

UNIVERSIDADE FEDERAL DE GOIÁS
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA

MARCOS TSUJII

**Bifurcações em Sistemas Dinâmicos
Suaves por Partes**

Goiânia
2015

TERMO DE CIÊNCIA E DE AUTORIZAÇÃO PARA DISPONIBILIZAR AS TESES E DISSERTAÇÕES ELETRÔNICAS (TEDE) NA BIBLIOTECA DIGITAL DA UFG

Na qualidade de titular dos direitos de autor, autorizo a Universidade Federal de Goiás (UFG) a disponibilizar, gratuitamente, por meio da Biblioteca Digital de Teses e Dissertações (BDTD/UFG), sem ressarcimento dos direitos autorais, de acordo com a Lei nº 9610/98, o documento conforme permissões assinaladas abaixo, para fins de leitura, impressão e/ou download, a título de divulgação da produção científica brasileira, a partir desta data.

1. Identificação do material bibliográfico: **Dissertação** **Tese**

2. Identificação da Tese ou Dissertação

Autor (a):	Marcos Tsujii		
E-mail:	marcostsujii@hotmail.com		
Seu e-mail pode ser disponibilizado na página?	<input checked="" type="checkbox"/> Sim	<input type="checkbox"/> Não	
Vínculo empregatício do autor	Professor efetivo do IFG.		
Agência de fomento:	Capes	Sigla:	Capes
País:	Brasil	UF:	GO CNPJ: 00889834/0001-08
Título:	Bifurcações em Sistemas Dinâmicos Suaves por Partes		
Palavras-chave:	Sistemas Dinâmicos, Bifurcações, Suaves por Partes.		
Título em outra língua:	Bifurcations in Piecewise-smooth Dynamical Systems.		
Palavras-chave em outra língua:	Dynamical Systems, Bifurcations, Piecewise-smooth.		
Área de concentração:	Sistemas Dinâmicos		
Data defesa: (dd/mm/aaaa)	06/03/2015		
Programa de Pós-Graduação:	Mestrado em Matemática		
Orientador (a):	Dr. Durval José Tonon		
E-mail:	djtonon@gmail.com		
Co-orientador (a):*			
E-mail:			

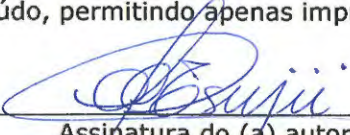
*Necessita do CPF quando não constar no SisPG

3. Informações de acesso ao documento:

Concorda com a liberação total do documento SIM NÃO¹

Havendo concordância com a disponibilização eletrônica, torna-se imprescindível o envio do(s) arquivo(s) em formato digital PDF ou DOC da tese ou dissertação.

O sistema da Biblioteca Digital de Teses e Dissertações garante aos autores, que os arquivos contendo eletronicamente as teses e ou dissertações, antes de sua disponibilização, receberão procedimentos de segurança, criptografia (para não permitir cópia e extração de conteúdo, permitindo apenas impressão fraca) usando o padrão do Acrobat.



 Assinatura do (a) autor (a)

Data: 13 / 03 / 2015

¹ Neste caso o documento será embargado por até um ano a partir da data de defesa. A extensão deste prazo suscita justificativa junto à coordenação do curso. Os dados do documento não serão disponibilizados durante o período de embargo.

UNIVERSIDADE FEDERAL DE GOIÁS
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA

MARCOS TSUJII

Bifurcações em Sistemas Dinâmicos Suaves por Partes

Dissertação apresentada ao Instituto de Matemática e Estatística da Universidade Federal de Goiás, para obtenção do título de Mestre em Matemática,

Área de concentração: Sistemas Dinâmicos.

Orientador: Prof. Dr. Durval José Tonon

Goiânia

2015

Ficha catalográfica elaborada automaticamente
com os dados fornecidos pelo(a) autor(a), sob orientação do Sibi/UFG.

Tsujii, Marcos
Bifurcações em Sistemas Dinâmicos Suaves por Partes [manuscrito] /
Marcos Tsujii. - 2015.
v, 107 f.: il.

Orientador: Prof. Dr. Durval José Tonon.
Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal de Goiás, Instituto de
Matemática e Estatística (IME) , Programa de Pós-Graduação em
Matemática, Goiânia, 2015.

Bibliografia.

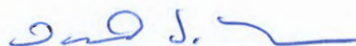
Inclui lista de figuras.

