos de autor, autorizo a Universidade Federal de Goiás (UFG) a disponibilizar, gratuitamente, por meio da Biblioteca Digital de Teses e Dissertações (BDTD/UFG), sem ressarcimento dos direitos autorais, de acordo com a Lei nº 9610/98, o documento conforme permissões assinaladas abaixo, para fins de leitura, impressão e/ou *download*, a título de divulgação da produção científica brasileira, a partir desta data.

1. Identificação do material bibliográfico: ☒ **Dissertação** ☐ **Tese**

2. Identificação da Tese ou Dissertação

Autor (a):		Matheus Dantas e Lima			
E-mail:		mathmatematica@gmail.com			
Seu e-mail pode ser disponibilizado na página? ☒ Sim ☐ Não					
Vínculo empregatício do autor		-			
Agência de fomento:		Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico		Sigla:	CNPq
País:	Brasil	UF:	DF	CNPJ:	33.654.831
Título:		Sobre a Invariância do Produto Tensorial não Abeliano de Grupos			
Palavras-chave:		Produto tensorial não Abeliano, Nilpotência, Solubilidade			
Título em outra língua:		About the Invariance of the Nonabelian Tensor Product of Groups			
Palavras-chave em outra língua:		Nonabelian Tensor Product, Nilpotency, Solubility			
Área de concentração:		Álgebra			
Data defesa: (dd/mm/aaaa)		29/07/2015			
Programa de Pós-Graduação:		Mestrado em Matemática			
Orientador (a):		Dr. Jhone Caldeira Silva			
E-mail:		jhone@ufg.br			
Co-orientador (a):*		Dra. Ivonildes Ribeiro Martins Dias			
E-mail:		ivonildes@ufg.br			

*Necessita do CPF quando não constar no SisPG

3. Informações de acesso ao documento:

Concorda com a liberação total do documento ☒ SIM ☐ NÃO¹

Havendo concordância com a disponibilização eletrônica, torna-se imprescindível o envio do(s) arquivo(s) em formato digital PDF ou DOC da tese ou dissertação.

O sistema da Biblioteca Digital de Teses e Dissertações garante aos autores, que os arquivos contendo eletronicamente as teses e ou dissertações, antes de sua disponibilização, receberão procedimentos de segurança, criptografia (para não permitir cópia e extração de conteúdo, permitindo apenas impressão fraca) usando o padrão do Acrobat.

Data: 10 / 03 / 2016

Assinatura do (a) autor (a)

¹ Neste caso o documento será embargado por até um ano a partir da data de defesa. A extensão deste prazo suscita justificativa junto à coordenação do curso. Os dados do documento não serão disponibilizados durante o período de embargo.

MATHEUS DANTAS E LIMA

Sobre a Invariância do Produto Tensorial não Abeliano de Grupos

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação do Instituto de Matemática e Estatística da Universidade Federal de Goiás, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Área de concentração: Álgebra.

Orientador: Prof. Jhone Caldeira Silva

Co-Orientadora: Prof^a. Ivonildes Ribeiro Martins Dias

Goiânia
2015

Ficha catalográfica elaborada automaticamente
com os dados fornecidos pelo(a) autor(a), sob orientação do Sibi/UFG.

Lima, Matheus Dantas e
Sobre a Invariância do Produto Tensorial não Abeliano de Grupos
[manuscrito] / Matheus Dantas e Lima. - 2015.
lxxvi, 76 f.

Orientador: Prof. Dr. Jhone Caldeira Silva; co-orientador Dr.
Ivonildes Ribeiro Martins Dias.
Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal de Goiás, Instituto de
Matemática e Estatística (IME) , Programa de Pós-Graduação em
Matemática, Goiânia, 2015.
Bibliografia.

1. Produto Tensorial não Abeliano. 2. Nilpotência. 3. Solubilidade. I.
Silva, Jhone Caldeira, orient. II. Dias, Ivonildes Ribeiro Martins, co
orient. III. Título.

MATHEUS DANTAS E LIMA

**SOBRE A INVARIÂNCIA DO PRODUTO TENSORIAL NÃO
ABELIANO DE GRUPOS**

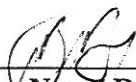
Dissertação defendida no Programa de Pós-Graduação do Instituto de Matemática e Estatística da Universidade Federal de Goiás como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática, aprovada no dia 29 de julho de 2015, pela Banca Examinadora constituída pelos professores:



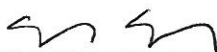
Prof. Dr. Jhone Caldeira Silva
Instituto de Matemática e Estatística - UFG
Presidente da Banca



Profa. Dra. Ivonildes Ribeiro Martins Dias
Instituto de Matemática e Estatística - UFG



Prof. Dr. Norai Romeu Rocco
Departamento de Matemática – UnB



Profa. Dra. Shirlei Serconek
Instituto de Matemática e Estatística - UFG

Sumário

1	Preliminares	6
1.1	Conjuntos de Palavras	6
1.2	Homomorfismos e Alguns Tipos de Grupos	7
1.2.1	Homomorfismos	7
1.2.2	Comutadores e Subgrupos comutadores	9
1.2.3	Grupos Solúveis	10
1.2.4	Grupos Nilpotentes	11
1.2.5	Grupos Engelianos	11
1.2.6	Grupos Livres	11
1.2.7	Grupo de Whitehead	14
1.3	Ações	14
1.3.1	Ações entre Grupos	14
1.3.2	Produto Semidireto de Grupos	18
1.3.3	Módulos Cruzados	18
1.4	Módulos sobre um anel A	19
1.5	Anel de Grupo	20
1.6	Sequências Exatas e Grupos de Cohomologia	21
1.6.1	Sequências Exatas	21
1.6.2	Grupos de Cohomologia	22
2	O Produto Tensorial não Abelianano de Grupos	24
2.1	Ações Compatíveis	24
2.2	O Produto Tensorial não Abelianano de Grupos e suas Propriedades	25
3	Um Grupo Particular	41
3.1	Os Grupos $\eta(G, H)$ e $\tau(G, H)$	41
3.2	As Séries Central Inferior e Derivada de $G \otimes H$	48
3.3	Nilpotência de $\eta(G, H)$	54
4	Invariância do Produto Tensorial Não Abelianano de Grupos	63
4.1	Um Caso Particular Sobre a Invariância do Produto Tensorial não Abelianano	63
4.2	Invariância do Produto Tensorial não Abelianano	65
	Referências Bibliográficas	75

Resumo

Lima, Matheus Dantas e. **Sobre a Invariância do Produto Tensorial não Abeliano de Grupos**. Goiânia, 2015. 76p. Dissertação de Mestrado. Departamento de Matemática, Instituto de Matemática e Estatística, Universidade Federal de Goiás.

Sobre condições para que uma propriedade de grupos seja fechada via formação do produto tensorial não abeliano de grupos.

Palavras-chave

Invariância do produto tensorial não abeliano de grupos

Introdução

O produto tensorial não abeliano dos grupos G e H , denotado por $G \otimes H$, introduzido por Brown e Loday em [2], surgiu em aplicações na teoria de homotopia de uma generalização do Teorema de Van Kampen. Admitindo que cada grupo age sobre si mesmo por conjugação ($g_1^g = g^{-1}g_1g$, $\forall g, g_1 \in G$ e $h_1^h = h^{-1}h_1h$, $\forall h, h_1 \in H$) e que cada um age sobre o outro, tal que a seguinte *condição de compatibilidade* seja satisfeita:

$$g_1^{(h^g)} = \left(\left(g_1^{g^{-1}} \right)^h \right)^g \quad \text{e} \quad h_1^{(g^h)} = \left(\left(h_1^{h^{-1}} \right)^g \right)^h,$$

definimos $G \otimes H$ como o grupo gerado pelos símbolos $g \otimes h$ e definido pelas relações

$$gg_1 \otimes h = (g^{g_1} \otimes h^{g_1})(g_1 \otimes h);$$

$$g \otimes hh_1 = (g \otimes h_1)(g^{h_1} \otimes h^{h_1}),$$

para todos $g, g_1 \in G$ e $h, h_1 \in H$. Como a ação por conjugação de um grupo sobre si mesmo é sempre compatível, o quadrado tensorial $G \otimes G$ de um grupo G sempre é definido. Ações, grupo gerado, ação por conjugação e outras definições essenciais para o desenvolvimento da teoria serão expostas no Capítulo 1. A descrição do produto tensorial não abeliano e algumas de suas propriedades serão expostas no Capítulo 2.

O objetivo deste trabalho é mostrar algumas ideias de autores que buscaram investigar quando o produto tensorial não abeliano herda as características de seus grupos geradores.

Como algumas propriedades de grupos (como finitude, solubilidade e nilpotência) são fechadas sob formação de subgrupos, uma primeira ideia era a de criar um grupo "maior", que contivesse o produto tensorial não abeliano ou, no mínimo, uma cópia do mesmo. No Capítulo 3, definiremos um grupo com essa propriedade:

Definição 3.1.1 [9] *Sejam $G = \langle X_G | R_G \rangle$ e $H = \langle X_H | R_H \rangle$ dois grupos agindo compativelmente um sobre o outro e H^Φ uma cópia de H , através de um isomorfismo $\Phi : H \longrightarrow H^\Phi$, $h \mapsto h^\Phi$. Definimos*

$$\eta(G, H) = \langle X_G, (X_H)^\Phi | R_G, (R_H)^\Phi, [g, h^\Phi]^{g_1} = [g^{g_1}, (h^{g_1})^\Phi], [g, h^\Phi]^{h_1} = [g^{h_1}, (h^{h_1})^\Phi] \rangle,$$

onde g, g_1 são elementos quaisquer de G e h, h_1 são elementos quaisquer de H .

Provaremos que

Proposição 3.1.3 [9] *O subgrupo $\tau(G, H)$ de $\eta(G, H)$ é isomorfo a $G \otimes H$,*

isto é, o grupo $\eta(G, H)$ possui uma cópia do produto tensorial não-abeliano em si, como desejávamos. Com isso, o foco da pesquisa agora é saber que propriedades (fechadas à formação de subgrupos) o grupo $\eta(G, H)$ possui. Veremos algumas dessas propriedades no Capítulo 3.

Muitos autores, em diversos trabalhos, pesquisaram e estudaram vários aspectos teóricos sobre o produto tensorial não abeliano. Determinar quais propriedades de grupos são fechadas sob formação do produto tensorial não abeliano era um dos focos principais. Vários autores chegaram em respostas positivas para diversas propriedades: Ellis [4] mostrou para finitude; Visscher [16] mostrou, indiretamente, para nilpotência; Moravec [8] mostrou para grupos policíclicos; Nakaoka [9] mostrou para solubilidade. As demonstrações desses autores são muito parecidas. No capítulo 4 demonstraremos o

Teorema 4.2.10 *Sejam G e H grupos agindo compativelmente um sobre o outro e suponha que $\mathfrak{X}$ seja uma propriedade de grupos fechada a formação de subgrupos, imagens homomórficas, extensões, produto tensorial de anel de grupo usual (sobre $\mathbb{Z}G$) e segundo e terceiro grupos de cohomologia. Nessas condições, se $G, H, \Gamma(K) \in \mathfrak{X}$ então $G \otimes H \in \mathfrak{X}$,*

finalizando nosso trabalho (esse teorema é uma versão modificada de um teorema encontrado em [14].)

Preliminares

Neste capítulo, introduziremos algumas noções básicas sobre Teoria de Grupos, definiremos algumas notações a fim de facilitar a compreensão e visualização do texto e introduziremos algumas ferramentas para o desenvolvimento da teoria. As demonstrações de alguns resultados aqui apresentados estarão omitidas; elas podem ser obtidas em [13], [6], [7] e [11].

1.1 Conjuntos de Palavras

Definição 1.1.1 *Sejam G um grupo e X um subconjunto não vazio de G . Um elemento w de G da forma*

$$x_1^{e_1} x_2^{e_2} \dots x_i^{e_i}, \text{ onde } i \in \mathbb{N}^* \text{ e } (\forall j \in \mathbb{N}^*, x_j \in X \text{ e } e_j \in \{-1, +1\})$$

é chamado palavra sobre X . O conjunto de todas as palavras sobre X será denotado por $W(X)$.

Definição 1.1.2 *Sejam G um grupo e X um subconjunto de G . A interseção de todos os subgrupos de G que contém X é chamada subgrupo de G gerado por X e será denotada por $\langle X \rangle$.*

Proposição 1.1.3 *Sejam G um grupo e X um subconjunto de G . Se $X = \emptyset$, então $\langle X \rangle = \{1_G\}$; se $X \neq \emptyset$, então $\langle X \rangle = W(X)$.*

Definição 1.1.4 *Sejam G um grupo e X um subconjunto de G . A interseção de todos os subgrupos normais de G que contém X é chamada fecho normal de X em G e será denotada por $\langle X \rangle^G$.*

Proposição 1.1.5 *Sejam G um grupo e X um subconjunto de G .*

(a) *Se $X = \emptyset$, então $\langle X \rangle^G = \{1_G\}$; se $X \neq \emptyset$, então $\langle X \rangle^G = W(X^G)$, onde $X^G = \{g^{-1}xg \mid g \in G, x \in X\}$;*

(b) *Se $g^{-1}xg \in X$ para todos $x \in X$ e $g \in G$, então $\langle X \rangle^G = \langle X \rangle$.*

1.2 Homomorfismos e Alguns Tipos de Grupos

1.2.1 Homomorfismos

Definição 1.2.1 *Sejam G e H grupos.*

(a) *Uma função $f : G \longrightarrow H$ satisfazendo*

$$f(ab) = f(a)f(b), \quad \forall a, b \in G$$

é chamada homomorfismo de G em H . O conjunto de todos os homomorfismos de G em H será denotado por $\text{Hom}(G, H)$.

(b) *Uma função $f : G \longrightarrow H$ satisfazendo*

$$f(ab) = f(b)f(a), \quad \forall a, b \in G$$

é chamada homomorfismo reverso de G em H . O conjunto de todos os homomorfismos reversos de G em H será denotado por $\text{Hom}^(G, H)$.*

(c) *Um homomorfismo injetivo é chamado monomorfismo. Um homomorfismo sobrejetivo é chamado epimorfismo. Um homomorfismo bijetivo é chamado isomorfismo.*

(d) *Se existe um epimorfismo de G em H , então o grupo H é chamado imagem homomórfica de G .*

(e) *Se existe um isomorfismo de G em H , diremos que tais grupos são isomorfos e denotaremos essa situação por $G \cong H$.*

(f) *Um isomorfismo de G em G é chamado automorfismo de G . O conjunto de todos os automorfismos de G será denotado por $\text{Aut } G$.*

Teorema 1.2.2 *Se $f : G \longrightarrow H$ é um homomorfismo, então $G/\ker f \cong \text{Im } f$.*

Proposição 1.2.3 *As relações*

$$\begin{array}{ccc} \Psi_1 : \text{Hom}(G, H) & \longrightarrow & \text{Hom}^*(G, H) \\ \phi & \longmapsto & \begin{array}{ccc} \phi' : G & \longrightarrow & H \\ g & \longmapsto & \phi(g)^{-1} \end{array} \end{array}$$

e

$$\begin{array}{ccc} \Psi_2 : \text{Hom}^*(G, H) & \longrightarrow & \text{Hom}(G, H) \\ \phi & \longmapsto & \begin{array}{ccc} \phi' : G & \longrightarrow & H \\ g & \longmapsto & \phi(g)^{-1} \end{array} \end{array}$$

são funções tais que $\Psi_1 \circ \Psi_2 = 1_{\text{Hom}^(G, H)}$ e $\Psi_2 \circ \Psi_1 = 1_{\text{Hom}(G, H)}$, isto é, os conjuntos $\text{Hom}(G, H)$ e $\text{Hom}^*(G, H)$ têm a mesma cardinalidade.*

Demonstração. Defina o objeto

$$\begin{aligned} \Psi_1 : \text{Hom}(G, H) &\longrightarrow \text{Hom}^*(G, H) \\ \phi &\longmapsto \begin{aligned} \phi' : G &\longrightarrow H \\ g &\longmapsto \phi(g)^{-1} \end{aligned} \end{aligned} \quad (1)$$

Seja $\phi \in \text{Hom}(G, H)$. Como $\phi(g) \in H$, para cada $g \in G$, e H é um grupo, temos $\phi(g)^{-1} \in H$, para cada $g \in G$. Logo, o objeto

$$\begin{aligned} \phi' : G &\longrightarrow H \\ g &\longmapsto \phi(g)^{-1} \end{aligned}$$

é uma relação, para cada $\phi \in \text{Hom}(G, H)$.

i) Para todos $g_1, g_2 \in G$,

$$\begin{aligned} g_1 = g_2 &\implies \phi(g_1) = \phi(g_2) && (\text{pois } \phi \text{ é uma função}) \\ &\implies \phi(g_1)^{-1} = \phi(g_2)^{-1} \\ &\implies \phi'(g_1) = \phi'(g_2). \end{aligned}$$

ii) Para todos $g_1, g_2 \in G$,

$$\begin{aligned} \phi'(g_1 g_2) &= \phi(g_1 g_2)^{-1} \\ &= (\phi(g_1) \phi(g_2))^{-1} && (\text{pois } \phi \text{ é um homomorfismo}) \\ &= \phi(g_2)^{-1} \phi(g_1)^{-1} \\ &= \phi'(g_2) \phi'(g_1). \end{aligned}$$

Os itens acima mostram que, para cada $\phi \in \text{Hom}(G, H)$, ϕ' é um homomorfismo reverso, isto é, para cada $\phi \in \text{Hom}(G, H)$, $\phi' \in \text{Hom}^*(G, H)$. Isso mostra que o objeto (1) é uma relação. Também temos que, para todos $\phi_1, \phi_2 \in \text{Hom}(G, H)$,

$$\begin{aligned} \phi_1 = \phi_2 &\implies \phi_1(g) = \phi_2(g), && \forall g \in G \\ &\implies \phi_1(g)^{-1} = \phi_2(g)^{-1}, && \forall g \in G \\ &\implies \phi'_1(g) = \phi'_2(g), && \forall g \in G \\ &\implies \phi'_1 = \phi'_2 \\ &\implies \Psi_1(\phi_1) = \Psi_1(\phi_2). \end{aligned}$$

Portanto, Ψ_1 é uma função. Analogamente, prova-se que Ψ_2 é uma função. Além disso, para todos $\phi \in \text{Hom}(G, H)$, $\phi' \in \text{Hom}^*(G, H)$,

$$\begin{aligned} \text{iii) } \Psi_2 \circ \Psi_1(\phi) &= \Psi_2(\phi' : g \longmapsto \phi(g)^{-1}) \\ &= \theta : g \longmapsto \phi'(g)^{-1} = (\phi(g)^{-1})^{-1} = \phi(g) \\ &= \phi \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{iv) } \Psi_1 \circ \Psi_2(\phi') &= \Psi_1(\phi : g \longmapsto \phi'(g)^{-1}) \\ &= \theta : g \longmapsto \phi(g)^{-1} = (\phi'(g)^{-1})^{-1} = \phi'(g) \\ &= \phi' \end{aligned}$$

Isso mostra que $\psi_1 \circ \psi_2 = 1_{\text{Hom}^*(G,H)}$ e $\psi_2 \circ \psi_1 = 1_{\text{Hom}(G,H)}$ e isso encerra a demonstração. $\square$

1.2.2 Comutadores e Subgrupos comutadores

Definição 1.2.4 *Seja G um grupo.*

(a) *Se x_1 e x_2 são elementos de G , então o comutador de x_1 por x_2 é o elemento $x_1^{-1}x_2^{-1}x_1x_2$; denotaremos tal elemento por $[x_1, x_2]$.*

(b) *Para $i \in \mathbb{N}^*$, sejam $x_1, x_2, \dots, x_i$ elementos de G . A sequência $\{[x_1, x_2, \dots, x_i]\}_{i \in \mathbb{N}^*}$ é definida por*

$$[x_1] = x_1 \quad \text{e} \quad [x_1, x_2, \dots, x_i] = [[x_1, x_2, \dots, x_{i-1}], x_i], \quad i \in \mathbb{N}^* - \{1\}.$$

O elemento $[x_1, x_2, \dots, x_n]$ é chamado comutador simples de peso n .

(c) *Sejam x e y elementos de G . A sequência $\{[x, {}_iy]\}_{i \in \mathbb{N}^*}$ é definida por*

$$[x, {}_1y] = [x, y] \quad \text{e} \quad [x, {}_{i+1}y] = [[x, {}_iy], y], \quad i \in \mathbb{N}^*.$$

Proposição 1.2.5 *Sejam x, y e z elementos de um grupo G . Então*

(a) $[x, y] = [y, x]^{-1} = y^{-1}[x, y^{-1}]^{-1}y = x^{-1}[x^{-1}, y]^{-1}x;$

(b) $[xy, z] = y^{-1}[x, z]y[y, z];$

(c) $[x, yz] = [x, z]z^{-1}[x, y]z;$

(d) $[x^{-1}yx, x^{-1}zx] = x^{-1}[y, z]x.$

Definição 1.2.6 *Sejam G um grupo e X e Y subconjuntos não vazios de G . O subgrupo*

$$[X, Y] = \langle [x, y] \mid x \in X, y \in Y \rangle$$

de G é chamado subgrupo comutador de X e Y . Se T é um grupo, denotaremos $T' := [T, T]$.

Proposição 1.2.7 *Sejam H e K subgrupos de um grupo G e G_1 um grupo. Então*

(a) $[H, K] = [K, H];$

(b) *Se $\alpha : G \longrightarrow G_1$ é um homomorfismo então $\alpha([H, K]) = [\alpha(H), \alpha(K)];$*

(c) *Se H e K são subgrupos normais de G então $[H, K]$ é um subgrupo normal de G ;*

(d) *Se Y é um subconjunto não vazio de K tal que $K = \langle Y \rangle$, então*

$$[H, K] = \langle k^{-1}[h, y]k \mid h \in H, y \in Y, k \in K \rangle;$$

(e) Se X é um subconjunto não-vazio de H e Y é um subconjunto não vazio de K tais que $H = \langle X \rangle$ e $K = \langle Y \rangle$, então

$$[H, K] = \langle (hk)^{-1}[x, y]hk \mid x \in X, y \in Y, h \in H, k \in K \rangle.$$

1.2.3 Grupos Solúveis

Definição 1.2.8 Seja G um grupo. Uma sequência $\{G^i\}_{i \in \mathbb{N}}$ de subgrupos de G satisfazendo

$$G = G^0 \supseteq G^1 \supseteq \cdots \supseteq G^m = \{1_G\} \supseteq G^{m+1} \supseteq \cdots,$$

para algum $m \in \mathbb{N}$, é chamada série subnormal de G . Os grupos G^i/G^{i+1} , $i \in \mathbb{N}$, são chamados grupos fatores da série normal de G .

Definição 1.2.9 Seja G um grupo. Uma série solúvel de G é uma série subnormal de G cujos grupos fatores são abelianos. Um grupo que admite alguma série solúvel é chamado grupo solúvel.

Definição 1.2.10 Seja G um grupo. A sequência $\{G^{(i)}\}_{i \in \mathbb{N}}$ definida por

$$G^{(0)} = G \quad \text{e} \quad G^{(i+1)} = [G^{(i)}, G^{(i)}], \quad i \in \mathbb{N}$$

é chamada série derivada de G . Quando, para algum $l \in \mathbb{N}$, $G^{(l-1)} \neq G^{(l)} = \{1_G\}$, dizemos que G é um grupo solúvel de comprimento derivado l . Denotaremos o comprimento derivado de um grupo solúvel G (quando existir) por $l(G)$.

Teorema 1.2.11 Um grupo é solúvel se, e somente se, sua série derivada é uma série subnormal.

Teorema 1.2.12 Seja G um grupo solúvel.

- (i) Todo subgrupo de G é solúvel.
- (ii) Toda imagem homomórfica de G é solúvel.

Teorema 1.2.13 Seja G um grupo. Se G admite um subgrupo normal N tal que N e G/N são grupos solúveis então G também é um grupo solúvel.

1.2.4 Grupos Nilpotentes

Definição 1.2.14 *Seja G um grupo. A sequência $\{\gamma_i(G)\}_{i \in \mathbb{N}^*}$ definida por*

$$\gamma_1(G) = G \quad \text{e} \quad \gamma_{i+1}(G) = [\gamma_i(G), G], \quad i \in \mathbb{N}^*$$

é chamada série central inferior de G . Quando, para algum $c \in \mathbb{N}$, $\gamma_c(G) \neq \gamma_{c+1}(G) = \{1_G\}$, dizemos que G é um grupo nilpotente, de classe de nilpotência c .

Definição 1.2.15 *Seja G um grupo. G é chamado grupo nilpotente se a série central inferior de G é uma série subnormal de G .*

Teorema 1.2.16 *Seja G um grupo nilpotente.*

(a) *Todo subgrupo de G é nilpotente.*

(b) *Toda imagem homomórfica de G é nilpotente.*

Para cada número natural r , definamos $B_{r,2} := \frac{r(r-1)}{2}$.

Teorema 1.2.17 (Critério de Philip Hall) *Se N é um subgrupo normal de um grupo G tal que N e G/N são nilpotentes de classes s e n , respectivamente, então G é nilpotente de classe, no máximo, $nB_{s+1,2} - B_{s,2}$.*

1.2.5 Grupos Engelianos

Definição 1.2.18 *Seja G um grupo. Se para qualquer par de elementos $x, y \in G$ existe um número natural $n = n(x, y)$ tal que $[x, n y] = 1_G$ então G é chamado grupo Engliano. Se existe algum número natural n tal que, para todo par de elementos $x, y \in G$ ocorre $[x, n y] = 1_G$, então G é chamado grupo n -Engliano.*

Teorema 1.2.19 (Zorn) *Se G é um grupo Engliano finito, então G é nilpotente.*

Teorema 1.2.20 (Gruenberg) *Se G é um grupo Engliano solúvel finitamente gerado, então G é nilpotente.*

1.2.6 Grupos Livres

Definição 1.2.21 *Um grupo L é dito ser livre sobre um conjunto X , $X \subseteq L$, se para qualquer grupo G e qualquer função $\theta : X \rightarrow G$ existe um único homomorfismo $\theta' : L \rightarrow G$ tal que $\theta'(x) = \theta(x)$, para todo $x \in X$.*

Definição 1.2.22 Um grupo abeliano L é dito ser abeliano livre sobre um conjunto X , $X \subseteq L$, se para qualquer grupo abeliano G e qualquer função $\theta : X \rightarrow G$ existe um único homomorfismo $\theta' : L \rightarrow G$ tal que $\theta'(x) = \theta(x)$, para todo $x \in X$.

Exemplo 1.2.23 Considere $\mathbb{Z}$, o conjunto dos números inteiros, e $\{1\} \subset \mathbb{Z}$. Considere agora G um grupo e $\phi : \{1\} \rightarrow G$ uma função.

i) Existe o homomorfismo

$$\begin{aligned} \phi' : \mathbb{Z} &\longrightarrow G \\ n &\longmapsto \phi(1)^n, \end{aligned} \quad \forall n \in \mathbb{Z}.$$

Tal homomorfismo satisfaz $\phi'(1) = \phi(1)$.

ii) Se θ é um homomorfismo, com $\theta(1) = \phi(1)$, então $\theta(n) = \theta(n \cdot 1) = \theta(1)^n = \phi(1)^n$, para todo $n \in \mathbb{Z}$ e, assim, $\theta = \phi'$.

Dos itens acima concluímos que, para qualquer grupo G e qualquer função $\phi : \{1\} \rightarrow G$, existe um único homomorfismo $\phi' : \mathbb{Z} \rightarrow G$ tal que $\phi'(1) = \phi(1)$. Portanto, $\mathbb{Z}$ é um grupo livre sobre $\{1\}$.

Exemplo 1.2.24 O conjunto $\left\langle \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \right\rangle$ é um subgrupo livre do grupo $SL(2, \mathbb{C})$, o grupo das matrizes 2×2 com entradas em $\mathbb{C}$.

Teorema 1.2.25 Sejam L_1 e L_2 grupos livres sobre X_1 e X_2 , respectivamente. $L_1 \cong L_2$ se, e somente se, $X_1 \cong X_2$.

Definição 1.2.26 Sejam $L(X)$ um grupo livre sobre um conjunto X , R um subconjunto de $L(X)$ e $T = \langle R \rangle^{L(X)}$ o fecho normal de R em $L(X)$. Definimos a notação

$$\langle X | R \rangle := L(X)/T.$$

Essa notação é dita apresentação para o grupo $L(X)/T$. Os elementos de X são chamados geradores de $L(X)/T$ e os elementos de R são chamados relatores de $L(X)/T$. Se, na notação acima, ambos X e R são finitos, dizemos que o grupo $L(X)/T$ tem uma apresentação finita.

