

UNIVERSIDADE FEDERAL DE GOIÁS  
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA

DIOGO GONÇALVES DIAS

**Classes de Hipersuperfícies Weingarten  
Generalizada no Espaço Euclidiano**

Goiânia, GO  
2014

**TERMO DE CIÊNCIA E DE AUTORIZAÇÃO PARA DISPONIBILIZAR AS TESES E DISSERTAÇÕES ELETRÔNICAS (TEDE) NA BIBLIOTECA DIGITAL DA UFG**

Na qualidade de titular dos direitos de autor, autorizo a Universidade Federal de Goiás (UFG) a disponibilizar, gratuitamente, por meio da Biblioteca Digital de Teses e Dissertações (BDTD/UFG), sem ressarcimento dos direitos autorais, de acordo com a Lei nº 9610/98, o documento conforme permissões assinaladas abaixo, para fins de leitura, impressão e/ou *download*, a título de divulgação da produção científica brasileira, a partir desta data.

**1. Identificação do material bibliográfico:**       **Dissertação**       **Tese**

**2. Identificação da Tese ou Dissertação**

Autor (a):	Diogo Gonçalves Dias		
E-mail:	diogodias.gd@gmail.com		
Seu e-mail pode ser disponibilizado na página?	<input checked="" type="checkbox"/> Sim	<input type="checkbox"/> Não	
Vínculo empregatício do autor	IFG		
Agência de fomento:	Fund. Amp. Pes. do Est. de Goiás	Sigla:	FAPEG
País:	Brasil	UF:	GO CNPJ: 08.156.102/0001-02
Título:	Classes de Hipersuperfícies Weingarten Generalizada no Espaço Euclidiano		
Palavras-chave:	Superfícies Weingarten generalizada, representação tipo Weierstrass, aplicação normal de Gauss prescrita		
Título em outra língua:	Classes of Generalized Weingarten Surfaces in the Euclidean 3-Space		
Palavras-chave em outra língua:	Generalized Weingarten surfaces, Weierstrass type representation, prescribed normal Gauss map		
Área de concentração:	Geometria e Topologia		
Data defesa: (dd/mm/aaaa)	29/09/2014		
Programa de Pós-Graduação:	Matemática		
Orientador (a):	Dr. Armando Mauro Vasquez Corro		
E-mail:	avcorro@gmail.com		
Co-orientador (a):*			
E-mail:			

\*Necessita do CPF quando não constar no SisPG

**3. Informações de acesso ao documento:**

Concorda com a liberação total do documento  SIM       NÃO<sup>1</sup>

Havendo concordância com a disponibilização eletrônica, torna-se imprescindível o envio do(s) arquivo(s) em formato digital PDF ou DOC da tese ou dissertação.

O sistema da Biblioteca Digital de Teses e Dissertações garante aos autores, que os arquivos contendo eletronicamente as teses e ou dissertações, antes de sua disponibilização, receberão procedimentos de segurança, criptografia (para não permitir cópia e extração de conteúdo, permitindo apenas impressão fraca) usando o padrão do Acrobat.

\_\_\_\_\_  
 Assinatura do (a) autor (a)

Data: \_\_\_\_ / \_\_\_\_ / \_\_\_\_

<sup>1</sup> Neste caso o documento será embargado por até um ano a partir da data de defesa. A extensão deste prazo suscita justificativa junto à coordenação do curso. Os dados do documento não serão disponibilizados durante o período de embargo.

DIOGO GONÇALVES DIAS

# Classes de Hipersuperfícies Weingarten Generalizada no Espaço Euclidiano

Tese apresentada ao Programa de Pós-Graduação do Instituto de Matemática e Estatística da Universidade Federal de Goiás, como requisito parcial para obtenção do título de Doutor em Matemática.

**Área de concentração:** Geometria e Topologia.

**Orientador:** Armando Mauro Vasquez Corro

Goiânia, GO  
2014

**Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)**  
**GPT/BC/UFG**

Dias, Diogo Gonçalves.  
D541c Classes de Hipersuperfícies Weingarten Generalizada no  
Espaço Euclidiano [manuscrito] / Diogo Gonçalves Dias. -  
2014  
65 f. : il.

Orientador: Prof. Dr. Armando Mauro Vasquez Corro.  
Tese (Doutorado) – Universidade Federal de Goiás,  
Instituto de Matemática e Estatística, 2014.  
Bibliografia.

1. Weingarten – Superfícies lineares 2. Matemática 3.  
Espaço euclidiano. I. Título.

CDU 514.752.4

DIOGO GONÇALVES DIAS

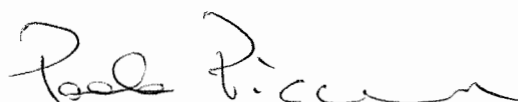
**CLASSES DE HIPERSUPERFÍCIES WEINGARTEN GENERALIZADO NO  
ESPAÇO EUCLIDIANO**

Tese defendida no Programa de Pós-Graduação do Instituto de Matemática e Estatística da Universidade Federal de Goiás como requisito parcial para obtenção do título de Doutor em Matemática, aprovada em 29 de setembro de 2014, pela Banca Examinadora constituída pelos professores:



---

**Prof. Dr. Armando Mauro Vasquez Corro**  
Instituto de Matemática e Estatística - UFG  
Presidente da Banca



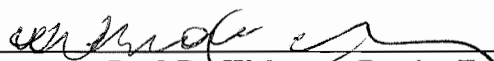
---

**Prof. Dr. Paolo Piccione**  
Departamento de Matemática - USP



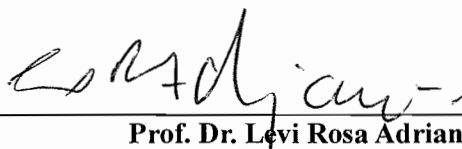
---

**Prof. Dr. Xia Chang Yu**  
Departamento de Matemática - UnB



---

**Prof. Dr. Walterson Pereira Ferreira**  
Instituto de Matemática e Estatística - UFG



---

**Prof. Dr. Levi Rosa Adriano**  
Instituto de Matemática e Estatística - UFG

Todos os direitos reservados. É proibida a reprodução total ou parcial do trabalho sem autorização da universidade, do autor e do orientador(a).

**Diogo Gonçalves Dias**

*A meu pai Sirley e minha bisavó Maria, in memoriam.*

---

## Agradecimentos

---

*A Deus, por me mostrar que força de vontade supera dificuldades e alcança vitórias.*

*A toda minha família, pela compreensão nos momentos ausentes, e em especial minha mãe Célia e a minha avó Cesarina, pela educação que me deram e por tudo que fizeram para que eu chegasse até aqui. A elas devo minha vida.*

*A minha amada esposa Gabriella, pelo companheirismo e apoio incondicional. Sem ela nada disso teria sido possível.*

*A minha filha, a princesa Lívia, por me ensinar que o maior título que um homem pode ter é o título de Pai.*

*Ao Programa de Pós-Graduação em Matemática do IME/UFG e ao meu orientador Prof. Armando Mauro Vasquez Corro por terem me dado esta oportunidade.*

*Aos colegas do Doutorado, pela partilha de ideias e conhecimentos que tanto me ajudaram.*

*A FAPEG, pelo apoio financeiro.*

*Enfim, a todos que de alguma forma colaboraram para realização deste sonho. Sozinho eu não teria conseguido.*

*Muito obrigado!*

“O começo de todas as ciências é o espanto de as coisas serem o que são.”

**Aristóteles,**  
*384 a.C - 322 a.C.*

---

## Resumo

---

Dias, Diogo Gonçalves. **Classes de Hipersuperfícies Weingarten Generalizada no Espaço Euclidiano**. Goiânia, GO, 2014. 65p. Tese de Doutorado. Instituto de Matemática e Estatística, Universidade Federal de Goiás.

Apresentamos parametrizações de hipersuperfícies com aplicação normal de Gauss prescrita. Estas parametrizações são obtidas como o envelope de uma congruência de esferas onde o outro envelope está contido em um hiperplano. Introduzimos classes de superfícies que generalizam as superfícies de Weingarten linear, onde os coeficientes são funções que dependem da função suporte e da função distância a um ponto fixo (superfícies WGSĐ). Classes conhecidas destas superfícies são as superfícies de Weingarten linear, as superfícies de Appell e as superfícies de Tzitzéica. A partir delas obtemos novas classes de superfícies WGSĐ aplicando inversões e dilatações. Para uma classe especial de superfícies WGSĐ, que é invariante por dilatações e inversões (superfícies WGSĐE), obtemos uma representação tipo Weierstrass, dependendo de duas funções holomorfas. Como aplicação classificamos as superfícies WGSĐE de rotação e apresentamos uma família a 4-parâmetros de superfícies WGSĐE cíclicas completas com uma singularidade isolada e com planos de folheação não paralelos. Terminamos generalizando as superfícies WGSĐE para as hipersuperfícies em  $\mathbb{R}^{n+1}$ ,  $n \geq 2$ . Apresentaremos uma representação para estas hipersuperfícies no caso em que a projeção estereográfica da normal de Gauss  $N$  é dada pela aplicação identidade. Como aplicação, caracterizaremos os exemplos rotacionais.

### Palavras-chave

superfícies Weingarten generalizada, representação tipo Weierstrass, aplicação normal de Gauss prescrita.

---

## Abstract

---

Dias, Diogo Gonçalves. **Classes of Generalized Weingarten Hypersurfaces in the Euclidean Space**. Goiânia, GO, 2014. 65p. PhD. Thesis . Instituto de Matemática e Estatística, Universidade Federal de Goiás.

We present hypersurfaces with prescribed normal Gauss map. These surfaces are obtained as the envelope of a sphere congruence where the other envelope is contained in a plane. We introduce classes of surfaces that generalize linear Weingarten surfaces, where the coefficients are functions that depend on the support function and the distance function from a fixed point (in short, DSGW-surfaces). The linear Weingarten surfaces, the Appell's surfaces and the Tzitzeica's surfaces are all DSGW-surfaces. From them we obtain new classes of DSGW-surfaces applying inversions and dilatations. For a special class of DSGW-surfaces, which is invariant under dilatations and inversions, we obtain a Weierstrass type representation (in short, EDSGW-surfaces). As application we classify the EDSGW-surfaces of rotation and present a 4-parameter family of complete cyclic EDSGW-surfaces with an isolated singularity and foliated by non-parallel planes. We generalized the EDSGW-surfaces for the case of hypersurfaces in  $\mathbb{R}^{n+1}$ ,  $n \geq 2$ . We present a representation for these hypersurfaces in the case where the stereographic projection of the normal Gauss map  $N$  is given by the identity application. As an application, we will characterize the rotational examples.

### Keywords

generalized Weingarten surfaces, Weierstrass type representation, prescribed normal Gauss map.

---

# Sumário

---

1	Preliminares	<b>13</b>
1.1	Hipersuperfícies no Espaço Euclidiano	13
1.2	Sistemas de Tipo Hidrodinâmico	15
1.3	Funções Holomorfas e Superfícies de Riemann	20
2	Congruências de Esferas	<b>24</b>
3	Superfícies Weingarten Generalizada do Tipo Suporte Distância	<b>34</b>
3.1	Superfícies WGSD	34
3.2	Superfícies WGSDE	39
4	Hipersuperfícies Weingarten Generalizada do Tipo Suporte Distância Especial	<b>57</b>
	Referências Bibliográficas	<b>64</b>

---

## Introdução

---

Uma superfície orientada  $S \subset \mathbb{R}^3$  é dita uma *superfície Weingarten* se existe uma relação diferenciável  $W$  entre as curvaturas média  $H$  e Gaussiana  $K$  de  $S$  tal que  $W(H, K) \equiv 0$ . A classificação geral das superfícies Weingarten é ainda uma questão aberta. No caso em que o funcional  $W$  é linear, isto é,  $a + bH + cK = 0$  para  $a, b$  e  $c$  constantes, as superfícies são chamadas de *superfícies Weingarten linear*. Exemplos simples de superfícies Weingarten linear são as superfícies de curvatura Gaussiana constante ( $c \neq 0$  e  $b = 0$ ) e as superfícies de curvatura média constante ( $b \neq 0$  e  $c = 0$ ).

Schief [22] estudou duas classes de superfícies  $S \subset \mathbb{R}^3$  que satisfazem uma *relação de Weingarten* da forma  $(\mu^2 \pm \rho^2)K + 2\mu H + 1 = 0$ , onde  $\mu, \rho : S \rightarrow \mathbb{R}$  são funções harmônicas (em certo sentido) definidas sobre a superfície. Essas classes incluem as superfícies clássicas de Bianchi, as superfícies de Bianchi de curvatura positiva e as superfícies com curvatura média inversa harmônica (veja [4]).

Em [6], Corro apresentou uma maneira de parametrizar superfícies como envelopes de congruência de esferas na qual o outro envelope está contido em um plano e com função raio associada a um sistema de tipo hidrodinâmico. Como aplicação, ele estuda superfícies  $X : M \rightarrow \mathbb{H}^3$  no espaço hiperbólico  $\mathbb{H}^3$ , no modelo do semi-espaço positivo, tal que a aplicação hiperbólica de Gauss  $G$  define uma congruência de esferas para a qual  $X(M)$  e  $G(X(M))$  são envelopes e o raio de cada esfera define a função raio  $h$ . Então  $X$  é dita uma *superfície Weingarten generalizada do tipo Bryant* (superfícies BGM) se a curvatura média  $H$ , a curvatura Gaussiana  $K_I$  e a função raio  $h$  satisfazem a relação

$$2ach^{\frac{2(c-1)}{c}}(H-1) + (a+b-ach^{\frac{2(c-1)}{c}})K_I = 0 \quad (0-1)$$

para  $a, b, c \in \mathbb{R}, a+b \neq 0, c \neq 0$ . Esta classe de superfícies incluem as superfícies de Bryant e as superfícies flat do  $\mathbb{H}^3$  (veja [5], [11], [17],[18] e [21]).

Em [15], Fernandes estuda superfícies  $M$  no espaço hiperbólico cuja curvatura média  $H$  e a curvatura intrínseca  $K_I$  satisfazem a relação  $2(H-1)e^{2\mu} + K_I(1-e^{2\mu}) = 0$ , onde  $\mu$  é uma função harmônica com respeito a forma quadrática  $\sigma = -K_I I + 2(H-1)II$  e  $I$  e  $II$  representam a primeira e segunda forma quadrática de  $M$ . Estas superfícies são chamadas de *Superfícies Weingarten generalizada tipo harmônico* (superfícies WGH). A autora obtém uma representação tipo Weierstrass para estas superfícies que depende de

três funções holomorfas. Além disso, ela obtém uma representação tipo Weierstrass para superfícies de Bryant e classifica as superfícies WGH de rotação.

Seja  $S \subset \mathbb{R}^3$  uma superfície orientada pela normal de Gauss  $N$ . Dado  $v \in \mathbb{R}^3$ , as funções  $\Psi_v, \Delta_v : S \rightarrow \mathbb{R}$  dadas por  $\Psi_v(p) = \langle p - v, N(p) \rangle$ ,  $\Delta_v(p) = \langle p - v, p - v \rangle$ ,  $p \in S$ , onde  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  denota o produto escalar euclidiano em  $\mathbb{R}^3$ , são chamadas de função suporte e função distância quadrática em relação à  $v \in \mathbb{R}^3$ , respectivamente. Geometricamente,  $\Psi_v(p)$  mede a distância (com sinal) de  $v$  ao plano tangente  $T_p S$  de  $S$  em  $p$  e  $\Delta_v(p)$  calcula a distância quadrática de  $p$  à  $v$ .

Em 1888, Appell [2] estudou uma classe de superfícies orientadas em  $\mathbb{R}^3$  associadas a transformações na esfera que preservam área. Posteriormente, Ferreira e Roitman [16] mostraram que estas superfícies são tais que existe um ponto fixo  $v \in \mathbb{R}^3$  de modo que a curvatura média  $H$ , a curvatura Gaussiana  $K$  e a função suporte  $\Psi_v$  satisfazem  $H + \Psi_v K = 0$ .

Em 1907, Tzitzéica [23] estudou superfícies hiperbólicas orientadas  $S \subset \mathbb{R}^3$  tais que existe uma constante não nula  $c \in \mathbb{R}$  para a qual se cumpre a seguinte relação  $K + c^2 \Psi_v^4 = 0$ , para algum ponto fixo  $v \in \mathbb{R}^3$ .

Motivados pelos trabalhos de [6], [7], [10] e [14], caracterizaremos as superfícies em  $\mathbb{R}^3$  com aplicação normal de Gauss prescrita, como envelopes de uma congruência de esferas na qual o outro envelope está contido em um plano. Estas superfícies podem ser consideradas como transformações de Ribaucour de um plano (veja [7]). A parametrização obtida está relacionada a sistemas do tipo hidrodinâmico, estudados em [10], e generaliza as parametrizações obtidas em [14].

Motivados pelos trabalhos de [2], [6], [15], [16], [22] e [23], introduzimos o estudo de classes de superfícies orientadas  $S \subset \mathbb{R}^3$  que cumprem uma relação da forma  $A(p) + B(p)H(p) + C(p)K(p) = 0$ ,  $p \in S$  onde  $A, B, C : S \rightarrow \mathbb{R}$  são funções diferenciáveis que dependem da função suporte  $\Psi_v$  e da função distância quadrática  $\Delta_v$ , para algum ponto fixo  $v \in \mathbb{R}^3$ . Denominaremos tais superfícies de *Superfícies Weingarten generalizada tipo suporte distância* (superfícies WGSD). Classes conhecidas destas superfícies são as superfícies Weingarten linear, superfícies de Appel e superfícies de Tzitzéica. A partir destas obtemos novas classes de superfícies WGSD aplicando inversões, dilatações e superfícies paralelas.

Estudaremos uma classe especial de superfícies orientadas  $S \subset \mathbb{R}^3$  que cumprem uma relação da forma  $2\Psi_v H + \Delta_v K = 0$ , para algum ponto fixo  $v \in \mathbb{R}^3$ . Chamaremos estas superfícies de *superfícies WGSDE*. Mostraremos que estas superfícies são invariantes por dilatações e inversões. Quando a curvatura Gaussiana  $K$  é identicamente nula mostraremos que estas superfícies são cones generalizados e quando  $K \neq 0$ , utilizando a parametrização associada a sistemas de tipo hidrodinâmico, obteremos uma representação tipo Weierstrass dependendo de duas funções holomorfas. Como aplicação mostraremos

---

que uma superfície WGSDE de revolução é parte de um cone circular, ou parte de um plano, ou parte de uma esfera, ou parte de uma superfície cujo conjunto de singularidades é um círculo ou parte de uma superfície com uma singularidade isolada.

Uma superfície  $S \subset \mathbb{R}^3$  é dita cíclica se é determinada por uma família a 1-parâmetro de círculos. López [19] mostrou que uma superfície Weingarten linear cíclica é parte de uma esfera ou os planos de folheação são sempre paralelos. Apresentaremos uma família a 2-parâmetros de superfícies cíclicas WGSDE com uma singularidade isolada e cujos círculos não estão em planos paralelos.

Este trabalho está dividido da seguinte forma: no Capítulo 1 apresentamos definições e fatos básicos que serão utilizado do decorrer do texto. No Capítulo 2 caracterizaremos as superfícies em  $\mathbb{R}^3$  com aplicação normal de Gauss prescrita, como envelopes de uma congruência de esferas na qual o outro envelope está contido em um plano. Além disso, mostraremos que estas superfícies são superfícies de rotação se, e somente se, a função raio está associada a uma função radial.

No Capítulo 3, estudaremos as superfícies WGSD. Mostraremos como as inversões e dilatações nos conduzem naturalmente ao estudo das superfícies WGSDE. A partir daí apresentaremos uma representação tipo Weierstrass para as superfícies WGSDE e caracterizaremos os exemplos rotacionais. Além disso, apresentaremos uma família de exemplos cíclicos.

No Capítulo 4, generalizaremos o conceito de superfícies WGSDE para o caso de hipersuperfícies em  $\mathbb{R}^{n+1}$ . Apresentaremos uma representação para estas hipersuperfícies no caso em que a projeção estereográfica da normal de Gauss  $N$  é dada pela aplicação identidade. Como aplicação, caracterizaremos os exemplos rotacionais.

## Preliminares

Neste capítulo apresentaremos algumas definições e fatos básicos que serão utilizados no decorrer do trabalho. Maiores detalhes poderão ser encontrados nas referências citadas ao longo do capítulo.

Denotaremos por  $\mathbb{R}^n$  o espaço Euclidiano  $n$ -dimensional e por  $(x_1, \dots, x_n)$  suas coordenadas. Dada uma função diferenciável  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ , a derivada parcial de  $f$  relativa a  $x_i$ ,  $1 \leq i \leq n$ , será denotada por  $f_{,i}$ .

### 1.1 Hipersuperfícies no Espaço Euclidiano

**Definição 1.1** *Seja  $\Sigma$  um subconjunto não vazio de  $\mathbb{R}^{n+1}$ ,  $n \geq 2$ . Dizemos que  $\Sigma$  é uma hipersuperfície de  $\mathbb{R}^{n+1}$  se, para cada  $p \in \Sigma$ , existem uma vizinhança  $V \subset \mathbb{R}^{n+1}$  de  $p$ , um aberto  $U \subset \mathbb{R}^n$  e um homeomorfismo diferenciável  $X : U \rightarrow V \cap \Sigma$  tal que a diferencial  $dX_q : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$  é injetora para todo  $q \in U$ .*

A aplicação  $X$  é chamada uma *parametrização* de  $\Sigma$ . Em termos de suas componentes, a parametrização  $X$  pode ser escrita por  $X(u) = (x_1(u), \dots, x_{n+1}(u))$ ,  $u = (u_1, \dots, u_n) \in U$ . Dessa forma,  $X$  é diferenciável se, e somente se,  $x_i$  for diferenciável para todo  $i = 1, \dots, n+1$ . Além disso, a diferencial  $dX_q$  é injetora se, e somente se, os vetores

$$X_{,i}(q) = \frac{\partial X}{\partial u_i}(q), \quad 1 \leq i \leq n, \quad (1-1)$$

são linearmente independentes.

Um vetor tangente a  $\Sigma$  em um ponto  $p \in \Sigma$  é um vetor tangente a uma curva parametrizada diferenciável  $\alpha : (-\varepsilon, \varepsilon) \subset \mathbb{R} \rightarrow \Sigma$ , com  $\alpha(0) = p$ . O conjunto de todos os vetores tangentes a  $\Sigma$  em  $p$ , denotado por  $T_p\Sigma$ , é chamado de *hiperplano tangente* a  $\Sigma$  em  $p$ . Se  $X$  é uma parametrização de  $\Sigma$  em  $p$ , então  $T_p\Sigma$  coincide com o subespaço vetorial gerado por  $\{X_{,i}(q); 1 \leq i \leq n\}$ , onde  $p = X(q)$ .