1. Sistemas Dinâmicos. 2. Bifurcações. 3. Suaves por Partes. I. Tonon,
Durval José, orient. II. Título.

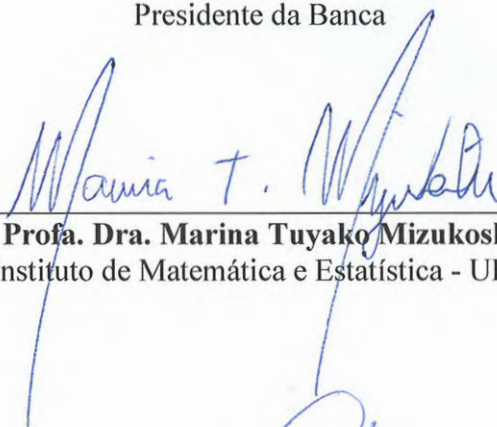
MARCOS TSUJII

BIFURCAÇÕES EM SISTEMAS DINÂMICOS SUAVES POR PARTES

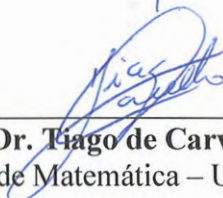
Dissertação defendida no Programa de Pós-Graduação do Instituto de Matemática e Estatística da Universidade Federal de Goiás como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática, aprovada no dia 06 de março de 2015, pela Banca Examinadora constituída pelos professores:



Prof. Dr. Durval José Tonon
Instituto de Matemática e Estatística - UFG
Presidente da Banca



Profa. Dra. Marina Tuyako Mizukoshi
Instituto de Matemática e Estatística - UFG



Prof. Dr. Tiago de Carvalho
Departamento de Matemática – UNESP/Bauru

Todos os direitos reservados. É proibida a reprodução total ou parcial do trabalho sem autorização da universidade, do autor e do orientador.

MARCOS TSUJII

Licenciado em Matemática pela Universidade Federal de Goiás

DEDICATÓRIA

Aos meus pais; sem eles não teria chegado até aqui.

AGRADECIMENTOS

Nesses dois anos que percorri até chegar aqui, muitos foram os obstáculos que julguei intransponíveis. Nesses momentos, pessoas entram em nossas vidas para agregar valores e idéias que nos mostram como vencê-los e que levarei comigo para o resto da vida. Para não cometer injustiças, não há como citar todas as pessoas que me ajudaram nessa longa caminhada, mas gostaria de deixar registrado meus agradecimentos a algumas que marcaram minha trajetória no curso de Mestrado em Matemática.

Em primeiro lugar, a Deus, que me deu o dom da vida, saúde para trabalhar e uma família maravilhosa.

Ao professor Durval por me lecionar, mostrar a beleza dos Sistemas Dinâmicos e orientar com padrão de excelência e acreditar em mim, mesmo em situações adversas.

Aos professores do IME-UFG pela dedicação e alta qualidade no ensino, em especial aos professores: Alacyr José Gomes, Ivonildes Ribeiro Martins, Jesus Carlos da Mota, João Carlos da Rocha Medrado, Marina Tuyako Mizukoshi, Maurício Donizetti Pieterzack, Paulo Henrique de Azevedo Rodrigues, Romildo da Silva Pina e a todos aqueles que, pelos corredores, sempre me davam força e demonstravam satisfação por construir matemática de alto nível.

À minha mãe que me ensinou grande parte das coisas boas que sei e me incentivou incondicionalmente em todos os momentos de minha vida, principalmente nos mais difíceis sendo um exemplo de coragem.

Ao meu pai pelo companheirismo e exemplo de homem trabalhador, sempre me cobrando para que eu fosse uma pessoa de bom caráter.

À minha namorada Fernanda Eline pelas valiosas revisões textuais.

Aos meus colegas de curso que sempre discutiram idéias e me apoiaram nos momentos difíceis. Em especial, meu agradecimento aos meus amigos Ademir Aguiar, Aderval Alves, Douglas Hilário, Fernando Argote, Jefferson dos Santos, Lucyjane de Almeida, Marcelo Bezerra, Thamara Policarpo, Thiago Cavalcante e Ubirajara de Castro.

À CAPES e a UFG pelo auxílio financeiro.

RESUMO

Neste trabalho, estudaremos a dinâmica em campos de vetores suaves, em campos de vetores em variedades com bordo e em campos de vetores suaves por partes e cada um dos seus respectivos tipos de bifurcações mais conhecidos.

ABSTRACT

In this work, we will study the dynamics in smooth vector fields, in vector fields near the boundary and in piecewise-smooth vector fields and each of their most popular types of bifurcations up to now.