Exemplo 1.2.27 Considere $\{3\} \subset \mathbb{Z}$. Como $\mathbb{Z}$ é abeliano, temos que $\langle \{3\} \rangle^{\mathbb{Z}} = \langle \{3\} \rangle = 3\mathbb{Z}$. Assim, temos que $\langle \{1\} | \{3\} \rangle = \mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}_3$.

Observemos que o grupo $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ tem apresentação finita. Para evitar o uso excessivo das chaves, omitimos as mesmas dentro da notação da apresentação de um grupo sempre que possível. Assim, no exemplo anterior, $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z} = \langle 1 | 3 \rangle$.

Exemplo 1.2.28 O grupo diedral de grau n , D_n , tem apresentação

$$D_n = \langle x, y \mid x^2 = 1, y^n = 1, x^{-1}yx = y^{-1} \rangle.$$

Proposição 1.2.29 Todo grupo é imagem homomórfica de algum grupo livre.

Proposição 1.2.30 Todo grupo tem uma apresentação. Todo grupo finito tem uma apresentação finita.

Proposição 1.2.31 Se $L(X)$ é um grupo livre sobre X , então $L(X) = \langle X \rangle$.

Das proposições acima (1.2.30 e 1.2.31), podemos simplificar ainda mais a notação da apresentação de um grupo, descrevendo os relatores em função dos geradores. Assim, $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z} = \langle 1 \mid 1^3 \rangle$.

Na verdade, os relatores de um grupo definem identidades no grupo e, por esse motivo, é muito comum descrever a apresentação de um grupo em função dessas identidades. De fato, se G é um grupo e $L(X_G)$ é um grupo livre sobre o conjunto X_G , onde $G = \langle X_G \rangle$, então todo relator é representante da classe lateral de $\ker \phi$, onde ϕ é o (único) homomorfismo de $L(X_G)$ em G (obtido pela definição de grupo livre). Assim, podemos escrever $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z} = \langle 1 \mid 1^3 = 0 \rangle$ ou, ainda, $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z} = \langle 1 \mid 1^4 = 1 \rangle$ (aqui, 0 é o elemento neutro de $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$). Essas diferentes notações aparecerão ao longo deste trabalho para representar alguns grupos de maneira conveniente, visando facilitar o raciocínio.

Proposição 1.2.32 Sejam G , H e K grupos e $\alpha : G \longrightarrow H$, $\beta : G \longrightarrow K$ homomorfismos tais que α é sobrejetivo e $\ker \alpha \subseteq \ker \beta$. Existe um homomorfismo $\gamma : H \longrightarrow K$ tal que $\gamma\alpha = \beta$.

Teorema 1.2.33 Sejam $G = \langle X_G \mid R_G \rangle$ e $H = \langle X_H \mid R_H \rangle$ grupos e $\theta : X_G \longrightarrow H$ uma função. Existe um único homomorfismo $\theta' : G \longrightarrow H$ tal que $\theta'(x) = \theta(x)$, $\forall x \in X_G$, se, e somente se,

$$\forall n \in \mathbb{N} - \{0\}, \prod_{i=1}^n x_i^{\varepsilon_i} \in R_G \implies \prod_{i=1}^n \theta(x_i)^{\varepsilon_i} \in \langle R_H \rangle^{L(X_H)},$$

onde $\varepsilon_i \in \{-1, +1\}$.

Proposição 1.2.34 Sejam G e H grupos com apresentações $\langle X_G \mid R_G \rangle$ e $\langle X_H \mid R_H \rangle$, respectivamente. Então, o (grupo) produto direto $G \times H$ tem apresentação

$$\langle X_G \cup X_H \mid R_G \cup R_H \cup [X_G, X_H] \rangle.$$

Para facilitar a notação da representação de um grupo, cujo conjunto de geradores é união de conjuntos, representamos tais conjuntos na notação da apresentação separados por vírgulas. Assim, o grupo produto direto $G \times H$ da proposição anterior pode ser representado por $\langle X_G, X_H \mid R_G, R_H, [X_G, X_H] \rangle$.

Definição 1.2.35 *Sejam G e H grupos com apresentações $\langle X_G | R_G \rangle$ e $\langle X_H | R_H \rangle$, respectivamente. O grupo $\langle X_G, X_H | R_G, R_H \rangle$ é chamado produto livre de G e H e será denotado por $G * H$.*

Proposição 1.2.36 *Sejam G e H grupos não-triviais e $G * H$ seu produto livre. Então o subgrupo comutador $[G, H]$ é normal em $G * H$. Além disso, $[G, H]$ é um grupo livre sobre o conjunto $\{[g, h] \mid g \in G^*, h \in H^*\}$.*

1.2.7 Grupo de Whitehead

Definição 1.2.37 *Seja G um grupo abeliano. Seja $\gamma(G)$ o grupo livre sobre o conjunto $\gamma = \{\gamma(g) \mid g \in G\}$ e considere os conjuntos*

$$\gamma_1 = \{\gamma(g^{-1})\gamma(g)^{-1} \mid g \in G\}$$

e

$$\gamma_2 = \{\gamma(abc)\gamma(a)\gamma(b)\gamma(c) (\gamma(ab)\gamma(bc)\gamma(ca))^{-1} \mid a, b, c \in G\}.$$

O grupo $\langle \gamma \mid \gamma_1, \gamma_2 \rangle$ é chamado grupo de Whitehead e será denotado por $\Gamma(G)$.

Proposição 1.2.38 $\Gamma(\mathbb{Z}_n) \cong \begin{cases} \mathbb{Z}_n, & \text{se } n \text{ é ímpar} \\ \mathbb{Z}_{2n}, & \text{se } n \text{ é par} \end{cases}$

Proposição 1.2.39 *Sejam A e B grupos abelianos. Então*

$$\Gamma(A \oplus B) \cong \Gamma(A) \oplus \Gamma(B) \oplus (A \otimes_{\mathbb{Z}} B).$$

Proposição 1.2.40 *Se A é um grupo abeliano finito, então $\Gamma(A)$ também é um grupo abeliano finito.*

1.3 Ações

1.3.1 Ações entre Grupos

Definição 1.3.1 *Sejam G e H grupos. Diremos que H age sobre G se existe uma função $\phi : G \times H \longrightarrow G$ tal que, para todos $g, g_1, g_2 \in G, h, h_1, h_2 \in H$,*

- (i) $\phi(g, 1_H) = g$;
- (ii) $\phi(g, h_1 h_2) = \phi(\phi(g, h_1), h_2)$;
- (iii) $\phi(g_1 g_2, h) = \phi(g_1, h) \phi(g_2, h)$.

Também, nesse caso, diremos que ϕ é uma ação de H sobre G .

Exemplo 1.3.2 *Sejam G e H grupos. A função*

$$\begin{aligned} \phi : G \times H &\longrightarrow G \\ (g, h) &\longmapsto g, \quad \forall (g, h) \in G \times H, \end{aligned}$$

é uma ação de H sobre G . Nesse caso, diremos que H age trivialmente sobre G ou que G é H -trivial.

Exemplo 1.3.3 Seja G um grupo. A função

$$\begin{aligned} \phi : G \times G &\longrightarrow G \\ (x, g) &\longmapsto g^{-1}xg, \quad \forall x, g \in G, \end{aligned}$$

é uma ação de G sobre si mesmo. Essa ação é dita conjugação em G .

A partir desse ponto, se ϕ é uma ação de H sobre G , definiremos a notação

$$g^h := \phi(g, h).$$

Também, a partir de agora, a ação de um grupo G sobre si mesmo será sempre a conjugação (a não ser mencionado em contrário). Assim, se G é um grupo, para todos $x, g \in G$,

$$x^g := g^{-1}xg.$$

Sejam G e H grupos. Denotemos o conjunto de todas as ações de H sobre G por $\mathcal{A}(G, H)$.

Proposição 1.3.4 Sejam G e H grupos. As relações

$$\begin{aligned} \zeta_1 : \mathcal{A}(G, H) &\longrightarrow \text{Hom}(H, \text{Aut } G) \\ \phi &\longmapsto \begin{aligned} &\phi' : H \longrightarrow \text{Aut } G \\ &h \longmapsto \phi'_{h^{-1}} : G \longrightarrow G \\ &g \longmapsto \phi(g, h^{-1}) \end{aligned} \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \zeta_2 : \text{Hom}(H, \text{Aut } G) &\longrightarrow \mathcal{A}(G, H) \\ \phi' &\longmapsto \begin{aligned} &\phi : G \times H \longrightarrow G \\ &(g, h) \longmapsto \phi(h^{-1})(g) \end{aligned} \end{aligned}$$

são funções tais que $\zeta_1 \circ \zeta_2 = 1_{\text{Hom}(H, \text{Aut } G)}$ e $\zeta_2 \circ \zeta_1 = 1_{\mathcal{A}(G, H)}$, isto é, os conjuntos $\mathcal{A}(G, H)$ e $\text{Hom}(H, \text{Aut } G)$ têm a mesma cardinalidade.

Demonstração. Para cada $\phi \in \mathcal{A}(G, H)$ e $h \in H$, defina a relação

$$\begin{aligned} \phi'_h : G &\longrightarrow G \\ g &\longmapsto \phi(g, h), \quad \forall g \in G. \end{aligned}$$

i) Para todos $g_1, g_2 \in G$,

$$\begin{aligned} g_1 = g_2 &\implies \phi(g_1, h) = \phi(g_2, h) \quad (\text{pois } \phi \text{ é uma ação}) \\ &\implies \phi'_h(g_1) = \phi'_h(g_2). \end{aligned}$$

ii) Para todos $g_1, g_2 \in G$,

$$\begin{aligned} \phi'_h(g_1 g_2) &= \phi(g_1 g_2, h) \\ &= \phi(g_1, h) \phi(g_2, h) \quad (\text{pois } \phi \text{ é uma ação}) \\ &= \phi'_h(g_1) \phi'_h(g_2). \end{aligned}$$

iii) Para todos $g_1, g_2 \in G$,

$$\begin{aligned} \phi'_h(g_1) = \phi'_h(g_2) &\implies \phi(g_1, h) = \phi(g_2, h) \\ &\implies \phi(\phi(g_1, h), h^{-1}) = \phi(\phi(g_2, h), h^{-1}) \\ &\implies \phi(g_1, hh^{-1}) = \phi(g_2, hh^{-1}) \quad (\text{pois } \phi \text{ é uma ação}) \\ &\implies \phi(g_1, 1_H) = \phi(g_2, 1_H) \\ &\implies g_1 = g_2. \quad (\text{pois } \phi \text{ é uma ação}) \end{aligned}$$

iv) Para cada $g_1 \in G$ existe $g = \phi(g_1, h^{-1}) \in G$ tal que $\phi'_h(g) = g_1$.

Dos itens acima segue que, para cada $\phi \in \mathcal{A}(G, H)$ e para cada $h \in H$, $\phi'_h \in \text{Aut}(G)$. Para cada $\phi \in \mathcal{A}(G, H)$, defina a relação

$$\begin{aligned} \phi' : H &\longrightarrow \text{Aut}(G) \\ h &\longmapsto \phi'_{h^{-1}}, \quad \forall h \in H. \end{aligned}$$

v) Para todos $h_1, h_2 \in H$,

$$\begin{aligned} h_1 = h_2 &\implies h_1^{-1} = h_2^{-1} \\ &\implies \phi(g, h_1^{-1}) = \phi(g, h_2^{-1}), \quad \forall g \in G \\ &\implies \phi'_{h_1} = \phi'_{h_2} \\ &\implies \phi'(h_1) = \phi'(h_2). \end{aligned}$$

vi) Para todos $h_1, h_2 \in H$,

$$\begin{aligned} \phi'(h_1 h_2) &= \phi'_{h_2^{-1} h_1^{-1}} : g \longmapsto \phi(g, h_2^{-1} h_1^{-1}) = \phi(\phi(g, h_2^{-1}), h_1^{-1}) \\ &= \phi'_{h_2^{-1} h_1^{-1}} : g \longmapsto (\phi'_{h_1^{-1}} \circ \phi'_{h_2^{-1}})(g) \\ &= \phi'_{h_1^{-1}} \circ \phi'_{h_2^{-1}} \\ &= \phi'(h_1) \phi'(h_2). \end{aligned}$$

Dos itens acima, segue que, para cada $\phi \in \mathcal{A}(G, H)$, $\phi \in \text{Hom}(H, \text{Aut } G)$. Defina a relação

$$\begin{aligned} \zeta_1 : \mathcal{A}(G, H) &\longrightarrow \text{Hom}(H, \text{Aut } G) \\ \phi &\longmapsto \begin{array}{ccc} \phi' : H &\longrightarrow & \text{Aut } G \\ h &\longmapsto & \phi'_{h^{-1}} : G \longrightarrow G \\ & & g \longmapsto \phi(g, h^{-1}) \end{array} \end{aligned}$$

Para todos $\phi, \varphi \in \mathcal{A}(G, H)$,

$$\begin{aligned}\phi = \varphi &\implies \phi(g, h^{-1}) = \varphi(g, h^{-1}), \quad \forall g \in G, \quad \forall h \in H \\ &\implies \phi'_{h^{-1}} = \varphi'_{h^{-1}}, \quad \forall h \in H \\ &\implies \phi' = \varphi' \\ &\implies \zeta_1(\phi) = \zeta_1(\varphi)\end{aligned}$$

e, assim, ζ_1 é uma função.

Agora, para cada $\phi \in \text{Hom}(H, \text{Aut } G)$, defina a relação

$$\begin{aligned}\phi' : G \times H &\longrightarrow G \\ (g, h) &\longmapsto \phi(h^{-1})(g) \quad .\end{aligned}$$

v) Para todos $g_1, g_2 \in G, h_1, h_2 \in H$,

$$\begin{aligned}(g_1, h_1) = (g_2, h_2) &\implies g_1 = g_2 \wedge h_1 = h_2 \\ &\implies g_1 = g_2 \wedge \phi(h_1) = \phi(h_2) \\ &\implies \phi(h_1)(g_1) = \phi(h_2)(g_2) \\ &\implies \phi'(g_1, h_1) = \phi'(g_2, h_2).\end{aligned}$$

vi) Para todo $g \in G, \phi'(g, 1_H) = \phi(1_H)(g) = 1_{\text{Aut } G}(g) = g$.

vii) Para todos $g \in G, h_1, h_2 \in H$,

$$\begin{aligned}\phi'(g, h_1 h_2) &= \phi(h_2^{-1} h_1^{-1})(g) \\ &= (\phi(h_2^{-1}) \circ \phi(h_1^{-1}))(g) \\ &= \phi(h_2^{-1})(\phi(h_1^{-1})(g)) \\ &= \phi'(\phi'(g, h_1), h_2).\end{aligned}$$

viii) Para todos $g_1, g_2 \in G, h \in H$,

$$\begin{aligned}\phi'(g_1 g_2, h) &= \phi(h)(g_1 g_2) \\ &= \phi(h)(g_1) \phi(h)(g_2) \\ &= \phi'(g_1, h) \phi'(g_2, h).\end{aligned}$$

Dos itens acima, segue que, para cada $\phi \in \text{Hom}(H, \text{Aut } G)$, $\phi' \in \mathcal{A}(G, H)$.

Defina a relação

$$\begin{aligned}\zeta_2 : \text{Hom}(H, \text{Aut } G) &\longrightarrow \mathcal{A}(G, H) \\ \phi &\longmapsto \begin{aligned} \phi' : G \times H &\longrightarrow G \\ (g, h) &\longmapsto \phi(h^{-1})(g) \end{aligned} \quad .\end{aligned}$$

Para todos $\phi, \varphi \in \text{Hom}(H, \text{Aut } G)$,

$$\begin{aligned}
\phi = \varphi &\implies \phi(h^{-1}) = \varphi(h^{-1}), \quad \forall h \in H \\
&\implies \phi(h^{-1})(g) = \varphi(h^{-1})(g), \quad \forall g \in G, \quad \forall h \in H \\
&\implies \phi' = \varphi' \\
&\implies \zeta_2(\phi) = \zeta_2(\varphi).
\end{aligned}$$

e, assim, ζ_2 é uma função.

Não é difícil ver que $\zeta_1 \circ \zeta_2 = 1_{\text{Hom}(H, \text{Aut } G)}$ e $\zeta_2 \circ \zeta_1 = 1_{\mathcal{A}(G, H)}$. $\square$

1.3.2 Produto Semidireto de Grupos

Definição 1.3.5 *Seja K um subgrupo de um grupo G . Um subgrupo Q de G é chamado complemento de K em G se $K \cap Q = \{1_G\}$ e $KQ = G$.*

Definição 1.3.6 *Dados grupos K e Q , um grupo G é chamado produto semidireto de K por Q se $K \trianglelefteq G$ e K tem um complemento Q_1 em G tal que $Q_1 \cong Q$. Se G é produto semidireto de K por Q , então denotaremos $K \rtimes Q := G$.*

Teorema 1.3.7 *Sejam K e Q grupos e $\theta : Q \longrightarrow \text{Aut } K$ um homomorfismo. Defina $K \rtimes_{\theta} Q$ como o conjunto dos pares ordenados $(a, x) \in K \times Q$ e defina também*

$$\begin{aligned}
f : (K \rtimes_{\theta} Q) \times (K \rtimes_{\theta} Q) &\longrightarrow K \rtimes_{\theta} Q \\
((a, x), (b, y)) &\longmapsto (ab^{x^{-1}}, xy), \quad \forall a, b \in K, \quad \forall x, y \in Q,
\end{aligned}$$

onde $b^{x^{-1}} = (\theta(x))(b)$. Então $(K \rtimes_{\theta} Q, f)$ é um produto semidireto de K por Q .

Teorema 1.3.8 *Se G é um produto semidireto de K por Q , então existe um homomorfismo $\theta : Q \longrightarrow \text{Aut } K$ tal que $G \cong K \rtimes_{\theta} Q$.*

Corolário 1.3.9 *Sejam K e Q grupos. O conjunto de todas as ações de Q sobre K tem a mesma cardinalidade do conjunto de todos os produtos semidiretos de K por Q .*

1.3.3 Módulos Cruzados

Definição 1.3.10 *Um módulo cruzado é um par (μ, ϕ) tal que $\mu : M \longrightarrow P$ é um homomorfismo de grupos e $\phi : M \times P \longrightarrow M$ é uma ação, onde ambos estão sujeitos às seguintes condições:*

$$\begin{aligned}
(MC1) \quad \mu(m^p) &= p^{-1}\mu(m)p, \quad \forall p \in P, \quad \forall m \in M; \\
(MC2) \quad m_1^{\mu(m)} &= m^{-1}m_1m, \quad \forall m, m_1 \in M.
\end{aligned}$$

Proposição 1.3.11 *Sejam $\mu : M \longrightarrow P$ um homomorfismo e ϕ uma ação de P sobre M tais que o par (μ, ϕ) é um módulo cruzado. Então*

(a) $\ker \mu \leq Z(M)$;

(b) $\text{Im } \mu \trianglelefteq P$.

Demonstração.

(a) Suponha $m \in \ker \mu$. Então

$$m_1 = m_1^{\mu(m)} = m^{-1}m_1m, \quad \forall m_1 \in M,$$

e, assim, $[m, m_1] = 1_M$. Portanto, $\ker \mu \leq Z(M)$.

(b) Seja $\mu(m) \in \text{Im } \mu$. Então, para todo $p \in P$,

$$p^{-1}\mu(m)p = \mu(m^p) \in \text{Im } \mu,$$

e, portanto, $\text{Im } \mu \trianglelefteq P$. □

1.4 Módulos sobre um anel A

Definição 1.4.1 *Seja A um anel. Um A -módulo à esquerda (ou módulo à esquerda sobre A) é um grupo abeliano G juntamente com uma função $f : A \times G \longrightarrow G$ (denotaremos $ag := f(a, g)$) tais que, para todos $a_1, a_2 \in A$, $g_1, g_2 \in G$,*

- (i) $a_1(g_1 + g_2) = a_1g_1 + a_1g_2$;
- (ii) $(a_1 + a_2)g_1 = a_1g_1 + a_2g_1$;
- (iii) $a_1(a_2g_1) = (a_1a_2)g_1$.

Se A tem elemento identidade 1_A e, para todo $g \in G$,

- (iv) $1_Ag = g$,

então G é dito A -módulo unitário à esquerda. Se A é um anel de divisão então um A -módulo unitário à esquerda é chamado A -espaço vetorial à esquerda.

Dado um anel A , um A -módulo (unitário) à direita é definido similarmente via função $f : G \times A \longrightarrow G$ (onde denotamos $ga := f(g, a)$) e satisfazendo os análogos de (i)-(iv) da definição de A -módulo (unitário) à esquerda.

Definição 1.4.2 *Sejam G um A -módulo à direita e H um A -módulo à esquerda. Considere L o grupo abeliano livre sobre o conjunto $G \times H$. Considere os conjuntos*

$$\begin{aligned}
K_1 &= \{(g_1 + g_2, h) - (g_1, h) - (g_2, h) \mid g_1, g_2 \in G, h \in H\}, \\
K_2 &= \{(g, h_1 + h_2) - (g, h_1) - (g, h_2) \mid g \in G, h_1, h_2 \in H\}, \\
K_3 &= \{(ga, h) - (g, ah) \mid g \in G, h \in H, a \in A\},
\end{aligned}$$

e seja $K = \langle K_1 \cup K_2 \cup K_3 \rangle^L$. O grupo quociente L/K é chamado produto tensorial abeliano de G e H e o denotaremos por $G \otimes_A H$. A classe lateral $K + (g, h)$ será denotada por $g \otimes h$ e a classe lateral $K + (1_G, 1_H)$ será denotada por $1_{\otimes}$.

Definição 1.4.3 Se G e H são A -módulos à esquerda e à direita, respectivamente, e $\mathcal{A}$ é um grupo abeliano então uma função linear central de $G \times H$ em $\mathcal{A}$ é uma função $f : G \times H \longrightarrow \mathcal{A}$ tal que, para todos $g_1, g_2 \in G, h_1, h_2 \in H, a \in A$,

- (i) $f(g_1 + g_2, h_1) = f(g_1, h_1) + f(g_2, h_1);$
- (ii) $f(g_1, h_1 + h_2) = f(g_1, h_1) + f(g_1, h_2);$
- (iii) $f(g_1 a, h_1) = f(g_1, ah_1).$

Teorema 1.4.4 Sejam G e H A -módulos à direita e à esquerda, respectivamente, e $\mathcal{A}$ um grupo abeliano. Se $f : G \times H \longrightarrow \mathcal{A}$ é uma função linear central então existe um único homomorfismo de grupos $\tilde{f} : G \otimes_A H \longrightarrow \mathcal{A}$ tal que $\tilde{f}(g \otimes h) = f(g, h)$ para todo $g \otimes h \in G \otimes_A H$.

Demonstração. Sabemos, por definição, que $G \otimes_A H = \langle G \times H \mid K_1, K_2, K_3 \rangle$, onde

$$\begin{aligned}
K_1 &= \{(g_1 + g_2, h) - (g_1, h) - (g_2, h) \mid g_1, g_2 \in G, h \in H\}, \\
K_2 &= \{(g, h_1 + h_2) - (g, h_1) - (g, h_2) \mid g \in G, h_1, h_2 \in H\}
\end{aligned}$$

e

$$K_3 = \{(ga, h) - (g, ah) \mid g \in G, h \in H, a \in A\}.$$

Agora, considere $\mathcal{A} = \langle X_{\mathcal{A}} \mid R_{\mathcal{A}} \rangle$ e $P = \langle R_{\mathcal{A}} \rangle^{L(X_{\mathcal{A}})}$. Como f é uma função linear central, para todos $g_1, g_2 \in G, h_1, h_2 \in H, a \in A$, temos que

$$\begin{aligned}
P((g_1 + g_2, h) - (g_1, h) - (g_2, h)) &= P, \\
P((g, h_1 + h_2) - (g, h_1) - (g, h_2)) &= P, \\
P((ga, h) - (g, ah)) &= P
\end{aligned}$$

e, portanto, pelo Teorema 1.2.33, segue o resultado. □

1.5 Anel de Grupo

Proposição 1.5.1 Sejam G um grupo e

$$\mathbb{Z}G = \{f : G \longrightarrow \mathbb{Z} \mid f \text{ é função e } \#f^{-1}(\mathbb{Z}^*) < +\infty\}.$$

Sejam também

$$\begin{aligned} *_1 : \mathbb{Z}G \times \mathbb{Z}G &\longrightarrow \mathbb{Z}G \\ (f_1, f_2) &\longmapsto f_1 + f_2 : G \longrightarrow \mathbb{Z} \\ g &\longmapsto f_1(g) + f_2(g) \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} *_2 : \mathbb{Z}G \times \mathbb{Z}G &\longrightarrow \mathbb{Z}G \\ (f_1, f_2) &\longmapsto f_1 f_2 : G \longrightarrow \mathbb{Z} \\ g &\longmapsto \sum_{g_1 \in f^{-1}(\mathbb{Z}^*)} f_1(g_1) f_2(g_1^{-1}g) \end{aligned}.$$

Então, $(\mathbb{Z}G, *_1, *_2)$ é um anel.

Definição 1.5.2 O anel da proposição anterior é chamado anel de grupo de G sobre $\mathbb{Z}$.

Proposição 1.5.3 A relação

$$\begin{aligned} \varepsilon : \mathbb{Z}G &\longrightarrow \mathbb{Z} \\ f &\longmapsto \sum_{x \in f^{-1}(\mathbb{Z}^*)} f(x) \end{aligned}$$

é um homomorfismo de anéis.

Definição 1.5.4 O kernel do homomorfismo da proposição anterior é chamado ideal de aumento de G . Denotaremos tal conjunto por $I(G)$.

Proposição 1.5.5 Sejam A um grupo abeliano e $\phi : A \times G \longrightarrow A$ uma ação de G sobre A . Seja também a relação

$$\begin{aligned} \phi' : A \times \mathbb{Z}G &\longrightarrow A \\ (a, f) &\longmapsto \prod_{g \in f^{-1}(\mathbb{Z}^*)} \phi(a, g)^{f(g)} \end{aligned}$$

Então (A, ϕ') é um $\mathbb{Z}G$ -módulo à direita.

1.6 Sequências Exatas e Grupos de Cohomologia

1.6.1 Sequências Exatas

Definição 1.6.1 Uma sequência finita de homomorfismos de grupos

$$A_0 \xrightarrow{f_1} A_1 \xrightarrow{f_2} A_2 \xrightarrow{f_3} \dots \xrightarrow{f_{n-1}} A_{n-1} \xrightarrow{f_n} A_n$$

é dita exata se $\text{Im } f_i = \ker f_{i+1}$, para todo $0 < i < n$.

Definição 1.6.2 Quando a sequência

$$1 \longrightarrow A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \longrightarrow 1$$

é exata, ela é chamada sequência exata curta.

Exemplo 1.6.3 Seja $\mu : G \longrightarrow H$ um homomorfismo de grupos. A sequência

$$1 \longrightarrow \ker \mu \xrightarrow{\iota} G \xrightarrow{\pi} G/\ker \mu \longrightarrow 1$$

(onde ι é uma inclusão e π é uma projeção canônica) é uma sequência exata curta.

Definição 1.6.4 Seja

$$1 \longrightarrow A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \longrightarrow 1$$

uma sequência exata curta. Se $\text{Im } f \leq Z(B)$ então tal sequência é dita extensão central.

Exemplo 1.6.5 Se, no Exemplo 1.6.3, G é abeliano, então a sequência de tal exemplo é uma extensão central.

1.6.2 Grupos de Cohomologia

Definição 1.6.6 Sejam G e A grupos, onde A é grupo abeliano. Uma função $f : \prod_{i=1}^n G \longrightarrow A$ é chamada n -cocadeia de G em A , onde $n \in \mathbb{N}^*$.

Proposição 1.6.7 Para $n \in \mathbb{N}^*$, sejam

$$C^n(G, A) = \left\{ f : \prod_{i=1}^n G \longrightarrow A \mid f \text{ é uma } n\text{-cocadeia de } G \text{ em } A \right\}$$

e

$$\begin{aligned} *_n : C^n(G, A) \times C^n(G, A) &\longrightarrow C^n(G, A) \\ (f_1, f_2) &\longmapsto f_1 f_2 \end{aligned},$$

onde

$$\begin{aligned} f_1 f_2 : \prod_{i=1}^n G &\longrightarrow A \\ (g_1, g_2, \dots, g_n) &\longmapsto f_1(g_1, g_2, \dots, g_n) f_2(g_1, g_2, \dots, g_n) \end{aligned}.$$

Então, para todo $n \in \mathbb{N}^*$, $(G_n, *_n)$ é um grupo.