Dizemos que  $\Sigma$  é orientável se for possível determinar um campo vetorial diferenciável unitário  $N$  normal a  $T_p\Sigma$ , para cada  $p \in \Sigma$ . Neste caso, dizemos que  $N$  é

a aplicação normal de Gauss de  $\Sigma$  e que tal campo determina uma orientação em  $\Sigma$ . Em coordenadas locais,

$$N_{,i} = \sum_{j=1}^n W_{ij} X_{,j}, \quad 1 \leq i \leq n, \quad (1-2)$$

onde  $X$  é uma parametrização de  $\Sigma$ . A matriz  $W = (W_{ij})$  é chamada de *matriz de Weingarten* de  $\Sigma$ .

A primeira forma fundamental  $I$  de  $\Sigma$  é a restrição do produto interno canônico de  $\mathbb{R}^{n+1}$  aos hiperplanos tangentes  $T_p\Sigma$ . Logo, para cada  $p \in \Sigma$

$$I_p(w_1, w_2) = \langle w_1, w_2 \rangle, \quad w_1, w_2 \in T_p\Sigma. \quad (1-3)$$

A segunda forma fundamental  $II$  e a terceira forma fundamental  $III$  de  $\Sigma$  são definidas da seguinte forma:

$$II_p(w_1, w_2) = \langle -dN_p(w_1), w_2 \rangle, \quad w_1, w_2 \in T_p\Sigma \quad (1-4)$$

$$III_p(w_1, w_2) = \langle -dN_p(w_1), -dN_p(w_2) \rangle, \quad w_1, w_2 \in T_p\Sigma \quad (1-5)$$

onde  $p \in \Sigma$  e  $dN_p$  é a diferencial da normal de Gauss em  $p$ . Observe que, para cada  $p \in \Sigma$ ,  $-dN_p$  é auto-adjunto com respeito a primeira forma fundamental  $I$ . Conseqüentemente, a segunda  $II$  e a terceira  $III$  formas fundamentais são formas bilineares simétricas sobre  $T_p\Sigma$ , para todo  $p \in \Sigma$ .

As curvaturas principais  $k_1, \dots, k_n$  de  $\Sigma$ , em um ponto  $p$ , são os autovalores de  $-dN_p$ . Dessa forma, define-se a curvatura média  $H$  e a curvatura de Gauss-Kronecker  $K$  por

$$H = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n k_i = \frac{1}{n} \text{tra.}(-dN_p) \quad \text{e} \quad K = \prod_{i=1}^n k_i = \det.(-dN_p) \quad (1-6)$$

onde *tra.* e *det.* denotam, respectivamente, o traço e o determinante de  $-dN_p$ . Além disso, a  $r$ -ésima curvatura média  $H_r$  de  $\Sigma$ ,  $1 \leq r \leq n$ , é definida por

$$H_r = \binom{n}{r}^{-1} \sum_{j_1 < \dots < j_r} k_{j_1} \cdot \dots \cdot k_{j_r}. \quad (1-7)$$

Observe que  $H = H_1$  e  $K = H_n$ .

Uma transformação linear  $\varphi: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  é dita *ortogonal* se preserva o produto interno canônico de  $\mathbb{R}^n$ . De outra forma, uma transformação ortogonal é uma isometria linear de  $\mathbb{R}^n$  em  $\mathbb{R}^n$ . O conjunto de todas transformações ortogonais de  $\mathbb{R}^n$  forma o grupo ortogonal  $O(n)$ .

Observe que  $O(n)$  pode ser visto como um subgrupo do grupo ortogonal  $O(n+1)$  das transformações ortogonais de  $\mathbb{R}^{n+1}$ . Os elementos de  $O(n)$  agem em  $\mathbb{R}^{n+1}$  rotaci-

onando os pontos em torno de uma reta invariante dada, chamada de eixo de rotação. Dessa forma, a órbita de um ponto  $p \in \mathbb{R}^{n+1}$ , pela ação de  $O(n)$ , é uma esfera  $(n-1)$ -dimensional centrada no eixo de rotação  $r$  e cujo raio é a distância de  $p$  à  $r$ .

**Definição 1.2** *Uma hipersuperfície  $\Sigma \subset \mathbb{R}^{n+1}$  é dita de rotação se é invariante por  $O(n)$ , isto é, as seções ortogonais ao eixo de rotação  $r$  determinam em  $\Sigma$  esferas  $(n-1)$ -dimensionais centradas em  $r$ .*

Seja  $\Sigma \subset \mathbb{R}^{n+1}$  uma hipersuperfície orientada pela normal de Gauss  $N$ . Fixado  $v \in \mathbb{R}^{n+1}$ , as funções  $\Psi_v, \Lambda_v : \Sigma \rightarrow \mathbb{R}$  dadas por

$$\Psi_v(p) = \langle p - v, N(p) \rangle \quad \text{e} \quad \Lambda_v(p) = |p - v|^2, \quad p \in \Sigma, \quad (1-8)$$

são chamadas de *função suporte* e *função distância quadrática* com respeito à  $v$ , respectivamente. Geometricamente, o módulo de  $\Psi_v(p)$  mede a distância de  $v$  até o hiperplano tangente  $T_p\Sigma$  e  $\Lambda_v(p)$  calcula o quadrado da distância de  $p$  à  $v$ .

Para finalizarmos a seção definiremos cone generalizado e superfícies cíclicas.

**Definição 1.3** *Seja  $p \in \mathbb{R}^3$  um ponto e  $C \subset \mathbb{R}^3$  uma curva regular tal que  $p \notin C$ . Um cone generalizado de vértice  $p$  é uma superfície regrada gerada pela família a 1-parâmetro de retas que passam por  $p$  e  $q$ , onde  $q \in C$ .*

Observe que no caso em que  $C$  é uma elipse, o cone generalizado é um cone quadrático.

**Definição 1.4** *Uma superfície  $S \subset \mathbb{R}^3$  é dita cíclica se é determinada por uma família a 1-parâmetro de planos  $P_k \subset \mathbb{R}^3$ ,  $k \in J \subset \mathbb{R}$ , tal que para todo  $k$  a interseção  $P_k \cap S$  é um círculo e  $S = \bigcup_{k \in J} (P_k \cap S)$*

## 1.2 Sistemas de Tipo Hidrodinâmico

Nesta seção apresentaremos alguns resultados devidos a Ferapontov sobre sistemas de tipo hidrodinâmico e transformações recíprocas. As demonstrações destes resultados podem ser vistas nas referências [13] e [14].

**Definição 1.5** *Sejam  $U \subset \mathbb{R}^n$  um subconjunto aberto,  $u = (u^1, \dots, u^n) \in U$  e  $V_{ij} : U \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $1 \leq i, j \leq n$ , funções diferenciáveis. Um sistema de tipo hidrodinâmico nas variáveis independentes  $(x, t)$  é um sistema de equações diferenciais parciais da forma*

$$u_{,t}^i = \sum_{j=1}^n V_{ij}(u) u_{,x}^j, \quad 1 \leq i \leq n, \quad (1-9)$$

onde  $u^i = u^i(x, t)$ ,  $1 \leq i \leq n$ .

**Definição 1.6** *Sejam  $P, Q: U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  funções diferenciáveis. A 1-forma  $W = P(u)dx + Q(u)dt$ ,  $u \in U$ , é chamada de integral de tipo hidrodinâmico do sistema (1-9) se*

$$Q_{,i} = \sum_{j=1}^n V_{ij} P_{,j} \quad (1-10)$$

para todo  $1 \leq i \leq n$ .

Exemplos simples de integrais de tipo hidrodinâmico podem ser obtidas da seguinte forma.

**Exemplo 1.7** *Considere uma hipersuperfície orientável  $\Sigma \subset \mathbb{R}^{n+1}$  localmente parametrizada por  $X: U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \Sigma$  e com matriz de Weingarten  $W = (W_{ij})$ , isto é,*

$$N_{,i} = \sum_{j=1}^n W_{ij} X_{,j}, \quad 1 \leq i \leq n, \quad (1-11)$$

onde  $N$  é a aplicação normal de Gauss de  $\Sigma$ . Dessa forma, a 1-forma (vetorial)  $Xdx + Ndt$  define integrais de tipo hidrodinâmico do sistema

$$u_{,t}^i = \sum_{j=1}^n W_{ij}(u) u_{,x}^j, \quad 1 \leq i \leq n. \quad (1-12)$$

Além disso, a 1-forma  $\langle X, X \rangle dx + 2\langle X, N \rangle dt$  também é uma integral do sistema (1-12). De fato,

$$\sum_{j=1}^n W_{ij} (\langle X, X \rangle)_{,j} = 2\langle X, \sum_{j=1}^n W_{ij} X_{,j} \rangle = 2\langle X, N_{,i} \rangle = 2\langle X, N \rangle_{,i}. \quad (1-13)$$

**Definição 1.8** *Sejam  $A dx + B dt$  e  $C dx + D dt$  integrais de tipo hidrodinâmico do sistema (1-9), onde  $AD - BC \neq 0$  para todo  $u \in U$ . Uma transformação recíproca é uma mudança nas variáveis independentes  $(x, t)$ , dada por*

$$d\bar{x} = A dx + B dt \quad (1-14)$$

$$d\bar{t} = C dx + D dt \quad (1-15)$$

Essa transformação recíproca induz uma transformação no sistema (1-9), conforme a proposição seguinte.

**Proposição 1.9** *A transformação recíproca dada por (1-14) e (1-15) transforma o sistema (1-9) no seguinte sistema de tipo hidrodinâmico*

$$u_{,\bar{t}}^i = \sum_{j=1}^n \bar{V}_{ij}(u) u_{,\bar{x}}^j, \quad i = 1, \dots, n, \quad (1-16)$$

onde a matriz  $\bar{V} = (\bar{V}_{ij})$  é dada por

$$\bar{V} = (AV - BI_n)(DI_n - CV)^{-1} \quad (1-17)$$

e  $I_n$  é a matriz identidade  $n \times n$ . Além disso, dada uma integral do tipo hidrodinâmico  $Pdx + Qdt$  do sistema (1-9), a 1-forma

$$\frac{DP - CQ}{AD - BC}d\bar{x} + \frac{AQ - BP}{AD - BC}d\bar{t} \quad (1-18)$$

é uma integral do tipo hidrodinâmico do sistema (1-16).

*Prova.* Segue da transformação recíproca dada por (1-14) e (1-15) que  $\bar{x}_{,x} = A$ ,  $\bar{x}_{,t} = B$ ,  $\bar{t}_{,x} = C$  e  $\bar{t}_{,t} = D$ . Pela regra da cadeia,

$$u_{,t}^i = Bu_{,\bar{x}}^i + Du_{,\bar{t}}^i \quad (1-19)$$

$$u_{,x}^i = Au_{,\bar{x}}^i + Cu_{,\bar{t}}^i \quad (1-20)$$

para todo  $i = 1, \dots, n$ , de onde segue que

$$u_{,\bar{x}}^i = \frac{Du_{,x}^i - Cu_{,t}^i}{AD - BC} \quad \text{e} \quad u_{,\bar{t}}^i = \frac{Au_{,t}^i - Bu_{,x}^i}{AD - BC}. \quad (1-21)$$

Logo,

$$\begin{aligned} u_{,\bar{t}}^i &= \sum_{j=1}^n \bar{V}_{ij} u_{,\bar{x}}^j \Leftrightarrow \\ Au_{,t}^i - Bu_{,x}^i &= \sum_{j=1}^n \bar{V}_{ij} (Du_{,x}^j - Cu_{,t}^j) \Leftrightarrow \\ A \sum_{k=1}^n V_{ik} u_{,x}^k - B \sum_{k=1}^n \delta_{ik} u_{,x}^k &= \sum_{j=1}^n \bar{V}_{ij} \left( D \sum_{l=1}^n \delta_{jl} u_{,x}^l - C \sum_{l=1}^n V_{jl} u_{,x}^l \right) \Leftrightarrow \\ \sum_{k=1}^n (AV - BI_n)_{ik} u_{,x}^k &= \sum_{j,l=1}^n \bar{V}_{ij} (DI_n - CV)_{jl} u_{,x}^l \Leftrightarrow \\ \sum_{k=1}^n (AV - BI_n)_{ik} u_{,x}^k &= \sum_{l=1}^n (\bar{V}(DI_n - CV))_{il} u_{,x}^l \Leftrightarrow \\ AV - BI_n &= \bar{V}(DI_n - CV). \end{aligned} \quad (1-22)$$

Portanto,  $\bar{V} = (AV - BI_n)(DI_n - CV)^{-1}$ .

Por outro lado, a transformação recíproca dada por (1-14) e (1-15) garante que

$$dx = \frac{Dd\bar{x} - Bd\bar{t}}{AD - BC} \quad \text{e} \quad dt = \frac{Ad\bar{t} - Cd\bar{x}}{AD - BC}. \quad (1-23)$$

Dessa forma, se  $Pdx + Qdt$  é uma integral do tipo hidrodinâmico do sistema (1-9), a 1-forma

$$P \left( \frac{Dd\bar{x} - Bd\bar{t}}{AD - BC} \right) + Q \left( \frac{Ad\bar{t} - Cd\bar{x}}{AD - BC} \right) = \frac{DP - CQ}{AD - BC} d\bar{x} + \frac{AQ - BP}{AD - BC} d\bar{t} \quad (1-24)$$

é uma integral do tipo hidrodinâmico do sistema (1-16).  $\square$

A Proposição acima permite-nos obter relações entre uma hipersuperfície e sua correspondente imagem via dilatações e inversões.

**Proposição 1.10** *Considere a dilatação  $D^{n+1} : \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ , definida por*

$$D^{n+1}(p) = \lambda p, \quad p \in \mathbb{R}^{n+1} \quad (1-25)$$

onde  $\lambda$  é uma constante real não nula. Se  $\Sigma \subset \mathbb{R}^{n+1}$  é uma hipersuperfície orientada pela normal de Gauss  $N$  e com matriz de Weingarten  $W$ , então  $\bar{\Sigma} = D^{n+1}(\Sigma)$  é uma hipersuperfície com normal de Gauss  $\bar{N}$  e matriz de Weingarten  $\bar{W}$  dadas por

$$\bar{N} = N \quad e \quad \bar{W} = \frac{1}{\lambda} W. \quad (1-26)$$

*Prova.* Considere o sistema de tipo hidrodinâmico dado pela matriz de Weingarten  $W = (W_{ij})$  de  $\Sigma$ . A transformação recíproca

$$d\bar{x} = \frac{1}{\lambda} dx \quad (1-27)$$

$$d\bar{t} = dt \quad (1-28)$$

induz a dilatação  $D^{n+1}$ . De fato, se  $X$  é uma parametrização local de  $\Sigma$ , segue da Proposição 1.9 que a integral vetorial  $Xdx + Ndt$  é transformada na integral  $\lambda Xd\bar{x} + Nd\bar{t}$ . Além disso, a matriz  $W$  é transformada em  $\bar{W} = \frac{1}{\lambda} W$ .  $\square$

**Proposição 1.11** *Considere a inversão relativa à origem  $I^{n+1} : \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$ , definida por*

$$I^{n+1}(p) = \frac{1}{|p|^2} p, \quad p \in \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}. \quad (1-29)$$

Se  $\Sigma \subset \mathbb{R}^{n+1}$  é uma hipersuperfície orientada pela normal de Gauss  $N$  e com matriz de Weingarten  $W$ , tal que  $0 \notin \Sigma$ , então  $\tilde{\Sigma} = I^{n+1}(\Sigma)$  é uma hipersuperfície com normal de Gauss  $\tilde{N}$  e matriz de Weingarten  $\tilde{W}$  dadas por

$$\tilde{N}(\tilde{p}) = -2 \frac{\langle p, N(p) \rangle}{|p|^2} p + N(p) \quad e \quad \tilde{W}(\tilde{p}) = |p|^2 W(p) - 2 \langle p, N(p) \rangle I_n \quad (1-30)$$

onde  $\tilde{p} = I^{n+1}(p)$ ,  $p \in \Sigma$ .

*Prova.* Considere o sistema de tipo hidrodinâmico dado pela matriz de Weingarten  $W = (W_{ij})$  de  $\Sigma$ . Dada uma parametrização local  $X$  de  $\Sigma$ , a transformação recíproca

$$d\bar{x} = \langle X, X \rangle dx + 2\langle X, N \rangle dt \quad (1-31)$$

$$d\bar{t} = dt \quad (1-32)$$

induz a inversão  $I^{n+1}$ . De fato, a Proposição 1.9 garante que a integral vetorial  $Xdx + Ndt$  é transformada na integral

$$\frac{X}{\langle X, X \rangle} d\bar{x} + \left( -2 \frac{\langle X, N \rangle}{\langle X, X \rangle} X + N \right) d\bar{t}. \quad (1-33)$$

Além disso, a matriz  $W$  é transformada em  $\bar{W} = \langle X, X \rangle W - 2\langle X, N \rangle I_n$ .  $\square$

Considere a esfera unitária  $\mathbb{S}^n = \{q \in \mathbb{R}^{n+1}; |q| = 1\}$ . Dizemos que  $e_{n+1} = (0, \dots, 0, 1)$  e  $-e_{n+1} = (0, \dots, 0, -1)$  são, respectivamente, o pólo norte e o pólo sul de  $\mathbb{S}^n$ . As projeções estereográficas  $P_- : \mathbb{S}^n \setminus \{-e_{n+1}\} \rightarrow \mathbb{R}^n$  e  $P_+ : \mathbb{S}^n \setminus \{e_{n+1}\} \rightarrow \mathbb{R}^n$  são difeomorfismos definidos da seguinte forma,

$$P_-(q) = \frac{q - \langle q, e_{n+1} \rangle e_{n+1}}{1 + \langle q, e_{n+1} \rangle} \quad \text{e} \quad P_+(q) = \frac{q - \langle q, e_{n+1} \rangle e_{n+1}}{1 - \langle q, e_{n+1} \rangle}, \quad q \in \mathbb{S}^n. \quad (1-34)$$

Além disso, mostra-se que as respectivas aplicações inversas  $P_-^{-1}$  e  $P_+^{-1}$  são dadas por

$$P_-^{-1}(p) = \frac{2p + (1 - |p|^2)e_{n+1}}{1 + |p|^2} \quad \text{e} \quad P_+^{-1}(p) = \frac{2p + (|p|^2 - 1)e_{n+1}}{1 + |p|^2}, \quad (1-35)$$

$p \in \mathbb{R}^n$ .

**Observação 1.12** Podemos descrever  $P_-^{-1}$  e  $P_+^{-1}$  utilizando a inversão  $I^{n+1}$ . Com efeito,

$$I^{n+1}\left(\frac{p + e_{n+1}}{2}\right) = P_-^{-1}(p) + e_{n+1} \quad \text{e} \quad I^{n+1}\left(\frac{p - e_{n+1}}{2}\right) = P_+^{-1}(p) - e_{n+1}, \quad (1-36)$$

onde  $p \in \mathbb{R}^n$ .

Descreveremos agora um sistema de tipo hidrodinâmico extremamente útil no decorrer do trabalho. Seja  $Y : U \rightarrow \mathbb{R}^n$  uma parametrização local ortogonal de  $\mathbb{R}^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ , isto é,  $L_{ij} = \langle Y_i, Y_j \rangle$ ,  $1 \leq i, j \leq n$ , é tal que

$$L_{ii} \neq 0 \quad \text{e} \quad L_{ij} = 0 \quad \text{para} \quad i \neq j. \quad (1-37)$$

**Lema 1.13** Os símbolos de Christoffel da métrica  $L_{ij}$  são dados por

$$\Gamma_{ij}^m = 0 \text{ para } i, j, k \text{ distintos;} \quad (1-38)$$

$$\Gamma_{ij}^j = \frac{L_{jj,i}}{2L_{jj}} \text{ para todo } i, j; \quad (1-39)$$

$$\Gamma_{ii}^j = -\frac{L_{ii,j}}{2L_{jj}} = -\frac{L_{ii}}{L_{jj}}\Gamma_{ji}^i \text{ para } i \neq j. \quad (1-40)$$

*Prova.* Sabemos que  $\Gamma_{ij}^m = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n (L_{jk,i} + L_{ki,j} - L_{ij,k}) L^{km}$ ,  $i, j, m = 1, \dots, n$ , onde  $(L^{ij})$  é a inversa da matriz  $(L_{ij})$ . Como a parametrização  $Y$  é ortogonal,  $L^{ij} = 0$  para  $i \neq j$  e  $L^{ii} = L_{ii}^{-1}$ . Dessa forma,

$$\Gamma_{ij}^m = \frac{1}{2L_{mm}} (L_{jm,i} + L_{mi,j} - L_{ij,m}), \quad i, j, m = 1, \dots, n \quad (1-41)$$

de onde seguem as expressões (1-38), (1-39) e (1-40).  $\square$

Segundo Dubrovin e Novikov [10], dada uma função diferenciável  $h : U \rightarrow \mathbb{R}$  o sistema de tipo hidrodinâmico associado a métrica de curvatura nula  $L_{ij}$  em  $\mathbb{R}^n$  é dado pela matriz  $V = (V_{ij})$ , onde

$$V_{ij} = \frac{1}{L_{jj}} \left( h_{,ij} - \sum_{l=1}^n \Gamma_{ij}^l h_{,l} \right), \quad 1 \leq i, j \leq n. \quad (1-42)$$

## 1.3 Funções Holomorfas e Superfícies de Riemann

Denotaremos por  $\mathbb{C}$  o corpo dos números complexos. Além disso, identificaremos  $\mathbb{C}$  com  $\mathbb{R}^2$  pelo isomorfismo  $z = x + iy \in \mathbb{C} \mapsto (x, y) \in \mathbb{R}^2$ .

Considere uma função  $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ , onde  $U$  é um subconjunto aberto do plano complexo  $\mathbb{C}$ . Denotando por

$$\langle 1, f \rangle = \text{Re}(f) \quad \text{e} \quad \langle i, f \rangle = \text{Im}(f) \quad (1-43)$$

as partes real  $\text{Re}(f)$  e imaginária  $\text{Im}(f)$  de  $f$ , diremos que  $f$  é  $\mathbb{R}$ -diferenciável em  $z_0 = x_0 + iy_0 \in U$  se  $\langle 1, f \rangle$  e  $\langle i, f \rangle$  forem diferenciáveis em  $(x_0, y_0)$ . Por outro lado,  $f$  é dita *holomorfa* em  $z_0 \in U$  se existe o limite

$$f'(z_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(z_0 + h) - f(z_0)}{h}. \quad (1-44)$$

O número complexo  $f'(z_0)$  é chamado de *derivada* de  $f$  em  $z_0$ . Se  $f$  for holomorfa em

todos os pontos de  $U$ , diremos que  $f$  é uma função holomorfa.

Uma consequência importante das definições acima é o seguinte Teorema, cuja demonstração pode ser vista em [20].

**Teorema 1.14** *Dada a função  $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ , onde  $U$  é um subconjunto aberto de  $\mathbb{C}$ , as seguintes afirmações são equivalentes:*

i)  $f$  é holomorfa em  $z_0 \in U$ ;

ii)  $f$  é  $\mathbb{R}$ -diferenciável em  $z_0 \in U$  e as partes real e imaginária  $\langle 1, f \rangle$  e  $\langle i, f \rangle$  satisfazem as equações de Cauchy-Riemann

$$\langle 1, f \rangle_{,1} = \langle i, f \rangle_{,2} \quad e \quad \langle 1, f \rangle_{,2} = -\langle i, f \rangle_{,1} \quad (1-45)$$

em  $z_0$ ;

iii)  $f$  possui derivada real em  $z_0 \in U$  e a diferencial  $df_{z_0}$  corresponde a multiplicação por um número complexo.