Sumário

1	Introdução	1
2	Conceitos Preliminares	3
2.1	Conceitos Preliminares de Análise	3
2.2	Conceitos Preliminares de Geometria	5
2.3	Conceitos Preliminares da Teoria Qualitativa das Equações Diferenciais Ordinárias	6
2.4	Conceitos Preliminares de Topologia	8
3	Sistemas Lineares	8
3.1	Pontos Críticos do tipo Foco, Sela e Centro	8
3.2	Sistemas Lineares Bidimensionais	9
3.3	Sistemas Lineares de Dimensão Superior	15
4	Sistemas não-lineares	17
4.1	Classificação de pontos e trajetórias	18
4.2	Teorema do Fluxo Tubular	18
4.3	Sistemas Dinâmicos	19
4.4	Teorema de Grobman-Hartman	20
4.5	Trajeto�rias Distintas	21
4.5.1	�rbitas Peri�dicas	21
4.6	A Aplica�o de Poincar�	23
5	Introdu�o �s Formas Normais	29
5.1	Rela�o de Equival�ncia Topol�gica	29
5.2	Prepara�o Preliminar das Equa�es	30
5.3	Simplifica�o de termos de segunda ordem	31
5.4	Teorema da Forma Normal	34
6	Bifurca�es em Campos Vetoriais Cont�nuos	35
6.1	Estabilidade Estrutural	35
6.2	Teorema de Peixoto	38
6.3	Bifurca�es em Pontos de Equil�brio N�o Hiperb�licos	39
6.3.1	Bifurca�o Sela-N�	39
6.3.2	Bifurca�o Transcr�tica	41
6.3.3	Bifurca�o Pitchfork	42
6.4	Bifurca�o Hopf	46

7	Campos vetoriais definidos em variedades com bordo	52
7.1	Estabilidade Estrutural em Campos Vetoriais definidos em Variedades com bordo	52
7.1.1	As Classes de Equivalência Topológicas	52
7.1.2	Aplicação de Primeiro Retorno para Campos Vetoriais em Variedades com Bordo	55
7.2	Σ -singularidades de codimensão um em variedades de dimensões dois e três	56
7.2.1	Variedades de dimensão 2	56
7.2.2	Variedades de dimensão 3	59
8	Sistemas Descontínuos	64
8.1	Campos de Filippov	64
8.2	Regiões de descontinuidade	65
8.3	Combinação convexa para campos vetoriais deslizantes	66
8.4	Singularidades e Estabilidade Estrutural em Campos de Filippov	70
9	Bifurcações Genéricas em $\Omega^r(n)$	71
9.1	Caso Bi-dimensional	72
9.2	Caso tridimensional: dobra-dobra	72
9.2.1	Partições do Conjunto das Singularidades Dobra-dobra.	73
10	Bifurcações do tipo <i>Grazing</i> e do tipo <i>Catastrophic</i> nos ciclos limite no \mathbb{R}^3	76
10.1	Introdução	76
10.2	O problema dobra-dobra	77
10.2.1	Dobra-dobra visível	81
10.2.2	Dobra-dobra visível-invisível	84
10.3	A Teixeira singularidade	89

1 Introdução

Nosso enfoque neste trabalho será o estudo das bifurcações, em especial os de codimensão zero e um de campos de vetores suave por partes.

Em relação à dinâmica de campos suaves, consideraremos os principais tipos de bifurcação e faremos um estudo paralelo comparando-lhes com os tipos de bifurcações para campos de vetores suaves por partes.

Sem pretensão de abordar o assunto sobre bifurcações em campos vetoriais suaves em sua totalidade, direcionaremos então o estudo aos campos vetoriais definidos em variedades com bordo, a fim de introduzirmos conceitos para campos vetoriais suaves por partes e algumas bifurcações importantes estudadas até o momento.

No Capítulo 2, faremos uma breve exposição das definições preliminares para nosso trabalho, sendo necessário apenas o conhecimento de conceitos básicos de Análise no \mathbb{R}^n encontrado em [16], a parte introdutória da Teoria Qualitativa das Equações Diferenciais Ordinárias, encontrado em [18], aspectos básicos de Geometria Diferencial, encontrado em [3] e, eventualmente, Álgebra Abstrata, para compreensão do leitor.

No Capítulo 3, apresentaremos os sistemas lineares e as suas respectivas dinâmicas, em especial, as bidimensionais.

No Capítulo 4, apresentaremos as definições relevantes e teoremas clássicos, tais como, o Teorema do Fluxo Tubular e o Teorema de Grobman-Hartman.