Proposição 1.6.8 Para cada $n \in \mathbb{N}^*$, a função

$$\begin{aligned} d_{n+1} : C^n(G, A) &\longrightarrow C^{n+1}(G, A) \\ f &\longmapsto F \end{aligned},$$

onde $F : \prod_{i=1}^{n+1} G \longrightarrow A$ é tal que, para todo $(g_1, \dots, g_{n+1}) \in \prod_{i=1}^{n+1} G$,

$$F(g_1, \dots, g_{n+1}) = f(g_2, \dots, g_{n+1}) \left[\prod_{i=1}^n f(g_1, \dots, g_i g_{i+1}, \dots, g_{n+1})^{(-1)^i} \right] f(g_1, \dots, g_n)^{(-1)^{n+1}},$$

é um homomorfismo.

Definição 1.6.9 Para $n \in \mathbb{N}^*$, considere a sequência

$$\dots \longrightarrow C^{n-1}(G, A) \xrightarrow{d_n} C^n(G, A) \xrightarrow{d_{n+1}} C^{n+1}(G, A) \longrightarrow \dots$$

e sejam $Z^n(G, A) = \ker d_{n+1}$ e $B^n(G, A) = \operatorname{Im} d_n$. O n -ésimo grupo de cohomologia do grupo G com coeficientes em A é o grupo abeliano dado por

$$H^n(G, A) = \frac{Z^n(G, A)}{B^n(G, A)}.$$

O Produto Tensorial não Abeliano de Grupos

Neste capítulo, introduziremos a noção de produto tensorial não abeliano de grupos e exibiremos algumas de suas principais propriedades.

2.1 Ações Compatíveis

Definição 2.1.1 *Sejam G e H grupos agindo um sobre o outro. Diremos que as ações são compatíveis se, para todos $g, g_1 \in G, h, h_1 \in H$,*

$$g^{(h^{g_1})} = ((g^{g_1^{-1}})^h)^{g_1} \text{ e } h^{(g^{h_1})} = ((h^{h_1^{-1}})^g)^{h_1}.$$

Exemplo 2.1.2 *Dado um grupo G , vimos no Exemplo 1.3.3 que a conjugação em G é uma ação. Temos, para todos $x, y, z \in G$,*

$$x^{(y^z)} = (y^{-1})^z x y^z = z^{-1} y^{-1} z x z^{-1} y z = z^{-1} y^{-1} x z^{-1} y z = z^{-1} (x^{z^{-1}})^y z = ((x^{z^{-1}})^y)^z.$$

Sendo assim, se considerarmos um grupo G com duas ações idênticas à conjugação, temos que tais ações são compatíveis.

Proposição 2.1.3 *Sejam G e H grupos agindo um sobre o outro tais que G é abeliano e H é G -trivial (Exemplo 1.3.2). Então tais ações são compatíveis.*

Demonstração. Para todos $g, g_1 \in G, h, h_1 \in H$,

$$\begin{aligned} g^{(h^{g_1})} &= g^h && (H \text{ } G\text{-trivial}) \\ &= g_1^{-1} (g_1 g g_1^{-1})^h g_1 && (G \text{ abeliano}) \\ &= ((g^{g_1^{-1}})^h)^{g_1} \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} h^{(g^{h_1})} &= h && (H \text{ } G\text{-trivial}) \\ &= (h^{h_1^{-1}})^{h_1} \\ &= ((h^{h_1^{-1}})^g)^{h_1} && (H \text{ } G\text{-trivial}). \end{aligned}$$

Portanto, as ações consideradas são compatíveis. □

Proposição 2.1.4 *Sejam G e H grupos agindo compativelmente um sobre o outro e sobre si mesmos por conjugação. Então, para todos $g, g_1 \in G, h, h_1 \in H$,*

$$g^{(g_1^h)} = ((g^{h^{-1}})^{g_1})^h \quad \text{e} \quad h^{(h_1^g)} = ((h^{g^{-1}})^{h_1})^g.$$

Demonstração. Para todos $g, g_1 \in G, h, h_1 \in H$,

$$g^{(g_1^h)} = (g_1^{-1})^h g g_1^h = (g_1^{-1} g^{h^{-1}} g_1)^h = ((g^{h^{-1}})^{g_1})^h$$

e

$$h^{(h_1^g)} = (h_1^{-1})^g h h_1^g = (h_1^{-1} h^{g^{-1}} h_1)^g = ((h^{g^{-1}})^{h_1})^g.$$

□

Corolário 2.1.5 *Sejam G e H grupos agindo compativelmente um sobre o outro. Então, para todos $x, y, z \in G \cup H$,*

$$x^{(y^z)} = ((x^{z^{-1}})^y)^z.$$

Considere G e H grupos tais que H age sobre G . Para todos $g \in G, h, h_1, h_2 \in H$, definiremos:

$$g^{h_1 h_2} := (g^{h_1})^{h_2} \quad \text{e} \quad g^{-h} := (g^{-1})^h.$$

Isso irá facilitar a escrita, evitando o uso excessivo dos parênteses.

Corolário 2.1.6 *Sejam G e H grupos agindo compativelmente um sobre o outro. Então, para todos $x, g, h \in G \cup H$,*

$$x^{g^{-1} h^{-1} g h} = x^{g^{-1} g^h} = x^{h^{-g} h}.$$

2.2 O Produto Tensorial não Abelianos de Grupos e suas Propriedades

Definição 2.2.1 *Sejam G e H grupos agindo compativelmente um sobre o outro. Seja $L(G \times H)$ o grupo livre sobre o conjunto $G \times H$ e considere os conjuntos*

$$R = \{(g g_1, h)(g_1, h)^{-1}(g^{g_1}, h^{g_1})^{-1} \mid g, g_1 \in G, h \in H\}$$

e

$$S = \{(g, h h_1)(g^{h_1}, h^{h_1})^{-1}(g, h_1)^{-1} \mid g \in G, h, h_1 \in H\}.$$

Seja $T = \langle R \cup S \rangle^{L(G \times H)}$. O grupo quociente $L(G \times H)/T$ é chamado produto tensorial não abeliano de grupos e será denotado por $G \otimes H$. A classe lateral $T(g, h)$ será denotada por $g \otimes h$. A classe lateral $T(1_G, 1_H)$ será denotada por $1_{\otimes}$.

Exemplo 2.2.2 Como a conjugação é uma ação compatível consigo mesma (Exemplo 2.1.2), sempre é possível construir $G \otimes G$, qualquer que seja o grupo G . O grupo $G \otimes G$ é chamado quadrado tensorial de G .

Proposição 2.2.3 Seja $G \otimes H$ o produto tensorial não abeliano de G e H . Para todos $g, g_1, g_2 \in G, h, h_1, h_2 \in H$,

$$(a) \quad gg_1 \otimes h = (g^{g_1} \otimes h^{g_1})(g_1 \otimes h);$$

$$(b) \quad g \otimes hh_1 = (g \otimes h_1)(g^{h_1} \otimes h^{h_1});$$

$$(c) \quad 1_G \otimes h = g \otimes 1_H = 1_{\otimes};$$

$$(d) \quad (g \otimes h)^{-1} = g^{-1} \otimes h^g = g^h \otimes h^{-1};$$

$$(e) \quad gg_1 \otimes h = (g_1 \otimes h^g)(g \otimes h);$$

$$(f) \quad g \otimes hh_1 = (g \otimes h)(g^h \otimes h_1);$$

$$(g) \quad \begin{cases} (g \otimes h)^{-1}(g_1 \otimes h_1)(g \otimes h) = g_1^{g^{-1}g^h} \otimes h_1^{g^{-1}g^h} = g_1^{h^{-g}h} \otimes h_1^{h^{-g}h} \\ (g \otimes h)(g_2 \otimes h_2)(g \otimes h)^{-1} = g_2^{g^{-h}g} \otimes h_2^{g^{-h}g} = g_2^{h^{-1}h^g} \otimes h_2^{h^{-1}h^g} \end{cases};$$

$$(h) \quad g^{-1}g^h \otimes h_1 = (g \otimes h)^{-1}(g^{h_1} \otimes h^{h_1});$$

$$(i) \quad g_1 \otimes h^{-g}h = (g^{g_1} \otimes h^{g_1})^{-1}(g \otimes h);$$

$$(j) \quad g^{-1}g^h \otimes h_1^{-g_1}h_1 = [g \otimes h, g_1 \otimes h_1].$$

Demonstração. Sejam $g, g_1, x \in G$ e $h, h_1, y \in H$.

(a) Como $(gg_1, h)(g_1, h)^{-1}(g^{g_1}, h^{g_1})^{-1} \in R \subset T$, temos

$$(gg_1 \otimes h)(g_1 \otimes h)^{-1}(g^{g_1} \otimes h^{g_1})^{-1} = 1_{\otimes}$$

e, daí, segue que $gg_1 \otimes h = (g^{g_1} \otimes h^{g_1})(g_1 \otimes h)$.

(b) Como $(g, hh_1)(g^{h_1}, h^{h_1})^{-1}(g, h_1)^{-1} \in S \subset T$, temos

$$(g \otimes hh_1)(g^{h_1} \otimes h^{h_1})^{-1}(g \otimes h_1)^{-1} = 1_{\otimes}$$

e, daí, segue que $g \otimes hh_1 = (g \otimes h_1)(g^{h_1} \otimes h^{h_1})$.

(c) Temos

$$1_G \otimes h = 1_G 1_G \otimes h = (1_G^{1_G} \otimes h^{1_G})(1_G \otimes h) = (1_G \otimes h)^2$$

e, portanto, $1_G \otimes h = 1_{\otimes}$. Também,

$$g \otimes 1_H = g \otimes 1_H 1_H = (g \otimes 1_H)(g^{1_H} \otimes 1_H^{1_H}) = (g \otimes 1_H)^2$$

e, portanto, $g \otimes 1_H = 1_{\otimes}$.

(d) Temos

$$1_{\otimes} = 1_G \otimes h = g^{-1} g \otimes h = (g^{-g} \otimes h^g)(g \otimes h) = (g^{-1} \otimes h^g)(g \otimes h)$$

e, portanto, $(g \otimes h)^{-1} = g^{-1} \otimes h^g$. Também,

$$1_{\otimes} = g \otimes 1_H = g \otimes h^{-1} h = (g \otimes h)(g^h \otimes h^{-h}) = (g \otimes h)(g^h \otimes h^{-1})$$

e, portanto, $(g \otimes h)^{-1} = g^h \otimes h^{-1}$.

(e) Temos

$$gg_1 \otimes h = g_1^{g^{-1}} g \otimes h = (g_1^{g^{-1}g} \otimes h^g)(g \otimes h) = (g_1 \otimes h^g)(g \otimes h)$$

e, daí, segue o resultado.

(f) Temos

$$g \otimes hh_1 = g \otimes h_1^{h^{-1}} h = (g \otimes h)(g^h \otimes h_1^{h^{-1}h}) = (g \otimes h)(g^h \otimes h_1)$$

e, daí, segue o resultado.

(g) Por um lado,

$$\begin{aligned} xg \otimes yh &= (x^g \otimes y^g h^g)(g \otimes yh) \\ &= (x^g \otimes h^g)(x^{hg} \otimes y^{hg})(g \otimes h)(g^h \otimes y^h). \end{aligned}$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned} xg \otimes yh &= (xg \otimes h)(x^h g^h \otimes y^h) \\ &= (x^g \otimes h^g)(g \otimes h)(x^{gh} \otimes y^{gh})(g^h \otimes y^h). \end{aligned}$$

Logo,

$$(x^{hg} \otimes y^{hg})(g \otimes h) = (g \otimes h)(x^{gh} \otimes y^{gh}).$$

Fazendo $x = g_1^{g^{-1}h^{-1}}$ e $y = h_1^{g^{-1}h^{-1}}$, temos

$$(g_1 \otimes h_1)(g \otimes h) = (g \otimes h)(g_1^{g^{-1}h^{-1}gh} \otimes h_1^{g^{-1}h^{-1}gh}).$$

Pelo Corolário 2.1.6, temos

$$(g \otimes h)^{-1}(g_1 \otimes h_1)(g \otimes h) = g_1^{g^{-1}h^{-1}gh} \otimes h_1^{g^{-1}h^{-1}gh} = g_1^{g^{-1}g^h} \otimes h_1^{g^{-1}g^h} = g_1^{h^{-g}h} \otimes h_1^{h^{-g}h}$$

e, daí, segue o resultado.

Para obter a outra parte, utilize a equação anterior fazendo $g_1 = g_2^{h^{-1}g^{-1}hg}$ e $h_1 = h_2^{h^{-1}g^{-1}hg}$.

(h) Por um lado,

$$\begin{aligned} g \otimes hh_1^{g^{-1}} &= g \otimes h_1^{g^{-1}h^{-1}}h \\ &= (g \otimes h)(g^h \otimes (h_1^{g^{-1}h^{-1}})^h) \\ &= (g \otimes h)(g^h \otimes h_1^{g^{-1}}). \end{aligned}$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned} g \otimes hh_1^{g^{-1}} &= (g^{-1} \otimes h^g h_1)^{-1} \\ &= ((g^{-1} \otimes h_1)(g^{-h_1} \otimes h^{gh_1}))^{-1} \\ &= (g^{-h_1} \otimes h^{gh_1})^{-1}(g^{-1} \otimes h_1)^{-1} \\ &= (g^{h_1} \otimes (h^{gh_1})^{g^{-h_1}})(g^{-1} \otimes h_1)^{-1} \\ &= (g^{h_1} \otimes h^{h_1})(g^{-1} \otimes h_1)^{-1}. \end{aligned}$$

Logo,

$$(g^h \otimes h_1^{g^{-1}})(g^{-1} \otimes h_1) = (g \otimes h)^{-1}(g^{h_1} \otimes h^{h_1})$$

e, portanto,

$$\begin{aligned} g^{-1}g^h \otimes h_1 &= g^{hg}g^{-1} \otimes h_1 \\ &= ((g^{hg})^{g^{-1}} \otimes h_1^{g^{-1}})(g^{-1} \otimes h_1) \\ &= (g^h \otimes h_1^{g^{-1}})(g^{-1} \otimes h_1) \\ &= (g \otimes h)^{-1}(g^{h_1} \otimes h^{h_1}). \end{aligned}$$

(i) Por um lado,

$$\begin{aligned} g_1^{g^{-1}h}g^h \otimes h^{-1} &= ((g_1^{g^{-1}h})^{g^h} \otimes h^{-g^h})(g^h \otimes h^{-1}) \\ &= (g_1^h \otimes h^{-g^h})(g \otimes h)^{-1}. \end{aligned}$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned}
g_1^{g^{-1}h} g^h \otimes h^{-1} &= (g_1^{g^{-1}} g \otimes h)^{-1} \\
&= (gg_1 \otimes h)^{-1} \\
&= ((g^{g_1} \otimes h^{g_1})(g_1 \otimes h))^{-1} \\
&= (g_1 \otimes h)^{-1} (g^{g_1} \otimes h^{g_1})^{-1}.
\end{aligned}$$

Logo,

$$(g_1 \otimes h)(g_1^h \otimes h^{-gh}) = (g^{g_1} \otimes h^{g_1})^{-1}(g \otimes h)$$

e, portanto,

$$\begin{aligned}
g_1 \otimes h^{-g} h &= (g_1 \otimes h)(g_1^h \otimes h^{-gh}) \\
&= (g^{g_1} \otimes h^{g_1})^{-1}(g \otimes h).
\end{aligned}$$

(j) Dos itens (g) e (h), temos

$$\begin{aligned}
g^{-1} g^h \otimes h_1^{-g_1} h_1 &= (g \otimes h)^{-1} (g^{h_1^{-g_1} h_1} \otimes h^{h_1^{-g_1} h_1}) \\
&= (g \otimes h)^{-1} (g_1 \otimes h_1)^{-1} (g \otimes h)(g_1 \otimes h_1) \\
&= [g \otimes h, g_1 \otimes h_1].
\end{aligned}$$

□

Definição 2.2.4 *Sejam G , H e L grupos. Uma função $\phi : G \times H \longrightarrow L$ é chamada biderivação se, para todos $g, g_1 \in G$, $h, h_1 \in H$,*

$$\phi(gg_1, h) = \phi(g^{g_1}, h^{g_1})\phi(g_1, h) \quad e \quad \phi(g, hh_1) = \phi(g, h_1)\phi(g^{h_1}, h^{h_1}).$$

Proposição 2.2.5 *Sejam L , G e H grupos e $\phi : G \times H \longrightarrow L$ uma biderivação. Existe um único homomorfismo $\phi^* : G \otimes H \longrightarrow L$ tal que $\phi^*(g \otimes h) = \phi(g, h)$, para todo $g \otimes h \in G \otimes H$.*

Demonstração. Sabemos, por definição, que $G \otimes H = \langle G \times H | R, S \rangle$, onde

$$R = \{(gg_1, h)(g_1, h)^{-1}(g^{g_1}, h^{g_1})^{-1} \mid g, g_1 \in G, h \in H\}$$

e

$$S = \{(g, hh_1)(g^{h_1}, h^{h_1})^{-1}(g, h_1)^{-1} \mid g \in G, h, h_1 \in H\}.$$

Agora, considere $L = \langle X_L | R_L \rangle$ e $P = \langle R_L \rangle^{L(X_L)}$. Como ϕ é uma biderivação, para todos $g, g_1 \in G$, $h, h_1 \in H$, temos que

$$P(\phi(gg_1, h)\phi(g_1, h)^{-1}\phi(g^{g_1}, h^{g_1})^{-1}) = P \quad e \quad P(\phi(g, hh_1)\phi(g^{h_1}, h^{h_1})^{-1}\phi(g, h_1)^{-1}) = P$$

e, portanto, pelo Teorema 1.2.33, segue o resultado. □

Proposição 2.2.6 *Sejam G e H grupos. Existem ações de G sobre $G \otimes H$ e de H sobre $G \otimes H$ tais que, para todos $g, x \in G, h, y \in H$,*

$$(g \otimes h)^x = g^{x^{-1}} \otimes h^{x^{-1}} \quad e \quad (g \otimes h)^y = g^{y^{-1}} \otimes h^{y^{-1}}.$$

Demonstração. Para $x \in G$, considere a relação

$$\begin{aligned} \phi_x : G \times H &\longrightarrow G \otimes H \\ (g, h) &\longmapsto g^x \otimes h^x, \quad \forall (g, h) \in G \times H. \end{aligned}$$

i) Para todos $g_1, g_2 \in G, h_1, h_2 \in H$,

$$\begin{aligned} (g_1, h_1) = (g_2, h_2) &\implies g_1 = g_2 \text{ e } h_1 = h_2 \\ &\implies g_1^x = g_2^x \text{ e } h_1^x = h_2^x \\ &\implies (g_1^x, h_1^x) = (g_2^x, h_2^x) \\ &\implies g_1^x \otimes h_1^x = g_2^x \otimes h_2^x \\ &\implies \phi_x(g_1, h_1) = \phi_x(g_2, h_2) \end{aligned}$$

e, assim, ϕ_x é uma função.

ii) Para todos $g, g_1 \in G, h \in H$ temos

$$\begin{aligned} \phi_x(gg_1, h) &= (gg_1)^x \otimes h^x \\ &= g^x g_1^x \otimes h^x \\ &= ((g^x)^{g_1^x} \otimes (h^x)^{g_1^x})(g_1^x \otimes h^x) \\ &= (g^{g_1^x} \otimes h^{g_1^x})(g_1^x \otimes h^x) \\ &= ((g^{g_1})^x \otimes (h^{g_1})^x)(g_1^x \otimes h^x) \\ &= \phi_x(g^{g_1}, h^{g_1}) \phi_x(g_1, h). \end{aligned}$$

iii) Para todos $g \in G, h, h_1 \in H$ temos

$$\begin{aligned} \phi_x(g, hh_1) &= g^x \otimes (hh_1)^x \\ &= g^x \otimes h^x h_1^x \\ &= (g^x \otimes h_1^x)((g^x)^{h_1^x} \otimes (h^x)^{h_1^x}) \\ &= (g^x \otimes h_1^x)(g^{h_1^x} \otimes h^{h_1^x}) \\ &= (g^x \otimes h_1^x)((g^{h_1})^x \otimes (h^{h_1})^x) \\ &= \phi_x(g, h_1) \phi_x(g^{h_1}, h^{h_1}). \end{aligned}$$

Dos itens acima segue que, para cada $x \in G$, ϕ_x é uma biderivação e, portanto, pelo Teorema 2.2.5, para cada $x \in G$, existe um (único) homomorfismo $\theta_x : G \otimes H \longrightarrow G \otimes H$ tal que $\theta_x(g \otimes h) = \phi_x(g, h) = g^x \otimes h^x$, para todo $g \otimes h \in G \otimes H$. Consideremos os homomorfismos $\theta_x, x \in G$. Para todos $x \in G, g \otimes h \in G \otimes H$,

$$\theta_x(\theta_{x^{-1}}(g \otimes h)) = \theta_x(g^{x^{-1}} \otimes h^{x^{-1}}) = g \otimes h = \theta_{x^{-1}}(g^x \otimes h^x) = \theta_{x^{-1}}(\theta_x(g \otimes h)).$$

Logo, para todo $x \in G$, $\theta_x \circ \theta_{x^{-1}} = \theta_{x^{-1}} \circ \theta_x = 1_{G \otimes H}$. Assim, para todo $x \in G$, θ_x é um homomorfismo inversível e, portanto, para todo $x \in G$, $\theta_x \in \text{Aut}(G \otimes H)$.

Agora, defina a relação

$$\begin{aligned} \xi &: G \longrightarrow \text{Aut}(G \otimes H), \\ x &\longmapsto \theta_x, \end{aligned} \quad \forall x \in G.$$

iv) Para todos $x_1, x_2 \in G$,

$$\begin{aligned} x_1 = x_2 &\implies g^{x_1} = g^{x_2} \text{ e } h^{x_1} = h^{x_2}, & \forall g \in G, \forall h \in H \\ &\implies g^{x_1} \otimes h^{x_1} = g^{x_2} \otimes h^{x_2}, & \forall g \in G, \forall h \in H \\ &\implies \theta_{x_1}(g \otimes h) = \theta_{x_2}(g \otimes h), & \forall g \otimes h \in G \otimes H \\ &\implies \theta_{x_1} = \theta_{x_2} \\ &\implies \xi(x_1) = \xi(x_2) \end{aligned}$$

e, assim, ξ é uma função.

v) Para todos $x_1, x_2 \in G$, $g \otimes h \in G \otimes H$, temos

$$\begin{aligned} \theta_{x_1 x_2}(g \otimes h) &= g^{x_1 x_2} \otimes h^{x_1 x_2} \\ &= (g^{x_1})^{x_2} \otimes (h^{x_1})^{x_2} \\ &= \theta_{x_2}(g^{x_1} \otimes h^{x_1}) \\ &= \theta_{x_2}(\theta_{x_1}(g \otimes h)) \end{aligned}$$

e, portanto, $\xi(x_1 x_2) = \xi(x_2) \xi(x_1)$, $\forall x_1, x_2 \in G$.

Dos itens acima segue que ξ é um homomorfismo reverso e, portanto, pela Proposição 1.2.3,

$$\begin{aligned} \xi' &: G \longrightarrow \text{Aut}(G \otimes H), \\ x &\longmapsto \theta_{x^{-1}}, \end{aligned} \quad \forall x \in G$$

é um homomorfismo. Logo, da Proposição 1.3.4, segue que

$$\begin{aligned} \alpha &: (G \otimes H) \times G \longrightarrow G \otimes H \\ (w, x) &\longmapsto \theta_{x^{-1}}(w), \end{aligned} \quad \forall (w, x) \in (G \otimes H) \times G$$

é uma ação de G sobre $G \otimes H$. Em particular, para todos $x, g \in G$, $h \in H$,

$$(g \otimes h)^x = \alpha(g \otimes h, x) = \theta_{x^{-1}}(g \otimes h) = g^{x^{-1}} \otimes h^{x^{-1}}$$

e, assim, concluímos a primeira parte do resultado. A outra parte é demonstrada de modo análogo. $\square$

Corolário 2.2.7 *Seja G um grupo. Existe uma ação de G sobre $G \otimes G$ tal que, $(g \otimes h)^x = g^{x^{-1}} \otimes h^{x^{-1}}$, para todos $g, h, x \in G$.*

Demonstração. Segue diretamente da proposição anterior (basta fazer $G = H$). $\square$

Proposição 2.2.8 *Existe um único isomorfismo*

$$\mathbf{v} : G \otimes H \longrightarrow H \otimes G$$

tal que $\mathbf{v}(g \otimes h) = (h \otimes g)^{-1}$, para todo $g \otimes h \in G \otimes H$.

Demonstração. Considere a relação

$$\begin{aligned} \phi : G \times H &\longrightarrow H \otimes G \\ (g, h) &\longmapsto (h \otimes g)^{-1}, \quad \forall (g, h) \in G \times H. \end{aligned}$$

i) Para todos $g_1, g_2 \in G, h_1, h_2 \in H$,

$$\begin{aligned} (g_1, h_1) = (g_2, h_2) &\implies g_1 = g_2 \text{ e } h_1 = h_2 \\ &\implies h_1 \otimes g_1 = h_2 \otimes g_2 \\ &\implies (h_1 \otimes g_1)^{-1} = (h_2 \otimes g_2)^{-1} \\ &\implies \phi(g_1, h_1) = \phi(g_2, h_2) \end{aligned}$$

e, portanto, ϕ é uma função.

ii) Para todos $g, g_1 \in G, h \in H$,

$$\begin{aligned} \phi(gg_1, h) &= (h \otimes gg_1)^{-1} \\ &= ((h \otimes g_1)(h^{g_1} \otimes g^{g_1}))^{-1} \\ &= (h^{g_1} \otimes g^{g_1})^{-1} (h \otimes g_1)^{-1} \\ &= \phi(g^{g_1}, h^{g_1}) \phi(g_1, h). \end{aligned}$$

iii) Para todos $g \in G, h, h_1 \in H$,

$$\begin{aligned} \phi(g, hh_1) &= (hh_1 \otimes g)^{-1} \\ &= ((h^{h_1} \otimes g^{h_1})(h_1 \otimes g))^{-1} \\ &= (h_1 \otimes g)^{-1} (h^{h_1} \otimes g^{h_1})^{-1} \\ &= \phi(g, h_1) \phi(g^{h_1}, h^{h_1}). \end{aligned}$$

Dos itens acima, segue que ϕ é uma biderivação e, portanto, do Teorema 2.2.5, existe um único homomorfismo $\mathbf{v} : G \otimes H \longrightarrow H \otimes G$ tal que $\mathbf{v}(g \otimes h) = (h \otimes g)^{-1}$, para todo $g \otimes h \in G \otimes H$. Utilizando argumentos análogos ao anterior, concluimos que existe também um único homomorfismo $\mathbf{v}' : H \otimes G \longrightarrow G \otimes H$ tal que $\mathbf{v}'(h \otimes g) = (g \otimes h)^{-1}$, para todo $h \otimes g \in H \otimes G$. Como, para todos $g \in G, h \in H$,

$$\mathbf{v}(\mathbf{v}'(h \otimes g)) = \mathbf{v}((g \otimes h)^{-1}) = \mathbf{v}(g \otimes h)^{-1} = ((h \otimes g)^{-1})^{-1} = h \otimes g$$

e

$$v'(v(g \otimes h)) = v'((h \otimes g)^{-1}) = v'(h \otimes g)^{-1} = ((g \otimes h)^{-1})^{-1} = g \otimes h,$$

temos que v é um isomorfismo e, daí, segue o resultado. $\square$

Proposição 2.2.9 *Sejam G e H grupos agindo compativelmente um sobre o outro.*

(a) *Existem homomorfismos de grupos $\lambda : G \otimes H \longrightarrow G$, $\mu : G \otimes H \longrightarrow H$ tais que, para todos $g \in G$, $h \in H$,*

$$\lambda(g \otimes h) = g^{-1}g^h \quad e \quad \mu(g \otimes h) = h^{-g}h;$$

(b) *Com as ações da Proposição 2.2.6 temos, para todos $g \in G$, $h \in H$, $w \in G \otimes H$,*

$$\lambda(w) \otimes h = w^{-1}w^{h^{-1}} \quad e \quad g \otimes \mu(w) = w^{-g^{-1}}w;$$

(c) *Para todos $w_1, w_2 \in G \otimes H$, $\lambda(w_1) \otimes \mu(w_2) = [w_1, w_2]$;*

(d) *$\ker \mu$ é G -trivial e $\ker \lambda$ é H -trivial.*

Demonstração.