**Observação 1.15** *Segue do Teorema acima que a derivada de uma função holomorfa  $f : U \rightarrow \mathbb{C}$  é dada por*

$$f' = f_{,1} = -if_{,2}. \quad (1-46)$$

Dizemos que uma função real  $h : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  é harmônica se  $\Delta h$  é identicamente nulo, isto é,

$$\Delta h(x, y) = h_{,11} + h_{,22} = 0 \quad (1-47)$$

para todo  $(x, y) \in U$ . Observe que pelas equações de Cauchy-Riemann (1-45), a parte real  $\langle 1, f \rangle$  de uma função holomorfa  $f$  é sempre harmônica. A recíproca deste resultado é vista no seguinte Teorema, cuja demonstração pode ser obtida em [1].

**Teorema 1.16** *Se  $h : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  é uma função harmônica, onde  $U$  é um aberto simplesmente conexo, então  $h$  é parte real de uma função holomorfa.*

A identificação de  $\mathbb{C}$  com  $\mathbb{R}^2$  induz de maneira natural a noção de produto interno de funções holomorfas. Com efeito, dadas as funções holomorfas  $f, g : U \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  o produto interno  $\langle f, g \rangle$  é uma função real definida em  $U$  e dada por

$$\langle f, g \rangle = \langle 1, f \rangle \langle 1, g \rangle + \langle i, f \rangle \langle i, g \rangle. \quad (1-48)$$

Observe que a definição acima está de acordo com a notação já utilizada para representar as partes real e imaginária da função  $f$ . Caso  $g = 1$ ,  $\langle f, g \rangle$  resulta na parte real de  $f$  e, caso  $g = i$ ,  $\langle f, g \rangle$  resulta na parte imaginária de  $f$ .

**Proposição 1.17** *Sejam  $f, g, h : U \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  funções holomorfas. Valem as seguintes propriedades:*

- i)  $\langle f, g \rangle_1 = \langle f', g \rangle + \langle f, g' \rangle$
- ii)  $\langle f, g \rangle_2 = \langle if', g \rangle + \langle f, ig' \rangle$
- iii)  $\langle fh, g \rangle = \langle f, \bar{h}g \rangle$
- iv)  $\langle f, g \rangle + i\langle f, ig \rangle = f\bar{g}$
- v)  $\langle 1, f \rangle^2 - \langle i, f \rangle^2 = \langle 1, f^2 \rangle$
- vi)  $\langle 1, f \rangle \langle i, f \rangle = -\frac{1}{2} \langle 1, if^2 \rangle$

*Prova.* As propriedades i) e ii) seguem diretamente da Observação 1.15. Para demonstrarmos iii), note que

$$fh = (\langle 1, f \rangle \langle 1, h \rangle - \langle i, f \rangle \langle i, h \rangle) + i(\langle 1, f \rangle \langle i, h \rangle + \langle i, f \rangle \langle 1, h \rangle) \quad (1-49)$$

$$\bar{h}g = (\langle 1, h \rangle \langle 1, g \rangle + \langle i, h \rangle \langle i, g \rangle) + i(\langle 1, h \rangle \langle i, g \rangle - \langle i, h \rangle \langle 1, g \rangle) \quad (1-50)$$

logo,

$$\begin{aligned} \langle fh, g \rangle &= (\langle 1, f \rangle \langle 1, h \rangle - \langle i, f \rangle \langle i, h \rangle) \langle 1, g \rangle + (\langle 1, f \rangle \langle i, h \rangle + \langle i, f \rangle \langle 1, h \rangle) \langle i, g \rangle \\ &= \langle 1, f \rangle (\langle 1, h \rangle \langle 1, g \rangle + \langle i, h \rangle \langle i, g \rangle) + \langle i, f \rangle (\langle 1, h \rangle \langle i, g \rangle - \langle i, h \rangle \langle 1, g \rangle) \\ &= \langle f, \bar{h}g \rangle. \end{aligned} \quad (1-51)$$

A propriedade iv) segue de

$$\begin{aligned} \langle f, g \rangle + i\langle f, ig \rangle &= (\langle 1, f \rangle \langle 1, g \rangle + \langle i, f \rangle \langle i, g \rangle) + i(-\langle 1, f \rangle \langle i, g \rangle + \langle i, f \rangle \langle 1, g \rangle) \\ &= (\langle 1, f \rangle + i\langle i, f \rangle)(\langle 1, g \rangle - i\langle i, g \rangle) \\ &= f\bar{g}. \end{aligned} \quad (1-52)$$

A propriedade v) segue de  $f^2 = (\langle 1, f \rangle^2 - \langle i, f \rangle^2) + 2i\langle 1, f \rangle \langle i, f \rangle$ . Além disso, temos que

$$if^2 = -2\langle 1, f \rangle \langle i, f \rangle + i(\langle 1, f \rangle^2 - \langle i, f \rangle^2) \quad (1-53)$$

de onde segue a propriedade vi). □

**Definição 1.18** *Uma superfície de Riemann  $M$  é uma variedade analítica unidimensional, isto é, uma variedade diferenciável conexa  $M$ , de dimensão 2, juntamente com uma família de parametrizações  $\omega_\alpha : U_\alpha \rightarrow M$ , onde  $U_\alpha$  é um aberto de  $\mathbb{C}$ , tais que as aplicações*

$$\omega_\alpha^{-1} \circ \omega_\beta \quad e \quad \omega_\beta^{-1} \circ \omega_\alpha \quad (1-54)$$

são holomorfas, desde que  $\omega_\alpha(U_\alpha) \cap \omega_\beta(U_\beta) \neq \emptyset$ . A família de parametrizações  $\{(U_\alpha, \omega_\alpha)\}$  é chamada de estrutura analítica em  $M$ .

Alguns exemplos simples de superfícies de Riemann são o plano complexo  $\mathbb{C}$  e seus respectivos subconjuntos abertos. Outro exemplo importante é a esfera  $\mathbb{S}^2$  munida da estrutura analítica dada pelas inversas das projeções estereográficas  $P_-^{-1} : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{S}^2 \setminus \{-e_3\}$  e  $P_+^{-1} : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{S}^2 \setminus \{e_3\}$ , conforme (1-35). Com efeito,  $P_-^{-1}(\mathbb{C}) \cap P_+^{-1}(\mathbb{C}) = \mathbb{S}^2 \setminus \{-e_3, e_3\}$  e as aplicações  $P_+ \circ P_-^{-1}$  e  $P_- \circ P_+^{-1}$ , dadas por

$$P_+ \circ P_-^{-1}(z) = P_- \circ P_+^{-1}(z) = \frac{1}{|z|^2}z, \quad z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}, \quad (1-55)$$

são holomorfas.

Um modelo conforme para a esfera  $\mathbb{S}^2$  é dada pelo conjunto  $\mathbb{C}_\infty = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ , onde  $\infty \notin \mathbb{C}$ , munida da estrutura analítica dada pelas parametrizações

$$\omega_1(z) = z, \quad z \in \mathbb{C} \quad \text{e} \quad \omega_2(w) = \begin{cases} \infty, & \text{se } w = 0 \\ \frac{1}{w}, & \text{se } w \in \mathbb{C} \setminus \{0\}. \end{cases} \quad (1-56)$$

De fato, a aplicação  $\Upsilon : \mathbb{S}^2 \rightarrow \mathbb{C}_\infty$ , dada por

$$\Upsilon(q) = \begin{cases} P_+(q), & \text{se } q \neq e_3 \\ \infty, & \text{se } q = e_3 \end{cases}, \quad q \in \mathbb{S}^2 \quad (1-57)$$

define um difeomorfismo conforme entre  $\mathbb{S}^2$  e  $\mathbb{C}_\infty$ . Com a estrutura dada por (1-56),  $\mathbb{C}_\infty$  é chamada de *esfera de Riemann*.

O Teorema seguinte nos permite classificar as superfícies de Riemann simplesmente conexas, sua demonstração pode ser vista em [12].

**Teorema 1.19** *Uma superfície de Riemann simplesmente conexa  $M$  é difeomorficamente conforme a uma, e somente uma, das três superfícies de Riemann abaixo:*

- i)  $\mathbb{C}$ ;
- ii)  $\Delta = \{z \in \mathbb{C}; |z| < 1\}$ ;
- iii)  $\mathbb{C}_\infty$ .

## Congruências de Esferas

Neste capítulo caracterizaremos as hipersuperfícies de  $\mathbb{R}^{n+1}$  que são envelopes de uma congruência de esferas na qual o outro envelope está contido em um hiperplano. Mostraremos ainda que esta caracterização permite obter (localmente) hipersuperfícies com aplicação normal de Gauss prescrita.

A partir de agora  $\Pi$  denotará o hiperplano  $\{(x_1, \dots, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1}; x_{n+1} = 0\}$ , orientado pelo campo normal unitário  $-e_{n+1} = (0, \dots, 0, -1) \in \mathbb{R}^{n+1}$ , e  $U$  denotará um subconjunto aberto de  $\mathbb{R}^n$ . Identificaremos  $\Pi$  com  $\mathbb{R}^n$  pelo isomorfismo canônico  $(x_1, \dots, x_n, 0) \in \Pi \mapsto (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ . Dessa forma,  $\mathbb{R}^{n+1}$  fica identificado com  $\Pi \times \mathbb{R}$ .

**Definição 2.1** *Uma congruência de esferas em  $\mathbb{R}^{n+1}$  é uma família a  $n$ -parâmetros de esferas, cujos centros estão sob uma hipersuperfície  $\Sigma_0 \subset \mathbb{R}^{n+1}$ , e com função raio diferenciável. Um envelope de uma congruência de esferas é uma hipersuperfície  $\Sigma \subset \mathbb{R}^{n+1}$  tal que cada  $p \in \Sigma$  é tangente a uma esfera da congruência de esferas.*

Sejam  $\Sigma$  e  $\tilde{\Sigma}$  duas hipersuperfícies orientáveis de  $\mathbb{R}^{n+1}$ . Dizemos que  $\Sigma$  e  $\tilde{\Sigma}$  são envelopes de uma congruência de esferas (ou ainda que  $\Sigma$  e  $\tilde{\Sigma}$  estão associadas por uma congruência de esferas) se existem uma função diferenciável  $R : \Sigma \rightarrow \mathbb{R}$  e um difeomorfismo  $\psi : \Sigma \rightarrow \tilde{\Sigma}$  tais que

$$(i) \quad p + R(p)N(p) = \psi(p) + R(p)\tilde{N}(\psi(p)), \text{ para todo } p \in \Sigma;$$

$$(ii) \quad \text{o conjunto } p + R(p)N(p), \quad p \in \Sigma, \text{ é uma hipersuperfície de } \mathbb{R}^{n+1}.$$

onde  $N$  e  $\tilde{N}$  são as aplicações normais de Gauss de  $\Sigma$  e  $\tilde{\Sigma}$ , respectivamente. Dizemos ainda que  $\Sigma$  e  $\tilde{\Sigma}$  estão localmente associados por uma congruência de esferas se para cada  $p \in \Sigma$  existe uma vizinhança de  $p$  em  $\Sigma$  associada por uma congruência de esferas a um aberto de  $\tilde{\Sigma}$ .

As transformações de Ribaucour são exemplos de congruência de esferas, conforme a definição seguinte.

**Definição 2.2** *Sejam  $\Sigma$  e  $\tilde{\Sigma}$  duas hipersuperfícies orientáveis de  $\mathbb{R}^{n+1}$ . Considere  $e_1, e_2, \dots, e_n$  direções principais ortogonais definidas sobre  $\Sigma$ . Dizemos que  $\Sigma$  e  $\tilde{\Sigma}$  estão associadas*

por uma transformação de Ribaucour se  $\Sigma$  e  $\tilde{\Sigma}$  estão associadas por uma congruência de esferas e o difeomorfismo  $\psi : \Sigma \rightarrow \tilde{\Sigma}$  é tal que  $d\psi(e_i)$ ,  $1 \leq i \leq n$ , são direções principais de  $\tilde{\Sigma}$ .

A proposição seguinte estabelece condições para que uma hipersuperfície esteja associada a  $\Pi$  por meio de uma congruência de esferas.

**Proposição 2.3** *Seja  $\Sigma$  uma hipersuperfície orientável de  $\mathbb{R}^{n+1}$  com curvatura de Gauss-Kronecker  $K(p) \neq 0$ , para todo  $p \in \Sigma$ . Se a aplicação normal de Gauss  $N$  de  $\Sigma$  é tal que  $N(p) \neq -e_{n+1}$ , para todo  $p \in \Sigma$ , então  $\Sigma$  e  $\Pi$  estão localmente associados por uma congruência de esferas.*

*Prova.* Dado  $p \in \Sigma$  seja  $X : U \rightarrow \Sigma$  uma parametrização local de  $\Sigma$  em  $p$ . Como  $K(p) \neq 0$ , a aplicação normal de Gauss  $N : U \rightarrow \mathbb{S}^n$  é um difeomorfismo sobre  $N(U)$ . Considere a função  $R : U \rightarrow \mathbb{R}$  dada por

$$R(u) = \frac{-\langle X(u), e_{n+1} \rangle}{1 + \langle N(u), e_{n+1} \rangle}, \quad u \in U. \quad (2-1)$$

Assim,  $\{X(u) + R(u)N(u); u \in U\}$  forma uma hipersuperfície de  $\mathbb{R}^{n+1}$  e a aplicação  $\psi : U \rightarrow \Pi$  dada por

$$\psi(u) = X(u) + R(u)(N(u) + e_{n+1}), \quad u \in U \quad (2-2)$$

é um difeomorfismo sobre  $\psi(U)$  satisfazendo  $X + RN = \psi + R(-e_{n+1})$ . Portanto,  $\Sigma$  e  $\Pi$  estão localmente associados por uma congruência de esferas.  $\square$

**Observação 2.4** *Orientando o hiperplano  $\Pi$  pelo campo normal  $e_{n+1} = (0, \dots, 0, 1) \in \mathbb{R}^{n+1}$  a proposição anterior continua válida desde que  $N \neq e_{n+1}$ . Neste caso, a função  $R$  é definida por*

$$R = \frac{\langle X, e_{n+1} \rangle}{1 - \langle N, e_{n+1} \rangle} \quad (2-3)$$

e o difeomorfismo  $\psi$  deve ser dado por  $\psi = X + R(N - e_{n+1})$ .

Em 2006, Corro [6] apresentou uma maneira de parametrizar superfícies que são envelopes de uma congruência de esferas na qual o outro envelope está contido em um plano. Motivado por estas idéias, apresentaremos no próximo Teorema outra maneira de parametrizar hipersuperfícies como envelopes de uma congruência de esferas na qual o outro envelope está contido no hiperplano  $\Pi$ . A congruência de esferas envolvida está relacionada com o sistema de tipo hidrodinâmico descrito por (1-42) e a parametrização obtida generaliza os resultados de Ferapontov [14]. Antes disso, precisaremos do seguinte Lema.

**Lema 2.5** Sejam  $Y : U \rightarrow \Pi$  uma parametrização local ortogonal do hiperplano  $\Pi$  e  $a_j : U \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $1 \leq j \leq n$ , funções diferenciáveis. Então,

$$\left( \sum_{j=1}^n \frac{a_j}{L_{jj}} Y_{,j} \right)_{,i} = \sum_{j=1}^n \frac{1}{L_{jj}} \left( a_{j,i} - \sum_{k=1}^n \Gamma_{ij}^k a_k \right) Y_{,j}, \quad i = 1, \dots, n. \quad (2-4)$$

onde  $L_{jj} = \langle Y_{,j}, Y_{,j} \rangle$  e  $\Gamma_{ij}^k$  são os símbolos de Christoffel de  $L_{ij}$ .

*Prova.* Para todo  $1 \leq i, j \leq n$ , temos que  $Y_{,ij} = \sum_{k=1}^n \Gamma_{ij}^k Y_{,k}$ . Como a métrica  $L_{ij} = \langle Y_{,i}, Y_{,j} \rangle$  é ortogonal, segue que

$$\langle Y_{,ji}, Y_{,j} \rangle = \Gamma_{ji}^j L_{jj}, \quad 1 \leq i, j \leq n. \quad (2-5)$$

Utilizando esta última expressão juntamente com o Lema 1.13, teremos

$$\begin{aligned} & \left( \sum_{j=1}^n \frac{a_j}{L_{jj}} Y_{,j} \right)_{,i} = \sum_{j=1}^n \left[ \frac{a_{j,i}}{L_{jj}} Y_{,j} + \frac{a_j}{L_{jj}} \left( Y_{,ji} - 2 \frac{\langle Y_{,ji}, Y_{,j} \rangle}{L_{jj}} Y_{,j} \right) \right] \\ &= \sum_{j=1}^n \left[ \frac{a_{j,i}}{L_{jj}} Y_{,j} + \frac{a_j}{L_{jj}} \left( \sum_{k=1}^n \Gamma_{ji}^k Y_{,k} - 2 \Gamma_{ji}^j Y_{,j} \right) \right] \\ &= \frac{a_{i,i}}{L_{ii}} Y_{,i} + \frac{a_i}{L_{ii}} \left( \sum_{k=1}^n \Gamma_{ii}^k Y_{,k} - 2 \Gamma_{ii}^i Y_{,i} \right) + \sum_{j=1, j \neq i}^n \left[ \frac{a_{j,i}}{L_{jj}} Y_{,j} + \frac{a_j}{L_{jj}} \left( \sum_{k=1}^n \Gamma_{ji}^k Y_{,k} - 2 \Gamma_{ji}^j Y_{,j} \right) \right] \\ &= \frac{a_{i,i}}{L_{ii}} Y_{,i} + \frac{a_i}{L_{ii}} \left( -\Gamma_{ii}^i Y_{,i} + \sum_{k=1, k \neq i}^n \Gamma_{ii}^k Y_{,k} \right) + \sum_{j=1, j \neq i}^n \left[ \frac{a_{j,i}}{L_{jj}} Y_{,j} + \frac{a_j}{L_{jj}} \left( -\Gamma_{ji}^j Y_{,j} + \Gamma_{ji}^i Y_{,i} \right) \right] \\ &= \frac{a_{i,i}}{L_{ii}} Y_{,i} + \frac{a_i}{L_{ii}} \left( -\Gamma_{ii}^i Y_{,i} + \sum_{k=1, k \neq i}^n -\frac{L_{ii}}{L_{kk}} \Gamma_{ik}^i Y_{,k} \right) + \sum_{j=1, j \neq i}^n \left[ \frac{a_{j,i}}{L_{jj}} Y_{,j} + \frac{a_j}{L_{jj}} \left( -\Gamma_{ji}^j Y_{,j} - \frac{L_{jj}}{L_{ii}} \Gamma_{ii}^j Y_{,i} \right) \right] \\ &= \frac{1}{L_{ii}} (a_{i,i} - \Gamma_{ii}^i a_i) Y_{,i} - a_i \sum_{k=1, k \neq i}^n \frac{1}{L_{kk}} \Gamma_{ik}^i Y_{,k} + \sum_{j=1, j \neq i}^n \frac{1}{L_{jj}} (a_{j,i} - \Gamma_{ji}^j a_j) Y_{,j} - \frac{1}{L_{ii}} \sum_{j=1, j \neq i}^n \Gamma_{ii}^j a_j Y_{,i} \\ &= \frac{1}{L_{ii}} (a_{i,i} - \Gamma_{ii}^i a_i) Y_{,i} - \frac{1}{L_{ii}} \sum_{k=1, k \neq i}^n \Gamma_{ii}^k a_k Y_{,i} + \sum_{j=1, j \neq i}^n \frac{1}{L_{jj}} (a_{j,i} - \Gamma_{ji}^j a_j) Y_{,j} - a_i \sum_{j=1, j \neq i}^n \frac{1}{L_{jj}} \Gamma_{ij}^i Y_{,j} \\ &= \frac{1}{L_{ii}} \left( a_{i,i} - \sum_{k=1}^n \Gamma_{ii}^k a_k \right) Y_{,i} + \sum_{j=1, j \neq i}^n \frac{1}{L_{jj}} \left[ a_{j,i} - \Gamma_{ji}^j a_j - \Gamma_{ij}^i a_i \right] Y_{,j} \\ &= \frac{1}{L_{ii}} \left( a_{i,i} - \sum_{k=1}^n \Gamma_{ii}^k a_k \right) Y_{,i} + \sum_{j=1, j \neq i}^n \frac{1}{L_{jj}} \left( a_{j,i} - \sum_{k=1}^n \Gamma_{ij}^k a_k \right) Y_{,j} \\ &= \sum_{j=1}^n \frac{1}{L_{jj}} \left( a_{j,i} - \sum_{k=1}^n \Gamma_{ij}^k a_k \right) Y_{,j}, \quad 1 \leq i \leq n \end{aligned} \quad (2-6)$$

como queríamos demonstrar.  $\square$

**Teorema 2.6** *Seja  $\Sigma$  uma hipersuperfície orientável de  $\mathbb{R}^{n+1}$  com curvatura de Gauss-Kronecker  $K \neq 0$  e com aplicação normal de Gauss  $N \neq -e_{n+1}$ . Então, existem uma parametrização local ortogonal  $Y : U \rightarrow \Pi$  do hiperplano  $\Pi$  e uma função diferenciável  $h : U \rightarrow \mathbb{R}$  tais que  $\Sigma$  pode ser localmente parametrizada por*

$$X(u) = \left( Q(u) - \frac{2R(u)}{T(u)}Y(u), -\frac{2R(u)}{T(u)} \right), \quad u \in U \quad (2-7)$$

onde  $L_{jj} = \langle Y_{,j}, Y_{,j} \rangle$ ,  $T = 1 + |Y|^2$ ,

$$Q = \sum_{j=1}^n \frac{h_{,j}}{L_{jj}} Y_{,j} \quad e \quad R = \langle Q, Y \rangle - h. \quad (2-8)$$

Nestas coordenadas, a normal de Gauss  $N$  de  $\Sigma$  é dada por

$$N(u) = \frac{1}{1 + |Y(u)|^2} (2Y(u), 1 - |Y(u)|^2), \quad u \in U. \quad (2-9)$$

Além disso, a matriz de Weingarten  $W$  de  $X$  é dada por

$$W = 2(TV - 2RI_n)^{-1} \quad (2-10)$$

onde  $V = (V_{ij})$  é dado por (1-42) e  $I_n$  é a matriz identidade  $n \times n$ . A condição de regularidade de  $X$  é dada por

$$P = \det.(TV - 2RI_n) \neq 0. \quad (2-11)$$

Em coordenadas locais, as formas fundamentais I, II e III de  $\Sigma$  são dadas por

$$I : \langle X_{,i}, X_{,j} \rangle = \left( \sum_{k=1}^n V_{ik} V_{jk} L_{kk} \right) - \frac{2R}{T} (V_{ij} L_{jj} + V_{ji} L_{ii}) + \frac{4R^2}{T^2} L_{ij} \quad (2-12)$$

$$II : -\langle X_{,i}, N_{,j} \rangle = \frac{2}{T^2} (2RL_{ij} - TV_{ij} L_{jj}) \quad (2-13)$$

$$III : \langle N_{,i}, N_{,j} \rangle = \frac{4}{T^2} L_{ij}. \quad (2-14)$$

Reciprocamente, se  $Y : U \rightarrow \Pi$  é uma parametrização local ortogonal de  $\Pi$  e  $h : U \rightarrow \mathbb{R}$  é uma função diferenciável satisfazendo (2-11), então (2-7) define um imersão em  $\mathbb{R}^{n+1}$  com normal de Gauss dada por (2-9), matriz de Weingarten dada por (2-10) e formas fundamentais descritas por (2-12), (2-13) e (2-14).