No Capítulo 5, baseado em [26], dedicamo-nos especialmente às formas normais, dada a sua tamanha importância em relação à simplificação de campos de vetores em sua forma de Taylor. Neste capítulo, apresentamos os procedimentos para transformar um dado sistema na sua forma normal e o Teorema das Formas Normais.

No Capítulo 6, baseado em [18], apresentaremos os casos clássicos de bifurcações para campos suaves: Sela-Nó, Trascrítica, Pitchfork e Hopf.

No Capítulo 7, baseado no artigo [22], estudaremos campos vetoriais em variedades definidas com bordo a fim de prepararmos os conceitos para estudarmos campos suaves por partes, definindo relação de equivalência. Definiremos ainda, através de uma construção, a aplicação de primeiro retorno para as variedades com bordo.

No Capítulo 8, usando os artigos [9], [11] e [24], será explanado como foi definido o campo suave por partes, a variedade de descontinuidade, a combinação convexa de acordo com a convenção de Filippov.

O Capítulo 9 foi dedicado apenas às bifurcações genéricas e o con-

junto das singularidades do tipo dobra-dobra.

Finalmente, no Capítulo 10, baseado em [4], [12] e [13], explanaremos as bifurcações em singularidades do tipo dobra-dobra, incluindo a Teixeira Singularidade, que possui uma dinâmica muito mais rica em relação às demais. Com isso, teremos condições para compararmos as bifurcações do caso contínuo com o caso suave por partes.

Esperamos, ao finalizar este trabalho, que ele possa trazer contribuições para a teoria das bifurcações dentro da área de Sistemas Dinâmicos e áreas de conhecimento relacionadas a ele.

2 Conceitos Preliminares

Este capítulo será dedicado a enunciar definições e teoremas importantes para o nosso trabalho, oriundos da Geometria Diferencial, Álgebra Abstrata e Análise no \mathbb{R}^n e que darão suporte a toda teoria que será apresentada.

Ao longo deste trabalho, estarão presentes alguns dos principais resultados conhecidos até então para campos suaves, tais como Teorema do Fluxo Tubular, Teorema de Hartman-Grobman, Teorema de Peixoto, Teorema de Sotomayor, além das bifurcações clássicas em campos suaves.

Note que ao longo do texto há uma pequena diferença na notação que distingue ponto do \mathbb{R}^n dada por x , da notação de coordenada, dada por (x_1, \dots, x_n) .

Todos os conceitos e teoremas desta subseção serão utilizados ao longo do trabalho. É necessário que o leitor tenha conhecimento básico das áreas de Análise e Geometria Diferencial, e alguns poucos tópicos de Álgebra.

2.1 Conceitos Preliminares de Análise

O conceito de diferenciabilidade para aplicações é uma importante definição para o nosso trabalho, conforme veremos a seguir:

Definição 2.1.1. Dizemos que uma aplicação $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$, definida no aberto $U \subset \mathbb{R}^m$ é **diferenciável** no ponto $a \in U$ quando existe uma aplicação linear $T_a : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ tal que:

$$f(a + v) - f(a) = T_a \cdot v + r(v),$$

onde $\lim_{v \rightarrow 0} \frac{r(v)}{\|v\|} = 0$ em que $a + v \in U$ e $\| \cdot \|$ denota a norma euclidiana

usual. A aplicação linear T desta definição é tal que $T_a \cdot v = \frac{\partial f}{\partial v}(a) = \left(\frac{\partial f_1}{\partial v}(a), \dots, \frac{\partial f_n}{\partial v}(a) \right)$.

Definição 2.1.2. Dados dois conjuntos $U \subset \mathbb{R}^n$ e $V \subset \mathbb{R}^n$, um **homeomorfismo** entre U e V é uma bijeção contínua $f : U \rightarrow V$, cuja inversa $f^{-1} : V \rightarrow U$ também é contínua.

Definição 2.1.3. Se U e V são conjuntos abertos em \mathbb{R}^n , uma função diferenciável $h : U \rightarrow V$ com inversa diferenciável $h^{-1} : V \rightarrow U$ será chamada **difeomorfismo**.

O próximo conceito será relevante para estudarmos a dinâmica sobre a variedade de descontinuidade, pois analisaremos os pontos fixos.

Definição 2.1.4. Um **ponto fixo** de uma aplicação $\xi : U \rightarrow \mathbb{R}^m$, $U \subset \mathbb{R}^m$, é um ponto $x \in U$ tal que $\xi(x) = x$. Denotaremos por $\text{Fix}(\xi)$ o conjunto dos pontos fixos $\{p \in U; \xi(p) = p\}$ em que U é um subconjunto aberto do \mathbb{R}^n .