(a) Considere a relação

$$\begin{aligned} \phi : G \times H &\longrightarrow G \\ (g, h) &\longmapsto g^{-1}g^h, \quad \forall (g, h) \in G \times H. \end{aligned}$$

i) Para todos $g_1, g_2 \in G$, $h_1, h_2 \in H$,

$$\begin{aligned} (g_1, h_1) = (g_2, h_2) &\implies g_1 = g_2 \text{ e } h_1 = h_2 \\ &\implies g_1^{-1} = g_2^{-1} \text{ e } g_1^{h_1} = g_2^{h_2} \\ &\implies g_1^{-1}g_1^{h_1} = g_2^{-1}g_2^{h_2} \\ &\implies \phi(g_1, h_1) = \phi(g_2, h_2) \end{aligned}$$

e, assim, ϕ é uma função.

ii) Para todos $g, g_1 \in G$, $h \in H$,

$$\begin{aligned} \phi(gg_1, h) &= (gg_1)^{-1}(gg_1)^h \\ &= g_1^{-1}g^{-1}g^hg_1^h \\ &= (g_1^{-1}g^{-1}g_1)(g_1^{-1}g^hg_1)(g_1^{-1}g_1^h) \\ &= (g^{-1})^{g_1}g^{hg_1}(g_1^{-1}g_1^h) \\ &= ((g^{g_1})^{-1}(g^{g_1})^{hg_1})(g_1^{-1}g_1^h) \\ &= \phi(g^{g_1}, h^{g_1})\phi(g_1, h). \end{aligned}$$

iii) Para todos $g \in G$, $h, h_1 \in H$,

$$\begin{aligned}
\phi(g, hh_1) &= g^{-1}g^{hh_1} \\
&= (g^{-1}g^{h_1})((g^{h_1})^{-1}(g^{h_1})^{h_1}) \\
&= \phi(g, h_1)\phi(g^{h_1}, h^{h_1}).
\end{aligned}$$

Dos itens acima segue que ϕ é uma biderivação e, portanto, existe um (único) homomorfismo $\lambda : G \otimes H \longrightarrow G$ tal que $\lambda(g \otimes h) = g^{-1}g^h$, para todo $g \otimes h \in G \otimes H$. Analogamente, existe um homomorfismo $\lambda' : H \otimes G \longrightarrow H$ tal que $\lambda'(h \otimes g) = h^{-1}h^g$.

Consideremos o isomorfismo v da Proposição 2.2.8. Temos que $\lambda' \circ v : G \otimes H \longrightarrow H$ é um homomorfismo tal que

$$\lambda'(v(g \otimes h)) = \lambda'((h \otimes g)^{-1}) = \lambda'(h \otimes g)^{-1} = (h^{-1}h^g)^{-1} = h^{-g}h,$$

para todo $g \otimes h \in G \otimes H$. Isso encerra a demonstração.

(b) Para $n \in \mathbb{N} - \{0\}$, considere a afirmação

$$P(n) : w_n = \prod_{i=1}^n g_i \otimes h_i \implies \lambda(w_n) \otimes h = w_n^{-1}w_n^{h^{-1}}, \quad \forall h \in H.$$

i) A afirmação é verdadeira quando $n = 1$, pela Proposição 2.2.3, item **(h)**.

ii) Suponhamos $P(r)$ verdadeira, para algum $r \in \mathbb{N} - \{0\}$ e seja $t = g_{r+1} \otimes h_{r+1}$. Então

$$\begin{aligned}
\lambda(w_{r+1}) \otimes h &= \lambda(w_r t) \otimes h \\
&= (\lambda(w_r) \lambda(t)) \otimes h \\
&= (\lambda(t) \otimes h^{\lambda(w_r)}) (\lambda(w_r) \otimes h) && \text{(Proposição 2.2.3, item (e))} \\
&= t^{-1} t^{(h^{-\lambda(w_r)})} (\lambda(w_r) \otimes h) && \text{(P(1) verdadeira)} \\
&= t^{-1} t^{\lambda(w_r) h^{-1} \lambda(w_r)^{-1}} w_r^{-1} w_r^{h^{-1}} && \text{(Hipótese de Indução)} \\
&= t^{-1} w_r^{-1} (w_r t w_r^{-1})^{h^{-1}} w_r w_r^{-1} w_r^{h^{-1}} && \text{(Proposição 2.2.3, item (g))} \\
&= (w_r t)^{-1} (w_r t)^{h^{-1}} w_r^{-h^{-1}} w_r^{h^{-1}} \\
&= w_{r+1}^{-1} w_{r+1}^{h^{-1}}
\end{aligned}$$

e, portanto, $P(r+1)$ é verdadeira.

Dos itens acima e pelo Primeiro Princípio de Indução Finita segue que $P(n)$ é verdadeira, para todo $n \in \mathbb{N} - \{0\}$.

Da veracidade da afirmação $P(n)$ para todo $n \in \mathbb{N} - \{0\}$ e como $(g \otimes h)^{-1} = g^{-1} \otimes h^g$, a afirmação

$$Q(n) : w_n = \prod_{i=1}^n (g_i \otimes h_i)^{\alpha_i}, \quad \alpha_i \in \{-1, +1\} \implies \lambda(w_n) \otimes h = w_n^{-1} w_n^{h^{-1}}, \quad \forall h \in H$$

é verdadeira para todo $n \in \mathbb{N} - \{0\}$ e, portanto, $\lambda(w) \otimes h = w^{-1} w^{h^{-1}}$, para todos $h \in H$, $w \in G \otimes H$. Analogamente, temos que $\lambda'(w) \otimes g = w^{-1} w^{g^{-1}}$, para todos $g \in G$, $w \in H \otimes G$, onde λ' é o homomorfismo obtido na demonstração do item **(a)** desta Proposição.

A partir de agora, utilizaremos a seguinte notação: se $w = \prod_{i=1}^n g_i \otimes h_i$, então definiremos $\bar{w} := \prod_{i=1}^n h_{n-i+1} \otimes g_{n-i+1}$. Considere agora o isomorfismo ν da Proposição 2.2.8. Com a notação anteriormente estabelecida, temos

$$\nu(w) = \bar{w}^{-1} \quad \text{e} \quad \mu(w) = \lambda'(\bar{w})^{-1}, \quad \forall w \in G \otimes H.$$

Assim,

$$\begin{aligned} \nu(g \otimes \mu(w)) &= (\mu(w) \otimes g)^{-1} \\ &= \mu(w)^{-1} \otimes g^{\mu(w)} \\ &= \lambda'(\bar{w}) \otimes g^{\lambda'(\bar{w})^{-1}} \\ &= \bar{w}^{-1} \bar{w} \left(g^{-\lambda'(\bar{w})^{-1}} \right) \\ &= \bar{w}^{-1} \bar{w} \lambda'(\bar{w})^{-1} g^{-1} \lambda'(\bar{w}) \\ &= \bar{w}^{-1} \bar{w} (\bar{w}^{-1} \bar{w} \bar{w})^{g^{-1}} \bar{w}^{-1} \\ &= \bar{w}^{g^{-1}} \bar{w}^{-1}. \end{aligned}$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned} \nu(w^{-g^{-1}} w) &= \nu(w^{-g^{-1}}) \nu(w) \\ &= (\bar{w}^{-g^{-1}})^{-1} \bar{w}^{-1} \\ &= \bar{w}^{g^{-1}} \bar{w}^{-1}. \end{aligned}$$

Como ν é isomorfismo, segue que $g \otimes \mu(w) = w^{-g^{-1}} w$, para todos $g \in G$, $w \in G \otimes H$.

(c) Do item anterior e da Proposição 2.2.3, item (g),

$$\begin{aligned} \lambda(w_1) \otimes \mu(w_2) &= w_1^{-1} w_1^{\mu(w_2)^{-1}} \\ &= w_1^{-1} w_2^{-1} w_1 w_2 \\ &= [w_1, w_2]. \end{aligned}$$

(d) Pelo item (c) temos, para todos $g \in G$, $w \in \ker \mu$,

$$w^g = w(w^{-1} w^g) = w(w^{-g} w)^{-1} = w(g^{-1} \otimes \mu(w))^{-1} = w(g^{-1} \otimes 1_H)^{-1} = w$$

e, portanto, $\ker \mu$ é G -trivial.

Também, pelo item (c) temos, para todos $h \in H$, $w \in \ker \lambda$,

$$w^h = w(w^{-1} w^h) = w(\lambda(w) \otimes h^{-1}) = w(1_G \otimes h^{-1}) = w$$

e, portanto, $\ker \lambda$ é H -trivial. □

Corolário 2.2.10 *Seja G um grupo.*

(a) *Existe um único epimorfismo de grupos $\pi : G \otimes G \longrightarrow G'$ tal que, $\pi(g \otimes h) = [g, h]$, para todos $g, h \in G$;*

(b) *Com a ação do Corolário 2.2.7 temos, para todos $g, h \in G$, $w \in G \otimes G$,*

$$\pi(w) \otimes h = w^{-1} w^{h^{-1}} \quad e \quad g \otimes \pi(w) = w^{-g^{-1}} w.$$

Isso implica $(\pi(w) \otimes g)^{-1} = g \otimes \pi(w)$, para todos $g \in G$, $w \in G \otimes G$;

(c) *Para todos $w_1, w_2 \in G \otimes G$, $\pi(w_1) \otimes \pi(w_2) = [w_1, w_2]$;*

(d) *$\ker \pi$ é G -trivial.*

Demonstração. Segue diretamente da proposição anterior (basta fazer $G = H$). □

Proposição 2.2.11 *Sejam G e H grupos. Se G é H -trivial e H é G -trivial, então*

$$G \otimes H \cong G/G' \otimes_{\mathbb{Z}} H/H'.$$

Demonstração. Defina a relação

$$\begin{aligned} \phi : G \times H &\longrightarrow G/G' \otimes_{\mathbb{Z}} H/H' \\ (g, h) &\longmapsto G'g \otimes H'h \end{aligned}, \quad \forall (g, h) \in G \times H.$$

i) Para todos $g_1, g_2 \in G$, $h_1, h_2 \in H$,

$$\begin{aligned} (g_1, h_1) = (g_2, h_2) &\implies g_1 = g_2 \text{ e } h_1 = h_2 \\ &\implies G'g_1 = G'g_2 \text{ e } H'h_1 = H'h_2 \\ &\implies G'g_1 \otimes H'h_1 = G'g_2 \otimes H'h_2 \\ &\implies \phi(g_1, h_1) = \phi(g_2, h_2) \end{aligned}$$

e, portanto, ϕ é uma função.

ii) Para todos $g, g_1 \in G$, $h \in H$,

$$\begin{aligned} \phi(gg_1, h) &= G'gg_1 \otimes H'h \\ &= G'g_1g^{g_1} \otimes H'h \\ &= (G'g_1 \otimes H'h)(G'g^{g_1} \otimes H'h) \\ &= (G'g^{g_1} \otimes H'h^{g_1})(G'g_1 \otimes H'h) \quad (2) \\ &= \phi(g^{g_1}, h^{g_1})\phi(g_1, h) \end{aligned}$$

$$\left((2) \text{ } H \text{ é } G\text{-trivial; } G/G' \otimes_{\mathbb{Z}} H/H' \text{ é abeliano} \right).$$

iii) Para todos $g \in G$, $h, h_1 \in H$,

$$\begin{aligned}
\phi(g, hh_1) &= G'g \otimes H'h h_1 \\
&= G'g \otimes H'h_1 h^{h_1} \\
&= (G'g \otimes H'h_1)(G'g \otimes H'h^{h_1}) \\
&= (G'g \otimes H'h_1)(G'g^{h_1} \otimes H'h^{h_1}) \quad (3) \\
&= \phi(g, h_1)\phi(g^{h_1}, h^{h_1})
\end{aligned}$$

((3) G é H -trivial).

Dos itens acima e da Proposição 2.2.5, existe um (único) homomorfismo $\phi' : G \otimes H \longrightarrow G/G' \otimes_{\mathbb{Z}} H/H'$ tal que $\phi'(g \otimes h) = G'g \otimes H'h$, para todo $g \otimes h \in G \otimes H$.

Como G é H -trivial e H é G -trivial, da Proposição 2.2.3, item (g) e do Corolário 2.1.6, temos para todos $g \otimes h, g_1 \otimes h_1 \in G \otimes H$,

$$(g \otimes h)^{-1}(g_1 \otimes h_1)(g \otimes h) = g_1^{h^{-g}h} \otimes h_1^{g^{-1}g^h} = g_1 \otimes h_1$$

e, portanto, $G \otimes H$ é grupo abeliano. Agora, defina a relação

$$\begin{aligned}
\psi : G/G' \times H/H' &\longrightarrow G \otimes H \\
(G'g, H'h) &\longmapsto g \otimes h, \quad \forall (G'g, H'h) \in G/G' \times H/H'.
\end{aligned}$$

iv) Para todos $g_1, g_2 \in G, h_1, h_2 \in H$,

$$\begin{aligned}
(G'g_1, H'h_1) = (G'g_2, H'h_2) &\implies G'g_1 = G'g_2 \text{ e } H'h_1 = H'h_2 \\
&\implies g_1 g_2^{-1} \in G' \text{ e } h_1 h_2^{-1} \in H'. \quad (4)
\end{aligned}$$

Fazendo $G = H$ na Proposição 2.2.9 e utilizando seus itens (a), (c) e (e) juntamente com os itens (d), (e) e (f) da Proposição 2.2.3 e observando que G é H -trivial e H é G -trivial temos, para todos $g_1, g_2 \in G, h_1, h_2 \in H$,

$$g_1 g_2^{-1} \in G' \implies 1_{\otimes} = g_1 g_2^{-1} \otimes h_1 = (g_1 \otimes h_1)(g_2 \otimes h_1)^{-1}$$

e

$$h_1 h_2^{-1} \in H' \implies 1_{\otimes} = g_2 \otimes h_1 h_2^{-1} = (g_2 \otimes h_1)(g_2 \otimes h_2)^{-1}.$$

Daí, temos

$$\begin{aligned}
(4) &\implies g_1 \otimes h_1 = g_2 \otimes h_2 \\
&\implies \psi(G'g_1, H'h_1) = \psi(G'g_2, H'h_2)
\end{aligned}$$

e, portanto, ψ é uma função.

v) Para todos $g, g_1 \in G, h \in H$,

$$\begin{aligned}
\psi(G'g g_1, H'h) &= g g_1 \otimes h \\
&= (g \otimes h)(g_1 \otimes h) \quad (5) \\
&= \psi(G'g, H'h)\psi(G'g_1, H'h)
\end{aligned}$$

((5) Proposição 2.2.3, item (e); H é G -trivial; $G \otimes H$ é abeliano).

vi) Para todos $g \in G, h, h_1 \in H$,

$$\begin{aligned}\psi(G'g, H'h h_1) &= g \otimes h h_1 \\ &= (g \otimes h)(g \otimes h_1) \\ &= \psi(G'g, H'h)\psi(G'g, H'h_1)\end{aligned}\quad (6)$$

((6) Proposição 2.2.3, item (f); G é H -trivial).

vii) Para todos $g \in G, h \in H, n \in \mathbb{Z}$,

$$\begin{aligned}\psi(G'g^n, H'h) &= g^n \otimes h \\ &= (g \otimes h)^n\end{aligned}\quad (7)$$

$$\begin{aligned}&= g \otimes h^n \\ &= \psi(G'g, H'h^n)\end{aligned}\quad (8)$$

((7) Proposição 2.2.3, item (e); H é G -trivial; Indução sobre n

e (8) Proposição 2.2.3, item (f); G é H -trivial; Indução sobre n).

Dos itens anteriores segue, do Teorema 1.4.4, que existe um (único) homomorfismo $\psi' : G/G' \otimes_{\mathbb{Z}} H/H' \rightarrow G \otimes H$ tal que $\psi'(G'g \otimes H'h) = g \otimes h$, para todo $G'g \otimes H'h \in G/G' \otimes_{\mathbb{Z}} H/H'$. Agora, fica fácil ver que $\phi' \circ \psi' = 1_{G/G' \otimes_{\mathbb{Z}} H/H'}$ e $\psi' \circ \phi' = 1_{G \otimes H}$ e, portanto, $G \otimes H \cong G/G' \otimes_{\mathbb{Z}} H/H'$. $\square$

Proposição 2.2.12 *Sejam $\alpha : G \rightarrow A$ e $\beta : H \rightarrow B$ homomorfismos de grupos e suponha que G e H atuam um sobre o outro compativelmente e que A e B atuam compativelmente um sobre o outro. Suponhamos também que α e β preservam as ações, isto é, para todos $g \in G, h \in H$,*

$$\beta(h^g) = \beta(h)^{\alpha(g)} \quad e \quad \alpha(g^h) = \alpha(g)^{\beta(h)}$$

Então existe um único homomorfismo de grupos $\alpha \otimes \beta : G \otimes H \rightarrow A \otimes B$ tal que $(\alpha \otimes \beta)(g \otimes h) = \alpha(g) \otimes \beta(h)$, para todo $g \otimes h \in G \otimes H$. Além disso, se α e β são sobrejetoras então $\alpha \otimes \beta$ também é sobrejetora.

Demonstração. Considere a relação

$$\begin{aligned}\phi : G \times H &\longrightarrow A \otimes B \\ (g, h) &\longmapsto \alpha(g) \otimes \beta(h), \quad \forall (g, h) \in G \times H.\end{aligned}$$

i) Para todos $g_1, g_2 \in G, h_1, h_2 \in H$,

$$\begin{aligned}
(g_1, h_1) = (g_2, h_2) &\implies g_1 = g_2 \text{ e } h_1 = h_2 \\
&\implies \alpha(g_1) = \alpha(g_2) \text{ e } \beta(h_1) = \beta(h_2) \\
&\implies \alpha(g_1) \otimes \beta(h_1) = \alpha(g_2) \otimes \beta(h_2) \\
&\implies \phi(g_1, h_1) = \phi(g_2, h_2).
\end{aligned}$$

ii) Para todos $g, g_1 \in G, h \in H$,

$$\begin{aligned}
\phi(gg_1, h) &= \alpha(gg_1) \otimes \beta(h) \\
&= \alpha(g)\alpha(g_1) \otimes \beta(h) \\
&= (\alpha(g)^{\alpha(g_1)} \otimes \beta(h)^{\alpha(g_1)})(\alpha(g_1) \otimes \beta(h)) \\
&= (\alpha(g^{g_1}) \otimes \beta(h^{g_1}))(\alpha(g_1) \otimes \beta(h)) \quad (9) \\
&= \phi(g^{g_1}, h^{g_1})\phi(g_1, h).
\end{aligned}$$

((9) α é um homomorfismo; α e β preservam as ações)

iii) Para todos $g \in G, h, h_1 \in H$,

$$\begin{aligned}
\phi(g, hh_1) &= \alpha(g) \otimes \beta(hh_1) \\
&= \alpha(g) \otimes \beta(h)\beta(h_1) \\
&= (\alpha(g) \otimes \beta(h_1))(\alpha(g)^{\beta(h_1)} \otimes \beta(h)^{\beta(h_1)}) \\
&= (\alpha(g) \otimes \beta(h_1))(\alpha(g^{h_1}) \otimes \beta(h^{h_1})) \quad (10) \\
&= \phi(g, h_1)\phi(g^{h_1}, h^{h_1}).
\end{aligned}$$

((10) β é um homomorfismo; α e β preservam as ações)

Dos itens acima, segue que ϕ é uma biderivação e, portanto, pelo Teorema 2.2.5, existe um único homomorfismo $\alpha \otimes \beta : G \otimes H \longrightarrow A \otimes B$ tal que $(\alpha \otimes \beta)(g \otimes h) = \phi(g, h) = \alpha(g) \otimes \beta(h)$, para todo $g \otimes h \in G \otimes H$. É fácil ver que se α e β são epimorfismos, então $\alpha \otimes \beta$ também é um epimorfismo. $\square$

Os teoremas a seguir serão apenas enunciados; suas demonstrações podem ser encontradas em [3, 5].

Teorema 2.2.13 *Sejam duas extensões centrais*

$$\begin{aligned}
1 &\longrightarrow M \xrightarrow{i_1} G \xrightarrow{\alpha} A \longrightarrow 1 \\
1 &\longrightarrow N \xrightarrow{i_2} H \xrightarrow{\beta} B \longrightarrow 1
\end{aligned}$$

tais que G e H são grupos agindo um sobre o outro compativelmente, A e B são grupos agindo um sobre o outro compativelmente, α e β preservam as ações e H e G são $(\ker \alpha)$ -trivial e $(\ker \beta)$ -trivial, respectivamente. Então, existe uma sequência exata

$$(G \otimes N) \times (M \otimes H) \xrightarrow{\theta} G \otimes H \xrightarrow{\alpha \otimes \beta} A \otimes B \longrightarrow 1$$

onde $\text{Im } \theta \leq Z(G \otimes H)$.

Teorema 2.2.14 *Sejam A e G grupos tal que A é grupo abeliano. Suponha que G e A agem um sobre o outro tal que G é A -trivial. Então*

$$A \otimes G \cong A \otimes_{\mathbb{Z}G} I(G).$$

Um Grupo Particular

Neste capítulo, iremos apresentar o grupo $\eta(G, H)$ e algumas de suas propriedades. O grupo $\eta(G, H)$ é uma generalização da construção apresentada na seção 6 de [12] e tem $\tau(G, H)$ como subgrupo. A importância de $\eta(G, H)$ é simples: $\tau(G, H)$ é isomorfo a $G \otimes H$. Logo, se uma propriedade de grupos $\mathfrak{X}$ é fechada a subgrupos e $\eta(G, H) \in \mathfrak{X}$, então $G \otimes H \in \mathfrak{X}$. Veremos aqui algumas propriedades que $\eta(G, H)$ possui.

3.1 Os Grupos $\eta(G, H)$ e $\tau(G, H)$

Definição 3.1.1 *Sejam $G = \langle X_G | R_G \rangle$ e $H = \langle X_H | R_H \rangle$ dois grupos agindo compativelmente um sobre o outro e H^Φ uma cópia de H , por um isomorfismo $\Phi: H \rightarrow H^\Phi$, $h \mapsto h^\Phi$. Definimos*

$$\eta(G, H) = \langle X_G, (X_H)^\Phi | R_G, (R_H)^\Phi, [g, h^\Phi]^{g_1} = [g^{g_1}, (h^{g_1})^\Phi], [g, h^\Phi]^{h_1} = [g^{h_1}, (h^{h_1})^\Phi] \rangle,$$

onde g, g_1 são elementos quaisquer de G e h, h_1 são elementos quaisquer de H .

Exemplo 3.1.2 *Sejam $G = \langle a | a^3 \rangle$ e $\langle b | b^2 \rangle$. Suponhamos que H é G -trivial e que H age sobre G por $a^b = a^{-1}$ (pela Proposição 2.1.3, essas ações são compatíveis). Então*

$$\begin{aligned} \eta(G, H) = \langle a, b^\Phi | a^3 = 1, (b^\Phi)^2 = 1, [a, b^\Phi]^a = [a, b^\Phi], [a, b^\Phi]^{a^2} &= [a, b^\Phi] \\ [a, b^\Phi]^{b^\Phi} &= [a^2, b^\Phi], [a^2, b^\Phi]^a = [a^2, b^\Phi], [a^2, b^\Phi]^{a^2} = [a^2, b^\Phi], \\ [a^2, b^\Phi]^{b^\Phi} &= [a, b^\Phi] \rangle. \end{aligned}$$

Temos

$$[a^2, b^\Phi] = [aa, b^\Phi] = [a, b^\Phi]^a [a, b^\Phi] = [a, b^\Phi]^2$$

e, portanto,

$$1 = [1, b^\Phi] = [a^3, b^\Phi] = [a^2a, b^\Phi] = [a^2, b^\Phi]^a [a, b^\Phi] = [a, b^\Phi]^3$$

e

$$[a, b^\Phi]^{-1} = [a, b^\Phi]^2 = [a^2, b^\Phi].$$

Das igualdades acima, temos

- i) $[a, b^\Phi]^a = [a, b^\Phi] \implies [a, b^\Phi]^{a^2} = [a, b^\Phi];$
- ii) $[a, b^\Phi]^a = [a, b^\Phi] \text{ e } [a^2, b^\Phi] = [a, b^\Phi]^2 \implies [a^2, b^\Phi]^a = [a^2, b^\Phi] \text{ e } [a^2, b^\Phi]^{a^2} = [a^2, b^\Phi];$
- iii) $[a, b^\Phi]^{b^\Phi} = [a^2, b^\Phi] \implies [a^2, b^\Phi]^{b^\Phi} = [a, b^\Phi].$

Dessa forma,

$$\eta(G, H) = \langle a, b^\Phi | a^3 = 1, (b^\Phi)^2 = 1, [a, b^\Phi]^a = [a, b^\Phi], [a, b^\Phi]^{b^\Phi} = [a, b^\Phi]^{-1} \rangle.$$

Agora, considere $V = \langle x, y | x^3, y^3, [x, y] \rangle$ (note que $V \cong \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_3$). Considere também α o automorfismo de V tal que

$$x \mapsto xy, \quad y \mapsto y^{-1}$$

Consideremos o produto semi-direto $V \rtimes \langle \alpha \rangle$. É fácil ver que a correspondência $a \mapsto x$, $b^\Phi \mapsto \alpha$ é consistente com as relações definidoras de $\eta(G, H)$ e, assim, estende-se a um homomorfismo $\theta_1 : \eta(G, H) \longrightarrow V \rtimes \langle \alpha \rangle$. Também, é fácil ver que a relação

$$\begin{aligned} \theta_2 : V \rtimes \langle \alpha \rangle &\longrightarrow \eta(G, H) \\ (x^i y^j, \alpha^\varepsilon) &\longmapsto a^i [a, b^\Phi]^j (b^\Phi)^\varepsilon \end{aligned}$$

para todo $i, j \in \{0, 1, 2\}$ e $\varepsilon \in \{0, 1\}$ é um homomorfismo de grupos. É claro que $\theta_1 \circ \theta_2 = 1_{\eta(G, H)}$ e $\theta_2 \circ \theta_1 = 1_{V \rtimes \langle \alpha \rangle}$. Portanto,

$$\eta(G, H) \cong V \rtimes \langle \alpha \rangle$$

Denotemos o subgrupo $\langle [g, h^\Phi] \mid g \in G, h^\Phi \in H^\Phi \rangle$ de $\eta(G, H)$ por $\tau(G, H)$.

Proposição 3.1.3 *O subgrupo $\tau(G, H)$ de $\eta(G, H)$ é isomorfo a $G \otimes H$.*

Demonstração. Consideremos o produto livre $G * H$. Sejam

$$R = \{[g, h^\Phi]^{-x} [g^x, (h^x)^\Phi], [g, h^\Phi]^{-y^\Phi} [g^y, (h^y)^\Phi] \mid g, x \in G^*, h, y \in H^*\}$$

e

$$S = \{[gx, h^\Phi]^{-1} [g^x, (h^x)^\Phi] [x, h^\Phi], [g, (hy)^\Phi]^{-1} [g, y^\Phi] [g^y, (h^y)^\Phi] \mid g, x \in G^*, h, y \in H^*\}$$

subconjuntos de $G * H$ (observe que S é um subconjunto de $[G, H^\Phi]$).