*Prova.* Sejam  $P_-$  a projeção estereográfica dada por (1-34) e  $X : U \rightarrow \Sigma$  uma parametrização local de  $\Sigma$ . A composição  $Y = P_- \circ N \circ X$  define uma parametrização local, que podemos supor ortogonal, do hiperplano  $\Pi$ . Nestas coordenadas podemos escrever

$N = P_-^{-1} \circ Y$ , de onde segue que  $N$  é dada localmente por (2-9). Como  $K \neq 0$ , segue da Proposição 2.3 que  $\Sigma$  e  $\Pi$  estão localmente associados por uma congruência de esferas. Dessa forma, existem funções diferenciáveis  $a_j, R : U \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $1 \leq j \leq n$  tais que

$$X + RN = Q + R(-\overrightarrow{e_{n+1}}) \quad (2-15)$$

onde  $Q = \sum_{j=1}^n \frac{a_j}{L_{jj}} Y_j$  e  $L_{jj} = \langle Y_j, Y_j \rangle$ .

Note que  $X_i = Q_i - R_i(N + e_{n+1}) - RN_i$ ,  $1 \leq i \leq n$ . Além disso, sabemos que  $\langle N, X_i \rangle = 0$ , logo

$$R_i = \langle Y, Q_i \rangle, \quad 1 \leq i \leq n. \quad (2-16)$$

Como  $R$  é integrável, então  $\langle Y_j, Q_i \rangle = \langle Y_i, Q_j \rangle$  para todo  $1 \leq i, j \leq n$ . Pelo Lema anterior,

$$Q_i = \sum_{j=1}^n \frac{1}{L_{jj}} \left( a_{j,i} - \sum_{k=1}^n \Gamma_{ij}^k a_k \right) Y_j, \quad 1 \leq i \leq n \quad (2-17)$$

de onde segue que

$$\langle Y_j, Q_i \rangle = a_{j,i} - \sum_{k=1}^n \Gamma_{ij}^k a_k \quad \text{e} \quad \langle Y_i, Q_j \rangle = a_{i,j} - \sum_{k=1}^n \Gamma_{ji}^k a_k. \quad (2-18)$$

Portanto,  $a_{i,j} = a_{j,i}$  para todo  $1 \leq i, j \leq n$ . Seja  $h : U \rightarrow \mathbb{R}$  uma função diferenciável, possivelmente multivaluada, tal que  $h_j = a_j$  para todo  $1 \leq j \leq n$ . A função  $h$  é única a menos de um constante, que fixaremos a seguir. Isso garante que

$$Q = \sum_{j=1}^n \frac{h_j}{L_{jj}} Y_j \quad \text{e} \quad Q_i = \sum_{j=1}^n V_{ij} Y_j, \quad i = 1, \dots, n \quad (2-19)$$

onde  $V_{ij} = \frac{1}{L_{jj}} \left( h_{i,j} - \sum_{l=1}^n \Gamma_{ij}^l h_l \right)$ .

Agora, note que  $\langle Q, Y_i \rangle = h_i$ . Utilizando (2-16), teremos

$$\langle Y, Q \rangle_i = \langle Y_i, Q \rangle + \langle Y, Q_i \rangle = h_i + R_i, \quad 1 \leq i \leq n. \quad (2-20)$$

Escolhendo uma constante adequada para  $h$ , nós concluímos que

$$R = \langle Q, Y \rangle - h \quad \text{e} \quad R_i = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n V_{ij} T_j, \quad i = 1, \dots, n. \quad (2-21)$$

Em particular, isso mostra que  $h$  não é multivaluada. Além disso, voltando em (2-15) concluiremos que  $X$  é dada por (2-7).

Para obtermos a matriz de Weingarten de  $X$  observe que as expressões (2-19) e

(2-21) garantem que

$$\omega_1 = (Y + e_{n+1})dx + Qdt \quad \text{e} \quad \omega_2 = \frac{T}{2}dx + Rdt \quad (2-22)$$

são integrais de tipo hidrodinâmico do sistema descrito por (1-42), isto é,

$$u_{,t}^i = \sum_{j=1}^n \frac{1}{L_{jj}} \left( h_{,ij} - \sum_{l=1}^n \Gamma_{ij}^l h_{,l} \right) u_{,x}^j, \quad i = 1, \dots, n. \quad (2-23)$$

Considere então a transformação recíproca dada por

$$d\bar{x} = -2dt \quad (2-24)$$

$$d\bar{t} = -2\omega_2 \quad (2-25)$$

Segue da Proposição 1.9 que (2-24) e (2-25) transformam o sistema (2-23) no sistema descrito pela matriz

$$\bar{V} = 2(TV - 2RI_n)^{-1}. \quad (2-26)$$

Além disso, a integral  $\omega_1$  é transformada em

$$\bar{\omega}_1 = \left[ -\frac{1}{2}Q + \frac{R}{T}(Y + e_{n+1}) \right] d\bar{x} - \frac{(Y + e_{n+1})}{T} d\bar{t}. \quad (2-27)$$

Observe que  $-2\bar{\omega}_1 = X d\bar{x} + (N + e_{n+1})d\bar{t}$  e com isso

$$N_{,i} = (N + e_{n+1})_{,i} = \sum_{j=1}^n \bar{V}_{ij} X_{,j}, \quad 1 \leq i \leq n. \quad (2-28)$$

Portanto, a matriz de Weingarten de  $X$  é dada por  $W = 2(TV - 2RI_n)^{-1}$  e  $X$  é regular se, e somente se,  $P = \det.(TV - 2RI_n) \neq 0$ .

Como  $T = 1 + |Y|^2$ , podemos reescrever

$$N = \frac{1}{T} (2Y(u), 2 - T). \quad (2-29)$$

Assim,

$$\begin{aligned} N_{,i} &= -\frac{T_{,i}}{T^2} (2Y, 2 - T) + \frac{1}{T} (2Y_{,i}, -T_{,i}) \\ &= -\frac{2\langle Y, Y_{,i} \rangle}{T^2} (2Y, 2 - T) + \frac{2T}{T^2} (Y_{,i}, -\langle Y, Y_{,i} \rangle) \\ &= \frac{2}{T^2} [-\langle Y, Y_{,i} \rangle (2Y, 2 - T) + T(Y_{,i}, -\langle Y, Y_{,i} \rangle)] \\ &= \frac{2}{T^2} (TY_{,i} - 2Y\langle Y, Y_{,i} \rangle, -2\langle Y, Y_{,i} \rangle), \quad 1 \leq i \leq n. \end{aligned} \quad (2-30)$$

Dessa forma,

$$\begin{aligned}
\langle N_{,i}, N_{,j} \rangle &= \left\langle \frac{2}{T^2} (TY_{,i} - 2Y \langle Y, Y_{,i} \rangle, -2 \langle Y, Y_{,i} \rangle), \frac{2}{T^2} (TY_{,j} - 2Y \langle Y, Y_{,j} \rangle, -2 \langle Y, Y_{,j} \rangle) \right\rangle \\
&= \frac{4}{T^4} (\langle TY_{,i} - 2Y \langle Y, Y_{,i} \rangle, TY_{,j} - 2Y \langle Y, Y_{,j} \rangle \rangle + 4 \langle Y, Y_{,i} \rangle \langle Y, Y_{,j} \rangle) \\
&= \frac{4}{T^4} (T^2 L_{ij} + 4 \langle Y, Y_{,i} \rangle \langle Y, Y_{,j} \rangle |Y|^2 - 4T \langle Y, Y_{,i} \rangle \langle Y, Y_{,j} \rangle + 4 \langle Y, Y_{,i} \rangle \langle Y, Y_{,j} \rangle) \\
&= \frac{4}{T^4} (T^2 L_{ij} + 4 \langle Y, Y_{,i} \rangle \langle Y, Y_{,j} \rangle (|Y|^2 - T + 1)) \\
&= \frac{4}{T^2} L_{ij}, \quad 1 \leq i, j \leq n. \tag{2-31}
\end{aligned}$$

Como  $W = 2(TV - 2R I_n)^{-1}$ , temos

$$X_{,i} = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n (TV_{ik} - 2R \delta_{ik}) N_{,k}, \quad 1 \leq i \leq n, \tag{2-32}$$

onde a matriz  $V = (V_{ij})$  é dada por (1-42) e  $\delta_{ik} = \begin{cases} 1, & \text{se } i = k \\ 0, & \text{se } i \neq k \end{cases}$ . Dessa forma, utilizando (2-31), teremos

$$\begin{aligned}
-\langle X_{,i}, N_{,j} \rangle &= -\left\langle \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n (TV_{ik} - 2R \delta_{ik}) N_{,k}, N_{,j} \right\rangle \\
&= -\frac{1}{2} \sum_{k=1}^n (TV_{ik} - 2R \delta_{ik}) \langle N_{,k}, N_{,j} \rangle \\
&= -\frac{2}{T^2} \sum_{k=1}^n (TV_{ik} - 2R \delta_{ik}) L_{kj}, \quad 1 \leq i, j \leq n. \tag{2-33}
\end{aligned}$$

Como a métrica  $L_{ij}$  é ortogonal segue que  $\delta_{ij} L_{jj} = L_{ij}$ . Voltando em (2-33) obtemos

$$-\langle X_{,i}, N_{,j} \rangle = -\frac{2}{T^2} (TV_{ij} - 2R \delta_{ij}) L_{jj} = \frac{2}{T^2} (2R L_{ij} - TV_{ij} L_{jj}), \quad 1 \leq i, j \leq n. \tag{2-34}$$

Para obtermos os coeficientes da primeira forma fundamental  $I$ , utilizamos as expressões (2-31) e (2-32). Dessa forma,

$$\begin{aligned}
\langle X_{,i}, X_{,j} \rangle &= \left\langle \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n (TV_{ik} - 2R \delta_{ik}) N_{,k}, \frac{1}{2} \sum_{l=1}^n (TV_{jl} - 2R \delta_{jl}) N_{,l} \right\rangle \\
&= \frac{1}{4} \sum_{k,l=1}^n (TV_{ik} - 2R \delta_{ik}) (TV_{jl} - 2R \delta_{jl}) \langle N_{,k}, N_{,l} \rangle \\
&= \frac{1}{T^2} \sum_{k,l=1}^n [T^2 V_{ik} V_{jl} - 2RT (V_{ik} \delta_{jl} + V_{jl} \delta_{ik}) + 4R^2 \delta_{ik} \delta_{jl}] L_{kl}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{T^2} \sum_{k=1}^n [T^2 V_{ik} V_{jk} - 2RT(V_{ik} \delta_{jk} + V_{jk} \delta_{ik}) + 4R^2 \delta_{ik} \delta_{jk}] L_{kk} \\
&= \left( \sum_{k=1}^n V_{ik} V_{jk} L_{kk} \right) - \frac{2R}{T} \sum_{k=1}^n (V_{ik} \delta_{jk} + V_{jk} \delta_{ik}) L_{kk} + \frac{4R^2}{T^2} \sum_{k=1}^n \delta_{ik} \delta_{jk} L_{kk} \\
&= \left( \sum_{k=1}^n V_{ik} V_{jk} L_{kk} \right) - \frac{2R}{T} (V_{ij} L_{jj} + V_{ji} L_{ii}) + \frac{4R^2}{T^2} \sum_{k=1}^n \delta_{ik} \delta_{jk} L_{kk}. \quad (2-35)
\end{aligned}$$

Note que  $\sum_{k=1}^n \delta_{ik} \delta_{jk} L_{kk} = \begin{cases} L_{ii}, & \text{se } i = j \\ 0, & \text{se } i \neq j \end{cases} = L_{ij}$ . Voltando em (2-35), concluímos que

$$\langle X_{,i}, X_{,j} \rangle = \left( \sum_{k=1}^n V_{ik} V_{jk} L_{kk} \right) - \frac{2R}{T} (V_{ij} L_{jj} + V_{ji} L_{ii}) + \frac{4R^2}{T^2} L_{ij}, \quad 1 \leq i, j \leq n. \quad (2-36)$$

Reciprocamente, note que (2-11) é uma condição necessária e suficiente para que (2-7) seja uma imersão. Neste caso, segue de (2-28) que sua aplicação normal de Gauss é dada por (2-9), a matriz de Weingarten é dada por (2-10) e as formas fundamentais são descritas por (2-12), (2-13) e (2-14).  $\square$

**Corolário 2.7** *De acordo com as condições do Teorema 2.6, no caso  $n = 2$ , a condição de regularidade  $P$ , a curvatura média  $H$  e a curvatura Gaussiana  $K$  são dadas, respectivamente, por*

$$P = 4R^2 - 2RT \text{tra.}(V) + T^2 \det.(V) \quad (2-37)$$

$$H = -\frac{1}{P} (T \text{tra.}(V) - 4R) \quad (2-38)$$

$$K = \frac{4}{P} \quad (2-39)$$

onde  $V = (V_{ij})$  é dada por (1-42).

*Prova.* Como  $n = 2$ , a condição de regularidade  $P$  descrita por (2-11) torna-se

$$P = (TV_{11} - 2R)(TV_{22} - 2R) - T^2 V_{12} V_{21} = 4R^2 - 2RT \text{tra.}(V) + T^2 \det.(V) \quad (2-40)$$

onde  $V = (V_{ij})$  é dada por (1-42). Agora, note que

$$H = -\frac{1}{2} \text{tra.}(W) = -\text{tra.}((TV - 2RI_2)^{-1}) = -\frac{1}{P} (T \text{tra.}(V) - 4R) \quad (2-41)$$

$$K = \det.(W) = \det.((TV - 2RI_2)^{-1}) = \frac{4}{P} \quad (2-42)$$

onde  $W$  é dada por (2-10).  $\square$

**Corolário 2.8** *Se a matriz  $V = (V_{ij})$  é diagonal, isto é,  $V_{ij} = 0$  para  $i \neq j$ , então a hipersuperfície  $\Sigma$ , descrita pelo Teorema 2.6, está parametrizada por linhas de curvatura e associada à  $\Pi$  por uma transformação de Ribaucour.*

*Prova.* Se  $V = (V_{ij})$  é diagonal, a matriz de Weingarten  $W$  de  $\Sigma$ , dada por (2-10), também é diagonal. Consequentemente,  $\Sigma$  está parametrizada por linhas de curvatura. Note ainda que,

$$\langle X_{,i}, X_{,j} \rangle = -\langle X_{,i}, N_{,j} \rangle = 0, \quad \text{para } i \neq j. \quad (2-43)$$

Como  $Y$  é uma parametrização ortogonal,  $\{Y_{,i}\}$  são direções principais de  $\Pi$ . Além disso, observe que  $X_{,i} = dX(Y_{,i})$ . Dessa forma,  $\Sigma$  e  $\Pi$  estão associados por uma transformação de Ribaucour.  $\square$

**Corolário 2.9** *Sejam  $Y : U \rightarrow \Pi$  a parametrização do hiperplano  $\Pi$  dada por  $Y(u) = (u, 0)$ ,  $u \in U$ ,  $h : U \rightarrow \mathbb{R}$  uma função diferenciável e  $X : U \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$  a imersão dada por (2-7) com normal de Gauss  $N$  dada por (2-9). Nessas condições  $X(U)$  é uma hipersuperfície de rotação se, e somente se,  $h$  é uma função radial.*

*Prova.* Suponha que  $X(U)$  seja uma hipersuperfície de rotação. Sem perda de generalidade, podemos supor que o eixo de rotação é o eixo  $x_{n+1}$ . Dessa forma, as seções ortogonais ao eixo  $x_{n+1}$  determinam em  $X(U)$  esferas  $(n-1)$ -dimensionais centradas no eixo  $x_{n+1}$ . Como  $Y$  é a aplicação inclusão, a normal de Gauss  $N$  é a inversa da projeção estereográfica  $P_-$ , o que garante que a imersão  $X$  leva esferas  $(n-1)$ -dimensionais centradas na origem nas esferas  $(n-1)$ -dimensionais centradas no eixo de rotação. Observe ainda que ao longo dessas esferas o ângulo entre  $X$  e  $N$  deve ser constante, isto é,  $\langle X, N \rangle$  é constante. Por outro lado,

$$\begin{aligned} \langle X, N \rangle &= \left\langle \left( Q - \frac{2R}{1+|u|^2}u, -\frac{2R}{1+|u|^2} \right), \frac{1}{1+|u|^2} (2u, 1-|u|^2) \right\rangle \\ &= \left\langle Q - \frac{2R}{1+|u|^2}u, \frac{2u}{1+|u|^2} \right\rangle - \frac{2R}{(1+|u|^2)^2} (1-|u|^2) \\ &= \frac{2}{1+|u|^2} \langle Q, u \rangle - \frac{4R}{(1+|u|^2)^2} |u|^2 - \frac{2R}{(1+|u|^2)^2} (1-|u|^2) \\ &= \frac{2}{1+|u|^2} (R+h) - \frac{2R}{(1+|u|^2)^2} |u|^2 - \frac{2R}{(1+|u|^2)^2} \\ &= \frac{2}{(1+|u|^2)^2} (R+h)(1+|u|^2) - \frac{2R}{(1+|u|^2)^2} |u|^2 - \frac{2R}{(1+|u|^2)^2} \\ &= \frac{2h}{1+|u|^2}. \end{aligned} \quad (2-44)$$

Portanto,  $h$  é constante ao longo das esferas  $(n-1)$ -dimensionais centradas na origem, o que garante que  $h$  é uma função radial.

Suponha agora que  $h : U \rightarrow \mathbb{R}$  seja uma função radial, isto é,  $h(u) = J(|u|^2)$ ,  $u = (u_1, \dots, u_n) \in U$ , para alguma função diferenciável  $J$ . Denotaremos por  $t = |u|^2$  e escreveremos  $J'(t)$  para representar a derivada de  $J$  com respeito à  $t$ . Dessa forma,  $h_{,i} = 2u_i J'$  de onde segue que  $\nabla h = 2J'u$ . Como  $L_{ii} = \langle Y_i, Y_i \rangle = 1$ ,  $1 \leq i \leq n$ , temos que

$$Q = \nabla h = 2J'u, \quad R = \langle \nabla h, u \rangle - h = 2J't - J \quad \text{e} \quad T = 1 + |u|^2 = 1 + t. \quad (2-45)$$

Voltando na imersão  $X$  teremos,

$$X = \left( \left( 2J' - 2\frac{(2J't - J)}{1+t} \right) u, -2\frac{(2J't - J)}{1+t} \right) \quad (2-46)$$

Assim, se  $-2\frac{(2J't - J)}{1+t} = q$  for constante, então

$$\left| \left( 2J' - 2\frac{(2J't - J)}{1+t} \right) u \right|^2 = (2J' + q)^2 t. \quad (2-47)$$

Portanto, as seções ortogonais ao eixo  $x_{n+1}$  determinam em  $X(U)$  esferas  $(n-1)$ -dimensionais centradas no eixo  $x_{n+1}$ .  $\square$

---

## Superfícies Weingarten Generalizada do Tipo Suporte Distância

---

Neste capítulo iniciaremos o estudo das superfícies Weingarten generalizada do tipo suporte distância. Além de apresentarmos alguns exemplos, mostraremos como a inversão  $I^3$  e a dilatação  $D^3$  nos conduzem naturalmente ao estudo das superfícies WGSDE. A partir daí apresentaremos uma representação tipo Weierstrass para as superfícies WGSDE e caracterizaremos os exemplos rotacionais. Além disso, apresentaremos uma família de exemplos cíclicos.

### 3.1 Superfícies WGSD

Em 1888, Appell [2] estudou uma classe de superfícies associadas a transformações na esfera  $\mathbb{S}^2$  que preservam área. Posteriormente, Ferreira e Roitman [16] mostraram que estas superfícies são tais que existe um ponto fixo  $v \in \mathbb{R}^3$  de modo que a curvatura média  $H$ , a curvatura Gaussiana  $K$  e a função suporte  $\Psi_v$  satisfazem

$$H + \Psi_v K = 0. \quad (3-1)$$

Em 1907, Tzitzéica [23] estudou superfícies hiperbólicas para as quais existe uma constante real  $c \neq 0$  tal que

$$K + c^2 \Psi_v^4 = 0, \quad (3-2)$$

para algum ponto fixo  $v \in \mathbb{R}^3$ .

As superfícies de Appell e as superfícies de Tzitzéica são exemplos de uma classe mais geral de superfícies que passaremos a definir.

**Definição 3.1** Dizemos que uma superfície  $S \subset \mathbb{R}^3$  é uma superfície Weingarten generalizada do tipo suporte distância (ou, por abreviação, uma superfície WGSD), se existe um

ponto fixo  $v \in \mathbb{R}^3$  tal que a curvatura média  $H$  e a curvatura Gaussiana  $K$  satisfazem

$$A(\Psi_v, \Lambda_v) + B(\Psi_v, \Lambda_v)H + C(\Psi_v, \Lambda_v)K = 0, \quad (3-3)$$

para todo  $p \in S$ , onde  $A, B, C : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  são funções diferenciáveis que dependem da função suporte  $\Psi_v$  e da função distância quadrática  $\Lambda_v$ , dadas por (1-8).

No caso em que  $A, B$  e  $C$  são funções lineares, isto é, existem constantes reais  $a_i, b_i, c_i, 1 \leq i \leq 3$ , tais que

$$a_1 + a_2\Psi_v + a_3\Lambda_v + (b_1 + b_2\Psi_v + b_3\Lambda_v)H + (c_1 + c_2\Psi_v + c_3\Lambda_v)K = 0, \quad (3-4)$$

diremos que a superfície é WGSD-linear (ou, por abreviação, superfície WGSDL).

É importante ressaltar que as superfícies WGSDL são invariantes pelas isometrias de  $\mathbb{R}^3$ , mesmo que o ponto fixo  $v$  não necessariamente permaneça invariante. Dessa forma, a menos de uma isometria,  $v$  será a origem  $0 \in \mathbb{R}^3$  e escreveremos  $\Psi_0 = \Psi$  e  $\Lambda_0 = \Lambda$ .

As superfícies de Appell são superfícies WGSDL ( $b_1 = c_2 = 1$  e  $a_1 = a_2 = a_3 = b_2 = b_3 = c_1 = c_3 = 0$ ). Além disso, se tomarmos  $a_2 = a_3 = b_2 = b_3 = c_2 = c_3 = 0$  teremos as superfícies Weingarten lineares.

O próximo Teorema estabelece condições para que uma superfície WGSDL seja invariante pela inversão  $I^3$  e pela dilatação  $D^3$ .