Usando a definição de difeomorfismo, veremos uma definição relevante que será aplicada no último capítulo.

Definição 2.1.5. Dizemos que um difeomorfismo $\xi : U \rightarrow U$ de classe C^r onde $r > 1$ é uma **involução** se $\xi \circ \xi = \text{id}$, ou seja, se a inversa de ξ é ela mesma.

Exemplo 2.1.1. A aplicação $\xi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ dada por $\xi(x, y, z) = (y, x, -z)$ é uma involução.

A seguir, enunciaremos o Teorema de Sard, cuja demonstração pode ser encontrada em [16], página 360, que será útil para estudarmos campos de vetores definidos em variedades com bordo nos capítulos seguintes.

Teorema 2.1.1. (Teorema de Sard) Seja $f : M \rightarrow N$ uma aplicação de classe C^1 entre as superfícies de mesma dimensão m . Seja S o conjunto dos pontos $x \in M$ nos quais a derivada $f'(x) : T_x M \rightarrow T_{f(x)} M$ não é um isomorfismo. Então $f(S)$ tem medida de Lebesgue nula em N .

Em outras palavras, o Teorema de Sard diz que a imagem do conjunto S dos pontos singulares de uma aplicação de classe C^1 tem medida nula. Sua principal consequência é que $N - f(S)$ é denso em N . Em particular, $N - f(S) \neq \emptyset$, ou seja, toda aplicação $f : M \rightarrow N$ de classe C^1 entre superfícies de mesma dimensão possui valores regulares.

A seguir, temos uma importante definição que classifica uma aplicação linear quanto a sua hiperbolicidade. Note que esta definição concerne a um difeomorfismo, conceito diferente ao de ponto crítico hiperbólico, que veremos adiante.

Definição 2.1.6. Dizemos que um difeomorfismo é **hiperbólico** se nenhum dos autovalores possui valor absoluto igual a 1.

Definição 2.1.7. Seja $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ diferenciável. Dado um subconjunto $X \subset U$, diz-se que $f|_X$ é um **mergulho** de X em \mathbb{R}^n quando:

- 1) $f|_X$ é um homeomorfismo de X sobre $f(X)$;
- 2) para cada $x \in X$, a derivada $f'(x) : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ é injetiva.

Para maiores detalhes, consulte [16].

2.2 Conceitos Preliminares de Geometria

Considerando que o leitor está familiarizado com a definição de superfície, que pode ser encontrada em [2], veremos uma generalização desse conceito, pois ele depende do espaço em que se está definido, enquanto o conceito de variedade diferenciável é mais abstrato e não depende de nenhum espaço.

Definição 2.2.1. Uma *variedade diferenciável* de dimensão n é um conjunto M dotado de uma família de aplicações bijetoras $x_\alpha : U_\alpha \subset \mathbb{R}^n \rightarrow M$, onde $\alpha \in \Lambda$, $U_\alpha \subset \mathbb{R}^n$ abertos com as seguintes propriedades:

1. $\bigcup_{\alpha \in \Lambda} x_\alpha(U_\alpha) = M$, isto é, a união da imagem dos abertos U_α por x_α cobre M .
2. Para todo α, β com $x_\alpha(U_\alpha) \cap x_\beta(U_\beta) = W \neq \emptyset$, os conjuntos $x_\alpha^{-1}(W)$ e $x_\beta^{-1}(W)$ são abertos em \mathbb{R}^n e as aplicações $x_\beta^{-1} \circ x_\alpha$ e $x_\alpha \circ x_\beta^{-1}$ são diferenciáveis.
3. A família $\{(U_\alpha, x_\alpha)\}$ é máxima relativamente às condições 1. e 2.

O par (U_α, x_α) com $p \in x_\alpha(U_\alpha)$ é chamado uma *parametrização* de M .

Uma família $\{(U_\alpha, x_\alpha)\}$ que satisfaz 1. e 2. é chamada uma *estrutura diferenciável*.

Definição 2.2.2. Seja M uma variedade diferenciável. Uma aplicação diferenciável $\alpha : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow M$ é chamada uma *curva diferenciável* em M , onde $\varepsilon \in \mathbb{R}$.