Afirmção 1: $\langle S \rangle^{[G, H^\Phi]} \trianglelefteq G * H^\Phi$.

i) De fato, considere $s = [gg_1, h^\Phi]^{-1} [g^{g_1}, (h^{g_1})^\Phi] [g_1, h^\Phi]$ um elemento de S e $x \in G$. Lembremos que, para todos $g, g_1 \in G, h^\Phi \in H^\Phi$,

$$[gg_1, h^\Phi] = [g, h^\Phi]^{g_1} [g_1, h^\Phi]$$

ou, ainda,

$$[gg_1, h^\Phi][g_1, h^\Phi]^{-1} = [g, h^\Phi]^{g_1}.$$

Então

$$\begin{aligned} s^x &= [gg_1, h^\Phi]^{-x} [g^{g_1}, (h^{g_1})^\Phi]^x [g_1, h^\Phi]^x \\ &= ([gg_1x, h^\Phi][x, h^\Phi]^{-1})^{-1} [g^{g_1x}, (h^{g_1x})^\Phi][x, (h^{g_1})^\Phi]^{-1} [g_1x, h^\Phi][x, h^\Phi]^{-1} \\ &= [x, h^\Phi][gg_1x, h^\Phi]^{-1} [g^{g_1x}, (h^{g_1x})^\Phi][x, (h^{g_1})^\Phi]^{-1} [g_1x, h^\Phi][x, h^\Phi]^{-1}. \end{aligned}$$

Considere $s_1 = [g^{g_1x}, (h^{g_1x})^\Phi]^{-1} [g^{g_1x}, (h^{g_1x})^\Phi][x, (h^{g_1})^\Phi]$. Então

$$s^x = [x, h^\Phi][gg_1x, h^\Phi]^{-1} [g^{g_1x}, (h^{g_1x})^\Phi][x, (h^{g_1})^\Phi] s_1^{-1} [x, (h^{g_1})^\Phi]^{-1} [g_1x, h^\Phi][x, h^\Phi]^{-1}.$$

Considere $s_2 = [gg_1x, h^\Phi]^{-1} [g^{g_1x}, (h^{g_1x})^\Phi][g_1x, h^\Phi]$. Então

$$\begin{aligned} s^x &= [x, h^\Phi] s_2 [g_1x, h^\Phi]^{-1} (s_1^{-1})^{[x, (h^{g_1x})^\Phi]^{-1}} [g_1x, h^\Phi][x, h^\Phi]^{-1} \\ &= s_2^{[x, h^\Phi]^{-1}} (s_1^{-1})^T, \end{aligned}$$

onde $T = ([x, h^\Phi][g_1x, h^\Phi]^{-1}[x, (h^{g_1x})^\Phi])^{-1}$. Da última igualdade segue que s^x é uma palavra sobre $S^{[G, H^\Phi]}$ e, portanto, $s^x \in \langle S \rangle^{[G, H^\Phi]}$. Agora, considere $y \in H$. Lembremos que, para todos $g \in G$, $h^\Phi, h_1^\Phi \in H^\Phi$,

$$[g, (hh_1)^\Phi] = [g, h_1^\Phi][g, h^\Phi]^{h_1^\Phi}$$

ou, ainda,

$$[g, h_1^\Phi]^{-1} [g, (hh_1)^\Phi] = [g, h^\Phi]^{h_1^\Phi}.$$

Então

$$\begin{aligned} s^{y^\Phi} &= [gg_1, h^\Phi]^{-y^\Phi} [g^{g_1}, (h^{g_1})^\Phi]^{y^\Phi} [g_1, h^\Phi]^{y^\Phi} \\ &= ([gg_1y, h^\Phi]^{-1} [gg_1, (hy)^\Phi])^{-1} [g^{g_1}, y^\Phi]^{-1} [g^{g_1}, (h^{g_1y})^\Phi][g_1y, h^\Phi]^{-1} [g_1, (hy)^\Phi] \\ &= [gg_1, (hy)^\Phi]^{-1} [gg_1y, h^\Phi][g^{g_1}, y^\Phi]^{-1} [g^{g_1}, (h^{g_1y})^\Phi][g_1y, h^\Phi]^{-1} [g_1, (hy)^\Phi]. \end{aligned}$$

Considere $s_3 = [gg_1, (hy)^\Phi]^{-1} [gg_1y, h^\Phi][(gg_1)^y, (h^y)^\Phi]$ e

$s_4 = [g_1, (hy)^\Phi]^{-1} [g_1y, h^\Phi][g_1^y, (h^y)^\Phi]$. Então

$$s^{y^\Phi} = s_3[(gg_1)^y, (h^y)^\Phi]^{-1} [g^{g_1}, y^\Phi]^{-1} [g^{g_1}, (h^{g_1y})^\Phi][g_1^y, (h^y)^\Phi] s_4^{-1}.$$

Considere $s_5 = [(gg_1)^y, (h^y)^\Phi]^{-1} [g^{g_1y}, (h^{g_1y})^\Phi][g_1^y, (h^y)^\Phi]$ (observe que $(g^y)^{g_1^y} = g^{g_1y}$ e $(h^y)^{g_1^y} = h^{g_1y}$). Então

$$s^{y^\Phi} = s_3 s_5 [g_1^y, (h^y)^\Phi]^{-1} [g^{g_1y}, (h^{g_1y})^\Phi]^{-1} [g^{g_1}, y^\Phi]^{-1} [g^{g_1}, (h^{g_1y})^\Phi][g_1^y, (h^y)^\Phi] s_4^{-1}.$$

Considere $s_6 = [g^{g_1}, (h^{g_1y})^\Phi]^{-1} [g^{g_1}, y^\Phi][g^{g_1y}, (h^{g_1y})^\Phi]$. Então

$$s^{y^\Phi} = s_3 s_5 s_6^{-B} s_4^{-1},$$

onde $B = [g_1^y, (h^y)^\Phi]$. Desta última igualdade temos que s^{y^Φ} é uma palavra sobre $S^{[G, H^\Phi]}$ e, portanto, $s^{y^\Phi} \in \langle S \rangle^{[G, H^\Phi]}$.

ii) Considere $t = [g, (hh_1)^\Phi]^{-1} [g, h_1^\Phi] [g^{h_1}, (h^{h_1})^\Phi]$ um elemento de S e $x \in G$. Temos

$$\begin{aligned} t^x &= [g, (hh_1)^\Phi]^{-x} [g, h_1^\Phi]^x [g^{h_1}, (h^{h_1})^\Phi]^x \\ &= ([gx, (hh_1)^\Phi] [x, (hh_1)^\Phi]^{-1})^{-1} [gx, h_1^\Phi] [x, h_1^\Phi]^{-1} [g^{h_1} x, (h^{h_1})^\Phi] [x, (h^{h_1})^\Phi]^{-1} \\ &= [x, (hh_1)^\Phi] [gx, (hh_1)^\Phi]^{-1} [gx, h_1^\Phi] [x, h_1^\Phi]^{-1} [g^{h_1} x, (h^{h_1})^\Phi] [x, (h^{h_1})^\Phi]^{-1}. \end{aligned}$$

Considere $t_1 = [g^{h_1} x, (h^{h_1})^\Phi]^{-1} [g^{h_1} x, (h^{h_1} x)^\Phi] [x, (h^{h_1})^\Phi]$. Então

$$t^x = [x, (hh_1)^\Phi] [gx, (hh_1)^\Phi]^{-1} [gx, h_1^\Phi] [x, h_1^\Phi]^{-1} [g^{h_1} x, (h^{h_1} x)^\Phi] [x, (h^{h_1})^\Phi] t_1^{-1} [x, (h^{h_1})^\Phi]^{-1}.$$

Considere $t_2 = [gx, (hh_1)^\Phi]^{-1} [g^x, ((hh_1)^x)^\Phi] [x, (hh_1)^\Phi]$. Então

$$t^x = [x, (hh_1)^\Phi] t_2 [x, (hh_1)^\Phi]^{-1} [g^x, (h^x h_1^x)^\Phi]^{-1} [gx, h_1^\Phi] [x, h_1^\Phi]^{-1} [g^{h_1} x, (h^{h_1} x)^\Phi] t_1^{-a_1},$$

onde $a_1 = [x, (h^{h_1})^\Phi]^{-1}$. Considere $t_3 = [g^x, (h^x h_1^x)^\Phi]^{-1} [g^x, (h_1^x)^\Phi] [(g^x)^{(h_1^x)}, ((h^x)^{(h_1^x)})^\Phi]$.

Então

$$t^x = t_2^{a_2} t_3 [g^{h_1} x, (h^{h_1} x)^\Phi]^{-1} [g^x, (h_1^x)^\Phi]^{-1} [gx, h_1^\Phi] [x, h_1^\Phi]^{-1} [g^{h_1} x, (h^{h_1} x)^\Phi] t_1^{-a_1},$$

onde $a_2 = [x, (hh_1)^\Phi]^{-1}$. Considere $t_4 = [gx, h_1^\Phi]^{-1} [g^x, (h_1^x)^\Phi] [x, h_1^\Phi]$. Então

$$\begin{aligned} t^x &= t_2^{a_2} t_3 [g^{h_1} x, (h^{h_1} x)^\Phi]^{-1} [x, h_1^\Phi] t_4^{-1} [x, h_1^\Phi]^{-1} [g^{h_1} x, (h^{h_1} x)^\Phi] t_1^{-a_1} \\ &= t_2^{a_2} t_3 t_4^{-a_3} t_1^{-a_1}, \end{aligned}$$

onde $a_3 = ([g^{h_1} x, (h^{h_1} x)^\Phi]^{-1} [x, h_1^\Phi])^{-1}$. Da última igualdade segue que t^x é uma palavra sobre $S^{[G, H^\Phi]}$ e, portanto, $t^x \in \langle S \rangle^{[G, H^\Phi]}$.

Dos itens acima concluímos que $s^w \in \langle S \rangle^{[G, H^\Phi]}$, para todos $s \in \langle S \rangle^{[G, H^\Phi]}$, $w \in G * H^\Phi$ e, portanto, $\langle S \rangle^{[G, H^\Phi]} \trianglelefteq G * H^\Phi$, como queríamos.

Afirmção 2: $\langle R \rangle^{G * H^\Phi} = \langle S \rangle^{[G, H^\Phi]}$.

De fato, seja r um elemento de R .

iii) Considere $r = [g, h^\Phi]^{-x} [g^x, (h^x)^\Phi]$. Temos

$$\begin{aligned} r &= ([gx, h^\Phi] [x, h^\Phi]^{-1})^{-1} [g^x, (h^x)^\Phi] \\ &= [x, h^\Phi] [gx, h^\Phi]^{-1} [g^x, (h^x)^\Phi] [x, h^\Phi] [x, h^\Phi]^{-1} \\ &= s^{[x, h^\Phi]^{-1}}, \end{aligned}$$

onde $s = [gx, h^\Phi]^{-1} [g^x, (h^x)^\Phi] [x, h^\Phi]$. Como $s \in S$ segue que r é uma palavra sobre $S^{[G, H^\Phi]}$ e, portanto, $r \in \langle S \rangle^{[G, H^\Phi]}$.

iv) Considere $r = [g, h^\Phi]^{-y^\Phi} [g^y, (h^y)^\Phi]$. Temos

$$\begin{aligned} r &= ([g, y^\Phi]^{-1} [g, (hy)^\Phi])^{-1} [g^y, (h^y)^\Phi] \\ &= [g, (hy)^\Phi]^{-1} [g, y^\Phi] [g^y, (h^y)^\Phi] \end{aligned}$$

e, portanto, $r \in S$. Logo, $r \in \langle S \rangle^{[G, H^\Phi]}$.

Dos itens acima segue que $R \subset \langle S \rangle^{[G, H^\Phi]}$. Como $\langle S \rangle^{[G, H^\Phi]} \trianglelefteq G * H^\Phi$, pela Afirmação 1, temos $\langle R \rangle^{G * H^\Phi} \subset \langle S \rangle^{[G, H^\Phi]}$ (*). Também, dos itens acima, temos

$$\begin{cases} [gx, h^\Phi]^{-1} [g^x, (h^x)^\Phi] [x, h^\Phi] &= ([g, h^\Phi]^{-x} [g^x, (h^x)^\Phi]) [x, h^\Phi] \\ [g, (hy)^\Phi]^{-1} [g, y^\Phi] [g^y, (h^y)^\Phi] &= [g, h^\Phi]^{-y^\Phi} [g^y, (h^y)^\Phi] \end{cases}$$

e, portanto, $S \subset \langle R \rangle^{G * H^\Phi}$. Como $\langle R \rangle^{G * H^\Phi} \trianglelefteq G * H^\Phi$ temos $\langle S \rangle^{[G, H^\Phi]} \subset \langle R \rangle^{G * H^\Phi}$ (**). Das inclusões obtidas em (*) e (**), segue que $\langle R \rangle^{G * H^\Phi} = \langle S \rangle^{[G, H^\Phi]}$, como queríamos.

Por definição e pela Afirmação 2, temos

$$\eta(G, H) = \frac{G * H^\Phi}{\langle R \rangle^{G * H^\Phi}} = \frac{G * H^\Phi}{\langle S \rangle^{[G, H^\Phi]}}$$

e, assim,

$$\tau(G, H) = \frac{[G, H^\Phi]}{\langle S \rangle^{[G, H^\Phi]}}.$$

Seja $T = \langle S \rangle^{[G, H^\Phi]}$. Pela Proposição 1.2.36, $[G, H^\Phi]$ é um grupo livre sobre o conjunto

$$C = \{[g, h^\Phi] \mid g \in G^*, h \in H^*\}.$$

Observemos que

$$[g_1, h_1^\Phi] = [g_2, h_2^\Phi] \iff g_1 = g_2 \text{ e } h_1^\Phi = h_2^\Phi,$$

pois $[G, H^\Phi]$ é livre sobre C . Seja a função

$$\begin{aligned} \phi : C &\longrightarrow G \otimes H \\ [g, h^\Phi] &\longmapsto g \otimes h, \quad \forall [g, h^\Phi] \in C. \end{aligned}$$

Como $[G, H^\Phi]$ é livre sobre C , existe um (único) homomorfismo $\phi' : [G, H^\Phi] \longrightarrow G \otimes H$ tal que $\phi'([g, h^\Phi]) = g \otimes h$. Considere agora

$$\begin{aligned} \alpha : [G, H^\Phi] &\longrightarrow \tau(G, H) \\ [g, h^\Phi] &\longmapsto T[g, h^\Phi], \quad \forall [g, h^\Phi] \in [G, H^\Phi] \end{aligned}$$

(um epimorfismo canônico). Temos que

$$\phi'([gx, h^\Phi]^{-1} [g^x, (h^x)^\Phi] [x, h^\Phi]) = (gx \otimes h)^{-1} (g^x \otimes h^x) (x \otimes h) = 1 \otimes$$

e

$$\phi'([g, (hy)^\Phi]^{-1}[g, y^\Phi][g^y, (h^y)^\Phi]) = (g \otimes hy)^{-1}(g \otimes y)(g^y \otimes h^y) = 1_\otimes$$

e, portanto, $\ker \alpha \subseteq \ker \phi'$. Essa informação, juntamente com ϕ' e α homomorfismos com α sobrejetivo segue, da Proposição 1.2.32, que existe um homomorfismo $\gamma: \tau(G, H) \longrightarrow G \otimes H$ tal que $\gamma(T[g, h^\Phi]) = g \otimes h$.

Agora, considere a relação

$$\begin{aligned} \sigma : G \times H &\longrightarrow \tau(G, H) \\ (g, h) &\longmapsto T[g, h^\Phi], \quad \forall (g, h) \in G \times H. \end{aligned}$$

v) Temos

$$\begin{aligned} (g_1, h_1) = (g_2, h_2) &\implies g_1 = g_2 \text{ e } h_1 = h_2 \\ &\implies [g_1, h_1^\Phi] = [g_2, h_2^\Phi] \\ &\implies T[g_1, h_1^\Phi] = T[g_2, h_2^\Phi] \\ &\implies \sigma(g_1, h_1) = \sigma(g_2, h_2) \end{aligned}$$

e, portanto, σ é uma função.

vi) Para todos $g, g_1 \in G, h \in H$, temos

$$\begin{aligned} \sigma(gg_1, h) &= T[gg_1, h^\Phi] \\ &= T([g^{g_1}, (h^{g_1})^\Phi][g_1, h^\Phi]) \\ &= (T[g^{g_1}, (h^{g_1})^\Phi])(T[g_1, h^\Phi]) \\ &= \sigma(g^{g_1}, h^{g_1})\sigma(g_1, h). \end{aligned}$$

vii) Para todos $g \in G, h, h_1 \in H$, temos

$$\begin{aligned} \sigma(g, hh_1) &= T[g, (hh_1)^\Phi] \\ &= T[g, h_1^\Phi][g^{h_1}, (h^{h_1})^\Phi] \\ &= (T[g, h_1^\Phi])(T[g^{h_1}, (h^{h_1})^\Phi]) \\ &= \sigma(g, h_1)\sigma(g^{h_1}, h^{h_1}). \end{aligned}$$

Dos itens anteriores e da Proposição 2.2.5 segue que existe um (único) homomorfismo $\sigma' : G \otimes H \longrightarrow \tau(G, H)$ tal que $\sigma'(g \otimes h) = T[g, h^\Phi]$. Agora, é fácil ver que $\sigma' \circ \gamma = 1_{\tau(G, H)}$ e $\gamma \circ \sigma' = 1_{G \otimes H}$. $\square$

Proposição 3.1.4 (i) Em $\eta(G, H)$, valem as seguintes relações para todos $g, x \in G$ e $h, y \in H$:

$$(a) [g, h^\Phi]^{[x, y^\Phi]} = [g, h^\Phi]^{x^{-1}xy} = [g, h^\Phi]^{(y^{-x}y)^\Phi};$$

$$(b) [g, h^\Phi]^{[x, y^\Phi]^{-1}} = [g, h^\Phi]^{x^{-y}x} = [g, h^\Phi]^{(y^{-1}y^x)^\Phi};$$

$$(c) [g^{-1}g^h, y^\Phi] = [g, h^\Phi]^{-1}[g, h^\Phi]^{y^\Phi};$$

$$(d) [x, (h^{-g}h)^\Phi] = [g, h^\Phi]^{-x}[g, h^\Phi];$$

$$(e) [[g, h^\Phi], [x, y^\Phi]] = [g^{-1}g^h, (y^{-x}y)^\Phi];$$

$$(f) [[g, h^\Phi], [x, y^\Phi]^{-1}] = [g^{-1}g^h, (y^{-1}y^x)^\Phi].$$

(ii) Existem homomorfismos de grupos $\lambda' : \tau(G, H) \longrightarrow G$, $\mu' : \tau(G, H) \longrightarrow H$ tais que $\lambda'([g, h^\Phi]) = g^{-1}g^h$ e $\mu'([g, h^\Phi]) = h^{-g}h$.

(iii) Sejam λ' e μ' os homomorfismos do item anterior. Então, para todos $t, t_1 \in \tau(G, H)$, $[\lambda'(t), \mu'(t_1)^\Phi] = [t, t_1]$.

Demonstração.

(i) (a) Temos

$$\begin{aligned} [g, h^\Phi]^{[x, y^\Phi]} &= [g, h^\Phi]^{x^{-1}y^{-\Phi}xy^\Phi} \\ &= [g^{x^{-1}}, (h^{x^{-1}})^\Phi]^{y^{-\Phi}xy^\Phi} \\ &= [g^{x^{-1}y^{-1}}, (h^{x^{-1}y^{-1}})^\Phi]^{xy^\Phi} \\ &= [g^{x^{-1}y^{-1}x}, (h^{x^{-1}y^{-1}x})^\Phi]^{y^\Phi} \\ &= [g^{x^{-1}y^{-1}xy}, (h^{x^{-1}y^{-1}xy})^\Phi]. \end{aligned}$$

Do Corolário 2.1.6, segue que

$$[g^{y^{-x}y}, (h^{y^{-x}y})^\Phi] = [g^{x^{-1}y^{-1}xy}, (h^{x^{-1}y^{-1}xy})^\Phi] = [g^{x^{-1}x^y}, (h^{x^{-1}x^y})^\Phi].$$

Portanto, $[g, h^\Phi]^{(y^{-x}y)^\Phi} = [g, h^\Phi]^{[x, y^\Phi]} = [g, h^\Phi]^{x^{-1}x^y}$.

(b) Temos

$$[g, h^\Phi]^{[x, y^\Phi]^{-1}} = [g, h^\Phi]^{y^{-\Phi}x^{-1}y^\Phi x}.$$

Análogo ao que foi feito no item (a), segue que

$$[g, h^\Phi]^{(x^{-y}x)^\Phi} = [g, h^\Phi]^{[x, y^\Phi]^{-1}} = [g, h^\Phi]^{(y^{-1}y^x)^\Phi}.$$

(c)

$$\begin{aligned}
[g^{-1}g^h, y^\Phi] &= [g^{-1}g^h, y^\Phi]^{h^{-\Phi}h^\Phi} \\
&= [(g^{-1}g^h)^{h^{-1}}, (y^{h^{-1}})^\Phi]^{h^\Phi} \\
&= [g^{-h^{-1}}, (y^{h^{-1}})^\Phi]^{h^\Phi} \\
&= [g^{-h^{-1}}, (y^{h^{-1}})^\Phi]^{gh^\Phi} [g, (hyh^{-1})^\Phi]^{h^\Phi} \\
&= [g^{-1}, y^\Phi]^{h^{-\Phi}gh^\Phi} [g, h^{-\Phi}]^{h^\Phi} [g, (hy)^\Phi]^{h^{-\Phi}h^\Phi} \\
&= [g, y^\Phi]^{-g^{-1}h^{-\Phi}gh^\Phi} [g, h^\Phi]^{-1} [g, y^\Phi] [g, h^\Phi]^{y^\Phi} \\
&= [g, h^\Phi]^{-1} [g, y^\Phi]^{-1} [g, h^\Phi] [g, h^\Phi]^{-1} [g, y^\Phi] [g, h^\Phi]^{y^\Phi} \\
&= [g, h^\Phi]^{-1} [g, h^\Phi]^{y^\Phi}
\end{aligned}$$

(d)

$$\begin{aligned}
[x, (h^{-g}h)^\Phi] &= [x, (h^{-g})^\Phi h^\Phi] \\
&= [x, h^\Phi] [x, (h^{-g})^\Phi]^{h^\Phi} \\
&= [x, h^\Phi] [(x^{g^{-1}})^g, (h^{-g})^\Phi]^{h^\Phi} \\
&= [x, h^\Phi] [x^{g^{-1}}, h^{-\Phi}]^{gh^\Phi} \\
&= x^{-1} h^{-\Phi} x h^\Phi h^{-\Phi} g^{-1} g x^{-1} g^{-1} h^\Phi g x g^{-1} h^{-\Phi} g h^\Phi \\
&= [g, h^\Phi]^{-x} [g, h^\Phi]
\end{aligned}$$

(e)

$$\begin{aligned}
[[g, h^\Phi], [x, y^\Phi]] &= [g, h^\Phi]^{-1} [g, h^\Phi]^{[x, y^\Phi]} \\
&= [g, h^\Phi]^{-1} [g, h^\Phi]^{(y^{-x}y)^\Phi} \quad (\text{pelo item (a)}) \\
&= [g^{-1}g^h, (y^{-x}y)^\Phi] \quad (\text{pelo item (c)})
\end{aligned}$$

(f)

$$\begin{aligned}
[[g, h^\Phi], [x, y^\Phi]^{-1}] &= [g, h^\Phi]^{-1} [g, h^\Phi]^{[x, y^\Phi]^{-1}} \\
&= [g, h^\Phi]^{-1} [g, h^\Phi]^{(y^{-1}y^x)^\Phi} \quad (\text{pelo item (b)}) \\
&= [g^{-1}g^h, (y^{-1}y^x)^\Phi] \quad (\text{pelo item (c)})
\end{aligned}$$

(ii) Utilizando o isomorfismo γ da Proposição 3.1.3 e os homomorfismos λ e μ da Proposição 2.2.9, temos que $\lambda \circ \gamma: \tau(G, H) \rightarrow G$ e $\mu \circ \gamma: \tau(G, H) \rightarrow H$ são homomorfismos tais que $(\lambda \circ \gamma)([g, h^\Phi]) = g^{-1}g^h$ e $(\mu \circ \gamma)([g, h^\Phi]) = h^{-g}h$.

(iii) Segue dos itens (i)-(f) e (ii). □

3.2 As Séries Central Inferior e Derivada de $G \otimes H$

Definição 3.2.1 *Sejam G e H grupos tais que H age sobre G . O subgrupo de G*

$$[G, H]^\delta = \langle g^{-1}g^h \mid g \in G, h \in H \rangle$$

é chamado derivado de G relativo a H .

Definiremos a notação $[g, h]^\delta := g^{-1}g^h$ para algum elemento gerador de $[G, H]^\delta$.

Definição 3.2.2 *Sejam G e H grupos tais que H age sobre G . Diremos que um subgrupo M de G é um H -subgrupo de G se $m^h \in M$, para todos $m \in M$, $h \in H$.*

Lema 3.2.3 *Sejam G e H grupos tais que H age sobre G e considere M um H -subgrupo de G . Então $\gamma_{i+1}(M)$ e $M^{(i)}$ são H -subgrupos de G , para todo $i \in \mathbb{N}$.*

Demonstração. Para $n \in \mathbb{N}$, considere a afirmação

$$P(n) : \gamma_{n+1}(M) \text{ é um } H\text{-subgrupo de } G.$$

i) Como $\gamma_1(M) = M$ segue, por hipótese, que $P(0)$ é verdade.

ii) Suponha que $P(r)$ é verdade para algum $r \in \mathbb{N}$. Então

$$[t, m]^h = [t^h, m^h] \in [\gamma_r(M), M], \forall t \in \gamma_r(M), \forall m \in M, \forall h \in H,$$

pois H age sobre G , M é H -subgrupo de G e $P(r)$ é verdade. Logo, $\gamma_{r+1}(M) = [\gamma_r(M), M]$ é um H -subgrupo de G e, portanto, $P(r+1)$ é verdade.

Dos itens acima e, pelo Primeiro Princípio de Indução Finita, segue que $P(n)$ é verdade, para todo $n \in \mathbb{N}$.

Agora, para $n \in \mathbb{N}$, considere a afirmação

$$Q(n) : M^{(n)} \text{ é um } H\text{-subgrupo de } G.$$

iii) Como $M^{(0)} = M$ segue, por hipótese, que $P(0)$ é verdade.

iv) Suponha que $Q(r)$ é verdade para algum $r \in \mathbb{N}$. Então

$$[t_1, t_2]^h = [t_1^h, t_2^h] \in [M^{(r)}, M^{(r)}], \forall t_1, t_2 \in M^{(r)}, \forall h \in H,$$

pois H age sobre G e $Q(r)$ é verdade. Logo, $M^{(r+1)} = [M^{(r)}, M^{(r)}]$ é um H -subgrupo de G e, portanto, $Q(r+1)$ é verdade.

Dos itens acima e, pelo Primeiro Princípio de Indução Finita, segue que $Q(n)$ é verdade, para todo $n \in \mathbb{N}$. □

Proposição 3.2.4 *Sejam M e N subgrupos normais de G e H respectivamente. Se M é um H -subgrupo de G e N é um G -subgrupo de H , então*

- (i) $[M, N^\varphi] \trianglelefteq \eta(G, H)$;
- (ii) $[\gamma_i(M), \gamma_j(N)^\varphi] \trianglelefteq \eta(G, H)$, $\forall i, j \geq 1$;
- (iii) $[M^{(i)}, (N^{(j)})^\varphi] \trianglelefteq \eta(G, H)$, $\forall i, j \geq 0$.

Demonstração.

(i) Pelas relações de $\eta(G, H)$, temos

$$[m, n^\varphi]^g = [m^g, (n^g)^\varphi] \quad \text{e} \quad [m, n^\varphi]^{h^\varphi} = [m^h, (n^h)^\varphi],$$

para todos $m \in M$, $n \in N$, $g \in G$, $h^\varphi \in H^\varphi$. Das hipóteses do enunciado e das igualdades acima, segue que $[m, n^\varphi]^w \in [M, N^\varphi]$, para todos $m \in M$, $n \in N$, $w \in G \cup H^\varphi$. Portanto, $[M, N^\varphi] \leq \eta(G, H)$.

Os itens (ii) e (iii) seguem do Lema 3.2.3 e do item (i) desta proposição. $\square$

Proposição 3.2.5 *Sejam G e H grupos agindo um sobre o outro.*

- (i) $[G, H]^\delta$ é um H -subgrupo normal de G e $[H, G]^\delta$ é um G -subgrupo normal de H .
- (ii) Para todo $i \in \mathbb{N}$, $\gamma_{i+1}([G, H]^\delta)$ e $([G, H]^\delta)^{(i)}$ são H -subgrupos normais de G e $\gamma_{i+1}([H, G]^\delta)$ e $([H, G]^\delta)^{(i)}$ são G -subgrupos normais de H .
- (iii) Para todo $i \in \mathbb{N}$, $([G, H]^\delta)^{(i)} = \lambda'(\tau(G, H)^{(i)})$ e $([H, G]^\delta)^{(i)} = \mu'(\tau(G, H)^{(i)})$.
- (iv) $g^{\lambda'(t)} = g^{\mu'(t)}$ e $h^{\lambda'(t)} = h^{\mu'(t)}$, para todos $g \in G$, $h \in H$, $t \in \tau(G, H)$.