**Teorema 3.2** *Seja  $S$  uma superfície orientável. Considere  $\tilde{S} = I^3(S \setminus \{0\})$  e  $\bar{S} = D^3(S)$  as imagens de  $S$  pela dilatação  $D^3$  e pela inversão  $I^3$  dadas por (1-25) e (1-29), respectivamente. Denote  $H, \tilde{H}, \bar{H}, K, \tilde{K}, \bar{K}, \Psi, \tilde{\Psi}, \bar{\Psi}, \Lambda, \tilde{\Lambda}$  e  $\bar{\Lambda}$  as curvaturas médias, as curvaturas Gaussianas e as funções suporte e distância quadrática de  $S, \tilde{S}$  e  $\bar{S}$ , respectivamente. Então,  $S$  é uma superfície WGSDL satisfazendo (3-4) se, e somente se,  $\tilde{S}$  é uma superfície WGSD satisfazendo*

$$\begin{aligned} & \left[ (4c_3 - 2b_2) \frac{\tilde{\Psi}^2}{\tilde{\Lambda}} + (2b_3 - a_2) \frac{\tilde{\Psi}}{\tilde{\Lambda}} - 4c_2 \frac{\tilde{\Psi}^3}{\tilde{\Lambda}} + \frac{a_3}{\tilde{\Lambda}} + 4c_1 \tilde{\Psi}^2 + 2b_1 \tilde{\Psi} + a_1 \right] + \\ & \quad \left[ (4c_3 - b_2) \tilde{\Psi} + b_1 \tilde{\Lambda} + b_3 - 4c_2 \tilde{\Psi}^2 + 4c_1 \tilde{\Psi} \tilde{\Lambda} \right] \tilde{H} + \\ & \quad \left[ c_3 \tilde{\Lambda} + c_1 \tilde{\Lambda}^2 - c_2 \tilde{\Psi} \tilde{\Lambda} \right] \tilde{K} = 0. \end{aligned} \quad (3-5)$$

Por outro lado,  $S$  é uma superfície WGSDL satisfazendo (3-4) se, e somente se,  $\bar{S}$  é uma superfície WGSDL satisfazendo

$$a_1 + \frac{a_2}{\lambda} \bar{\Psi} + \frac{a_3}{\lambda^2} \bar{\Lambda} + \left( b_1 \lambda + b_2 \bar{\Psi} + \frac{b_3}{\lambda} \bar{\Lambda} \right) \bar{H} + (c_1 \lambda^2 + c_2 \lambda \bar{\Psi} + c_3 \bar{\Lambda}) \bar{K} = 0. \quad (3-6)$$

*Prova.* Seja  $X$  uma parametrização local de  $S$  e

$$\tilde{X} = \frac{X}{\langle X, X \rangle} \quad \text{e} \quad \bar{X} = \lambda X \quad (3-7)$$

parametrizações locais de  $\tilde{S}$  e  $\bar{S}$ , respectivamente. Segue da Proposição 1.11 que a normal de Gauss  $\tilde{N}$  e a matriz de Weingarten  $\tilde{W}$  de  $\tilde{S}$  são dadas por

$$\tilde{N} = -2 \frac{\langle X, N \rangle}{\langle X, X \rangle} X + N \quad \text{e} \quad \tilde{W} = \langle X, X \rangle W - 2 \langle X, N \rangle I_2 \quad (3-8)$$

onde  $N$  é a normal de Gauss de  $S$ ,  $W$  é a matriz de Weingarten de  $S$  e  $I_2$  é a matriz identidade  $2 \times 2$ . Dessa forma, as funções suporte  $\tilde{\Psi} = \langle \tilde{X}, \tilde{N} \rangle$  e distância quadrática  $\tilde{\Lambda} = \langle \tilde{X}, \tilde{X} \rangle$  de  $\tilde{S}$  são dadas por

$$\tilde{\Psi} = -\frac{\langle X, N \rangle}{\langle X, X \rangle} = -\frac{\Psi}{\Lambda} \quad \text{e} \quad \tilde{\Lambda} = \frac{1}{\langle X, X \rangle} = \frac{1}{\Lambda} \quad (3-9)$$

onde  $\Psi$  e  $\Lambda$  denotam as funções suporte e distância quadrática de  $S$ , respectivamente. Voltando em (3-8) teremos

$$H = \frac{-1}{2} \text{tra.} \left( \frac{1}{\Lambda} (\tilde{W} + 2\Psi I_2) \right) = \tilde{\Lambda} \tilde{H} + 2\tilde{\Psi} \quad (3-10)$$

$$K = \det. \left( \frac{1}{\Lambda} (\tilde{W} + 2\Psi I_2) \right) = \tilde{\Lambda}^2 \tilde{K} + 4\tilde{\Psi} \tilde{\Lambda} \tilde{H} + 4\tilde{\Psi}^2. \quad (3-11)$$

Utilizando (3-4), (3-9), (3-10) e (3-11) teremos

$$\begin{aligned} a_1 + a_2 \Psi + a_3 \Lambda + (b_1 + b_2 \Psi + b_3 \Lambda) H + (c_1 + c_2 \Psi + c_3 \Lambda) K &= 0 \Leftrightarrow \\ a_1 - a_2 \frac{\tilde{\Psi}}{\Lambda} + a_3 \frac{1}{\Lambda} + \left( b_1 - b_2 \frac{\tilde{\Psi}}{\Lambda} + b_3 \frac{1}{\Lambda} \right) (\tilde{\Lambda} \tilde{H} + 2\tilde{\Psi}) + \\ &+ \left( c_1 - c_2 \frac{\tilde{\Psi}}{\Lambda} + c_3 \frac{1}{\Lambda} \right) (\tilde{\Lambda}^2 \tilde{K} + 4\tilde{\Psi} \tilde{\Lambda} \tilde{H} + 4\tilde{\Psi}^2) = 0 \Leftrightarrow \\ \left[ (4c_3 - 2b_2) \frac{\tilde{\Psi}^2}{\Lambda} + (2b_3 - a_2) \frac{\tilde{\Psi}}{\Lambda} - 4c_2 \frac{\tilde{\Psi}^3}{\Lambda} + \frac{a_3}{\Lambda} + 4c_1 \tilde{\Psi}^2 + 2b_1 \tilde{\Psi} + a_1 \right] + \\ \left[ (4c_3 - b_2) \tilde{\Psi} + b_1 \tilde{\Lambda} + b_3 - 4c_2 \tilde{\Psi}^2 + 4c_1 \tilde{\Psi} \tilde{\Lambda} \right] \tilde{H} + \\ \left[ c_3 \tilde{\Lambda} + c_1 \tilde{\Lambda}^2 - c_2 \tilde{\Psi} \tilde{\Lambda} \right] \tilde{K} = 0. \quad (3-12) \end{aligned}$$

Por outro lado, segue da Proposição 1.10 que a normal de Gauss  $\bar{N}$  e a matriz de

Weingarten  $\bar{W}$  de  $\bar{S}$  são dadas por

$$\bar{N} = N \quad \text{e} \quad \bar{W} = \frac{1}{\lambda}W. \quad (3-13)$$

Dessa forma,

$$\bar{\Psi} = \lambda\Psi, \quad \bar{\Lambda} = \lambda^2\Lambda, \quad H = \lambda\bar{H} \quad \text{e} \quad K = \lambda^2\bar{K}. \quad (3-14)$$

Consequentemente,

$$\begin{aligned} a_1 + a_2\Psi + a_3\Lambda + (b_1 + b_2\Psi + b_3\Lambda)H + (c_1 + c_2\Psi + c_3\Lambda)K &= 0 \Leftrightarrow \\ a_1 + a_2\frac{\bar{\Psi}}{\lambda} + a_3\frac{\bar{\Lambda}}{\lambda^2} + \left(b_1 + b_2\frac{\bar{\Psi}}{\lambda} + b_3\frac{\bar{\Lambda}}{\lambda^2}\right)\lambda\bar{H} + \left(c_1 + c_2\frac{\bar{\Psi}}{\lambda} + c_3\frac{\bar{\Lambda}}{\lambda^2}\right)\lambda^2\bar{K} &= 0 \Leftrightarrow \\ a_1 + \frac{a_2}{\lambda}\bar{\Psi} + \frac{a_3}{\lambda^2}\bar{\Lambda} + \left(b_1\lambda + b_2\bar{\Psi} + \frac{b_3}{\lambda}\bar{\Lambda}\right)\bar{H} + (c_1\lambda^2 + c_2\lambda\bar{\Psi} + c_3\bar{\Lambda})\bar{K} &= 0. \end{aligned}$$

□

O próximo resultado estabelece condições para que a inversão  $\tilde{S}$  e a dilatação  $\bar{S}$  de uma superfície WGSDL ainda satisfaçam (3-4).

**Corolário 3.3** *Seja  $S$  uma superfície WGSDL orientável satisfazendo (3-4). Então, a inversão  $\tilde{S} = I^3(S \setminus \{0\})$  é uma superfície WGSDL satisfazendo (3-4) para as mesmas constantes  $a_i, b_i, c_i, 1 \leq i \leq 3$ , se, e somente se,*

$$a_1 \in \mathbb{R}, \quad a_2 = 2b_1 = 2b_3, \quad b_2 = 2c_3 \quad \text{e} \quad a_3 = c_1 = c_2 = 0. \quad (3-15)$$

Por outro lado, a dilatação  $\bar{S} = D^3(S)$  satisfaz (3-4) para as mesmas constantes se, e somente se,

$$a_1, b_2, c_3 \in \mathbb{R} \quad \text{e} \quad a_2 = a_3 = b_1 = b_3 = c_1 = c_2 = 0. \quad (3-16)$$

*Prova.* Segue do Teorema anterior que  $S$  satisfaz (3-4) se, e somente se,  $\tilde{S}$  satisfaz (3-5). Dessa forma, os coeficientes da expressão (3-5) são iguais aos coeficientes da expressão (3-4) se, e somente se,  $a_1 \in \mathbb{R}, a_2 = 2b_1 = 2b_3, b_2 = 2c_3$  e  $a_3 = c_1 = c_2 = 0$ .

Por outro lado, o Teorema anterior garante que  $S$  satisfaz (3-4) se, e somente se,  $\bar{S}$  satisfaz (3-6). Dessa forma, os coeficientes da expressão (3-6) são iguais aos coeficientes da expressão (3-4) se, e somente se,  $a_1, b_2, c_3 \in \mathbb{R}$  e  $a_2 = a_3 = b_1 = b_3 = c_1 = c_2 = 0$ .

□

A seguinte definição será útil em nosso próximo Corolário.

**Definição 3.4** Dizemos que uma superfície WGSDL  $S$ , satisfazendo (3-4), é invariante por inversões e dilatações, se  $\tilde{S} = I^3(S \setminus \{0\})$  e  $\bar{S} = D^3(S)$  são ainda superfícies WGSDL satisfazendo (3-4) para as mesmas constantes  $a_i, b_i, c_i, 1 \leq i \leq 3$ .

Podemos agora estabelecer condições para que uma superfície WGSDL seja invariante por inversões e dilatações.

**Corolário 3.5** Uma superfície WGSDL  $S$  é invariante por inversões e dilatações se, e somente se, sua curvatura média  $H$  e sua curvatura Gaussiana  $K$  satisfazem

$$2\Psi H + \Lambda K = c \quad (3-17)$$

para uma constante  $c \in \mathbb{R}$ .

*Prova.* Para que  $S$  seja invariante por inversões e dilatações é necessário e suficiente que os coeficientes  $a_i, b_i, c_i, 1 \leq i \leq 3$ , satisfaçam as relações (3-15) e (3-16). Dessa forma, segue que

$$a_1, c_3 \in \mathbb{R}, \quad b_2 = 2c_3 \quad \text{e} \quad a_2 = a_3 = b_1 = b_3 = c_1 = c_2 = 0, \quad (3-18)$$

e então  $S$  é invariante por inversões e dilatações se, e somente se, satisfaz  $a_1 + 2c_3\Psi H + c_3\Lambda K = 0$ . Note que se  $c_3 = 0$  teremos  $a_1 = 0$ . Fazendo  $c = \frac{-a_1}{c_3}$  teremos que  $S$  é invariante por inversões e dilatações se, e somente se,  $2\Psi H + \Lambda K = c$ .  $\square$

Existem exemplos simples de superfícies WGSDL invariantes por inversões e dilatações, conforme exemplos a seguir.

**Exemplo 3.6** Considere a família a 1-parâmetro de superfícies parametrizadas

$$X_R(u_1, u_2) = (R \cos u_1 \sin u_2, R \sin u_1 \sin u_2, R(1 + \cos u_2)), \quad 0 \leq u_1 \leq 2\pi, 0 \leq u_2 \leq \pi \quad (3-19)$$

onde  $R$  é uma constante positiva. Observe que a imagem de  $X_R$  está contida na esfera  $S_R = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3; x_1^2 + x_2^2 + (x_3 - R)^2 = R^2\}$ . Dessa forma, a curvatura média  $H$  e a curvatura Gaussiana  $K$  de  $X_R$  são dadas por

$$H = \frac{1}{R} \quad \text{e} \quad K = \frac{1}{R^2}. \quad (3-20)$$

Além disso, as funções suporte e distância quadrática são dadas por

$$\begin{aligned} \Psi(u_1, u_2) &= -R(1 + \cos u_2) \\ \Lambda(u_1, u_2) &= 2R^2(1 + \cos u_2), \quad 0 \leq u_1 \leq 2\pi, 0 \leq u_2 \leq \pi. \end{aligned}$$

Consequentemente,

$$2\Psi H + \Lambda K = -2R(1 + \cos u_2)\frac{1}{R} + 2R^2(1 + \cos v)\frac{1}{R^2} = 0. \quad (3-21)$$

**Exemplo 3.7** Considere a família a 1-parâmetro de superfícies parametrizadas

$$X_\alpha(u_1, u_2) = (\alpha u_1 \cos u_2, \alpha u_1 \sin u_2, u_1), \quad u_1 \in \mathbb{R}, 0 \leq u_2 \leq 2\pi \quad (3-22)$$

onde  $\alpha$  é uma constante positiva. Note que a imagem de  $X_\alpha$  está contida no cone quadrático  $S_\alpha = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3; x_1^2 + x_2^2 = \alpha^2 x_3^2\}$ . Dessa forma, a curvatura Gaussiana  $K \equiv 0$  e  $\Psi \equiv 0$ . Portanto,  $2\Psi H + \Lambda K = 0$ , para todo  $u_1 \in \mathbb{R}$  e  $0 \leq u_2 \leq 2\pi$ .

## 3.2 Superfícies WGSDE

Nesta seção estudaremos as superfícies WGSDE invariantes por inversões e dilatações, satisfazendo (3-17), no caso em que  $c = 0$ .

**Definição 3.8** Dizemos que uma superfície orientável  $S$  é uma superfície Weingarten generalizada do tipo suporte distância especial (ou, por abreviação, uma superfície WGSDE) se a curvatura média  $H$ , a curvatura Gaussiana  $K$ , a função suporte  $\Psi$  e a função distância quadrática  $\Lambda$  satisfazem

$$2\Psi H + \Lambda K = 0. \quad (3-23)$$

para todo  $p \in S$ .

Os exemplos (3.6) e (3.7) são exemplos de superfícies WGSDE. Além disso, o cone quadrático apresentado no exemplo (3.7) é um caso de superfície WGSDE com curvatura Gaussiana  $K$  identicamente nula. De maneira geral, se  $S$  é uma superfície WGSDE conexa com  $K \equiv 0$ , então  $H\Psi \equiv 0$ . Se a curvatura média  $H \equiv 0$ ,  $S$  é parte de um plano. Se  $\Psi \equiv 0$ , mostraremos a seguir que  $S$  é parte de um cone generalizado. Antes precisaremos do seguinte Lema para funções homogêneas.

**Lema 3.9** Se  $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  é uma função diferenciável satisfazendo

$$\sum_{i=1}^n x_i g_{,i} = k g \quad (3-24)$$

para algum inteiro positivo  $k$ , então  $g$  é positiva homogênea de grau  $k$ .

*Prova.* Fixado  $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ , defina  $f : \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}$  por

$$f(\lambda) = g(\lambda x) - \lambda^k g(x), \quad \lambda > 0. \quad (3-25)$$

Observe que  $f(1) = 0$  e, além disso,

$$\begin{aligned} f'(\lambda) &= \sum_{i=1}^n g_{,i}(\lambda x)x_i - k\lambda^{k-1}g(x) \\ &= \lambda^{-1} \left( \sum_{i=1}^n g_{,i}(\lambda x)\lambda x_i \right) - k\lambda^{k-1}g(x) \\ &= \lambda^{-1}kg(\lambda x) - k\lambda^{k-1}g(x). \end{aligned} \quad (3-26)$$

Consequentemente,

$$\lambda f'(\lambda) = k \left( g(\lambda x) - \lambda^k g(x) \right) = kf(\lambda). \quad (3-27)$$

A única solução de  $\lambda f'(\lambda) - kf(\lambda) = 0$ ,  $f(1) = 0$ , é  $f \equiv 0$ . Como  $x \in \mathbb{R}^n$  foi tomado arbitrário, segue que  $g(\lambda x) = \lambda^k g(x)$  para todo  $x \in \mathbb{R}^n$  e  $\lambda > 0$ .  $\square$

Podemos agora demonstrar o seguinte resultado, válido para qualquer superfície conexa com função suporte identicamente nula.

**Proposição 3.10** *Uma superfície conexa  $S$  é um cone generalizado com vértice na origem se, e somente se, a função suporte  $\Psi \equiv 0$ . Em particular, uma superfície WGSDE conexa com  $\Psi \equiv 0$  é parte de um cone generalizado com vértice na origem.*

*Prova.* Suponha que  $S$  seja um cone generalizado com vértice na origem. Dessa forma,  $S$  pode ser localmente parametrizada por

$$X(u_1, u_2) = u_1\alpha(u_2), \quad u_1 \in \mathbb{R}, u_2 \in I \quad (3-28)$$

onde  $\alpha(u_2) = (x_1(u_2), x_2(u_2), x_3(u_2))$ ,  $u_2 \in I \subset \mathbb{R}$ , é uma parametrização local da diretriz  $C$  de  $S$ . Se  $N$  é a normal de Gauss de  $S$  então  $0 = \langle X_{,1}, N \rangle = \langle \alpha, N \rangle$ . Consequentemente,  $\Psi = \langle X, N \rangle \equiv 0$ .

Reciprocamente, seja  $X(u_1, u_2) = (u_1, u_2, f(u_1, u_2))$ ,  $(u_1, u_2) \in U \subset \mathbb{R}^2$ , uma parametrização local de  $S$  onde  $f : U \rightarrow \mathbb{R}$  é uma função diferenciável. Segue que  $\Psi \equiv 0$  se, e somente se,

$$u_1 f_{,1} + u_2 f_{,2} = f. \quad (3-29)$$

Utilizando o Lema 3.9, concluímos que  $f$  é positiva homogênea de grau 1. Seja  $a \in \mathbb{R}$  um valor regular de  $f$  e considere a curva regular  $C = f^{-1}(a) \subset U$  parametrizada por  $\gamma(t) = (u_1(t), u_2(t))$ ,  $t \in I \subset \mathbb{R}$ . Note que

$$\bar{X}(\lambda, t) = (\lambda u_1(t), \lambda u_2(t), \lambda a), \quad \lambda \in \mathbb{R}, t \in I \quad (3-30)$$

é uma reparametrização de  $X$ . De fato,

$$f(\lambda\gamma(t)) = \lambda f(u_1(t), u_2(t)) = \lambda a, \quad \lambda \in \mathbb{R}, t \in I. \quad (3-31)$$

Portanto,  $S$  é parte de um cone generalizado com vértice na origem.  $\square$

No caso em que  $\Psi H \equiv 0$  mas ambas funções não são identicamente nulas, a superfície WGSDE com  $K \equiv 0$  pode não ser analítica.

Para superfícies WGSDE com curvatura Gaussiana  $K \neq 0$  apresentaremos uma completa caracterização por meio de pares de funções holomorfas. Essa representação tipo Weierstrass permitirá classificar todas superfícies WGSDE de rotação. Antes disso, precisaremos do seguinte Lema.