Suponha $\alpha(0) = p \in M$ e seja $\mathcal{D} = \{f : M \rightarrow \mathbb{R}; f \text{ é diferenciável em } p \in M\}$. O *vetor tangente* à curva α em $t = 0$ é a função $\alpha'(0) : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$\alpha'(0)f = \left. \frac{d(f \circ \alpha)}{dt} \right|_{t=0}, \quad f \in \mathcal{D}.$$

Um vetor tangente em p é o vetor tangente em $t = 0$ de alguma curva $\alpha : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow M$ com $\alpha(0) = p$. O conjunto de vetores tangentes a M em p será indicado por $T_p M$. Escrevendo $\alpha(t) = (x_1(t), \dots, x_n(t))$, podemos expressar o vetor tangente $\alpha'(0)$ como

$$\begin{aligned} \alpha'(0)f &= \left. \frac{d}{dt}(f \circ \alpha) \right|_{t=0} = \left. \frac{d}{dt}f(x_1(t), \dots, x_n(t)) \right|_{t=0} = \\ &= \sum_{i=1}^n x'_i(0) \left(\left. \frac{\partial f}{\partial x_i} \right) \right|_{t=0} = \left(\sum_i x'_i(0) \left(\left. \frac{\partial}{\partial x_i} \right) \right) \right) f. \end{aligned}$$

ou seja, $\alpha'(0)$ pode ser expresso na parametrização x por

$$\alpha'(0) = \sum_i x'_i(0) \left(\frac{\partial}{\partial x_i} \right) \Big|_{t=0}. \quad (2.1)$$

Observando que $\left(\frac{\partial}{\partial x_i} \right) \Big|_{t=0}$ é o vetor tangente em p à “curva coordenada”:

$$x_i \rightarrow x(0, \dots, 0, x_i, 0, \dots, 0).$$

e que, por (2.1) o vetor tangente a uma curva α em p depende apenas das derivadas de α em um sistema de coordenadas, decorre que o conjunto $T_p M$, com as operações usuais de funções, forma um espaço vetorial de dimensão n , e que a escolha de uma parametrização $x : U \rightarrow M$ determina uma base associada

$$\left\{ \left(\frac{\partial}{\partial x_1} \right) \Big|_{t=0}, \dots, \left(\frac{\partial}{\partial x_n} \right) \Big|_{t=0} \right\} \text{ em } T_p M.$$

Desta maneira, $T_p M$ é chamado o *espaço tangente* de M em p .

Definição 2.2.3. *Um campo de vetores X em uma variedade diferenciável M é uma correspondência que a cada ponto $p \in M$ associa um vetor $X(p) \in T_p M$. Considerando uma parametrização $x : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow TM$, podemos escrever:*

$$X(p) = \sum_{i=1}^n a_i(p) \frac{\partial}{\partial x_i}$$

onde cada $a_i : U \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função em U e $\left\{ \left(\frac{\partial}{\partial x_i} \right) \right\}$ é a base associada à parametrização x , $i = 1, \dots, n$ e TM é a estrutura diferenciável chamado de fibrado tangente, dado por $TM = \{(p, v) : p \in M, v \in T_p M\}$.

Para maiores detalhes, consultar [3].

2.3 Conceitos Preliminares da Teoria Qualitativa das Equações Diferenciais Ordinárias

Nesta subseção enunciaremos o teorema fundamental da existência e unicidade de solução de uma equação diferencial ordinária

$$\dot{x} = f(t, x)$$

sob a hipótese que $f \in C^1(E)$ em que E é um subconjunto aberto do $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$. Para isto, definiremos o conceito de fluxo.

Definição 2.3.1. *Seja E um subconjunto aberto do \mathbb{R}^n e seja $f \in C^1(E)$. Para $x_0 \in U$, seja $\phi(t, x_0)$ a solução do problema de valor inicial com a condição inicial $x(0) = x_0$ definida no seu intervalo máximo de existência, denotado por $I(x_0)$. Então para $t \in I(x_0)$, o conjunto das aplicações definidas por*

$$\phi_t(x_0) = \phi(t, x_0)$$

*é chamada de **fluxo da equação diferencial** (2.3) ou fluxo definido pela equação diferencial $\dot{x} = f(x)$; ou ainda, também conhecido como **fluxo do campo de vetores** $f(x)$.*

Omitiremos a demonstração do próximo teorema, que se encontra em [18], página 74, e baseia-se no teorema do ponto fixo para contrações ([16], p. 278), no método das aproximações sucessivas de Picard e no fato de f ser *Lipschitziana*. Dizemos $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ ser *Lipschitziana*, com $U \subset \mathbb{R}^m$, se existe uma constante $K > 0$ tal que, para todo $x, y \in U$ tem-se

$$|f(x) - f(y)| \leq K|x - y|.$$

Quando $0 \leq K < 1$, dizemos que f é uma contração.