Demonstração.

(i) Para todos $g \in G$, $h \in H$, $w \in G \cup H$,

$$(g^{-1}g^h)^w = (g^{-1})^wg^{hw} = (g^w)^{-1}(g^w)^{w^{-1}hw} = (g^w)^{-1}(g^w)^{h^w} \in [G, H]^\delta.$$

Portanto, $[G, H]^\delta$ é um H -subgrupo normal de G . Analogamente, para todos $g \in G$, $h \in H$, $w \in G \cup H$,

$$(h^{-1}h^g)^w = (h^{-1})^wh^{gw} = (h^w)^{-1}(h^w)^{w^{-1}gw} = (h^w)^{-1}(h^w)^{g^w} \in [H, G]^\delta$$

e, portanto, $[H, G]^\delta$ é um G -subgrupo normal de H .

(ii) Segue do item acima e do Lema 3.2.3.

(iii) Como λ' e μ' são homomorfismos de grupos segue, pela Proposição 1.2.7, item (a), o resultado.

(iv) Segue do Corolário 2.1.6. $\square$

Teorema 3.2.6 (a) *Para todo $i \in \mathbb{N} - \{0, 1\}$, o i -ésimo termo da série central inferior de $\tau(G, H)$ é dado por*

$$\gamma_i(\tau(G, H)) = [\gamma_{i-1}([G, H]^\delta), [H, G]^\delta].$$

(b) Para todo $i \in \mathbb{N} - \{0\}$, o i -ésimo termo da série derivada de $\tau(G, H)$ é dado por

$$\tau(G, H)^{(i)} = [([G, H]^\delta)^{(i-1)}, ([H, G]^{\delta\Phi})^{(i-1)}].$$

Demonstração.

(a) Para $n \in \mathbb{N} - \{0, 1\}$, considere a afirmação

$$P(n) : \gamma_n(\tau(G, H)) = [\gamma_{n-1}([G, H]^\delta), [H, G]^{\delta\Phi}].$$

i) Pela Proposição 3.1.4 (iii), temos que $[u, v] = [\lambda'(u), \mu'(v)^\Phi]$, para todos $u, v \in \tau(G, H)$. Como $[G, H] = \text{Im } \lambda'$ e $[H, G] = \text{Im } \mu'$, temos

$$\begin{aligned} \gamma_2(\tau(G, H)) &= [\tau(G, H), \tau(G, H)] \\ &= \langle [u, v] \mid u, v \in \tau(G, H) \rangle \\ &= \langle [\lambda'(u), \mu'(v)^\Phi] \mid u, v \in \tau(G, H) \rangle \\ &= \langle [a, b^\Phi] \mid a \in [G, H]^\delta, b \in [H, G]^{\delta\Phi} \rangle \quad (\lambda' \text{ e } \mu' \text{ sobrejetores}) \\ &= [[G, H]^\delta, [H, G]^{\delta\Phi}] \\ &= [\gamma_1([G, H]^\delta), [H, G]^{\delta\Phi}] \end{aligned}$$

Logo, $P(2)$ é verdade.

ii) Suponha $P(r)$ verdadeira, para algum $r \in \mathbb{N} - \{0, 1\}$. Então

$$\begin{aligned} \gamma_{r+1}(\tau(G, H)) &= [\gamma_r(\tau(G, H)), \tau(G, H)] \\ &= [[\gamma_{r-1}([G, H]^\delta), [H, G]^{\delta\Phi}], \tau(G, H)]. \end{aligned}$$

Da igualdade acima e, pela Proposição 1.2.7 (a) e (d), temos

$$\gamma_{r+1}(\tau(G, H)) = \langle z^{-1}[x, \mu'(v)^\Phi, t]z \mid x \in \gamma_{r-1}([G, H]^\delta), v, t \in \tau(G, H), z \in K \rangle,$$

onde $K = [\gamma_{r-1}([G, H]^\delta), [H, G]^{\delta\Phi}]$. Agora

$$\begin{aligned} [x, \mu'(v)^\Phi, t] &= [\lambda'([x, \mu'(v)^\Phi]), \mu'(t)^\Phi] \quad (\text{Proposição 3.1.4 (iii)}) \\ &= [x^{-1}x^{\mu'(v)}, \mu'(t)^\Phi] \\ &= [x^{-1}x^{\lambda'(v)}, \mu'(t)^\Phi] \quad (\text{Proposição 3.2.5 (iv)}) \\ &= [[x, \lambda'(v)], \mu'(t)^\Phi] \in [[\gamma_{r-1}([G, H]^\delta), [G, H]^\delta], [H, G]^{\delta\Phi}] \\ &= [[x, \lambda'(v)], \mu'(t)^\Phi] \in [\gamma_r([G, H]^\delta), [H, G]^{\delta\Phi}]. \end{aligned}$$

Pela Proposição 3.2.5 (ii) e pela Proposição 1.2.7 (c), temos que $[\gamma_r([G, H]^\delta), [H, G]^{\delta\Phi}] \trianglelefteq \eta(G, H)$ e, assim,

$$z^{-1}[x, \mu'(v)^\Phi, t]z \in [\gamma_r([G, H]^\delta), [H, G]^{\delta\Phi}],$$

para todos $x \in \gamma_{r-1}([G, H]^\delta)$, $v, t \in \tau(G, H)$, $z \in [\gamma_{r-1}([G, H]^\delta), [H, G]^{\delta\Phi}]$. Portanto,

$$\gamma_{r+1}(\tau(G, H)) \subseteq [\gamma_r([G, H]^\delta), [H, G]^{\delta\Phi}]. \quad (11)$$

Por outro lado,

$$[\gamma_r([G, H]^\delta), [H, G]^{\delta\varphi}] = \langle g^{-1}[x, \lambda'(v), \mu(t)^\varphi]g \mid x \in T_1, v, t \in \tau(G, H), g \in T_2 \rangle,$$

onde $T_1 = \gamma_{r-1}([G, H]^\delta)$ e $T_2 = \gamma_r([G, H]^\delta)$. Como $\gamma_{r+1}(\tau(G, H)) \leq \eta(G, H)$, temos

$$\begin{aligned} g^{-1}[x, \lambda'(v), \mu(t)^\varphi]g &= g^{-1}[x^{-1}x^{\lambda'(v)}, \mu'(t)^\varphi]g \\ &= g^{-1}[x^{-1}x^{\mu'(v)}, \mu'(t)^\varphi]g \\ &= g^{-1}[x, \mu'(v)^\varphi, \mu'(t)^\varphi]g \in \gamma_{r+1}(\tau(G, H)), \end{aligned}$$

para todos $x \in \gamma_{r-1}([G, H]^\delta)$, $v, t \in \tau(G, H)$, $g \in \gamma_r([G, H]^\delta)$. Assim,

$$[\gamma_r([G, H]^\delta), [H, G]^{\delta\varphi}] \subseteq \gamma_{r+1}(\tau(G, H)) \quad (12)$$

Portanto, de (11) e (12), $P(r+1)$ é verdadeira. Assim, dos itens acima e pelo Primeiro Princípio de Indução Finita, $P(n)$ é verdadeira, para todo $n \in \mathbb{N} - \{0, 1\}$, como queríamos.

(b) A demonstração é semelhante à feita no item anterior. (Vide [9]) $\square$

Teorema 3.2.7 (i) Se $[G, H]^\delta$ é nilpotente de classe c , então $G \otimes H$ é nilpotente de classe c ou $c+1$.

(ii) Se $[G, H]^\delta$ é solúvel de comprimento derivado l , então $G \otimes H$ é solúvel de comprimento derivado l ou $l+1$.

(iii) Se $[G, H]^\delta$ é n -Engeliano, então $G \otimes H$ e $[H, G]^\delta$ são $(n+1)$ -Engelianos.

Demonstração.

(i) Suponhamos que $[G, H]^\delta$ é nilpotente de classe c . Pelo Teorema 3.2.6,

$$\gamma_{c+2}(\tau(G, H)) = [\gamma_{c+1}([G, H]^\delta), [H, G]^{\delta\varphi}] = [\{1_{[G, H]^\delta}\}, [H, G]^{\delta\varphi}] = \{1_{\tau(G, H)}\}.$$

Portanto, $\tau(G, H)$ é nilpotente de classe, no máximo, $c+1$. Agora, mostremos que a classe de nilpotência de $\tau(G, H)$ não pode ser inferior a c .

Sejam $M = [\gamma_{c-1}([G, H]^\delta), [H, G]^{\delta\varphi}]$ e α a restrição de λ' a M . É claro que $\text{Im } \alpha = [\gamma_{c-1}([G, H]^\delta), [H, G]^{\delta\varphi}]^\delta$. Mas

$$\begin{aligned} [\gamma_{c-1}([G, H]^\delta), [H, G]^{\delta\varphi}]^\delta &= \langle g^{-1}g^h \mid g \in \gamma_{c-1}([G, H]^\delta), h \in [H, G]^{\delta\varphi} \rangle \\ &= \langle g^{-1}g^{\mu'(t)} \mid g \in \gamma_{c-1}([G, H]^\delta), t \in \tau(G, H) \rangle \\ &= \langle g^{-1}g^{\lambda'(t)} \mid g \in \gamma_{c-1}([G, H]^\delta), t \in \tau(G, H) \rangle \\ &\quad (\text{pela Proposição 3.2.5, (iv)}) \\ &= \langle [g, \lambda'(t)] \mid g \in \gamma_{c-1}([G, H]^\delta), t \in \tau(G, H) \rangle \\ &= [\gamma_{c-1}([G, H]^\delta), [G, H]^\delta] \\ &= \gamma_c([G, H]^\delta). \end{aligned}$$

Uma vez que a classe de nilpotência de $[G, H]^\delta$ é c , temos que $\gamma_c([G, H]^\delta) \neq \{1_{[G, H]^\delta}\}$ e, portanto, $\text{Im } \alpha \neq \{1_{[G, H]^\delta}\}$. Assim, devemos ter $M \neq \{1_{\tau(G, H)}\}$. Agora, pelo Teorema 3.2.6,

$$\gamma_c(\tau(G, H)) = [\gamma_{c-1}([G, H]^\delta), [H, G]^\delta] = M \neq \{1_{\tau(G, H)}\}.$$

Logo, $cl(\tau(G, H)) \geq c$. Assim, concluímos que $\tau(G, H)$ é nilpotente de classe c ou $c + 1$. Portanto, da Proposição 3.1.3, $G \otimes H$ também é nilpotente de classe c ou $c + 1$.

(ii) Suponhamos que $[G, H]^\delta$ é solúvel de comprimento derivado l . Pelo Teorema 3.2.6,

$$\tau(G, H)^{(l+1)} = [([G, H]^\delta)^{(l)}, ([H, G]^\delta)^{(l)}] = [\{1_{[G, H]^\delta}\}, ([H, G]^\delta)^{(l)}] = \{1_{\tau(G, H)}\}.$$

Portanto, $\tau(G, H)$ é solúvel de comprimento derivado, no máximo, $l + 1$. Agora, mostremos que o comprimento derivado de $\tau(G, H)$ não pode ser inferior a c .

Sejam $N = [([G, H]^\delta)^{(l-2)}, ([H, G]^\delta)^{(l-2)}]$ e β a restrição de λ' a N . É claro que $\text{Im } \beta = [([G, H]^\delta)^{(l-2)}, ([H, G]^\delta)^{(l-2)}]^\delta$. Mas

$$\begin{aligned} [([G, H]^\delta)^{(l-2)}, ([H, G]^\delta)^{(l-2)}]^\delta &= \langle g^{-1}g^h \mid g \in ([G, H]^\delta)^{(l-2)}, h \in ([H, G]^\delta)^{(l-2)} \rangle \\ &= \langle g^{-1}g^{\mu'(t)} \mid g \in ([G, H]^\delta)^{(l-2)}, t \in \tau(G, H)^{(l-2)} \rangle \\ &= \langle g^{-1}g^{\lambda'(t)} \mid g \in ([G, H]^\delta)^{(l-2)}, t \in \tau(G, H)^{(l-2)} \rangle \\ &\quad \text{(pela Proposição 3.2.5, (iv))} \\ &= \langle [g, \lambda'(t)] \mid g \in ([G, H]^\delta)^{(l-2)}, t \in \tau(G, H)^{(l-2)} \rangle \\ &= [([G, H]^\delta)^{(l-2)}, ([G, H]^\delta)^{(l-2)}] \\ &= ([G, H]^\delta)^{(l-1)}. \end{aligned}$$

Uma vez que o comprimento derivado de $[G, H]^\delta$ é l , temos que $([G, H]^\delta)^{(l-1)} \neq \{1_{[G, H]^\delta}\}$ e, portanto, $\text{Im } \beta \neq \{1_{[G, H]^\delta}\}$. Assim, devemos ter $N \neq \{1_{\tau(G, H)}\}$. Agora, pelo Teorema 3.2.6,

$$\tau(G, H)^{(l-1)} = [([G, H]^\delta)^{(l-2)}, ([H, G]^\delta)^{(l-2)}] = N \neq \{1_{\tau(G, H)}\}.$$

Logo, $l(\tau(G, H)) \geq l$. Assim, concluímos que $\tau(G, H)$ é solúvel de comprimento derivado l ou $l + 1$. Portanto, da Proposição 3.1.3, $G \otimes H$ também é solúvel de comprimento derivado l ou $l + 1$.

(iii) Sejam $u, v \in \tau(G, H)$. Então, pela Proposição 3.1.4 (iii), para todo $i \in \mathbb{N} - \{0\}$, temos

$$[u, {}_i v] = [[u, {}_{i-1} v], v] = [\lambda'([u, {}_{i-1} v]), \mu'(v)^\Phi] = [[\lambda'(u), {}_{i-1} \lambda'(v)], \mu'(v)^\Phi].$$

Agora, suponhamos que $[G, H]^\delta$ seja n -Engeliano. Então, da igualdade anterior, segue que

$$[u, {}_{n+1} v] = [[u, {}_n v], v] = [[\lambda'(u), {}_n \lambda'(v)], \mu'(v)^\Phi] = 1, \quad \forall u, v \in \tau(G, H).$$

Portanto, $\tau(G, H)$ é $(n + 1)$ -Engeliano.

Agora, sejam $h_1, h_2 \in [H, G]^\delta$. Como μ' é sobrejetivo, existem $t_1, t_2 \in \tau(G, H)$ tais que $\mu'(t_1) = h_1$ e $\mu'(t_2) = h_2$. Temos que

$$[h_1,_{n+1} h_2] = [\mu'(t_1),_{n+1} \mu'(t_2)] = \mu'([t_1,_{n+1} t_2]) = \mu'(1_{\tau(G, H)}) = 1_{[H, G]^\delta}.$$

Logo, $[H, G]^\delta$ também é $(n + 1)$ -Engeliano. $\square$

Corolário 3.2.8 (i) Se G é um grupo nilpotente, então $G \otimes G$ também é nilpotente e

$$cl(G') \leq cl(G \otimes G) \leq cl(G') + 1.$$

(ii) Se G é um grupo solúvel então, $G \otimes G$ também é solúvel e

$$l(G) - 1 \leq l(G \otimes G) \leq l(G).$$

Demonstração. Segue diretamente da proposição anterior (basta fazer $G = H$). $\square$

3.3 Nilpotência de $\eta(G, H)$

Proposição 3.3.1 Se G e H são grupos solúveis, então $\eta(G, H)$ é um grupo solúvel e

$$l(\eta(G, H)) \leq l(G) + l(H) + 1.$$

Demonstração. Como $\eta(G, H) = \tau(G, H)GH^\Phi$, temos que

$$\frac{\eta(G, H)}{\tau(G, H)} \cong G \times H^\Phi.$$

Assim, se G e H são grupos solúveis, então $\frac{\eta(G, H)}{\tau(G, H)}$ é também solúvel e

$$l\left(\frac{\eta(G, H)}{\tau(G, H)}\right) \leq \max\{l(G), l(H)\}.$$

Do Teorema 3.2.7 (ii), temos que $\tau(G, H)$ também é solúvel e

$$l(\tau(G, H)) \leq \min\{l([G, H]^\delta), l([H, G]^\delta)\} + 1 \leq \min\{l(G), l(H)\} + 1.$$

Portanto, $\eta(G, H)$ é solúvel e

$$l(\eta(G, H)) \leq l(G) + l(H) + 1,$$

como queríamos. $\square$

Exemplo 3.3.2 Consideremos o grupo $\eta(C_3, C_2)$, onde $C_3 = \langle a | a^3 \rangle$, $C_2 = \langle b | b^2 \rangle$, C_3 age trivialmente sobre C_2 e C_2 age sobre C_3 por $a^b = a^{-1}$. Para $n \in \mathbb{N} - \{0\}$, consideremos a afirmação

$$P(n) : [a, {}_n b^\Phi] = [a, b^\Phi].$$

i) Por definição, $[a, {}_1 b^\Phi] = [a, b^\Phi]$ e, portanto, $P(1)$ é verdade.

ii) Suponhamos que $P(r)$ seja verdade para algum $r \in \mathbb{N} - \{0\}$. Então

$$\begin{aligned} [a, {}_{r+1} b^\Phi] &= [[a, {}_r b^\Phi], b^\Phi] \\ &= [[a, b^\Phi], b^\Phi] \\ &= [a, b^\Phi]^{-1} [a, b^\Phi]^{b^\Phi} \\ &= [a^{-1} a^b, b^\Phi] \\ &= [a^{-1} a^{-1}, b^\Phi] \\ &= [a, b^\Phi] \end{aligned}$$

e, portanto, $P(r+1)$ é verdade. Segue dos itens acima e do Primeiro Princípio de Indução Finita que $P(n)$ é verdade para todo $n \in \mathbb{N} - \{0\}$.

Do isomorfismo estabelecido no Exemplo 3.1.2, sabemos que $[a, b^\Phi] \neq 1$. Portanto, $\eta(C_3, C_2)$ não é nilpotente.

Definição 3.3.3 Sejam G e H grupos tais que H age sobre G . Para $g \in G$, $h \in H$, defina a sequência $\{[g, {}_n h]^\delta\}_{n \in \mathbb{N}}$ tal que

$$[g, {}_0 h]^\delta = g^{-1}, \quad [g, {}_1 h]^\delta = g^{-1} g^h \quad \text{e} \quad [g, {}_{n+1} h]^\delta = [[g, {}_n h]^\delta, h]^\delta, \quad n \geq 1.$$

Dizemos que a ação de H sobre G é n -Engeliana se $[g, {}_n h]^\delta = 1_G$, para todos $g \in G$, $h \in H$.

Proposição 3.3.4 Sejam $G = C_{n_1} = \langle g | g^{n_1} \rangle$ e $H = C_{n_2} = \langle h | h^{n_2} \rangle$. Suponhamos que o grupo H age sobre o grupo G por

$$g^h = g^s, \quad \text{onde } 1 \leq s \leq n_1 - 1 \text{ e } \text{mdc}(s, n_1) = 1$$

e que exista $k \in \mathbb{N}$ tal que $n_1 | (s-1)^k$. Então a ação de H sobre G é k -Engeliana.

Demonstração. Sejam $0 \leq i \leq n_1 - 1$ e $0 \leq j \leq n_2 - 1$. Para $n \in \mathbb{N} - \{0\}$, considere a afirmação

$$P(n) : [g^i, {}_n h^j]^\delta = g^{i(s^j-1)^n}.$$

i) $[g^i, {}_1 h^j]^\delta = g^{-i} (g^i)^{h^j} = g^{-i} (g^{h^j})^i = g^{-i} g^{is^j} = g^{i(s^j-1)}$ e, portanto, $P(1)$ é verdade.

ii) Suponhamos que $P(r)$ seja verdade, para algum $r \in \mathbb{N} - \{0\}$. Então

$$\begin{aligned}
[g^i,_{r+1} h^j]^\delta &= [[g^i,_r h^j]^\delta, h^j]^\delta \\
&= [g^{i(s^j-1)^r}, h^j]^\delta \\
&= g^{-i(s^j-1)^r} (g^{i(s^j-1)^r})^{h^j} \\
&= g^{-i(s^j-1)^r} (g^{h^j})^{i(s^j-1)^r} \\
&= g^{-i(s^j-1)^r} g^{is^j(s^j-1)^r} \\
&= g^{i(s^j-1)^{r+1}}
\end{aligned}$$

e, portanto, $P(r+1)$ é verdade. Dos itens acima e do Primeiro Princípio de Indução Finita segue que a afirmação $P(n)$ é verdadeira para todo $n \in \mathbb{N} - \{0\}$.

Em particular, se $n = k$, temos

$$[g^i,_k h^j]^\delta = g^{i(s^j-1)^k} = g^{i(s-1)^k \left(\sum_{u=0}^{j-1} s^u \right)^k}.$$

Como, por hipótese, $n_1 | (s-1)^k$ e $g^{n_1} = 1$, segue que $[g^i,_k h^j]^\delta = 1$, para todos $0 \leq i \leq n_1 - 1$, $0 \leq j \leq n_2 - 1$. Portanto, a ação de H sobre G é k -Engeliana. $\square$

Exemplo 3.3.5 Sejam $G = D_4 = \langle x, y | x^4, y^2, (xy)^2 \rangle$ e $H = C_2 = \langle h | h^2 \rangle$. Suponha que H age sobre G por

$$x^h = x^{-1}, \quad y^h = x^2 y.$$

Observe que, para $0 \leq j \leq 1$, $(y^j)^h = x^{2j} y^j$. Temos

$$\begin{aligned}
[[x^i y^j, h]^\delta, h]^\delta &= [(x^i y^j)^{-1} (x^i y^j)^h, h]^\delta \\
&= [y^{-j} x^{-i} x^{-i} x^{2j} y^j, h]^\delta \\
&= [y^{-j} x^{2(j-i)} y^j, h]^\delta \\
&= (y^{-j} x^{2(j-i)} y^j)^{-1} (y^{-j} x^{2(j-i)} y^j)^h \\
&= y^{-j} x^{2(i-j)} y^j y^{-j} x^{-2j} x^{2(i-j)} x^{2j} y^j \\
&= y^{-j} x^{4(i-j)} y^j \\
&= y^{-j} (x^4)^{i-j} y^j \\
&= 1.
\end{aligned}$$

Logo, $[a,_{2} b]^\delta = 1$, para todos $a \in G$, $b \in H$ e, portanto, a ação de H sobre G é 2-Engeliana.

Definição 3.3.6 Sejam G e H grupos tais que H age sobre G . Defina a sequência $\{[G,_{n} H]^\delta\}_{n \in \mathbb{N}}$ tal que

$$[G,_{0} H]^\delta = G, \quad [G,_{1} H]^\delta = [G, H]^\delta \quad \text{e} \quad [G,_{n+1} H]^\delta = [[G,_{n} H]^\delta, H]^\delta.$$

Diremos que a ação de H sobre G é n -nilpotente se $[G,_{n} H]^\delta = \{1_G\}$.

Proposição 3.3.7 *Se a ação de H sobre G é n -Engeliana então $[G, H]^\delta$ é n -Engeliano. Se a ação de H sobre G é c -nilpotente então $[G, H]^\delta$ é nilpotente de classe, no máximo, c .*

Demonstração. Sejam $x, y \in [G, H]^\delta$. Como λ' é sobrejetivo, existe $t \in G \otimes H$ tal que $\lambda'(t) = y$. Para $n \in \mathbb{N} - \{0\}$, considere a afirmação

$$P(n) : [x, {}_n y] = [x, {}_n \mu'(t)]^\delta$$

i) Temos

$$[x, {}_1 y] = [x, y] = [x, \lambda'(t)] = x^{-1} x^{\lambda'(t)} \stackrel{(*)}{=} x^{-1} x^{\mu'(t)} = [x, \mu'(t)]^\delta$$

((*) Proposição 3.2.5, item (iv))

Portanto, $P(1)$ é verdade.

ii) Suponha que $P(r)$ seja verdade, para algum $r \in \mathbb{N} - \{0\}$. Então,

$$\begin{aligned} [x, {}_{r+1} y] &= [[x, {}_r y], y] \\ &= [[x, {}_r y], \mu'(t)]^\delta && (P(1) \text{ verdade}) \\ &= [x, {}_r \mu'(t)]^\delta, \mu'(t)^\delta && (P(r) \text{ verdade}) \\ &= [x, {}_{r+1} \mu'(t)]^\delta \end{aligned}$$

e, portanto, $P(r+1)$ é verdade.

Dos itens acima e do Primeiro Princípio de Indução Finita, a afirmação $P(n)$ é verdadeira, para todo $n \in \mathbb{N} - \{0\}$.

Se a ação de H sobre G é n -Engeliana então, como a afirmação $P(n)$ é verdadeira, temos que, para todos $x, y \in [G, H]^\delta$, $[x, {}_n y] = [x, {}_n \mu'(t)]^\delta = 1_G$ e, portanto, $[G, H]^\delta$ é n -Engeliano.

Agora, sejam $x \in [G, H]^\delta$ e $\{y_j\}_{j \in \mathbb{N}^*} \subseteq [G, H]^\delta$. Como λ' é sobrejetivo, existe $\{t_j\}_{j \in \mathbb{N}^*} \subseteq G \otimes H$ tal que $\lambda'(t_j) = y_j$. Para $n \in \mathbb{N} - \{0\}$, considere a afirmação

$$Q(n) : [x, y_1, y_2, \dots, y_n] = [x, \mu'(t_1), \mu'(t_2), \dots, \mu'(t_n)]^\delta$$

iii) Temos

$$[x, y_1] = [x, \lambda'(t_1)] = x^{-1} x^{\lambda'(t_1)} \stackrel{(*)}{=} x^{-1} x^{\mu'(t_1)} = [x, \mu'(t_1)]^\delta$$

((*) Proposição 3.2.5, item (iv))

Portanto, $Q(1)$ é verdade.

iv) Suponha que $Q(r)$ seja verdade, para algum $r \in \mathbb{N} - \{0\}$. Então,

$$\begin{aligned} [x, y_1, y_2, \dots, y_{r+1}] &= [[x, y_1, y_2, \dots, y_r], y_{r+1}] \\ &= [[x, y_1, y_2, \dots, y_r], \mu'(t_{r+1})]^\delta && (Q(1) \text{ verdade}) \\ &= [[x, \mu'(t_1), \mu'(t_2), \dots, \mu'(t_r)]^\delta, \mu'(t_{r+1})]^\delta && (Q(r) \text{ verdade}) \\ &= [x, \mu'(t_1), \mu'(t_2), \dots, \mu'(t_{r+1})]^\delta \end{aligned}$$

e, portanto, $Q(r+1)$ é verdade.

Dos itens acima e do Primeiro Princípio de Indução Finita, a afirmação $Q(n)$ é verdadeira, para todo $n \in \mathbb{N} - \{0\}$.

Se a ação de H sobre G é c -nilpotente então, como a afirmação $Q(c)$ é verdadeira, temos que, para todos $x, y_1, y_2, \dots, y_c \in [G, H]^\delta$, $[x, y_1, y_2, \dots, y_c] = [x, \mu'(t_1), \mu'(t_2), \dots, \mu'(t_c)]^\delta = 1_G$ (pois $[G, {}_c H]^\delta = \{1_G\}$) e, portanto, $[G, H]^\delta$ é c -nilpotente. $\square$

Corolário 3.3.8 *Se a ação de H sobre G é n -Engeliana, então $G \otimes H$ é $(n+1)$ -Engeliano. Se a ação de H sobre G é c -nilpotente, então $G \otimes H$ é nilpotente de classe, no máximo, $c+1$.*

Demonstração. Segue diretamente do Teorema 3.2.7 e da proposição anterior. $\square$

Lema 3.3.9 *Sejam $g \in \gamma_i(G)$, $h \in \gamma_j(H)$, $x \in G$, $y \in H$ e escrevamos*

$$C_{ij} = [\gamma_{i+1}(G), \gamma_j(H)^\Phi] [\gamma_i(G), \gamma_{j+1}(H)^\Phi].$$

Então

- (a) $[[g, h^\Phi], [x, y^\Phi]] \in C_{ij}$;
- (b) $[g, h^\Phi]^x \equiv [g, h^\Phi][g, [h, x]^{\delta\Phi}] \pmod{C_{ij}}$;
- (c) $[g, h^\Phi]^{y^\Phi} \equiv [g, h^\Phi][[g, y]^\delta, h^\Phi] \pmod{C_{ij}}$;
- (d) $[g, h^\Phi]^{xy^\Phi} \equiv [g, h^\Phi][g, [h, x]^{\delta\Phi}][[g, y]^\delta, h^\Phi][[g, y^\Phi], [x, h^\Phi]^{-1}] \pmod{C_{ij}}$.