**Lema 3.11** *Considere as funções holomorfas  $g : M \rightarrow \mathbb{C}_\infty$  e  $f : M \rightarrow \mathbb{C}$ , com  $g' \neq 0$ , onde  $M$  é uma superfície de Riemann simplesmente conexa. Tomando parâmetros locais  $z = u_1 + iu_2 \in M$  e fazendo  $h = e^{\langle 1, f \rangle}$ , a matriz*

$$V_{ij} = \frac{1}{|g'|^2} \left( h_{,ij} - \sum_{l=1}^2 \Gamma_{ij}^l h_{,l} \right), \quad 1 \leq i, j \leq 2 \quad (3-32)$$

$$\Gamma_{ii}^i = \frac{|g'|_{,i}}{|g'|} \quad e \quad \Gamma_{ij}^i = \frac{|g'|_{,j}}{|g'|} = -\Gamma_{ii}^j, \quad i \neq j. \quad (3-33)$$

é tal que

$$V_{11} = \frac{h}{|g'|^2} \left( \frac{|f'|^2}{2} - \langle 1, \Omega \rangle \right) \quad (3-34)$$

$$V_{12} = V_{21} = \frac{h}{|g'|^2} \langle i, \Omega \rangle \quad (3-35)$$

$$V_{22} = \frac{h}{|g'|^2} \left( \frac{|f'|^2}{2} + \langle 1, \Omega \rangle \right) \quad (3-36)$$

onde  $\Omega = f' \frac{g''}{g'} - \frac{(f')^2}{2} - f''$ . Temos ainda que

$$\text{tra}.V = \frac{h}{|g'|^2} |f'|^2 \quad (3-37)$$

$$\text{det}.V = \frac{h^2}{|g'|^4} \left( \frac{|f'|^4}{4} - |\Omega|^2 \right). \quad (3-38)$$

*Prova.* Como  $h = e^{\langle 1, f \rangle}$ , segue que  $h_{,1} = e^{\langle 1, f \rangle} \langle 1, f' \rangle$  e  $h_{,2} = e^{\langle 1, f \rangle} \langle 1, if' \rangle$ . Dessa forma,

$$h_{,11} = e^{\langle 1, f \rangle} (\langle 1, f' \rangle^2 + \langle 1, f'' \rangle) \quad (3-39)$$

$$h_{,22} = e^{\langle 1, f \rangle} (\langle 1, if' \rangle^2 - \langle 1, f'' \rangle) \quad (3-40)$$

$$h_{,12} = e^{\langle 1, f \rangle} (\langle 1, if' \rangle \langle 1, f' \rangle + \langle 1, if'' \rangle). \quad (3-41)$$

Utilizando os símbolos de Christoffel dados por (3-33), é possível mostrar que

$$\begin{aligned} \sum_{l=1}^2 \Gamma_{11}^l h_{,l} &= e^{\langle 1, f \rangle} \langle 1, f' \rangle \frac{|g'|_1}{|g'|} - e^{\langle 1, f \rangle} \langle 1, if' \rangle \frac{|g'|_2}{|g'|} \\ &= e^{\langle 1, f \rangle} \left\langle \langle 1, f' \rangle + i \langle i, f' \rangle, \frac{|g'|_1}{|g'|} + i \frac{|g'|_2}{|g'|} \right\rangle \\ &= e^{\langle 1, f \rangle} \left\langle f', \frac{\langle g'', g \rangle}{|g'|^2} + i \frac{\langle ig'', g \rangle}{|g'|^2} \right\rangle \\ &= e^{\langle 1, f \rangle} \left\langle f', \frac{\overline{g'' g'}}{g' g'} \right\rangle \\ &= e^{\langle 1, f \rangle} \left\langle f', \overline{\left( \frac{g''}{g'} \right)} \right\rangle \\ &= e^{\langle 1, f \rangle} \left\langle 1, f' \frac{g''}{g'} \right\rangle \\ &= e^{\langle 1, f \rangle} \left\langle 1, \Omega + \frac{(f')^2}{2} + f'' \right\rangle, \end{aligned} \quad (3-42)$$

$$\begin{aligned} \sum_{l=1}^2 \Gamma_{22}^l h_{,l} &= -e^{\langle 1, f \rangle} \langle 1, f' \rangle \frac{|g'|_1}{|g'|} + e^{\langle 1, f \rangle} \langle 1, if' \rangle \frac{|g'|_2}{|g'|} \\ &= -e^{\langle 1, f \rangle} \left\langle \langle 1, f' \rangle + i \langle i, f' \rangle, \frac{|g'|_1}{|g'|} + i \frac{|g'|_2}{|g'|} \right\rangle \\ &= -e^{\langle 1, f \rangle} \left\langle 1, \Omega + \frac{(f')^2}{2} + f'' \right\rangle, \end{aligned} \quad (3-43)$$

$$\begin{aligned} \sum_{l=1}^2 \Gamma_{12}^l h_{,l} &= e^{\langle 1, f \rangle} \langle 1, f' \rangle \frac{|g'|_2}{|g'|} + e^{\langle 1, f \rangle} \langle 1, if' \rangle \frac{|g'|_1}{|g'|} \\ &= e^{\langle 1, f \rangle} \left\langle -\langle i, f' \rangle + i \langle 1, f' \rangle, \frac{|g'|_1}{|g'|} + i \frac{|g'|_2}{|g'|} \right\rangle \\ &= e^{\langle 1, f \rangle} \left\langle if', \overline{\left( \frac{g''}{g'} \right)} \right\rangle \\ &= -e^{\langle 1, f \rangle} \left\langle i, \Omega + \frac{(f')^2}{2} + f'' \right\rangle. \end{aligned} \quad (3-44)$$

Voltando em (3-32), teremos

$$V_{11} = \frac{1}{|g'|^2} \left( h_{,11} - \sum_{l=1}^2 \Gamma_{11}^l h_{,l} \right)$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{|g'|^2} \left( e^{\langle 1, f \rangle} (\langle 1, f' \rangle^2 + \langle 1, f'' \rangle) - e^{\langle 1, f \rangle} \left\langle 1, \Omega + \frac{(f')^2}{2} + f'' \right\rangle \right) \\
&= \frac{e^{\langle 1, f \rangle}}{|g'|^2} \left( \langle 1, f' \rangle^2 - \langle 1, \Omega \rangle - \frac{1}{2} \langle 1, (f')^2 \rangle \right) \\
&= \frac{e^{\langle 1, f \rangle}}{|g'|^2} \left( \langle 1, f' \rangle^2 - \langle 1, \Omega \rangle - \frac{1}{2} (\langle 1, f' \rangle^2 - \langle i, f' \rangle^2) \right) \\
&= \frac{e^{\langle 1, f \rangle}}{|g'|^2} \left( \frac{|f'|^2}{2} - \langle 1, \Omega \rangle \right), \tag{3-45}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
V_{22} &= \frac{1}{|g'|^2} \left( h_{,22} - \sum_{l=1}^2 \Gamma_{22}^l h_{,l} \right) \\
&= \frac{1}{|g'|^2} \left( e^{\langle 1, f \rangle} (\langle 1, i f' \rangle^2 - \langle 1, f'' \rangle) + e^{\langle 1, f \rangle} \left\langle 1, \Omega + \frac{(f')^2}{2} + f'' \right\rangle \right) \\
&= \frac{e^{\langle 1, f \rangle}}{|g'|^2} \left( \langle i, f' \rangle^2 + \langle 1, \Omega \rangle + \frac{1}{2} \langle 1, (f')^2 \rangle \right) \\
&= \frac{e^{\langle 1, f \rangle}}{|g'|^2} \left( \langle i, f' \rangle^2 + \langle 1, \Omega \rangle + \frac{1}{2} (\langle 1, f' \rangle^2 - \langle i, f' \rangle^2) \right) \\
&= \frac{e^{\langle 1, f \rangle}}{|g'|^2} \left( \frac{|f'|^2}{2} + \langle 1, \Omega \rangle \right), \tag{3-46}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
V_{12} &= V_{21} = \frac{1}{|g'|^2} \left( h_{,12} - \sum_{l=1}^2 \Gamma_{12}^l h_{,l} \right) \\
&= \frac{1}{|g'|^2} \left( e^{\langle 1, f \rangle} (\langle 1, i f' \rangle \langle 1, f' \rangle + \langle 1, i f'' \rangle) + e^{\langle 1, f \rangle} \left\langle i, \Omega + \frac{(f')^2}{2} + f'' \right\rangle \right) \\
&= \frac{e^{\langle 1, f \rangle}}{|g'|^2} \left( -\langle i, f' \rangle \langle 1, f' \rangle + \langle i, \Omega \rangle + \frac{1}{2} \langle i, (f')^2 \rangle \right) \\
&= \frac{e^{\langle 1, f \rangle}}{|g'|^2} \left( -\langle i, f' \rangle \langle 1, f' \rangle + \langle i, \Omega \rangle + \frac{1}{2} (2 \langle 1, f' \rangle \langle i, f' \rangle) \right) \\
&= \frac{e^{\langle 1, f \rangle}}{|g'|^2} \langle i, \Omega \rangle. \tag{3-47}
\end{aligned}$$

Para finalizar, observe que as expressões acima garantem que

$$\begin{aligned}
tra.V &= V_{11} + V_{22} \\
&= \frac{e^{\langle 1, f \rangle}}{|g'|^2} \left( \frac{|f'|^2}{2} - \langle 1, \Omega \rangle \right) + \frac{e^{\langle 1, f \rangle}}{|g'|^2} \left( \frac{|f'|^2}{2} + \langle 1, \Omega \rangle \right) \\
&= \frac{e^{\langle 1, f \rangle}}{|g'|^2} |f'|^2 \tag{3-48}
\end{aligned}$$

$$det.V = V_{11}V_{22} - V_{12}^2$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{e^{\langle 1, f \rangle}}{|g'|^2} \left( \frac{|f'|^2}{2} - \langle 1, \Omega \rangle \right) \frac{e^{\langle 1, f \rangle}}{|g'|^2} \left( \frac{|f'|^2}{2} + \langle 1, \Omega \rangle \right) - \left[ \frac{e^{\langle 1, f \rangle}}{|g'|^2} \langle i, \Omega \rangle \right]^2 \\
&= \frac{e^{2\langle 1, f \rangle}}{|g'|^4} \left( \frac{|f'|^4}{4} - \langle 1, \Omega \rangle^2 - \langle i, \Omega \rangle^2 \right) \\
&= \frac{e^{2\langle 1, f \rangle}}{|g'|^4} \left( \frac{|f'|^4}{4} - |\Omega|^2 \right). \tag{3-49}
\end{aligned}$$

□

Dada uma superfície de Riemann  $M$  e uma imersão  $X : M \rightarrow \mathbb{R}^3$ , identificaremos a normal de Gauss  $N$  da imersão com sua projeção estereográfica, denotada por  $g$ .

**Teorema 3.12** *Seja  $M$  uma superfície de Riemann simplesmente conexa e  $X : M \rightarrow \mathbb{R}^3$  uma imersão com curvatura Gaussiana  $K \neq 0$ . Então  $X(M)$  é uma superfície WGSDE se, e somente se, existem funções holomorfas  $g : M \rightarrow \mathbb{C}_\infty$  e  $f : M \rightarrow \mathbb{C}$ , com  $g' \neq 0$ , tais que, a menos de uma dilatação,  $X(M)$  é localmente parametrizada por*

$$X = \frac{h}{2|g'|^2} (2\bar{f}'g' + (2\omega - |f'|^2)g, 2\omega - |f'|^2) \tag{3-50}$$

onde  $h = e^{\langle 1, f \rangle}$ ,  $T = 1 + |g|^2$ ,

$$\omega = \frac{1}{2T} (|f'|^2 + |f'g - 2g'|^2) \quad e \quad \Omega = f' \frac{g''}{g'} - \frac{(f')^2}{2} - f''. \tag{3-51}$$

Nestas coordenadas, a normal de Gauss  $N$  da imersão é dada por

$$N = \frac{1}{1 + |g|^2} (2g, 1 - |g|^2). \tag{3-52}$$

A condição de regularidade  $P$ , a curvatura média  $H$  e a curvatura Gaussiana  $K$  são dados, respectivamente, por

$$P = \left( \frac{Th}{|g'|^2} \right)^2 (\omega^2 - |\Omega|^2) \neq 0 \tag{3-53}$$

$$H = \frac{-2|g'|^2\omega}{Th(\omega^2 - |\Omega|^2)} \tag{3-54}$$

$$K = \frac{4|g'|^4}{T^2h^2(\omega^2 - |\Omega|^2)}. \tag{3-55}$$

Os coeficientes da primeira e segunda formas fundamentais de  $X$  são dados por

$$E = \langle X_{,1}, X_{,1} \rangle = \frac{h^2}{|g'|^2} |\Omega - \omega|^2 \tag{3-56}$$

$$F = \langle X_{,1}, X_{,2} \rangle = \frac{2h^2}{|g'|^2} \langle i, \Omega \rangle \omega \quad (3-57)$$

$$G = \langle X_{,2}, X_{,2} \rangle = \frac{h^2}{|g'|^2} |\Omega + \omega|^2 \quad (3-58)$$

$$\mathcal{L} = -\langle X_{,1}, N_{,1} \rangle = \frac{-2h}{T} (\omega - \langle 1, \Omega \rangle) \quad (3-59)$$

$$\mathcal{M} = -\langle X_{,1}, N_{,2} \rangle = \frac{-2h}{T} \langle i, \Omega \rangle \quad (3-60)$$

$$\mathcal{N} = -\langle X_{,2}, N_{,2} \rangle = \frac{-2h}{T} (\omega + \langle 1, \Omega \rangle) \quad (3-61)$$

*Prova.* Seja  $N : M \rightarrow \mathbb{C}_\infty$  a normal de Gauss da imersão  $X$ . Como  $K \neq 0$ , a menos nos pontos onde  $N = -e_3$ , podemos escrever localmente  $N = P_-^{-1} \circ Y$ , isto é,

$$N = \frac{1}{1 + |Y|^2} (2Y, 1 - |Y|^2) \quad (3-62)$$

onde  $P_-$  é a projeção estereográfica partindo de  $-e_3$  e  $Y$  é uma parametrização local ortogonal de  $\Pi = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3; x_3 = 0\}$ . A terceira forma fundamental  $III$  da imersão  $X$  é positiva definida. Dessa forma, podemos tomar parâmetros isotérmicos para a normal de Gauss  $N$  e considerar  $Y = (g, 0)$ , dada por uma função holomorfa  $g : M \rightarrow \mathbb{C}_\infty$ , com  $g' \neq 0$ . Consequentemente,  $L_{ii} = \langle Y_{,i}, Y_{,i} \rangle = |g'|^2$ ,  $1 \leq i \leq 2$ , e os símbolos de Christoffel da métrica são dados por (3-33). Além disso, segue de (3-62) a expressão (3-52).

O Teorema 2.6 garante a existência de uma função diferenciável  $h : U \rightarrow \mathbb{R}$  tal que  $X(M)$  pode ser localmente parametrizada por

$$X(u) = \left( Q(u) - \frac{2R(u)}{T(u)} Y(u), -\frac{2R(u)}{T(u)} \right), \quad u \in U \quad (3-63)$$

onde  $T = 1 + |Y|^2$ ,

$$Q = \sum_{j=1}^2 \frac{h_{,j}}{L_{jj}} Y_{,j} \quad \text{e} \quad R = \langle Q, Y \rangle - h. \quad (3-64)$$

Com isso as funções suporte  $\Psi$  e distância  $\Lambda$  são dadas por

$$\begin{aligned} \Psi &= \langle X, N \rangle \\ &= \left\langle \left( Q - \frac{2R}{T} Y, -\frac{2R}{T} \right), \frac{1}{T} (2Y, 2 - T) \right\rangle \\ &= \left\langle Q - \frac{2R}{T} Y, \frac{2Y}{T} \right\rangle - \frac{2R}{T^2} (2 - T) \\ &= \frac{2}{T} \langle Q, Y \rangle - \frac{4R}{T^2} |Y|^2 - \frac{2R}{T^2} (2 - T) \\ &= \frac{2}{T} (R + h) - \frac{4R}{T^2} (T - 1) - \frac{4R}{T^2} + \frac{2R}{T} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{2h}{T}; \tag{3-65} \\
\Lambda &= \langle X, X \rangle \\
&= \left\langle \left( Q - \frac{2R}{T}Y, -\frac{2R}{T} \right), \left( Q - \frac{2R}{T}Y, -\frac{2R}{T} \right) \right\rangle \\
&= \left\langle Q - \frac{2R}{T}Y, Q - \frac{2R}{T}Y \right\rangle + \frac{4R^2}{T^2} \\
&= \langle Q, Q \rangle - \frac{4R}{T} \langle Q, Y \rangle + \frac{4R^2}{T^2} |Y|^2 + \frac{4R^2}{T^2} \\
&= \langle Q, Q \rangle - \frac{4R}{T} (R+h) + \frac{4R^2}{T^2} (T-1) + \frac{4R^2}{T^2} \\
&= \langle Q, Q \rangle - \frac{4Rh}{T} \\
&= \left\langle \sum_{j=1}^2 \frac{h_{,j}}{|g'|^2} Y_{,j}, \sum_{i=1}^2 \frac{h_{,i}}{|g'|^2} Y_{,i} \right\rangle - \frac{4Rh}{T} \\
&= \sum_{i,j=1}^2 \frac{h_{,j} h_{,i}}{|g'|^4} L_{,ij} - \frac{4Rh}{T} \\
&= \sum_{j=1}^2 \frac{h_{,j}^2}{|g'|^4} |g'|^2 - \frac{4Rh}{T} \\
&= \frac{|\nabla h|^2}{|g'|^2} - \frac{4Rh}{T}. \tag{3-66}
\end{aligned}$$

Segundo o Corolário 2.7 a curvatura média  $H$  e a curvatura Gaussiana  $K$  de  $X(M)$  são dadas, respectivamente, por

$$H = -\frac{1}{P} (\text{Ttra.}(V) - 4R) \quad \text{e} \quad K = \frac{4}{P} \tag{3-67}$$

onde  $V_{ij} = \frac{1}{|g'|^2} \left( h_{,ij} - \sum_{l=1}^2 \Gamma_{ij}^l h_{,l} \right)$ ,  $1 \leq i, j \leq 2$ . Utilizando os símbolos de Christoffel dados por (3-33), obtemos

$$\begin{aligned}
\text{tra.}(V) &= V_{11} + V_{22} \\
&= \frac{1}{|g'|^2} [(h_{,11} - \Gamma_{11}^1 h_{,1} - \Gamma_{11}^2 h_{,2}) + (h_{,22} - \Gamma_{22}^1 h_{,1} - \Gamma_{22}^2 h_{,2})] \\
&= \frac{1}{|g'|^2} \left[ \left( h_{,11} - \frac{|g'|_{,1}}{|g'|} h_{,1} + \frac{|g'|_{,2}}{|g'|} h_{,2} \right) + \left( h_{,22} + \frac{|g'|_{,1}}{|g'|} h_{,1} - \frac{|g'|_{,2}}{|g'|} h_{,2} \right) \right] \\
&= \frac{\Delta h}{|g'|^2} \tag{3-68}
\end{aligned}$$

e conseqüentemente

$$H = -\frac{1}{P} \left( T \frac{\Delta h}{|g'|^2} - 4R \right). \tag{3-69}$$

Utilizando as expressões (3-65), (3-66), (3-67) e (3-69) é possível mostrar que

$$\begin{aligned}
2\Psi H + \Lambda K &= -\frac{4h}{PT} \left( T \frac{\Delta h}{|g'|^2} - 4R \right) + \frac{4}{P} \left( \frac{|\nabla h|^2}{|g'|^2} - \frac{4Rh}{T} \right) \\
&= \frac{4}{P} \left[ \frac{h}{T} \left( 4R - T \frac{\Delta h}{|g'|^2} \right) + \frac{|\nabla h|^2}{|g'|^2} - \frac{4Rh}{T} \right] \\
&= \frac{4}{P} \left( \frac{|\nabla h|^2}{|g'|^2} - h \frac{\Delta h}{|g'|^2} \right). \tag{3-70}
\end{aligned}$$

Como  $g' \neq 0$ , segue que  $X(M)$  é uma superfície WGSDE se, e somente se,

$$|\nabla h|^2 - h\Delta h = 0. \tag{3-71}$$

Seja  $h$  uma solução de (3-71). Se existe  $p \in M$  tal que  $h(p) = 0$ , segue de (3-71) que  $\nabla h(p) = 0$ . Voltando em (3-66) concluímos que  $\Lambda(p) = 0$ , isto é,  $X(p) = 0$ . A menos possivelmente da origem, e pela continuidade de  $h$ , podemos supor que  $h > 0$  ou  $h < 0$ . Além disso, note que se  $h$  é solução da equação (3-71) então  $-h$  também é solução. Segue de (3-63) que a superfície WGSDE relacionada a  $-h$  é a antípoda da superfície WGSDE relacionada a  $h$ . Sem perda de generalidade podemos assumir que  $h = e^\phi$  onde  $\phi : M \rightarrow \mathbb{R}$  é uma função diferenciável. Neste caso,

$$h_{,1} = e^\phi \phi_{,1} \quad \text{e} \quad h_{,2} = e^\phi \phi_{,2} \tag{3-72}$$

$$h_{,11} = e^\phi (\phi_{,1}^2 + \phi_{,11}) \quad \text{e} \quad h_{,22} = e^\phi (\phi_{,2}^2 + \phi_{,22}) \tag{3-73}$$

e a equação (3-71) torna-se  $\Delta \phi = 0$ . Pelo Teorema 1.16, seja  $f : M \rightarrow \mathbb{C}$  uma função holomorfa tal que  $\phi = \langle 1, f \rangle$ . Portanto,  $h = e^{\langle 1, f \rangle}$ .

Agora, voltando em (3-64) podemos escrever

$$Q = \frac{1}{|g'|^2} (h_{,1}g' + h_{,2}ig') = \frac{g'}{|g'|^2} (h\langle 1, f' \rangle + ih\langle 1, if' \rangle) = \frac{h}{|g'|^2} \bar{f}'g' \tag{3-74}$$

$$R = \left\langle \frac{h}{|g'|^2} \bar{f}'g', g \right\rangle - h = \frac{h}{|g'|^2} (\langle g', f'g \rangle - |g'|^2) = \frac{Th}{4|g'|^2} (|f'|^2 - 2\omega) \tag{3-75}$$

onde  $\omega$  é dado por (3-51). Substituindo estas expressões em (3-63) concluiremos que

$$X = \frac{h}{2|g'|^2} (2\bar{f}'g' + (2\omega - |f'|^2)g, 2\omega - |f'|^2). \tag{3-76}$$

Como temos  $h = e^{\langle 1, f \rangle}$ , o Lema 3.11 garante que  $\text{trav.}(V)$  e  $\text{det.}(V)$  são dados, respectivamente, por (3-37) e (3-38). Assim, a condição de regularidade  $P$ , descrita pelo

Corolário 2.7, torna-se

$$\begin{aligned}
P &= 4R^2 - 2RT \operatorname{tra.}(V) + T^2 \operatorname{det.}(V) \\
&= \frac{T^2 h^2}{4|g'|^4} (|f'|^2 - 2\omega)^2 - \frac{2T^2 h^2}{4|g'|^4} (|f'|^2 - 2\omega) |f'|^2 + \frac{T^2 h^2}{4|g'|^4} (|f'|^4 - 4|\Omega|^2) \\
&= \frac{T^2 h^2}{4|g'|^4} \left[ (|f'|^2 - 2\omega)^2 - 2|f'|^2 (|f'|^2 - 2\omega) + (|f'|^4 - 4|\Omega|^2) \right] \\
&= \left( \frac{Th}{|g'|^2} \right)^2 (\omega^2 - |\Omega|^2). \tag{3-77}
\end{aligned}$$

Além disso, voltando em (3-67) obtemos

$$\begin{aligned}
H &= -\frac{1}{P} (T \operatorname{tra.}(V) - 4R) \\
&= \frac{|g'|^4}{T^2 h^2 (\omega^2 - |\Omega|^2)} \left[ \frac{Th}{|g'|^2} (|f'|^2 - 2\omega) - \frac{Th}{|g'|^2} |f'|^2 \right] \\
&= \frac{-2|g'|^2 \omega}{Th(\omega^2 - |\Omega|^2)}; \tag{3-78}
\end{aligned}$$

$$K = \frac{4}{P} = \frac{4|g'|^4}{T^2 h^2 (\omega^2 - |\Omega|^2)}. \tag{3-79}$$

Para obtermos os coeficientes da primeira *I* e segunda *II* formas fundamentais utilizaremos as expressões (2-12) e (2-13), descritas pelo Teorema 2.6, juntamente com o Lema 3.11. Dessa forma,

$$\begin{aligned}
E &= V_{11}^2 L_{11} + V_{12}^2 L_{22} - \frac{4R}{T} V_{11} L_{11} + \frac{4R^2}{T^2} L_{11} \\
&= |g'|^2 \left( V_{11}^2 + V_{12}^2 - \frac{4R}{T} V_{11} + \frac{4R^2}{T^2} \right) \\
&= \frac{h^2}{4|g'|^2} \left[ (|f'|^2 - 2\langle 1, \Omega \rangle)^2 + 4\langle i, \Omega \rangle^2 - 2(|f'|^2 - 2\omega) (|f'|^2 - 2\langle 1, \Omega \rangle) + (|f'|^2 - 2\omega)^2 \right] \\
&= \frac{h^2}{4|g'|^2} (4|\Omega|^2 - 8\omega\langle 1, \Omega \rangle + 4\omega^2) \\
&= \frac{h^2}{|g'|^2} |\Omega - \omega|^2; \tag{3-80}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
F &= V_{11} V_{21} L_{11} + V_{12} V_{22} L_{22} - \frac{2R}{T} (V_{12} L_{22} + V_{21} L_{11}) \\
&= |g'|^2 V_{12} \left( \operatorname{tra.}(V) - \frac{4R}{T} \right) \\
&= h\langle i, \Omega \rangle \left[ \frac{h}{|g'|^2} |f'|^2 - \frac{h}{|g'|^2} (|f'|^2 - 2\omega) \right] \\
&= \frac{2h^2}{|g'|^2} \langle i, \Omega \rangle \omega; \tag{3-81}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
G &= V_{22}^2 L_{22} + V_{21}^2 L_{11} - \frac{4R}{T} V_{22} L_{22} + \frac{4R^2}{T^2} L_{22} \\
&= |g'|^2 \left( V_{22}^2 + V_{21}^2 - \frac{4R}{T} V_{22} + \frac{4R^2}{T^2} \right) \\
&= \frac{h^2}{4|g'|^2} \left[ (|f'|^2 + 2\langle 1, \Omega \rangle)^2 + 4\langle i, \Omega \rangle^2 - 2(|f'|^2 - 2\omega)(|f'|^2 + 2\langle 1, \Omega \rangle) + (|f'|^2 - 2\omega)^2 \right] \\
&= \frac{h^2}{4|g'|^2} (4|\Omega|^2 + 8\omega\langle 1, \Omega \rangle + 4\omega^2) \\
&= \frac{h^2}{|g'|^2} |\Omega + \omega|^2; \tag{3-82}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{L} &= \frac{2L_{11}}{T^2} (2R - TV_{11}) \\
&= \frac{2|g'|^2}{T^2} \left[ \frac{Th}{2|g'|^2} (|f'|^2 - 2\omega) - \frac{Th}{2|g'|^2} (|f'|^2 - 2\langle 1, \Omega \rangle) \right] \\
&= \frac{-2h}{T} (\omega - \langle 1, \Omega \rangle); \tag{3-83}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{M} &= \frac{2}{T^2} (2RL_{12} - TV_{12}L_{22}) \\
&= \frac{-2|g'|^2}{T} V_{12} \\
&= -\frac{2h}{T} \langle i, \Omega \rangle; \\
\mathcal{N} &= \frac{2L_{22}}{T^2} (2R - TV_{22}) \\
&= \frac{2|g'|^2}{T^2} \left[ \frac{Th}{2|g'|^2} (|f'|^2 - 2\omega) - \frac{Th}{2|g'|^2} (|f'|^2 + 2\langle 1, \Omega \rangle) \right] \\
&= \frac{-2h}{T} (\omega + \langle 1, \Omega \rangle). \tag{3-84}
\end{aligned}$$

□

Uma consequência imediata do Teorema anterior é o seguinte resultado.