O Teorema 2.3.1 a seguir será usado nos sistemas suaves por partes para mostrar que certas trajetórias não podem coincidir na parte em que o campo é contínuo.

Teorema 2.3.1. *(Teorema Fundamental da Existência e Unicidade). Considere a equação diferencial com o problema de valor inicial*

$$\begin{cases} \dot{x} &= f(t, x) \\ x(t_0) &= x_0, \end{cases} \quad (2.2)$$

onde $f \in C^r(E)$, $r \geq 1$, em algum conjunto aberto $E \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$. Seja $(t_0, x_0) \in E$. Então existe um número $a > 0$ tal que (2.2) possui uma única solução $x(t)$ no intervalo $[t_0 - a, t_0 + a]$, passando por x_0 em $t = t_0$.

As definições a seguir serão usadas inúmeras vezes em quase todos os capítulos que se seguem.

Definição 2.3.2. *Dizemos que $x_0 \in \mathbb{R}^n$ é um **ponto de equilíbrio, singularidade** ou **ponto crítico** do sistema linear*

$$\dot{x} = f(x) \quad (2.3)$$

*se $f(x_0) = 0$, onde $f : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ é uma aplicação de classe C^k , $k \geq 2$. Assim, um ponto crítico $x_0 \in \mathbb{R}^n$ é chamado **poço** se todos os autovalores da*

matriz jacobiana $A = Df(x_0)$ possuem parte real negativa; é chamado **fonte** se todos os autovalores de $Df(x_0)$ possuem parte real positiva; é chamado **sela** se ele é um ponto de equilíbrio hiperbólico e $Df(x_0)$ possui pelo menos um autovalor real positivo e pelo menos um autovalor negativo. Dizemos que $x_0 \in \mathbb{R}^n$ é ponto crítico do tipo **centro** de (3.1) se todos os autovalores de A possuem parte real nula. (cf [18], Seção 2.6 e 2.10)

Definição 2.3.3. Um ponto de equilíbrio $x_0 \in \mathbb{R}^n$ do sistema (2.3) é chamado um **ponto de equilíbrio hiperbólico** se $f(x_0) = 0$ e nenhum dos autovalores da matriz jacobiana $Df(x_0)$ possuem parte real nula.

Definição 2.3.4. Pontos que não são de equilíbrio ou críticos são chamados de **pontos regulares** e as trajetórias que passam por pontos regulares são denominadas **trajetórias regulares**. Analogamente, trajetórias que passam por pontos de equilíbrio são denominadas **trajetórias singulares**.

Definição 2.3.5. Um ponto crítico do sistema $\dot{x} = f(x)$ na qual $Df(x_0)$ possua somente autovalores com parte real não nula é chamado um **ponto crítico não degenerado** e, caso contrário, é chamado um **ponto crítico degenerado** do sistema.

2.4 Conceitos Preliminares de Topologia

As seguintes definições serão usadas em diversas classificações nos capítulos finais.

Definição 2.4.1. Um subconjunto X de um espaço métrico M diz-se **magro** em M quando é uma reunião enumerável, $X = \bigcup X_n$, tal que, para cada $n \in \mathbb{N}$, $\text{int}\bar{X}_n = \emptyset$.

Definição 2.4.2. **Topologia induzida** de um subespaço S em um espaço topológico X é o conjunto das interseções de S com os abertos de X .

Definição 2.4.3. Dizemos que a **topologia produto** é a menor topologia em um produto de espaços topológicos que torna cada projeção canônica uma função contínua.

3 Sistemas Lineares

3.1 Pontos Críticos do tipo Foco, Sela e Centro

Como nosso objetivo inicial é estudar alguns tipos de bifurcações em sistemas lineares suaves, introduziremos os conceitos de pontos críticos do tipo foco,

centro, nó e sela sem os quais não poderemos prosseguir nas bifurcações mencionadas. Para o desenvolvimento de nosso trabalho, verificaremos de forma sucinta o comportamento dos sistemas lineares do tipo

$$\dot{x} = Ax \quad (3.1)$$

onde $x \in \mathbb{R}^n$ e $A \in M_n(\mathbb{R})$, onde $M_n(\mathbb{R})$ é o conjunto das matrizes quadradas reais de ordem n .

Dado um sistema do tipo (3.1), podemos diagonalizar A para simplificar sua análise qualitativa. Para isto, seja $B = P^{-1}AP$, onde P é a matriz que diagonaliza A . Para obter a matriz B , devemos determinar primeiramente a matriz P , cuja construção é obtida pelo seguinte Teorema e sua demonstração está indicada em [18].