Demonstração.

(a) Temos que

$$\begin{aligned} [g, h^\Phi]^{[x, y^\Phi]} &= [g^{x^{-1}x^y}, (h^{y^{-x}y})^\Phi] \\ &= [[x^{-1}x^y, g^{-1}]g, [y^{-x}y, h^{-1}]^\Phi h^\Phi] \\ &= [[x^{-1}x^y, g^{-1}]g, h^\Phi][[x^{-1}x^y, g^{-1}]g, [y^{-x}y, h^{-1}]^\Phi]^{h^\Phi} \\ &= [[x^{-1}x^y, g^{-1}], h^\Phi]^g [g, h^\Phi][[x^{-1}x^y, g^{-1}], [y^{-x}y, h^{-1}]^\Phi]^{gh^\Phi} [g, [y^{-x}y, h^{-1}]^\Phi]^{h^\Phi}. \end{aligned}$$

Daí

$$\begin{aligned} [[g, h^\Phi], [x, y^\Phi]] &= [g, h^\Phi]^{-1} [g, h^\Phi]^{[x, y^\Phi]} \\ &= [[x^{-1}x^y, g^{-1}], h^\Phi]^g [g, h^\Phi][[x^{-1}x^y, g^{-1}], [y^{-x}y, h^{-1}]^\Phi]^{gh^\Phi} [g, [y^{-x}y, h^{-1}]^\Phi]^{h^\Phi}. \end{aligned}$$

Lembrando que $g \in \gamma_i(G)$, $h \in \gamma_j(H)$, $x \in G$, $y \in H$, temos

- i) $[[x^{-1}x^y, g^{-1}], h^\varphi] \in [\gamma_{i+1}(G), \gamma_j(H)^\varphi]$;
- ii) $[[x^{-1}x^y, g^{-1}], [y^{-x}y, h^{-1}]^\varphi] \in [\gamma_{i+1}(G), \gamma_{j+1}(H)^\varphi]$;
- iii) $[g, [y^{-x}y, h^{-1}]^\varphi] \in [\gamma_i(G), \gamma_{j+1}(H)^\varphi]$.

Agora, como $C_{ij} \trianglelefteq \eta(G, H)$ (pela Proposição 3.2.5 (ii)), segue, das igualdades e dos itens acima, que $[[g, h^\varphi], [x, y^\varphi]] \in C_{ij}$.

(b) Temos

$$\begin{aligned}
 [g, h^\varphi]^x &\equiv [g^x, (h^x)^\varphi] && (\text{mod } C_{ij}) \\
 &\equiv [[x, g^{-1}]g, (h^x)^\varphi] && (\text{mod } C_{ij}) \\
 &\equiv [[x, g^{-1}], (h^x)^\varphi]^g [g, (h^x)^\varphi] && (\text{mod } C_{ij}) \\
 &\equiv [g, (h^x)^\varphi] && (\text{mod } C_{ij}) \\
 &\equiv [g, (hh^{-1}h^x)^\varphi] && (\text{mod } C_{ij}) \\
 &\equiv [g, (h^{-1}h^x)^\varphi] [g, h^\varphi]^{(h^{-1}h^x)^\varphi} && (\text{mod } C_{ij}) \\
 &\equiv [g, [h, x]^{\delta\varphi}] [g, h^\varphi]^{[x, h^\varphi]^{-1}} && (\text{mod } C_{ij}) \\
 &\equiv [g, [h, x]^{\delta\varphi}] [g, h^\varphi] [g, h^\varphi]^{-1} [g, h^\varphi]^{[x, h^\varphi]^{-1}} && (\text{mod } C_{ij}) \\
 &\equiv [g, h^\varphi] [g, [h, x]^{\delta\varphi}] [[g, [h, x]^{\delta\varphi}], [g, h^\varphi]] [g, h^\varphi]^{[x, h^\varphi]^{-1}} && (\text{mod } C_{ij}) \\
 &\equiv [g, h^\varphi] [g, [h, x]^{\delta\varphi}] && (\text{mod } C_{ij}),
 \end{aligned}$$

donde a última congruência segue do item (i).

A prova de (c) é análoga a (b), enquanto que a de (d) segue de (b), (c) e da Proposição 3.1.4 (i)-(f). $\square$

Teorema 3.3.10 *Sejam G e H grupos nilpotentes de classes a e b , respectivamente. Suponha que a ação de H sobre G é l -Engeliana e que a ação de G sobre H é k -Engeliana. Então $\eta(G, H)/\tau(G, H)'$ é n -Engeliano, onde $n = c + (2c - 1)m$, com $c = \max\{a, b\}$ e $m = \max\{l, k\}$. Se, além disso, G e H são grupos finitamente gerados, então $\eta(G, H)$ é nilpotente.*

Demonstração. Sejam $u, v \in \eta(G, H)$, $c = \max\{a, b\}$ e $m = \max\{l, k\}$. Para $s \in \mathbb{N}$, considere a afirmação

$$P(s) : [u, {}_{c+sm}v] \equiv 1 \left(\text{mod } \tau(G, H)' \prod_{i=1}^{s+1} [\gamma_i(G), \gamma_{s+2-i}(H)^\varphi] \right).$$

i) Como $\frac{\eta(G, H)}{\tau(G, H)} \cong G \times H^\varphi$, temos $\gamma_i \left(\frac{\eta(G, H)}{\tau(G, H)} \right) \cong \gamma_i(G) \times \gamma_i(H)^\varphi$, $\forall i \in \mathbb{N}^*$. Então temos $\gamma_{c+1} \left(\frac{\eta(G, H)}{\tau(G, H)} \right) = \{1\}$ e, portanto, $[u, {}_c v] \equiv 1 \pmod{\tau(G, H)}$, isto é, $P(0)$ é verdadeira.

ii) Suponhamos $P(s)$ verdadeira para algum $s \in \mathbb{N}$. Então temos

$$[u, c+sm v] \equiv \prod_{i=1}^{s+1} \prod_{t=1}^{r_i} [g_{it}, h_{it}^\Phi] \pmod{\tau(G, H)'},$$

onde $g_{it} \in \gamma_i(G)$, $h_{it} \in \gamma_{s+2-i}(H)$, $1 \leq t \leq r_i$, $1 \leq i \leq s+1$. Considere $v = zxy^\Phi$ com $x \in G$, $y \in H$, $z \in \tau(G, H)$ (pois $\eta(G, H) = \tau(G, H)GH^\Phi$).

Para $j \in \mathbb{N}^*$, considere a afirmação

$$Q(j) : [u, c+sm+j v] \equiv \prod_{i=1}^{s+1} \prod_{t=1}^{r_i} [g_{it}, [h_{it}, jx]^{\delta\Phi}] [[g_{it}, jy]^\delta, h_{it}^\Phi] \pmod{\tau(G, H)'K},$$

onde $K = \prod_{i=1}^{s+2} [\gamma_i(G), \gamma_{s+3-i}(H)^\Phi]$.

iii) Se $j = 1$, então

$$\begin{aligned} [u, c+sm+1 v] &\equiv [u, c+sm v, v] && \pmod{\tau(G, H)'} \\ &\equiv \left[\prod_{i=1}^{s+1} \prod_{t=1}^{r_i} [g_{it}, h_{it}^\Phi], zxy^\Phi \right] && \pmod{\tau(G, H)'} \\ &\equiv \left[\prod_{i=1}^{s+1} \prod_{t=1}^{r_i} [g_{it}, h_{it}^\Phi], xy^\Phi \right] \left[\prod_{i=1}^{s+1} \prod_{t=1}^{r_i} [g_{it}, h_{it}^\Phi], z \right]^{xy^\Phi} && \pmod{\tau(G, H)'} \\ &\equiv \left[\prod_{i=1}^{s+1} \prod_{t=1}^{r_i} [g_{it}, h_{it}^\Phi], xy^\Phi \right] && \pmod{\tau(G, H)'} \\ &\equiv \prod_{i=1}^{s+1} \prod_{t=1}^{r_i} [g_{it}, h_{it}^\Phi]^{-1} [g_{it}, h_{it}^\Phi]^{xy^\Phi} && \pmod{\tau(G, H)'} \\ &\equiv \prod_{i=1}^{s+1} \prod_{t=1}^{r_i} \left\{ [g_{it}, h_{it}^\Phi]^{-1} [g_{it}, h_{it}^\Phi] [g_{it}, [h_{it}, x]^{\delta\Phi}] [[g_{it}, y]^\delta, h_{it}^\Phi] \cdot \right. \\ &\quad \cdot [[g_{it}, y]^\Phi, [x, h_{it}^\Phi]^{-1}] \left. \right\} && \pmod{\tau(G, H)'K} \\ &\equiv \prod_{i=1}^{s+1} \prod_{t=1}^{r_i} [g_{it}, [h_{it}, x]^{\delta\Phi}] [g_{it}, y]^\delta, h_{it}^\Phi && \pmod{\tau(G, H)'K} \end{aligned}$$

Portanto, $Q(1)$ é verdade.

iv) Suponha $Q(r)$ verdade, para algum $f \in \mathbb{N}^*$. Então

$$\begin{aligned}
[u, c+sm+r+1 \ v] &\equiv [u, c+sm+r \ v, v] && (\text{mod } \tau(G, H)') \\
&\equiv \left[\prod_{i=1}^{s+1} \prod_{t=1}^{r_i} [g_{it}, [h_{it}, r x]^{\delta\varphi}] [[g_{it}, r y]^{\delta}, h_{it}^{\varphi}], zxy^{\varphi} \right] && (\text{mod } \tau(G, H)') \\
&\equiv \left[\prod_{i=1}^{s+1} \prod_{t=1}^{r_i} [g_{it}, [h_{it}, r x]^{\delta\varphi}] [[g_{it}, r y]^{\delta}, h_{it}^{\varphi}], xy^{\varphi} \right] \cdot \\
&\quad \cdot \left[\prod_{i=1}^{s+1} \prod_{t=1}^{r_i} [g_{it}, [h_{it}, r x]^{\delta\varphi}] [[g_{it}, r y]^{\delta}, h_{it}^{\varphi}], z \right]^{xy^{\varphi}} && (\text{mod } \tau(G, H)') \\
&\equiv \left[\prod_{i=1}^{s+1} \prod_{t=1}^{r_i} [g_{it}, [h_{it}, r x]^{\delta\varphi}] [[g_{it}, r y]^{\delta}, h_{it}^{\varphi}], xy^{\varphi} \right] && (\text{mod } \tau(G, H)') \\
&\equiv \prod_{i=1}^{s+1} \prod_{t=1}^{r_i} \left\{ \left([g_{it}, [h_{it}, r x]^{\delta\varphi}] [[g_{it}, r y]^{\delta}, h_{it}^{\varphi}] \right)^{-1} \cdot \right. \\
&\quad \cdot \left([g_{it}, [h_{it}, r x]^{\delta\varphi}] [[g_{it}, r y]^{\delta}, h_{it}^{\varphi}] \right)^{xy^{\varphi}} \left. \right\} && (\text{mod } \tau(G, H)') \\
&\equiv \prod_{i=1}^{s+1} \prod_{t=1}^{r_i} \left\{ [[g_{it}, r y]^{\delta}, h_{it}^{\varphi}]^{-1} [g_{it}, [h_{it}, r x]^{\delta\varphi}]^{-1} [g_{it}, [h_{it}, r x]^{\delta\varphi}] \cdot \right. \\
&\quad \cdot [g_{it}, [[h_{it}, r x]^{\delta}, x]^{\delta\varphi}] [[g_{it}, y]^{\delta}, [h_{it}, r x]^{\delta\varphi}] \cdot \\
&\quad \cdot [[g_{it}, y^{\varphi}], [x, [h_{it}, r x]^{\varphi}]^{-1}] [[g_{it}, r y]^{\delta}, h_{it}^{\varphi}] \cdot \\
&\quad \cdot [[g_{it}, r y]^{\delta}, [h_{it}, x]^{\delta\varphi}] [[g_{it}, r y]^{\delta}, y]^{\delta}, h_{it}^{\varphi}] \cdot \\
&\quad \cdot [[g_{it}, r y], y^{\varphi}], [x, h^{\varphi}]^{-1} \left. \right\} && (\text{mod } \tau(G, H)'K) \\
&\equiv \prod_{i=1}^{s+1} \prod_{t=1}^{r_i} [g_{it}, [h_{it}, r+1 x]^{\delta\varphi}] [[g_{it}, r+1 y]^{\delta}, h_{it}^{\varphi}] && (\text{mod } \tau(G, H)'K)
\end{aligned}$$

e, portanto, $Q(r+1)$ é verdadeira.

Logo, dos itens **iii**) e **iv**) e do Primeiro Princípio de Indução Finita, segue que $Q(j)$ é verdadeira, para todo $j \in \mathbb{N}^*$.

Em particular, se $j = m$, temos

$$\begin{aligned}
[u, c+(s+1)m \ v] &\equiv [u, c+sm+m \ v] && (\text{mod } \tau(G, H)'K) \\
&\equiv \prod_{i=1}^{s+1} \prod_{t=1}^{r_i} [g_{it}, [h_{it}, m x]^{\delta\varphi}] [[g_{it}, m y]^{\delta}, h_{it}^{\varphi}] && (\text{mod } \tau(G, H)'K) \\
&\equiv 1 && (\text{mod } \tau(G, H)'K),
\end{aligned}$$

pois $m = \max\{l, k\}$. Isso mostra que $P(s+1)$ é verdadeira.

Portanto, pelos itens **i**) e **ii**) e pelo Primeiro Princípio de Indução Finita, segue que $P(s)$ é verdadeira, para todo $s \in \mathbb{N}$.

Agora, se $s = 2c - 1$,

$$i \leq c \implies s + 2 - i \geq c + 1.$$

Essa implicação nos mostra que

$$\prod_{i=1}^{2c} [\gamma_i(G), \gamma_{s+2-i}(H)^{\varphi}] = \{1_{\eta(G, H)}\}$$

e, daí, se $s = 2c - 1$,

$$[u,_{c+(2c-1)m} v] \equiv 1 \pmod{\tau(G, H)'}$$

Portanto, $\frac{\eta(G, H)}{\tau(G, H)'}$ é n -Engeliano, com $n = c + (2c - 1)m$.

Se, além disso, G e H são grupos finitamente gerados, então $\frac{\eta(G, H)}{\tau(G, H)'}$ é um grupo Engeliano solúvel finitamente gerado. Logo, pelo Teorema 1.2.20, $\frac{\eta(G, H)}{\tau(G, H)'}$ é nilpotente. Como, pela Proposição 3.2.7, $\tau(G, H)$ é nilpotente, segue pelo Teorema 1.2.17 que $\eta(G, H)$ é nilpotente e o teorema está provado. $\square$

Teorema 3.3.11 *Sejam G e H grupos nilpotentes de classes a e b , respectivamente, tais que a ação de H sobre G é l -nilpotente e a ação de G sobre H é k -nilpotente. Considere $c = \max\{a, b\}$, $m = \max\{l, k\}$, $n = c + (2c - 1)m$ e $s = \min\{a, b, k + 1, l + 1\}$. Então $\eta(G, H)$ é um grupo nilpotente de classe, no máximo, $nB_{s+1,2} - B_{s,2}$.*

Demonstração. Utilizando argumentos análogos aos usados no teorema anterior, provamos que $\frac{\eta(G, H)}{\tau(G, H)'}$ é nilpotente de classe, no máximo, n . Pelo Teorema 3.2.6 e pelo Corolário 3.3.8, $\tau(G, H)$ é nilpotente de classe, no máximo, s . Portanto, $\eta(G, H)$ é nilpotente e sua classe não é maior que $nB_{s+1,2} - B_{s,2}$ (Teorema 1.2.17). $\square$

Invariância do Produto Tensorial Não Abeliano de Grupos

4.1 Um Caso Particular Sobre a Invariância do Produto Tensorial não Abeliano

Vários autores investigaram propriedades invariantes do quadrado tensorial de um grupo dado. Nesta seção, seguindo [10], estudaremos este problema sob o ponto de vista de classes de grupos.

Após a definição do produto tensorial não abeliano, Brown, Johnson, Robertson e Loday escreveram duas contribuições fundamentais sobre o quadrado tensorial não abeliano de um grupo (veja [2, 1]), deixando uma série de questões em aberto que foram sucessivamente discutidas em diversas obras de diferentes autores nos últimos anos (veja [3, 16, 9, 8]).

Sejam os homomorfismos $\kappa : G \otimes G \longrightarrow G'$ e $\kappa' : G \wedge G \longrightarrow G'$ definidos, para todo $g \otimes h \in G \otimes H$, por $\kappa(g \otimes h) = [g, h]$ e $\kappa'(g \wedge h) = [g, h]$. Resultados obtidos em [1] mostram a existência do seguinte diagrama comutativo:

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & & 0 & & 0 & \\
 & & & \downarrow & & \downarrow & \\
 H_3(G) & \longrightarrow & \Gamma(G/G') & \longrightarrow & \ker \kappa' & \longrightarrow & H_2(G) \longrightarrow 0 \\
 \parallel & & \parallel & & \downarrow & & \downarrow \\
 H_3(G) & \longrightarrow & \Gamma(G/G') & \longrightarrow & G \otimes G & \longrightarrow & G \wedge G \longrightarrow 1, \\
 & & & & \downarrow \kappa & & \downarrow \kappa' \\
 & & & & G' & = & G' \\
 & & & & \downarrow & & \downarrow \\
 & & & & 1 & & 1
 \end{array}$$

onde as linhas são sequência exatas e as colunas são extensões centrais.

Portanto, a estrutura de $G \otimes G$ é influenciada pela estrutura de G . Isso motivou vários autores a estudar as propriedades de G que são invariantes sob formação do quadrado tensorial não abeliano, mais especificamente, dada uma classe de grupos $\mathfrak{X}$, determinar quando a afirmação

$$G \in \mathfrak{X} \implies G \otimes G \in \mathfrak{X} \quad (I)$$

é verdadeira.

Denotaremos as classes de grupos n -Engelianos, finitos, p -grupos finitos, nilpotentes e solúveis por $\mathfrak{E}_n, \mathfrak{F}, \mathfrak{F}_p, \mathfrak{N}$ e $\mathfrak{S}$, respectivamente. Além disso, as notações $\mathfrak{X} = S\mathfrak{X}$ e $\mathfrak{X} = Q\mathfrak{X}$ significam que a classe $\mathfrak{X}$ é fechada com respeito à subgrupos e imagens homomórficas, respectivamente.

Definição 4.1.1 *Seja $\mathfrak{X}$ uma classe de grupos. O operador de classe NT é definido por*

$$NT\mathfrak{X} = \{G \mid G \otimes G \in \mathfrak{X}\}$$

Observe que verificar (I) equivale a determinar se $\mathfrak{X}$ é fechada com respeito a NT, ou seja, $NT\mathfrak{X} = \mathfrak{X}$.

Exemplo 4.1.2 i) *Seja $\mathfrak{F}$ a classe de grupos finitos. Então, de [9], temos que $NT\mathfrak{F} = \mathfrak{F}$.*

ii) *Sejam $\mathbb{Z}_2$ e D_8 os grupos cíclico de ordem 2 e diedral de ordem 8, respectivamente. Podemos mostrar que $(\mathbb{Z}_2 \times D_8) \otimes (\mathbb{Z}_2 \times D_8) \cong (\mathbb{Z}_2)^8 \times \mathbb{Z}_4$. Concluimos que a propriedade de ser fatorado no produto direto de um grupo abeliano por um grupo não abeliano não é fechada com relação a NT.*

Os resultados obtidos nos trabalhos de Bacon, Blyth, Ellis, Kappe, Inassaridze, Moravec, Morse, Nakaoka, Rocco, Russo, Sarmin, Visscher e entre tantos outros podem ser sumarizados pelo seguinte teorema, que caracteriza a invariância do quadrado tensorial não abeliano de um grupo.

Teorema 4.1.3 *(Veja [9, 12, 16, 15]) O operador de classe NT restrito ao conjunto $\{\mathfrak{E}_n, \mathfrak{F}, \mathfrak{F}_p, \mathfrak{N}, \mathfrak{S}\}$ é a função identidade.*

Para o caso do produto tensorial não abeliano de grupos, analisaremos a invariância de $G \otimes H$ sob certas condições.

Lema 4.1.4 *Sejam G e H grupos normais de um grupo M contendo $\eta(G, H)$. Suponha que tais grupos agem um sobre o outro por conjugação. Então $G \otimes H \cong G^{\eta(G, H)} \cap H^{\eta(G, H)}$.*

Teorema 4.1.5 *Sejam G e H subgrupos normais de um grupo M contendo $\eta(G, H)$. Suponha que G e H agem um sobre o outro por conjugação e seja $\mathfrak{X}$ é uma classe de grupos tal que $S\mathfrak{X} = Q\mathfrak{X} = \mathfrak{X}$. Se $G, H \in \mathfrak{X}$, então $G \otimes H \in \mathfrak{X}$.*

Demonstração. Temos, pelo Lema 4.1.4, que

$$G \otimes H \cong G^{\eta(G, H)} \cap H^{\eta(G, H)} \leq G^M \cap H^M = G \cap H.$$

Logo, $G \otimes H$ é isomorfo a um subgrupo de $G \cap H$. Da hipótese $S\mathfrak{X} = Q\mathfrak{X} = \mathfrak{X}$, temos que $G \otimes H \in \mathfrak{X}$. $\square$

4.2 Invariância do Produto Tensorial não Abelianano

Nesta seção, demonstraremos um resultado que nos dá condições suficientes para que o produto tensorial não-abeliano herde a propriedade que seus grupos geradores possuem, isto é, dada uma classe de grupos $\mathfrak{X}$, daremos condições suficientes para que a implicação

$$G, H \text{ grupos, } G, H \in \mathfrak{X} \implies G \otimes H \in \mathfrak{X}$$

seja verdadeira.

Para facilitar a compreensão da demonstração deste resultado, demonstraremos previamente algumas de suas partes através de lemas. Uma vez que os objetos forem definidos ao longo do texto, os utilizaremos em todo este capítulo sem a necessidade de mencionar novamente quem são.

Seja $\mathfrak{X}$ uma classe de grupos. Denotaremos: $\mathfrak{X} = \mathbf{S}\mathfrak{X}$, se a $\mathfrak{X}$ é fechada à subgrupos; $\mathfrak{X} = \mathbf{H}\mathfrak{X}$ se $\mathfrak{X}$ é fechada à imagens homomórficas; $\mathfrak{X} = \mathbf{P}\mathfrak{X}$ se $\mathfrak{X}$ é fechada à extensões; $\mathfrak{X} = \mathbf{H}_2\mathfrak{X}$ se $\mathfrak{X}$ é fechada ao segundo grupo de cohomologia; $\mathfrak{X} = \mathbf{H}_3\mathfrak{X}$ se $\mathfrak{X}$ é fechada ao terceiro grupo de cohomologia; $\mathfrak{X} = \mathbf{T}\mathfrak{X}$ se $\mathfrak{X}$ é fechada à formação de produto tensorial de anel de grupo usual (isto é, se G e H são grupos abelianos e K é um grupo tais que G e H são um $\mathbb{Z}K$ -módulo à esquerda e um $\mathbb{Z}K$ -módulo à direita, respectivamente, então $G \otimes H \in \mathfrak{X}$).

Sejam G e H grupos agindo compativelmente um sobre o outro e considere $P = (G * H) / IJ$, onde I e J são o fecho normal em $G * H$ dos conjuntos

$$\{g^h h^{-1} g^{-1} h \mid g \in G, h \in H\} \quad \text{e} \quad \{h^g g^{-1} h^{-1} g \mid g \in G, h \in H\},$$

respectivamente (como I e J são normais em $G * H$, IJ é normal em $G * H$). Seja também $\theta : H \longrightarrow \text{Aut } G$ o homomorfismo associado à ação de H sobre G (por meio de ζ_1 , Proposição 1.3.4).

Lema 4.2.1 *A relação*

$$\begin{aligned}\phi &: G \rtimes_{\theta} H \longrightarrow P \\ (g, h) &\longmapsto IJgh\end{aligned}$$

é um epimorfismo de grupos.

Demonstração.

i) Para todos $g_1, g_2 \in G, h_1, h_2 \in H$,

$$\begin{aligned}(g_1, h_1) = (g_2, h_2) &\implies g_1 = g_2 \text{ e } h_1 = h_2 \\ &\implies g_1 h_1 = g_2 h_2 \\ &\implies IJg_1 h_1 = IJg_2 h_2 \\ &\implies \phi(g_1, h_1) = \phi(g_2, h_2).\end{aligned}$$

ii) Para todos $g_1, g_2 \in G, h_1, h_2 \in H$,

$$\begin{aligned}\phi((g_1, h_1)(g_2, h_2)) &= \phi(g_1 g_2^{h_1^{-1}}, h_1 h_2) \\ &= IJg_1 g_2^{h_1^{-1}} h_1 h_2 \\ &= IJ(g_1 h_1 g_2 h_2) h_2^{-1} g_2^{-1} h_1^{-1} g_2^{h_1^{-1}} h_1 h_2 \\ &= (IJg_1 h_1)(IJg_2 h_2)(IJh_2^{-1} g_2^{-1} h_1^{-1} (g_2^{h_1^{-1}} h_1 g_2^{-1} h_1^{-1}) h_1 g_2 h_2) \\ &= \phi(g_1, h_1) \phi(g_2, h_2).\end{aligned}\tag{13}$$

$$\left((13) \ g_2^{h_1^{-1}} h_1 g_2^{-1} h_1^{-1} \in IJ \text{ e } IJ \trianglelefteq G * H \right)$$

iii) Sejam $p(g, h)$ uma palavra sobre $G \cup H$ em $G * H$ e $p((g, 1_H), (1_G, h))$ uma palavra sobre $(G \times \{1_H\}) \cup (\{1_G\} \times H)$ em $G \rtimes_{\theta} H$. É fácil ver que, para todo $IJp(g, h) \in P/IJ$, existe $p((g, 1), (1, h)) \in G \rtimes_{\theta} H$ tal que $\phi(p((g, 1), (1, h))) = IJp(g, h)$.

Dos itens acima, segue que ϕ é um epimorfismo de grupos, como queríamos. $\square$

Lema 4.2.2 *As relações*

$$\begin{aligned}\theta_G &: G \times P \longrightarrow G & e & \theta_H : H \times P \longrightarrow H \\ (g, IJw) &\longmapsto g^w & & (h, IJw) \longmapsto h^w\end{aligned}$$

são ações de P sobre G e de P sobre H , respectivamente.

Demonstração. Primeiramente, observemos que, para todos $g \in G, h \in H, v \in G \cup H$,

$$v g^h h^{-1} g^{-1} h = v \quad \text{e} \quad v h^g g^{-1} h^{-1} g = v$$

e, portanto, $v^z = v$, para todos $v \in G \cup H$, $z \in IJ$.

Temos

i) Para todos $w_1, w_2 \in G * H$, $g_1, g_2 \in G$,

$$\begin{aligned} (g_1, IJw_1) = (g_2, IJw_2) &\implies g_1 = g_2 \text{ e } IJw_1 = IJw_2 \\ &\implies g_1 = g_2 \text{ e } w_1 w_2^{-1} \in IJ \\ &\implies g_1^{w_1} = (g_1^{w_1 w_2^{-1}})^{w_2} = g_1^{w_2} = g_2^{w_2} \\ &\implies \theta_G(g_1, IJw_1) = \theta_G(g_2, IJw_2). \end{aligned}$$

ii) Para todo $g \in G$, $\theta_G(g, IJ) = \theta_G(g, IJ(gg^{-1})) = g^{gg^{-1}} = g$.

iii) Para todos $g \in G$, $w_1, w_2 \in G * H$,

$$\theta_G(g, IJw_1 w_2) = g^{w_1 w_2} = (g^{w_1})^{w_2} = \theta(\theta(g, IJw_1), IJw_2).$$

iv) Para todos $g_1, g_2 \in G$, $w \in G * H$,

$$\theta_G(g_1 g_2, IJw) = (g_1 g_2)^w = g_1^w g_2^w = \theta_G(g_1, IJw) \theta_G(g_2, IJw).$$

Dos itens acima, segue que θ_G é uma ação de P sobre G .