**Corolário 3.13** *Uma superfície WGSDE conexa com curvatura Gaussiana  $K \neq 0$  está parametrizada por linhas de curvatura se, e somente se,*

$$\langle i, \Omega \rangle = 0 \tag{3-85}$$

onde  $\Omega$  é dado por (3-51). Neste caso, a superfície WGSDE está associada a  $\Pi$  por uma transformação de Ribaucour.

*Prova.* Seja  $S$  uma superfície WGSDE conexa com curvatura Gaussiana  $K \neq 0$ . Sabemos que  $S$  está parametrizada por linhas curvatura se, e somente se,  $F = \mathcal{M} = 0$ . Dessa forma, segue de (3-57) e (3-60) que  $S$  está parametrizada por linhas de curvatura se, e somente se,

$\langle i, \Omega \rangle = 0$ . Neste caso, (3-35) garante que  $V_{12} = V_{21} = 0$  e pelo Corolário 2.8 concluímos que  $S$  está associada a  $\Pi$  por uma transformação de Ribaucour.

□

No caso em que  $\Omega = 0$  a superfície WGSDE conexa com  $K \neq 0$  é parte de uma esfera. Com efeito, se  $\Omega = 0$  a superfície é totalmente umbílica, pois, neste caso, (3-54) e (3-55) garantem que  $H^2 = K$ . A Proposição seguinte obtém soluções para tal equação.

**Proposição 3.14** *Considere uma função holomorfa  $g$ , com  $g' \neq 0$ , e sejam  $z_0, z_1 \in \mathbb{C}$  constantes. Então*

$$f = 2 \ln(e^{z_0} g + z_1) \quad (3-86)$$

é solução de

$$f' \frac{g''}{g'} - \frac{(f')^2}{2} - f'' = 0. \quad (3-87)$$

Em particular, a superfície WGSDE associada ao par  $(f, g)$  é parte de uma esfera.

*Prova.* Observe que

$$\begin{aligned} f' &= \frac{2e^{z_0} g'}{(e^{z_0} g + z_1)} \\ f'' &= \frac{2e^{z_0} g''}{(e^{z_0} g + z_1)} - \frac{2e^{2z_0} (g')^2}{(e^{z_0} g + z_1)^2}. \end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned} f' \frac{g''}{g'} - \frac{(f')^2}{2} - f'' &= \frac{2e^{z_0} g'}{(e^{z_0} g + z_1)} \frac{g''}{g'} - \frac{1}{2} \left( \frac{2e^{z_0} g'}{(e^{z_0} g + z_1)} \right)^2 - \frac{2e^{z_0} g''}{(e^{z_0} g + z_1)} + \frac{2e^{2z_0} (g')^2}{(e^{z_0} g + z_1)^2} \\ &= \frac{2e^{z_0} g''}{(e^{z_0} g + z_1)} - \frac{2e^{2z_0} (g')^2}{(e^{z_0} g + z_1)^2} - \frac{2e^{z_0} g''}{(e^{z_0} g + z_1)} + \frac{2e^{2z_0} (g')^2}{(e^{z_0} g + z_1)^2} \\ &= 0. \end{aligned}$$

□

Antes de classificarmos as superfícies WGSDE de rotação, estabeleceremos a relação de Weingarten satisfeita por uma superfície paralela à uma superfície WGSDE.

**Proposição 3.15** *Uma superfície  $S$ , orientada pela normal de Gauss  $N$ , é uma superfície WGSDE se, e somente se, a superfície paralela  $\widehat{S} = \{p + \lambda N(p); p \in S\}$ ,  $\lambda \in \mathbb{R}$ , é uma superfície WGSDE satisfazendo*

$$2(\widehat{\Psi} - \lambda)\widehat{H} + (\widehat{\Lambda} - \lambda^2)\widehat{K} = 0 \quad (3-88)$$

onde  $\widehat{\Psi}$ ,  $\widehat{\Lambda}$ ,  $\widehat{H}$  e  $\widehat{K}$  denotam a função suporte, a função distância quadrática, a curvatura média e a curvatura Gaussiana de  $\widehat{S}$ , respectivamente.

*Prova.* Seja  $X$  é uma parametrização local de  $S$  e  $\widehat{X} = X + \lambda N$ ,  $\lambda \in \mathbb{R}$ , uma parametrização local de  $\widehat{S}$ . Assim, a matriz de Weingarten  $\widehat{W}$  de  $\widehat{S}$  é dada por

$$\begin{aligned}\widehat{X}_{,i} &= X_{,i} + \lambda N_{,i} \\ &= X_{,i} + \lambda \sum_{j=1}^2 W_{ij} X_{,j} \\ &= \sum_{j=1}^2 (\delta_{ij} + \lambda W_{ij}) X_{,j}\end{aligned}\quad (3-89)$$

onde  $W = (W_{ij})$  é a matriz de Weingarten de  $S$ ,  $\delta_{ii} = 1$  e  $\delta_{ij} = 0$ ,  $i \neq j$ . Desde que  $D := \det.(I_2 + \lambda W) \neq 0$ , temos que

$$X_{,j} = \sum_{k=1}^2 (I_2 + \lambda W)^{ij} \widehat{X}_{,k} \quad (3-90)$$

onde  $I_2$  é a matriz identidade  $2 \times 2$  e  $(I_2 + \lambda W)^{ij}$  denota os elementos da matriz inversa  $(I_2 + \lambda W)^{-1}$ . Como a normal de Gauss  $\widehat{N}$  de  $\widehat{S}$  coincide com a normal de Gauss  $N$  de  $S$ , podemos escrever

$$\begin{aligned}\widehat{N}_{,i} &= \sum_{j=1}^2 W_{ij} X_{,j} \\ &= \sum_{j,k=1}^2 W_{ij} (I_2 + \lambda W)^{ij} \widehat{X}_{,k}.\end{aligned}\quad (3-91)$$

Portanto, a matriz de Weingarten  $\widehat{W}$  de  $\widehat{S}$  é dada por

$$\widehat{W} = W(I_2 + \lambda W)^{-1} \quad (3-92)$$

e, conseqüentemente

$$\widehat{K} = \frac{K}{D} \quad \text{e} \quad \widehat{H} = \frac{H - \lambda K}{D}. \quad (3-93)$$

Observe que as funções suporte e distância quadrática de  $S$  podem ser escritas por

$$\begin{aligned}\Psi &= \langle X, N \rangle \\ &= \langle \widehat{X} - \lambda N, N \rangle \\ &= \widehat{\Psi} - \lambda\end{aligned}\quad (3-94)$$

$$\begin{aligned}
\Lambda &= \langle X, X \rangle \\
&= \langle \widehat{X} - \lambda N, \widehat{X} - \lambda N \rangle \\
&= \widehat{\Lambda} - 2\lambda \widehat{\Psi} + \lambda^2.
\end{aligned} \tag{3-95}$$

Agora, utilizando (3-93), (3-94) e (3-95) segue que  $S$  satisfaz  $2\Psi H + \Lambda K = 0$  se, e somente se,

$$2(\widehat{\Psi} - \lambda)\widehat{H} + (\widehat{\Lambda} - \lambda^2)\widehat{K} = 0. \tag{3-96}$$

□

Utilizando a Proposição 3.10 e o Teorema 3.12 classificaremos as superfícies WGSDE de rotação.

**Teorema 3.16** *Seja  $S$  uma superfície WGSDE conexa e orientável. Então  $S$  é de rotação se, e somente se,*

- a)  $S$  é parte de um plano passando pela origem ou parte de um cone circular com vértice na origem (quando  $K \equiv 0$ );
- b)  $S$  é parte de uma esfera passando pela origem, ou parte de uma superfície com uma singularidade isolada ou parte de uma superfície cujas singularidades estão em um círculo (quando  $K \neq 0$ ). Estas superfícies podem ser localmente parametrizadas por,

$$X_{ab}(u_1, u_2) = \frac{e^{(a-1)u_1+b}}{1+e^{2u_1}} \left( [a+e^{2u_1}(2-a)](\cos u_2 + i \sin u_2), 2e^{u_1}(1-a) \right) \tag{3-97}$$

onde  $a, b \in \mathbb{R}$ ,  $a \neq 1$  e  $(u_1, u_2) \in U$  com

- b1)  $U = \mathbb{R}^2$  caso  $a = 0$  ou  $a = 2$ ;
- b2)  $U = \mathbb{R}^2 \setminus \{(u_1, u_2) \in \mathbb{R}^2 : u_1 = \frac{1}{2} \ln |\frac{a}{2-a}|\}$  caso  $a \notin \{0, 2\}$ .

*Prova.* A parte a) segue diretamente da Proposição 3.10. Se  $K \neq 0$ , segue do Teorema 3.12 que  $S$  é localmente parametrizada por (3-50). Além disso, pelo Corolário 2.9 temos que  $S$  é de rotação se, e somente se,  $g(w) = w$  e  $h(w) = J(|w|^2)$ ,  $w \in \mathbb{C}$ , para alguma função diferenciável  $J$ . Fazendo a mudança de parâmetros

$$w = e^z, \quad z = u_1 + iu_2 \in \mathbb{C} \tag{3-98}$$

teremos  $g(z) = e^z$  e  $h(z) = J(e^{2u_1})$ . Consequentemente,  $h_{,2} = 0$ . Pelo Teorema 3.12,  $h = e^{(1,f)}$  onde  $f$  é uma função holomorfa. Logo,  $\langle 1, f \rangle_2 = 0$  e as Equações de Cauchy-

Riemann (1-45) nos garantem que  $f(z) = az + z_0$ , onde  $a \in \mathbb{R}$  e  $z_0 = b + ic \in \mathbb{C}$  são constantes. Portanto,

$$h(z) = e^{au_1+b} \quad (3-99)$$

onde  $z = u_1 + iu_2 \in \mathbb{C}$ .

Para  $g(z) = e^z$  e  $f(z) = az + z_0$ , o Teorema 3.12 garante que

$$T = 1 + e^{2u_1} \quad (3-100)$$

$$\omega = \frac{1}{2T} [a^2 + (2-a)^2 e^{2u_1}] \quad (3-101)$$

$$\Omega = a - \frac{a^2}{2}. \quad (3-102)$$

Voltando em (3-50) teremos

$$\begin{aligned} X_{ab}(u_1, u_2) &= \frac{h}{2|g'|^2} (2\overline{f'}g' + (2\omega - |f'|^2)g, 2\omega - |f'|^2) \\ &= \frac{e^{au_1+b}}{2e^{2u_1}} \left( \left[ 2a + \frac{1}{T} [a^2 + (2-a)^2 e^{2u_1}] - a^2 \right] e^z, \frac{1}{T} [a^2 + (2-a)^2 e^{2u_1}] - a^2 \right) \\ &= \frac{e^{(a-2)u_1+b}}{2T} ([2aT + a^2(1-T) + (2-a)^2 e^{2u_1}] e^z, a^2(1-T) + (2-a)^2 e^{2u_1}) \\ &= \frac{e^{(a-2)u_1+b}}{2T} ([2a(1+e^{2u_1}) - a^2 e^{2u_1} + (2-a)^2 e^{2u_1}] e^z, -a^2 e^{2u_1} + (2-a)^2 e^{2u_1}) \\ &= \frac{e^{(a-2)u_1+b}}{2T} (2[a + e^{2u_1}(2-a)] e^z, 4e^{2u_1}(1-a)) \\ &= \frac{e^{(a-1)u_1+b}}{1+e^{2u_1}} ([a + e^{2u_1}(2-a)] (\cos u_2 + i \sin u_2), 2e^{u_1}(1-a)). \end{aligned} \quad (3-103)$$

A condição de regularidade  $P$ , dada por (3-53), pode ser escrita por

$$\begin{aligned} P &= \left( \frac{Th}{|g'|^2} \right)^2 (\omega^2 - |\Omega|^2) \\ &= \frac{T^2 e^{2au_1+2b}}{e^{4u_1}} \left\{ \frac{1}{4T^2} [a^2 + (2-a)^2 e^{2u_1}]^2 - \left( a - \frac{a^2}{2} \right)^2 \right\} \\ &= T^2 e^{2(a-2)u_1+2b} \left\{ \frac{1}{4T^2} [a^2 + (2-a)^2 e^{2u_1}]^2 - \frac{1}{4} (2a - a^2)^2 \right\} \\ &= \frac{1}{4} e^{2(a-2)u_1+2b} [a^4 + 2a^2(2-a)^2 e^{2u_1} + (2-a)^4 e^{4u_1} - T^2 a^2 (2-a)^2] \\ &= \frac{1}{4} e^{2(a-2)u_1+2b} [a^4 + 2a^2(2-a)^2 e^{2u_1} + (2-a)^4 e^{4u_1} - (1+2e^{2u_1} + e^{4u_1}) a^2 (2-a)^2] \\ &= \frac{1}{4} e^{2(a-2)u_1+2b} \{ a^2 [a^2 - (2-a)^2] + (2-a)^2 [(2-a)^2 - a^2] e^{4u_1} \} \\ &= \frac{1}{4} e^{2(a-2)u_1+2b} [-4a^2(1-a) + 4(2-a)^2(1-a)e^{4u_1}] \end{aligned}$$

$$= e^{2(a-2)u_1+2b}(1-a) [(2-a)^2 e^{4u_1} - a^2]. \quad (3-104)$$

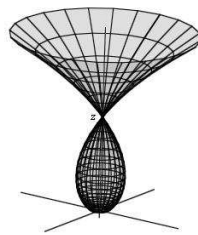
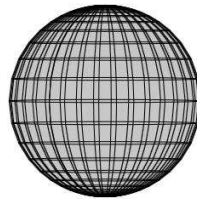
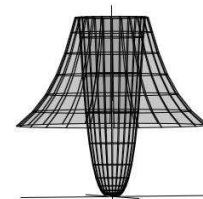
Portanto,  $X_{ab}$  é regular se, e somente se,  $a = 0$  ou  $a = 2$ . Além disso, se  $a = 1$  então  $X_{1b}$  é degenerada e se  $a \notin \{0, 1, 2\}$  a expressão (3-104) anula-se para  $u^1 = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{a}{2-a} \right|$ .

Note que se  $a = 0$  ou  $a = 2$  então  $\Omega = 0$ . Dessa forma,  $X_{0b}$  e  $X_{2b}$  descrevem esferas. Para  $0 < a < 2$ ,  $a \neq 1$ , o conjunto  $X_{ab} \left( \frac{1}{2} \ln \left( \frac{a}{2-a} \right), u^2 \right)$ ,  $u^2 \in \mathbb{R}$ , é um círculo. De fato,

$$X_{ab} \left( \frac{1}{2} \ln \left( \frac{a}{2-a} \right), u^2 \right) = (2-a)^{\frac{3-a}{2}} a^{\frac{a-1}{2}} \left( a(\cos u_2 + i \sin u_2), (1-a) \left( \frac{a}{2-a} \right)^{\frac{1}{2}} \right). \quad (3-105)$$

Para  $a > 2$  ou  $a < 0$  o conjunto  $X_{ab} \left( \frac{1}{2} \ln \left( \frac{a}{a-2} \right), u^2 \right)$ ,  $u^2 \in \mathbb{R}$ , é o ponto  $\left( 0, (1-a)a^{\frac{a}{2}}(a-2)^{\frac{2-a}{2}} \right)$ .  $\square$

Apresentaremos a seguir um exemplo para cada um dos três tipos de superfícies WGSDE de rotação com  $K \neq 0$ . Como as superfícies WGSDE são invariantes por dilatação, consideraremos o caso em que  $b = 0$ .

(a)  $a = -1$ .(b)  $a = 0$ .(c)  $a = 0,5$ .

Em [19], López mostrou que uma superfície Weingarten linear cíclica é parte de uma esfera ou os planos de folheação são paralelos. Apresentaremos a seguir, uma família a 4-parâmetros de superfícies WGSDE cíclicas, com uma singularidade isolada, e cujos planos de folheação não são paralelos.

**Proposição 3.17** *Existe uma família 4-parâmetros de superfícies WGSDE cíclicas, com uma singularidade isolada, e cujos círculos estão em planos não paralelos. Estas superfícies podem ser localmente parametrizadas por*

$$X_{ab}^{\alpha\beta}(u_1, u_2) = \frac{e^{au_1+b}}{T} (aT + 2\zeta [(u_1 + \alpha) + i(u_2 + \beta)], 2\zeta), \quad (u_1, u_2) \in \mathbb{R}^2 \quad (3-106)$$

onde  $a, b, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ,  $a \neq 0$ , são constantes,

$$T = 1 + (u_1 + \alpha)^2 + (u_2 + \beta)^2 \quad e \quad \zeta = 1 - a(u_1 + \alpha). \quad (3-107)$$

*Prova.* Considere uma translação  $g$  e uma composição de homotetia com translação  $f$ , definidas por

$$g(z) = z + z_0 \quad e \quad f(z) = az + z_1, \quad z = u_1 + iu_2 \in \mathbb{C} \quad (3-108)$$

onde  $z_0 = \alpha + i\beta$  e  $z_1 = b + ic$ . Neste caso,

$$h = e^{\langle 1, f \rangle} = e^{au_1 + b} \quad e \quad T = 1 + |g|^2 = 1 + (u_1 + \alpha)^2 + (u_2 + \beta)^2. \quad (3-109)$$

Além disso, a expressão (3-51) garante que

$$\omega = \frac{1}{2T} (a^2T + 4\zeta) \quad e \quad \Omega = \frac{-a^2}{2} \quad (3-110)$$

onde  $\zeta = 1 - a(u_1 + \alpha)$ . Voltando ao Teorema 3.12 teremos

$$\begin{aligned} X_{ab}^{\alpha\beta}(u_1, u_2) &= \frac{h}{2|g'|^2} (2\bar{f}'g' + (2\omega - |f'|^2)g, 2\omega - |f'|^2) \\ &= \frac{e^{au_1 + b}}{2} \left( 2a + \left[ \frac{1}{T}(a^2T + 4\zeta) - a^2 \right] (z + z_0), \frac{1}{T}(a^2T + 4\zeta) - a^2 \right) \\ &= \frac{e^{au_1 + b}}{T} (aT + 2\zeta[(u_1 + \alpha) + i(u_2 + \beta)], 2\zeta). \end{aligned} \quad (3-111)$$

A condição de regularidade  $P$ , dada por (3-53), torna-se

$$\begin{aligned} P &= \left( \frac{Th}{|g'|^2} \right)^2 (\omega^2 - |\Omega|^2) \\ &= T^2 e^{2au_1 + 2b} \left[ \frac{1}{4T^2} (a^2T + 4\zeta)^2 - \frac{a^4}{4} \right] \\ &= \frac{e^{2au_1 + 2b}}{4} (8a^2T\zeta + 16\zeta^2) \\ &= 2\zeta e^{2au_1 + 2b} (a^2T + 2\zeta) \\ &= 2\zeta e^{2au_1 + 2b} [a^2 + a^2(u_2 + \beta)^2 + \zeta^2 + 1]. \end{aligned} \quad (3-112)$$

Dessa forma,  $X_{ab}^{\alpha\beta}$  é regular se, e somente se,  $\zeta \neq 0$  ou, equivalentemente,  $u_1 \neq \frac{1}{a} - \alpha$ . Além disso, se  $\zeta = 0$ , então  $X_{ab}^{\alpha\beta}(\frac{1}{a} - \alpha, u_2)$ ,  $u_2 \in \mathbb{R}$ , é o ponto  $(ae^{1+b-a\alpha}, 0, 0) \in \mathbb{R}^3$ .

Para mostrarmos que  $X_{ab}^{\alpha\beta}$  é uma superfície cíclica, note que fixado  $u_1 \neq \frac{1}{a} - \alpha$ , a curva coordenada  $u_2 \in \mathbb{R} \mapsto \gamma(u_2) = X_{ab}^{\alpha\beta}(u_1, u_2)$  está contida na interseção do plano

$P_{u_1} = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3; x_1 - (u_1 + \alpha)x_3 = ae^{au_1+b}\}$  com a esfera de centro  $C$  e raio  $r$ , onde

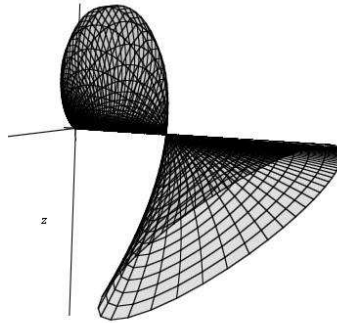
$$\begin{aligned} C &= \frac{e^{au_1+b}}{1 + (u_1 + \alpha)^2} (a + (u_1 + \alpha), 0, \zeta) \\ r &= \frac{|\zeta| e^{au_1+b}}{\sqrt{1 + (u_1 + \alpha)^2}}. \end{aligned} \quad (3-113)$$

Além disso,

$$\lim_{u_2 \rightarrow \pm\infty} \gamma(u_2) = (ae^{au_1+b}, 0, 0) \quad (3-114)$$

para todo  $u_1 \neq \frac{1}{a} - \alpha$ . Portanto,  $X_{ab}^{\alpha\beta}$  é uma superfície WGSDE cíclica, com uma singularidade isolada, e cujos círculos estão em planos não paralelos.  $\square$

Abaixo segue o exemplo em que  $a = 1$  e  $b = \alpha = \beta = 0$ .



**Figura 3.1:**  $g = z$  e  $f = z$

## Hipersuperfícies Weingarten Generalizada do Tipo Suporte Distância Especial

Neste capítulo generalizaremos o conceito de superfícies WGSDE para o caso de hipersuperfícies em  $\mathbb{R}^{n+1}$ . Apresentaremos uma representação para estas hipersuperfícies no caso em que a projeção estereográfica da normal de Gauss  $N$  é dada pela aplicação identidade. Como aplicação, caracterizaremos os exemplos rotacionais.

**Definição 4.1** Dizemos que uma hipersuperfície orientável  $\Sigma \subset \mathbb{R}^{n+1}$  é uma hipersuperfície Weingarten generalizada do tipo suporte distância especial (ou, por abreviação, uma hipersuperfície WGSDE) se a curvatura de Gauss-Kronecker  $K$ , a  $(n-1)$ -ésima curvatura média  $H_{n-1}$ , a função suporte  $\Psi$  e a função distância quadrática  $\Lambda$  satisfazem

$$2\Psi H_{n-1} + \Lambda K = 0. \quad (4-1)$$

para todo  $p \in \Sigma$ .

Seja  $C \subset \mathbb{R}^{n+1}$ ,  $n \geq 2$ , uma subvariedade  $(n-1)$ -dimensional de  $\mathbb{R}^{n+1}$  tal que a origem  $0 \notin C$ . Um cone generalizado de vértice na origem é uma hipersuperfície gerada pela família a 1-parâmetro de retas que passam por 0 e  $p$ , onde  $p \in C$ .

Assim como no caso de superfícies, os cones generalizados em  $\mathbb{R}^{n+1}$  são exemplos de hipersuperfícies WGSDE com curvatura de Gauss-Kronecker  $K \equiv 0$ . A demonstração deste fato é análoga a demonstração feita na Proposição 3.10, a menos da dimensão do espaço ambiente.

**Proposição 4.2** Uma hipersuperfície conexa  $\Sigma \subset \mathbb{R}^{n+1}$  é um cone generalizado com vértice na origem se, e somente se, a função suporte  $\Psi \equiv 0$ . Em particular, uma hipersuperfície WGSDE conexa com  $\Psi \equiv 0$  é parte de um cone generalizado com vértice na origem.

Considere uma hipersuperfície WGSDE  $\Sigma \subset \mathbb{R}^{n+1}$ , com curvatura de Gauss-Kronecker  $K \neq 0$ , e seja  $Y(u) = (u, 0)$ ,  $u \in U$ , uma parametrização local ortogonal do

hiperplano  $\Pi$ . Segue do Teorema 2.6 que existe uma função diferenciável  $h : U \rightarrow \mathbb{R}$  tal que  $\Sigma$  pode ser localmente parametrizada por

$$X(u) = \left( Q(u) - \frac{2R(u)}{T(u)}Y(u), -\frac{2R(u)}{T(u)} \right), \quad u \in U \quad (4-2)$$

$$L_{jj} = 1, T = 1 + |u|^2,$$

$$Q = \sum_{j=1}^n \frac{h_{,j}}{L_{jj}} Y_{,j} = \nabla h \quad \text{e} \quad R = \langle Q, Y \rangle - h = \langle \nabla h, u \rangle - h. \quad (4-3)$$

Nestas coordenadas,

$$N(u) = \frac{1}{1 + |u|^2} (2u, 1 - |u|^2), \quad u \in U \subset \mathbb{R}^n. \quad (4-4)$$

Além disso, a matriz de Weingarten  $W$  de  $X$  é dada por  $W = 2(TV - 2RI_n)^{-1}$  onde  $V = (h_{,ij})$  e  $I_n$  é a matriz identidade  $n \times n$ . Como  $V$  é simétrica, sejam  $\{a_1, \dots, a_n\}$  os autovalores (todos reais) de  $V$ . Segue que  $\lambda_i = \frac{2}{Ta_i - 2R}$ ,  $1 \leq i \leq n$ , são os autovalores de  $W$  e, conseqüentemente, as curvatura principais  $k_1, \dots, k_n$  de  $\Sigma$  são dadas por

$$k_i = -\lambda_i = \frac{2}{2R - Ta_i}, \quad 1 \leq i \leq n. \quad (4-5)$$

O fato de a curvatura de Gauss-Kronecker  $K$  ser não nula em todos os pontos de  $\Sigma$ , garante que  $k_i \neq 0$  para todo  $1 \leq i \leq n$ .

Assim como na demonstração do Teorema 3.12, a função suporte  $\Psi$  e a função distância quadrática  $\Lambda$  de  $\Sigma$  são dadas por

$$\Psi = \frac{2h}{T} \quad \text{e} \quad \Lambda = |\nabla h|^2 - \frac{4Rh}{T}. \quad (4-6)$$

Podemos supor que  $h(u) \neq 0$  para todo  $u \in U$ . Com efeito, se existir  $u_0 \in U$  tal que  $h(u_0) = 0$  então  $\Psi(u_0) = 0$ . Conseqüentemente,  $\Lambda(u_0)K(u_0) = 0$  e com isso  $X(u_0) = 0$ . Dessa forma, a menos possivelmente da origem, temos

$$\begin{aligned} 2\Psi H_{n-1} + \Lambda H_n &= 0 \Leftrightarrow \\ \frac{2H_{n-1}}{H_n} &= -\frac{\Lambda}{\Psi} \Leftrightarrow \\ \frac{2}{nk_1 \dots k_n} \sum_{j_1 < \dots < j_{n-1}} k_{j_1} \dots k_{j_{n-1}} &= \frac{T}{2h} \left( -|\nabla h|^2 + \frac{4Rh}{T} \right) \Leftrightarrow \\ \frac{2}{n} \sum_{i=1}^n \frac{1}{k_i} &= 2R - \frac{T|\nabla h|^2}{2h} \Leftrightarrow \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (2R - Ta_i) &= 2R - \frac{T|\nabla h|^2}{2h} \Leftrightarrow \\
\frac{1}{n} \left( 2nR - T \sum_{i=1}^n a_i \right) &= 2R - \frac{T|\nabla h|^2}{2h} \Leftrightarrow \\
2R - \frac{T}{n} \text{tra.}(V) &= 2R - \frac{T|\nabla h|^2}{2h} \Leftrightarrow \\
\frac{1}{n} \Delta h &= \frac{|\nabla h|^2}{2h} \Leftrightarrow \\
h \Delta h &= \frac{n}{2} |\nabla h|^2. \tag{4-7}
\end{aligned}$$

Chegamos então ao seguinte resultado.

**Teorema 4.3** *Seja  $\Sigma$  uma hipersuperfície orientável em  $\mathbb{R}^{n+1}$  com curvatura de Gauss-Kronecker  $K \neq 0$ . Considere  $Y(u) = (u, 0)$ ,  $u \in U$ . Então  $\Sigma$  é WGSDE se, e somente se, existe uma função diferenciável  $h : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  satisfazendo*

$$h \Delta h = \frac{n}{2} |\nabla h|^2 \tag{4-8}$$

tal que  $\Sigma$  é localmente parametrizada por

$$X(u) = \left( \nabla h(u) - \frac{2R(u)}{T(u)} u, -\frac{2R(u)}{T(u)} \right), \quad u \in U \tag{4-9}$$

onde  $T(u) = 1 + |u|^2$  e  $R(u) = \langle \nabla h(u), u \rangle - h(u)$ ,  $u \in U$ . Nestas coordenadas, a normal de Gauss  $N$  de  $\Sigma$  é dada por (4-4). Além disso,  $W = 2(TV - 2RI_n)^{-1}$  é a matriz de Weingarten de  $X$ , onde  $V = (h_{,ij})$  e  $I_n$  é a matriz identidade.

Como  $V_{ij} = h_{,ij}$ , segue do Corolário 2.8 que  $\Sigma$  está parametrizada por linhas de curvatura se, e somente se,  $h_{,ij} = 0$  para todo  $i \neq j$ .

Dentre as soluções da equação diferencial (4-8), destacam-se as descritas pela Proposição a seguir.

**Proposição 4.4** *Seja  $\phi : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $n \geq 3$ , uma função harmônica tal que  $\phi(u) \neq 0 \forall u \in U$ . Então,*

$$h(u) = \phi(u)^{\frac{2}{2-n}}, \quad u \in U \tag{4-10}$$

satisfaz  $h \Delta h = \frac{n}{2} |\nabla h|^2$ .

*Prova.* Observe que

$$h_{,i} = \frac{2}{2-n} \phi^{\frac{n}{2-n}} \phi_{,i}, \quad 1 \leq i \leq n \tag{4-11}$$

$$h_{,ii} = \frac{2n}{(2-n)^2} \phi^{\frac{2n-2}{2-n}} \phi_{,i}^2 + \frac{2}{2-n} \phi_{,ii}, \quad 1 \leq i \leq n. \tag{4-12}$$

Dessa forma

$$|\nabla h|^2 = \frac{4}{(2-n)^2} \phi^{\frac{2n}{2-n}} |\nabla \phi|^2 \quad e \quad \Delta h = \frac{2n}{(2-n)^2} \phi^{\frac{2n-2}{2-n}} |\nabla \phi|^2 \quad (4-13)$$

onde utilizamos o fato de  $\Delta \phi = 0$ . Portanto,  $h\Delta h = \frac{n}{2} |\nabla h|^2$ .  $\square$

**Exemplo 4.5** Considere a função harmônica  $\phi_{ab} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $n \geq 3$ , definida por

$$\phi_{ab}(u) = au_1 + b, \quad u = (u_1, \dots, u_n) \in U = \{u \in \mathbb{R}^n; u_1 \neq -\frac{b}{a}\} \quad (4-14)$$

onde  $a \neq 0$  e  $b$  são constantes reais. Dessa forma,

$$\nabla h(u) = \frac{2}{2-n} \phi_{ab}(u)^{\frac{n}{2-n}} e_1 \quad e \quad R(u) = \phi_{ab}(u)^{\frac{n}{2-n}} \left( \frac{2au_1}{2-n} - \phi_{ab}(u) \right). \quad (4-15)$$

Voltando em (4-9) concluiremos que

$$X(u) = \frac{2\phi_{ab}(u)^{\frac{n}{2-n}}}{T(u)} \left( \frac{aT(u)}{2-n} e_1 - \left( \frac{2au_1}{2-n} - \phi_{ab}(u) \right) u, \phi_{ab}(u) - \frac{2au_1}{2-n} \right), \quad u \in U \quad (4-16)$$

onde  $T = 1 + |u|^2$ , define uma hipersuperfície WGSDE. Os coeficientes da primeira I e segunda II formas fundamentais de  $X$  são dados por,

$$\langle X_i, X_j \rangle = \begin{cases} \left[ \frac{2a^2n}{(2-n)^2} \phi_{ab}(u)^{\frac{2n-2}{2-n}} - \frac{2R(u)}{T(u)} \right]^2, & i = j = 1 \\ \frac{4R(u)^2}{T(u)^2}, & i = j \neq 1 \\ 0, & i \neq j \end{cases} \quad (4-17)$$

$$-\langle X_i, N_j \rangle = \begin{cases} \frac{2}{T} \left[ \frac{2R(u)}{T(u)} - \frac{2a^2n}{(2-n)^2} \phi_{ab}(u)^{\frac{2n-2}{2-n}} \right], & i = j = 1 \\ \frac{4R(u)}{T(u)^2}, & i = j \neq 1 \\ 0, & i \neq j. \end{cases} \quad (4-18)$$

Outra classe importante de soluções da equação (4-8) são as soluções radiais. Estas soluções dão origem à hipersuperfícies WGSDE de rotação.

**Teorema 4.6** Seja  $\Sigma$  uma hipersuperfície WGSDE em  $\mathbb{R}^{n+1}$  com curvatura de Gauss-Kronecker  $K \neq 0$  e normal de Gauss  $N$  dada localmente por (4-4). Então  $\Sigma$  é de rotação se, e somente se, a função  $h : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  é dada por

$$h(u) = c_0 (|u|^{2-n} + c_1)^{\frac{2}{2-n}}, \quad u \in U \quad (4-19)$$

onde  $c_0, c_1 \in \mathbb{R}$ ,  $c_0 > 0$ , e

- i)  $U = \mathbb{R}^n$ , se  $c_1 = 0$ ;  
 ii)  $U = \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ , se  $c_1 > 0$ ;  
 iii)  $U = \{u \in \mathbb{R}^n; u \neq 0 \text{ e } |u|^{n-2} \neq -c_1^{-1}\}$ , se  $c_1 < 0$ .

Neste caso, a menos de uma dilatação ( $c_0 = 1$ ),  $\Sigma$  é localmente parametrizada por

$$X(u) = \frac{2(|u|^{2-n} + c_1)^{\frac{n}{2-n}}}{1 + |u|^2} \left( \frac{(1 + c_1|u|^n)}{|u|^n} u, c_1 - |u|^{2-n} \right), \quad u \in U. \quad (4-20)$$

Além disso, se  $c_1 = 0$  então  $X$  parametriza uma hipersfera.

*Prova.* Como  $\Sigma$  é uma hipersuperfície WGSDE em  $\mathbb{R}^{n+1}$  com curvatura de Gauss-Kronecker  $K \neq 0$  e normal de Gauss  $N$  dada localmente por (4-4), segue do Teorema 4.3 que existe um função diferenciável  $h : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ , satisfazendo (4-8), tal que  $\Sigma$  é localmente parametrizada por (4-9). Pelo Corolário 2.9, temos que  $\Sigma$  é de rotação se, e somente se, a função  $h$  é radial. Dessa forma, seja  $h(u) = J(t)$ ,  $u \in U$ , onde  $t = |u|^2$  e  $J$  é uma função diferenciável unidimensional. Logo,

$$h_{,i} = 2u_i J' \quad \text{e} \quad h_{,ii} = 4u_i^2 J'' + 2J', \quad 1 \leq i \leq n \quad (4-21)$$

onde  $J'$  denota a derivada de  $J$  relativa a  $t$ . Com isso,

$$|\nabla h|^2 = 4(J')^2 t \quad \text{e} \quad \Delta h = 4J'' t + 2nJ'. \quad (4-22)$$

Substituindo estas expressões na equação (4-8), teremos

$$2JJ'' t + nJJ' = n(J')^2 t. \quad (4-23)$$

Podemos supor que  $J(t) \neq 0$  e  $J'(t) \neq 0$  para todo  $t \geq 0$ . De fato, em ambos os casos  $\Lambda = 0$ . Assim, a menos quando  $u = 0$ , podemos dividir a expressão acima por  $JJ' t$ . Dessa forma obtemos

$$\left[ \ln \left( \frac{(J')^{\frac{2}{n}} t}{J} \right) \right]' = 0. \quad (4-24)$$

As soluções da equação acima são descritas por

$$J(t) = c_0 \left( t^{\frac{2-n}{2}} + c_1 \right)^{\frac{2}{2-n}} \quad (4-25)$$

para constantes  $c_0, c_1 \in \mathbb{R}$ ,  $c_0 > 0$ . Consequentemente,  $h(u) = c_0 (|u|^{2-n} + c_1)^{\frac{2}{2-n}}$ . Note que se  $c_1 \geq 0$ ,  $U = \mathbb{R}^n$ . Por outro lado, se  $c_1 < 0$ ,  $U = \{u \in \mathbb{R}^n; |u|^{n-2} \neq -c_1^{-1}\}$ .

A menos de uma dilatação, podemos supor  $c_0 = 1$ . Dessa forma, as expressões  $\nabla h$  e  $R$  são dados, respectivamente, por

$$\nabla h(u) = \frac{2(|u|^{2-n} + c_1)^{\frac{n}{2-n}}}{|u|^n} u \quad \text{e} \quad R(u) = (|u|^{2-n} + c_1)^{\frac{n}{2-n}} (|u|^{2-n} - c_1). \quad (4-26)$$

Voltando em (4-9) concluiremos que  $\Sigma$  é localmente parametrizada por (4-20).

No caso em que  $c_1 = 0$  então (4-20) torna-se

$$X(u) = \frac{2}{1 + |u|^2} (u, |u|^2), \quad u \in \mathbb{R}^n. \quad (4-27)$$

Dessa forma,  $X$  parametriza uma hipersfera de centro em  $(0, \dots, 0, -1) \in \mathbb{R}^{n+1}$  e raio 1.  $\square$

Foram feitas várias escolhas para  $n$  e  $c_1$ . Em cada uma delas, foi verificado computacionalmente que o comportamento das curvas que geram as hipersuperfícies WGSDE são semelhantes quando consideramos  $c_1 > 0$  ou  $c_1 < 0$ . Apresentaremos no exemplo a seguir o caso  $n = 3$ .

**Exemplo 4.7** (*Hipersuperfícies WGSDE rotacionais em  $\mathbb{R}^4$* ) Para  $n = 3$  e  $c_0 = 1$  a expressão (4-19) torna-se

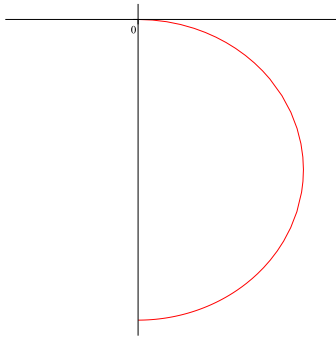
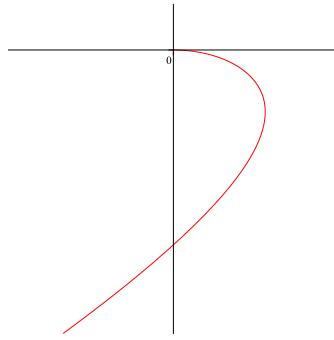
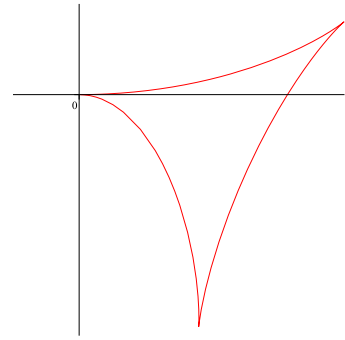
$$h(u) = \frac{|u|^2}{(1 + c_1|u|)^2}, \quad u \in \mathbb{R}^3. \quad (4-28)$$

Consequentemente, por (4-20), temos

$$X(u) = \frac{2}{(1 + c_1|u|)^3(1 + |u|^2)} ((1 + c_1|u|)^3 u, (c_1|u| - 1)|u|^2), \quad u \in U. \quad (4-29)$$

Como observado anteriormente, para  $c_1 = 0$  a hipersuperfície WGSDE de rotação é parte de uma hipersfera. Para  $c_1 < 0$  temos uma hipersuperfície WGSDE de rotação com uma singularidade isolada. Finalmente, para  $c_1 > 0$ , a hipersuperfície WGSDE de rotação é parte de uma hipersuperfície cujas singularidades estão em esferas.

As curvas que descrevem as hipersuperfícies WGSDE de rotação para cada um dos casos listados acima são:

(a)  $c_1 = 0$ .(b)  $c_1 < 0$ .(c)  $c_1 > 0$ .

---

## Referências Bibliográficas

---

- [1] AHLFORS, L. V. **Complex Analysis**. McGraw-Hill Book Company.
- [2] APPELL, P. **Surfaces telles que l'origine se projette sur chaque normale au milieu des centres de courbure principaux**. *American Journal of Mathematics*, 10:175—186, 1888.
- [3] BIANCHI, L. **Lezioni di Geometria Differenziale - Terza Edizione**. Nicola Zanichelli Editore, 1927.
- [4] BIANCHI, L. **Sopra alcune nuove classi di superficie e di sistemi tripli ortogonali**. *Ann. Matemat.*, 18:301–358, 1990.
- [5] BRYANT, L. **Surfaces of mean curvature one in hyperbolic space**. *Astérisque*, p. 289–316, 1987.
- [6] CORRO, A. V. **Generalized weingarten surfaces of bryant type in hyperbolic 3-space**. *Matemática Contemporânea*, 30:71–89, 2006.
- [7] CORRO, A. V.; TENENBLAT, K. **Ribaucour transformation revisited**. *Communications in Analysis and Geometry*, 12(5):1055–1082, 2004.
- [8] DO CARMO, M. P. **Geometria Diferencial de Curvas e Superfícies**. Coleção Textos Universitários, Rio de Janeiro, SBM, 2008.
- [9] DO CARMO, M. P. **Geometria Riemanniana**. Projeto Euclides, Rio de Janeiro, IMPA, 2008.
- [10] DUBROVIN, B. A.; NOVIKOV, S. P. **Hydrodynamics of weakly deformed soliton lattices. differential geometry and hamiltonian theory**. *Russian Math. Surveys*, 44(6):35–124, 1989.
- [11] EARP, R. S.; TOUBIANA, E. **Symmetry of properly embedded special weingarten surfaces in  $\mathbb{H}^3$** . *Trans. Am. Math. Soc.*, 351(9):4693–4711, 1999.
- [12] FARKAS, H. M.; KRA, I. **Riemann Surfaces**. Graduate Texts in Mathematics, Springer-Verlag.

- [13] FERAPONTOV, E. V. **Reciprocal transformations and their invariants.** *Diff Uravnen*, 25:1256–1265, 1989.
- [14] FERAPONTOV, E. V. **Dupin hypersurfaces an integrable hamiltonian systems of hydrodynamic type, which do not possess riemann invariants.** *Communications in Analysis and Geometry*, 5:121–152, 1995.
- [15] FERNANDES, K. V. **Superfícies Weingarten Generalizada do Tipo Harmônico no Espaço Hiperbólico.** [Tese de Doutorado]. Goiânia: IME-UFG; 2013.
- [16] FERREIRA, W.; ROITMAN, P. **Area preserving transformations in two-dimensional space forms and classical differential geometry.** *Israel Journal of Mathematics*, 190(1):325–348, 2012.
- [17] GÁLVEZ, J. A.; MATÍNEZ, A.; MILÁN, F. **Flat surfaces in the hyperbolic 3-space.** *Math. Ann.*, 316:419–435, 2000.
- [18] GÁLVEZ, J. A.; MATÍNEZ, A.; MILÁN, F. **Complete linear weingarten surfaces of bryant type. a plateau problem at infinity.** *Trans. Amer. Math. Soc.*, 356:3405–3428, 2004.
- [19] LÓPEZ, R. **Special weingarten surfaces foliated by circles.** *Monatshefte für Mathematik*, 154:289–302, 2008.
- [20] NETO, A. L. **Funções de uma Variável Complexa.** Projeto Euclides, Rio de Janeiro, IMPA.
- [21] ROITMAN, P. **Flat surfaces in hyperbolic space as normal surfaces to a congruence of geodesics.** *Tohoku Mathematical Journal*, 59:21–37, 2007.
- [22] SCHIEF, W. K. **On laplace-darboux-type sequences of generalized weingarten surfaces.** *Communications in Analysis and Geometry*, 41(9):6566–6599, 2000.
- [23] TZITZEICA, G. **Sur une nouvelle classe de surfaces.** *C. R. Acad. Sci. Paris*, 144:1257–1259, 1907.