Temos também

v) Para todos $w_1, w_2 \in G * H$, $h_1, h_2 \in G$,

$$\begin{aligned} (h_1, IJw_1) = (h_2, IJw_2) &\implies h_1 = h_2 \text{ e } IJw_1 = IJw_2 \\ &\implies h_1 = h_2 \text{ e } w_1 w_2^{-1} \in IJ \\ &\implies h_1^{w_1} = (h_1^{w_1 w_2^{-1}})^{w_2} = h_1^{w_2} = h_2^{w_2} \\ &\implies \theta_H(h_1, IJw_1) = \theta_H(h_2, IJw_2). \end{aligned}$$

vi) Para todo $h \in H$, $\theta_H(h, IJ) = \theta_H(h, IJ(hh^{-1})) = h^{hh^{-1}} = h$.

vii) Para todos $h \in G$, $w_1, w_2 \in G * H$,

$$\theta_H(h, IJw_1 w_2) = h^{w_1 w_2} = (h^{w_1})^{w_2} = \theta(\theta(h, IJw_1), IJw_2).$$

viii) Para todos $h_1, h_2 \in G$, $w \in G * H$,

$$\theta_H(h_1 h_2, IJw) = (h_1 h_2)^w = h_1^w h_2^w = \theta_H(h_1, IJw) \theta_H(h_2, IJw).$$

Dos itens acima, segue que θ_H é uma ação de P sobre H . □

Sejam os homomorfismos

$$\begin{array}{ccc} \mu : G & \longrightarrow & P \\ g & \longmapsto & IJg \end{array} \quad e \quad \begin{array}{ccc} \nu : H & \longrightarrow & P \\ h & \longmapsto & IJh \end{array}.$$

Lema 4.2.3 *Os pares (μ, θ_G) e (ν, θ_H) são módulos cruzados.*

Demonstração.

i) Para todos $g \in G, w \in G * H$,

$$\mu(g^{IJw}) = \mu(g^w) = IJg^w = IJw^{-1}gw = (IJw)^{-1}\mu(g)(IJw).$$

ii) Para todos $g, g_1 \in G$,

$$g_1^{\mu(g)} = g_1^{IJg} = g_1^g = g^{-1}g_1g.$$

Dos itens acima, segue que o par (μ, θ_G) é um módulo cruzado. A outra parte é provada de modo análogo. $\square$

Defina $\bar{G} := \mu(G)$ e $\bar{H} := \nu(H)$.

Lema 4.2.4 (a) *As relações*

$$\begin{array}{ccc} \theta_{\bar{G}} : \bar{G} \times \bar{H} & \longrightarrow & \bar{G} \\ (IJg, IJh) & \longmapsto & IJg^h \end{array} \quad e \quad \begin{array}{ccc} \theta_{\bar{H}} : \bar{H} \times \bar{G} & \longrightarrow & \bar{H} \\ (IJh, IJg) & \longmapsto & IJh^g \end{array}$$

são ações compatíveis.

(b) μ e ν preservam as ações $\theta_{\bar{G}}$ e $\theta_{\bar{H}}$.

(c) G e H são $(\ker \nu)$ -trivial e $(\ker \mu)$ -trivial, respectivamente.

Demonstração. (a) Iremos mostrar apenas que $\theta_{\bar{G}}$ e $\theta_{\bar{H}}$ são funções. Mostrar que $\theta_{\bar{G}}$ e $\theta_{\bar{H}}$ são ações compatíveis é consequência imediata da compatibilidade das ações de G sobre H e de H sobre G .

Para todos $IJg_1, IJg_2 \in \bar{G}, IJh_1, IJh_2 \in \bar{H}$,

$$\begin{aligned} (IJg_1, IJh_1) = (IJg_2, IJh_2) &\implies g_1g_2^{-1} \in IJ \text{ e } h_1h_2^{-1} \in IJ \\ &\implies \begin{cases} IJg_1^{h_1} = IJh_1^{-1}g_1h_1 \\ = IJh_2^{-1}(h_1h_2^{-1})^{-1}(g_1g_2^{-1})g_2(h_1h_2^{-1})h_2 \\ = IJh_2^{-1}g_2h_2 \\ = IJg_2^{h_2} \end{cases} \\ &\implies \theta_{\bar{G}}(IJg_1, IJh_1) = \theta_{\bar{G}}(IJg_2, IJh_2). \end{aligned}$$

Isso mostra que $\theta_{\bar{G}}$ é uma função. Analogamente, $\theta_{\bar{H}}$ é uma função.

Os itens (b) e (c) são triviais. $\square$

Definamos $\bar{a} := IJa$, para todo $a \in G * H$.

Lema 4.2.5 *O conjunto $E = \{\bar{g} \otimes \bar{h} \mid \bar{g} = \bar{h}\} \subset \bar{G} \otimes \bar{H}$ está contido em $Z(\bar{G} \otimes \bar{H})$.*

Demonstração. Seja $\bar{g} \otimes \bar{h} \in E$. Então, da Proposição 2.2.3 item (g), para todo $\bar{a} \otimes \bar{b} \in \bar{G} \otimes \bar{H}$,

$$(\bar{g} \otimes \bar{h})^{-1}(\bar{a} \otimes \bar{b})(\bar{g} \otimes \bar{h}) = \bar{a}^{\bar{g}^{-1}\bar{g}^{\bar{h}}} \otimes \bar{b}^{\bar{g}^{-1}\bar{g}^{\bar{h}}} = \bar{a} \otimes \bar{b}$$

(pois $\bar{g} = \bar{h}$) e, portanto, $\bar{g} \otimes \bar{h} \in Z(\bar{G} \otimes \bar{H})$. $\square$

Definição 4.2.6 *Seja $D(\bar{G}, \bar{H}) = \langle E \rangle (= \langle E \rangle^P)$. O grupo $(\bar{G} \otimes \bar{H})/D(\bar{G}, \bar{H})$ é chamado produto exterior de $\bar{G}$ e $\bar{H}$ e será denotado por $\bar{G} \wedge \bar{H}$. A classe lateral $D(\bar{G}, \bar{H})(\bar{g} \otimes \bar{h})$ é denotada por $\bar{g} \wedge \bar{h}$.*

Lema 4.2.7 *Existe um epimorfismo $\kappa' : \bar{G} \wedge \bar{H} \longrightarrow [\bar{G}, \bar{H}]$ tal que $\kappa'(\bar{g} \wedge \bar{h}) = [\bar{g}, \bar{h}]$, para todo $\bar{g} \wedge \bar{h} \in \bar{G} \wedge \bar{H}$.*

Demonstração. Defina a relação

$$\begin{aligned} \kappa : \bar{G} \times \bar{H} &\longrightarrow [\bar{G}, \bar{H}] \\ (\bar{g}, \bar{h}) &\longmapsto [\bar{g}, \bar{h}] = \bar{g}^{-1}\bar{g}^{\bar{h}}, \quad \forall (\bar{g}, \bar{h}) \in \bar{G} \times \bar{H}. \end{aligned}$$

i) Da demonstração da Proposição 2.2.9 item (a), κ é uma função que satisfaz

$$\kappa(\bar{g}\bar{g}_1, \bar{h}) = \kappa(\bar{g}^{\bar{g}_1}, \bar{h}^{\bar{g}_1})\kappa(\bar{g}_1, \bar{h}) \quad \text{e} \quad \kappa(\bar{g}, \bar{h}\bar{h}_1) = \kappa(\bar{g}, \bar{h}_1)\kappa(\bar{g}^{\bar{h}_1}, \bar{h}^{\bar{h}_1})$$

para todos $\bar{g}, \bar{g}_1 \in \bar{G}, \bar{h}, \bar{h}_1 \in \bar{H}$.

ii) Se $\bar{g} = \bar{h}$, então $\kappa(\bar{g}, \bar{h}) = [\bar{g}, \bar{h}] = [\bar{g}, \bar{g}] = 1_{[\bar{G}, \bar{H}]}$.

Dos itens acima e do Teorema 1.2.33, existe um homomorfismo $\kappa' : \bar{G} \wedge \bar{H} \longrightarrow [\bar{G}, \bar{H}]$ tal que $\kappa'(\bar{g} \wedge \bar{h}) = [\bar{g}, \bar{h}]$, para todo $\bar{g} \wedge \bar{h} \in \bar{G} \wedge \bar{H}$. É fácil ver que tal homomorfismo é sobrejetivo. $\square$

Lema 4.2.8 *Dado um grupo G , existe um homomorfismo $\phi : \Gamma(G/G') \longrightarrow G \otimes G$ tal que $\phi(\gamma(G'g)) = g \otimes g$, para todo $\gamma(G'g) \in \Gamma(G/G')$.*

Demonstração. Seja $\gamma = \{\gamma(G'g) \mid G'g \in G/G'\}$. Defina a relação

$$\begin{aligned} \phi : \quad \gamma &\longrightarrow G \otimes G \\ \gamma(G'g) &\longmapsto g \otimes g, \quad \forall \gamma(G'g) \in \gamma. \end{aligned}$$

i) Pela Proposição 2.2.3 (g) temos, para todo $g \in G$, $g \otimes g \in Z(G \otimes G)$.

ii) Para todo $g, h \in G$,

$$\begin{aligned} g \otimes g &= gh^{-1}h \otimes g \\ &= (g^h h^{-1} \otimes g^h)(h \otimes g) \\ &\stackrel{(*)}{=} (h^{-1} \otimes g^h)(g^h \otimes g^h)(h \otimes g) \\ &= (h \otimes g)^{-1}(g^h \otimes g^h)(h \otimes g) \\ &\stackrel{i)}{=} g^h \otimes g^h. \end{aligned}$$

((*) Proposição 2.2.3 (e))

iii) Para todos $\gamma(G'g_1), \gamma(G'g_2) \in \gamma$,

$$\begin{aligned} \gamma(G'g_1) = \gamma(G'g_2) &\iff G'g_1 = G'g_2 \\ &\iff g_1 g_2^{-1} \in G' \\ &\iff \exists w \in G \otimes G; \pi(w) = g_1 g_2^{-1}, \end{aligned}$$

onde π é a função do Corolário 2.2.10 (a). Assim, do Corolário 2.2.10 (c),

$$\begin{aligned} 1_{\otimes} &= [w, w] \\ &= \pi(w) \otimes \pi(w) \\ &= g_1 g_2^{-1} \otimes g_1 g_2^{-1} \\ &= (g_1^{g_2^{-1}} \otimes g_1^{g_2^{-1}} g_2^{-1})(g_2^{-1} \otimes g_1 g_2^{-1}) \\ &= (g_1^{g_2^{-1}} \otimes g_1^{g_2^{-1}})(g_1^{g_2^{-1}} \otimes g_2^{-1})(g_2^{-1} \otimes g_1 g_2^{-1}) \\ &\stackrel{ii)}{=} (g_1 \otimes g_1)(g_1^{g_2^{-1}} \otimes g_2^{-1})(g_2^{-1} \otimes g_1 g_2^{-1}), \quad (14) \end{aligned}$$

donde a quinta igualdade decorre da Proposição 2.2.3 (f). Mas

$$\begin{aligned} (g_1 g_2^{-1} \otimes g_2^{-1})(g_2 \otimes g_2)^{-1} &= (g_1 g_2^{-1} \otimes g_2^{-1})(g_2 \otimes g_2^{-1}) \\ &= (g_1 g_2^{-1} \otimes g_2^{-1})(g_1^{g_2^{-1}} g_2 g_1^{-1} \otimes g_2^{-1}) \\ &= (g_1 g_2^{-1} \otimes g_2^{-1})(g_2 g_1^{-1} \otimes g_2^{-g_1 g_2^{-1}})(g_1^{g_2^{-1}} \otimes g_2^{-1}) \\ &= (g_1 g_2^{-1} \otimes g_2^{-1})(g_1 g_2^{-1} \otimes g_2^{-1})^{-1}(g_1^{g_2^{-1}} \otimes g_2^{-1}) \\ &= g_1^{g_2^{-1}} \otimes g_2^{-1}, \quad (15) \end{aligned}$$

donde a terceira igualdade decorre da Proposição 2.2.3 (f). Logo, de (14) e (15), temos

$$\begin{aligned} 1_{\otimes} &= (g_1 \otimes g_1)(g_1 g_2^{-1} \otimes g_2^{-1})(g_2 \otimes g_2)^{-1}(g_2^{-1} \otimes g_1 g_2^{-1}) \\ &\stackrel{i)}{=} (g_1 \otimes g_1)(g_2 \otimes g_2)^{-1}(g_1 g_2^{-1} \otimes g_2^{-1})(g_2^{-1} \otimes g_1 g_2^{-1}) \\ &= (g_1 \otimes g_1)(g_2 \otimes g_2)^{-1}(\pi(w) \otimes g_2^{-1})(g_2^{-1} \otimes \pi(w)) \\ &= (g_1 \otimes g_1)(g_2 \otimes g_2)^{-1}(\pi(w) \otimes g_2^{-1})(\pi(w) \otimes g_2^{-1})^{-1} \\ &= (g_1 \otimes g_1)(g_2 \otimes g_2)^{-1}, \end{aligned}$$

donde a quarta igualdade decorre do Corolário 2.2.10 (b). Logo, para todos $\gamma(G'g_1), \gamma(G'g_2) \in \gamma$,

$$\begin{aligned}\gamma(G'g_1) = \gamma(G'g_2) &\implies g_1 \otimes g_1 = g_2 \otimes g_2 \\ &\implies \phi(\gamma(G'g_1)) = \phi(\gamma(G'g_2))\end{aligned}$$

e, portanto, ϕ é uma função.

iv) Para todo $g \in G$,

$$\begin{aligned}\phi(\gamma(G'g^{-1}))\phi(\gamma(G'g))^{-1} &= (g^{-1} \otimes g^{-1})(g \otimes g)^{-1} \\ &= (g^{-1} \otimes g)^{-1}(g \otimes g)^{-1} \\ &= (g \otimes g)(g \otimes g)^{-1} \\ &= 1_{\otimes}.\end{aligned}$$

v) Sejam $a, b, c \in G$ e considere $\phi_1 = \phi(\gamma(G'abc))\phi(\gamma(G'a))\phi(\gamma(G'b))\phi(\gamma(G'c))$ e $\phi_2 = (\phi(\gamma(G'ab))\phi(\gamma(G'bc))\phi(\gamma(G'ca)))^{-1}$. Temos

$$\begin{aligned}\phi_1 &= (abc \otimes abc)(a \otimes a)(b \otimes b)(c \otimes c) \\ &= (a^c b^c \otimes a^c b^c c)(c \otimes abc)(a \otimes a)(b \otimes b)(c \otimes c) \\ &= (a^c b^c \otimes c)(a^{c^2} b^{c^2} \otimes a^{c^2} b^{c^2})(c \otimes abc)(a \otimes a)(b \otimes b)(c \otimes c) \\ &\stackrel{\text{ii)}}{=} (a^c b^c \otimes c)(ab \otimes ab)(c \otimes abc)(a \otimes a)(b \otimes b)(c \otimes c) \\ &\stackrel{\text{i)}}{=} (a^c b^c \otimes c)(c \otimes c)(c \otimes abc)(a \otimes a)(b \otimes b)(ab \otimes ab) \\ &= (abc \otimes c)(c \otimes abc)(a \otimes a)(b \otimes b)(ab \otimes ab) \\ &= (a^{bc} \otimes c^{bc})(bc \otimes c)(c \otimes abc)(a \otimes a)(b \otimes b)(ab \otimes ab).\end{aligned}$$

Como $bc \otimes bc = (bc \otimes c)(b^c c \otimes b^c)$ temos

$$\begin{aligned}\phi_1 &= (a^{bc} \otimes c^{bc})(bc \otimes bc)(b^c c \otimes b^c)^{-1}(c \otimes abc)(a \otimes a)(b \otimes b)(ab \otimes ab) \\ &\stackrel{\text{i)}}{=} (a^{bc} \otimes c^{bc})(b^c c \otimes b^c)^{-1}(c \otimes abc)(a \otimes a)(b \otimes b)(ab \otimes ab)(bc \otimes bc) \\ &= (a^{bc} \otimes c^{bc}) \left((b^{c^2} \otimes b^{c^2})(c \otimes b^c) \right)^{-1} (c \otimes abc)(a \otimes a)(b \otimes b)(ab \otimes ab)(bc \otimes bc) \\ &\stackrel{\text{ii)}}{=} (a^{bc} \otimes c^{bc})(c \otimes b^c)^{-1}(b \otimes b)^{-1}(c \otimes abc)(a \otimes a)(b \otimes b)(ab \otimes ab)(bc \otimes bc) \\ &\stackrel{\text{ii)}}{=} (a^{bc} \otimes c^{bc})(c \otimes b^c)^{-1}(c \otimes abc)(a \otimes a)(ab \otimes ab)(bc \otimes bc) \\ &= (a^{bc} \otimes c^{bc})(c \otimes b^c)^{-1}(c \otimes c)(c \otimes a^c b^c)(a \otimes a)(ab \otimes ab)(bc \otimes bc) \\ &= (a^{bc} \otimes c^{bc})(c \otimes b^c)^{-1}(c \otimes c)(c \otimes b^c)(c^{bc} \otimes a^{bc})(a \otimes a)(ab \otimes ab)(bc \otimes bc) \\ &\stackrel{\text{i)}}{=} (a^{bc} \otimes c^{bc})(c \otimes b^c)^{-1}(c \otimes b^c)(a \otimes a)(c \otimes c)(c^{bc} \otimes a^{bc})(ab \otimes ab)(bc \otimes bc) \\ &= (a^{bc} \otimes c^{bc})(a \otimes a)(c \otimes c)(c^{bc} \otimes a^{bc})(ab \otimes ab)(bc \otimes bc).\end{aligned}$$

Como

$$\begin{aligned}
ca \otimes ca &\stackrel{\text{ii)}}{=} (ca)^c \otimes (ca)^c \\
&= ac \otimes ac \\
&\stackrel{\text{ii)}}{=} a^{c^{-1}bc} c^{c^{-1}bc} \otimes a^{c^{-1}bc} c^{c^{-1}bc} \\
&= (a^{bc} \otimes a^{bc} c^{bc})(c^{bc} \otimes a^{c^{-1}bc} c^{c^{-1}bc}) \\
&= (a^{bc} \otimes c^{bc})(a^{cbc} \otimes a^{cbc})(c^{bc} \otimes c^{bc})(c^{bc} \otimes a^{bc}) \\
&\stackrel{\text{ii)}}{=} (a^{bc} \otimes c^{bc})(a \otimes a)(c \otimes c)(c^{bc} \otimes a^{bc})
\end{aligned}$$

temos

$$\begin{aligned}
\phi_1 &= (ca \otimes ca)(ab \otimes ab)(bc \otimes bc) \\
&\stackrel{\text{i)}}{=} (ab \otimes ab)(bc \otimes bc)(ca \otimes ca) \\
&= \phi_2^{-1}
\end{aligned}$$

e, portanto, para todos $a, b, c \in G$,

$$\phi(\gamma(G'abc))\phi(\gamma(G'a))\phi(\gamma(G'b))\phi(\gamma(G'c))\left(\phi(\gamma(G'ab))\phi(\gamma(G'bc))\phi(\gamma(G'ca))\right)^{-1} = 1_{\otimes}.$$

Dos itens **iii)**, **iv)** e **v)** e do Teorema 1.2.33 segue que existe um único homomorfismo $\phi : \Gamma(G/G') \rightarrow G \otimes G$ tal que $\phi(\gamma(G'g)) = \phi(\gamma(G'g)) = g \otimes g$, para todo $\gamma(G'g) \in \Gamma(G/G')$. $\square$

Lema 4.2.9 Se $G = \bar{G} \cap \bar{H}$ no lema anterior então $\text{Im } \phi = D(\bar{G}, \bar{H})$.

$$\text{Seja } K = (\bar{G} \cap \bar{H})/(\bar{G} \cap \bar{H})'.$$

Teorema 4.2.10 Sejam G e H grupos agindo compativelmente um sobre o outro e suponha $\mathfrak{X} = \mathbf{S}\mathfrak{X} = \mathbf{H}\mathfrak{X} = \mathbf{P}\mathfrak{X} = \mathbf{H}_2\mathfrak{X} = \mathbf{H}_3\mathfrak{X} = \mathbf{T}\mathfrak{X}$. Nessas condições, se $G, H, \Gamma(K) \in \mathfrak{X}$, então $G \otimes H \in \mathfrak{X}$.

Demonstração. Como $G, H \in \mathfrak{X}$ e $\mathfrak{X} = \mathbf{P}\mathfrak{X}$ segue, pela definição de produto semidireto, que $G \rtimes_{\theta} H \in \mathfrak{X}$. Pelo Lema 4.2.1 e da hipótese $\mathfrak{X} = \mathbf{H}\mathfrak{X}$, segue que $P \in \mathfrak{X}$. Como $\bar{G}$ e $\bar{H}$ são subgrupos de P segue, da hipótese $\mathfrak{X} = \mathbf{S}\mathfrak{X}$, que $\bar{G}, \bar{H} \in \mathfrak{X}$. Do Lema 4.2.3 e da Proposição 1.3.11, temos $\bar{G}, \bar{H} \trianglelefteq P$, $\ker \mu \leq Z(G)$ e $\ker \nu \leq Z(H)$. Disso, concluímos que as sequências exatas

$$\begin{aligned}
1 \longrightarrow \ker \mu \xrightarrow{i_1} G \xrightarrow{\mu} \bar{G} \longrightarrow 1 \\
1 \longrightarrow \ker \nu \xrightarrow{i_2} H \xrightarrow{\nu} \bar{H} \longrightarrow 1
\end{aligned}$$

(onde i_1 e i_2 são inclusões) são extensões centrais e, portanto, do Lema 4.2.4 e do Teorema 2.2.13, existe uma sequência exata

$$(G \otimes \ker \nu) \times (\ker \mu \otimes H) \xrightarrow{\tau} G \otimes H \xrightarrow{\mu \otimes \nu} \bar{G} \otimes \bar{H} \longrightarrow 1,$$

onde $Im \tau \leq Z(G \otimes H)$. Do Lema 4.2.4 item (c) e do Teorema 2.2.14 segue que

$$G \otimes ker \nu \cong I(G) \otimes_{\mathbb{Z}G} ker \nu$$

e

$$ker \mu \otimes H \cong ker \mu \otimes_{\mathbb{Z}H} I(H).$$

Assim, da hipótese $\mathfrak{X} = \mathbf{T}\mathfrak{X}$, segue que $G \otimes ker \nu, ker \mu \otimes H \in \mathfrak{X}$. Como produto direto também é um produto semidireto, segue que $(G \otimes ker \nu) \times (ker \mu \otimes H) \in \mathfrak{X}$ e, portanto, $Im \tau \in \mathfrak{X}$ (pois $\mathfrak{X} = \mathbf{H}\mathfrak{X}$). Como $\tilde{G} \otimes \tilde{H} \cong (G \otimes H)/Im \tau$ e $Im \tau \in \mathfrak{X}$, teremos $G \otimes H \in \mathfrak{X}$ se provarmos que $\tilde{G} \otimes \tilde{H} \in \mathfrak{X}$ (pois $\mathfrak{X} = \mathbf{P}\mathfrak{X}$) e isso encerra a demonstração. Provemos então que $\tilde{G} \otimes \tilde{H} \in \mathfrak{X}$.

Do Lema 4.2.7, temos que $(\tilde{G} \wedge \tilde{H})/ker \kappa' \cong [\tilde{G}, \tilde{H}]$. Mas $[\tilde{G}, \tilde{H}] \leq \tilde{G} \cap \tilde{H} \leq \tilde{G} \in \mathfrak{X}$. Logo, da hipótese $\mathfrak{X} = \mathbf{S}\mathfrak{X} = \mathbf{H}\mathfrak{X}$, temos que $(\tilde{G} \wedge \tilde{H})/ker \kappa' \in \mathfrak{X}$. (14)

Do Teorema 4.5 de [2], existe uma sequência exata

$$H_3(P/\tilde{G}) \oplus H_3(P/\tilde{H}) \longrightarrow ker \kappa' \longrightarrow H_2(P)$$

Como $P, P/\tilde{G}, P/\tilde{H} \in \mathfrak{X}$ segue, da hipótese $\mathfrak{X} = \mathbf{H}\mathfrak{X} = \mathbf{H}_2\mathfrak{X} = \mathbf{H}_3\mathfrak{X}$ que $H_3(P/\tilde{G}), H_3(P/\tilde{H}), H_2(P) \in \mathfrak{X}$. Como $ker \kappa'$ é extensão de $H_3(P/\tilde{G}) \oplus H_3(P/\tilde{H})$ por $H_2(P)$ segue, da hipótese $\mathfrak{X} = \mathbf{P}\mathfrak{X}$, que $ker \kappa' \in \mathfrak{X}$. (15)

De (14) e (15) e da hipótese $\mathfrak{X} = \mathbf{P}\mathfrak{X}$, temos $\tilde{G} \wedge \tilde{H} \in \mathfrak{X}$. Mas, pelo Lema 4.2.9 e das hipóteses $\Gamma(K) \in \mathfrak{X}$ e $\mathfrak{X} = \mathbf{H}\mathfrak{X}$, temos $D(\tilde{G}, \tilde{H}) \in \mathfrak{X}$. Logo, da hipótese $\mathfrak{X} = \mathbf{P}\mathfrak{X}$, temos $\tilde{G} \otimes \tilde{H} \in \mathfrak{X}$, como queríamos.

□

Considerações Finais

Neste trabalho, apresentamos condições (de diferentes modos) para que o produto tensorial herde propriedades de seus grupos componentes. O produto tensorial não abeliano tem sido vastamente estudado em sua forma particular: o quadrado tensorial. Solubilidade, finitude, cotas para ordem, entre outras tantos estudos são largamente aplicados ao quadrado tensorial.

Uma pergunta que poderia ser estudada é: se o produto tensorial de grupos tem uma propriedade $\mathfrak{X}$ então seus grupos componentes tem a propriedade $\mathfrak{X}$?

Referências Bibliográficas

- [1] BROWN, R.; JOHNSON, D. L.; ROBERTSON, E. F. **Some computations of non-abelian tensor products of groups**. Journal of Algebra **111**, 177-202 (1987).
- [2] BROWN, R.; LODAY, J. L. **Van Kampen theorems for diagrams of spaces**. Topology **26**, 311-335 (1987).
- [3] ELLIS, G. **Crossed modules and their higher dimensional analogues**. Ph.D. Thesis. University of Wales, Bangor, 1984.
- [4] ELLIS, G. **The non-abelian tensor product of finite groups is finite**. Journal of Algebra **111**, 203-205 (1987).
- [5] GUIN, D. **Cohomologie et homologie non abeliennes des groupes**. Journal of Pure and Applied Algebra, 109-137 (1988).
- [6] JOHNSON, D. L. **Presentation of Groups**. London Mathematical Society Student Texts. Cambridge University Press, 1997.
- [7] MAGNUS, W.; KARRASS, A.; SOLITAR, D. **Combinatorial Group Theory: Presentations of Groups in Terms of Generators and Relations**. Dover Publications. New York, 1976.
- [8] MORAVEC, P. **The non-abelian tensor product of polycyclic groups is polycyclic**. Journal of Group Theory **10**, 795-798 (2007).
- [9] NAKAOKA, I. **Non-abelian tensor products of solvable groups**. Journal of Group Theory **3**, 157-167 (2000).
- [10] OTERA, D. E.; RUSSO, F. G.; TANASI, C. **Some algebraic and topological properties of the nonabelian tensor product**. Bulletin of the Korean Mathematical Society, 1069-1077 (2011).
- [11] ROBINSON, D. J. S. **A Course in the Theory of Groups**. Graduate Texts in Mathematics. Springer-Verlag, 1995.

- [12] ROCCO, N. R. **Nonabelian Tensor Products under Engelian actions: an approach via a related construction.** preprint, University of Brasilia, 1997.
- [13] ROTMAN, J. J. **An Introduction to the Theory of Groups.** Graduate Texts in Mathematics. Springer-Verlag, 1995.
- [14] RUSSO, F. **A Note on the Invariance in the Nonabelian Tensor Product.** arXiv: 1007.1323, arxiv.org (2010).
- [15] THOMAS, V. Z. **The non-abelian tensor product of finite groups is finite: a homology-free proof.** Glasgow Mathematical Journal, 473-477 (2010).
- [16] VISSCHER, M. P. **On the nilpotency class and solvability length of nonabelian tensor products of groups.** Archiv der Mathematik **73**, 161-171 (1999).