Teorema 3.1.1. *Se os autovalores $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ de uma matriz $A_{n \times n}$ são reais, então qualquer conjunto de autovetores correspondentes $\{v_1, \dots, v_n\}$ forma uma base para \mathbb{R}^n . A matriz $P = [v_1, \dots, v_n]$ é invertível e além disso,*

$$P^{-1}AP = \text{diag}[\lambda_1, \dots, \lambda_n] = B.$$

Dizemos, neste caso, que as matrizes A e B são conjugadas.

3.2 Sistemas Lineares Bidimensionais

Podemos analisar o comportamento de (3.1) através do sistema linear $\dot{x} = Bx$, onde B assume uma das seguintes formas, no caso $n = 2$:

$$B = \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} \text{ ou } B = \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}.$$

Os Teoremas seguintes nos darão uma forma de encontrar soluções para o sistema (3.1), lembrando que a definição de exponencial de uma matriz $A \in M_n(\mathbb{R})$ é dada por

$$e^{tA} = I + tA + \frac{1}{2!}t^2A^2 + \frac{1}{3!}t^3A^3 + \dots + \frac{1}{j!}t^jA^j + \dots = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{j!}t^jA^j$$

em que I denota a matriz identidade de ordem n e $t \in \mathbb{R}$. Note que

$$\frac{d}{dt}e^{tA} = Ae^{tA}.$$

Não desviaremos nosso foco para estudar a convergência desta série, porém, com o propósito de compreender o processo de linearização, é importante observar que se uma matriz está diagonalizada na forma $D =$

$\text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$, podemos concluir que $D^j = \text{diag}(\lambda_1^j, \lambda_2^j, \dots, \lambda_n^j)$ e $e^D = \text{diag}(e^{\lambda_1}, e^{\lambda_2}, \dots, e^{\lambda_n})$. Assim, temos os seguintes teoremas:

Teorema 3.2.1. *Se $A, B, P \in M_n(\mathbb{R})$ são matrizes tais que $AP = PB$, então $e^A P = P e^B$. Em particular, se as matrizes A e B são conjugadas, também as matrizes e^A e e^B são conjugadas e, além disso, podemos usar a mesma matriz de conjugação; ou seja, se $P \in M_n(\mathbb{R})$ é invertível e $A = P B P^{-1}$, então*

$$e^A = P e^B P^{-1}.$$

Demonstração. Como $AP = PB$, temos que

$$A^2 P = A A P = A P B = P B B = P B^2$$

e, por indução, $A^j P = P B^j$, para todo $j \in \mathbb{N}$. Assim,

$$\begin{aligned} e^A P &= \left(\lim_{l \rightarrow \infty} \sum_{j=0}^l \frac{1}{j!} A^j \right) P = \lim_{l \rightarrow \infty} \sum_{j=0}^l \frac{1}{j!} A^j P \\ \lim_{l \rightarrow \infty} \sum_{j=0}^l \frac{1}{j!} P B^j &= P \left(\lim_{l \rightarrow \infty} \sum_{j=0}^l \frac{1}{j!} B^j \right) = P e^B. \end{aligned}$$

□

Teorema 3.2.2. *Se $A \in M_n(\mathbb{R})$, $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^n$ e $t \in \mathbb{R}$, então o caminho*

$$\mathbf{x}(t) = e^{tA} \mathbf{x}_0$$

define a única solução de (3.1) com a condição inicial $\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0$.

Demonstração. Derivando ambos os lados de $\mathbf{x}(t) = e^{tA} \mathbf{x}_0$ temos $\dot{\mathbf{x}}(t) = A e^{tA} \mathbf{x}_0$, onde é imediato que $\dot{\mathbf{x}}(t) = A \mathbf{x}(t)$ e, portanto, $\mathbf{x}(t)$ é solução de (3.1). □

Desta forma a solução para o problema de valor inicial

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} &= B \mathbf{x} \\ \mathbf{x}(0) &= \mathbf{x}_0 \end{cases}$$

supondo que A seja uma matriz já diagonalizada, é dada respectivamente por:

$$\mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} e^{\lambda t} & 0 \\ 0 & e^{\mu t} \end{bmatrix} \mathbf{x}_0, \quad \mathbf{x}(t) = e^{\lambda t} \begin{bmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{x}_0$$

ou

$$x(t) = e^{at} \begin{bmatrix} \cos(bt) & -\text{sen}(bt) \\ \text{sen}(bt) & \cos(bt) \end{bmatrix} x_0,$$

considerando as formas canônicas de Jordan de ordem 2.

Em cada caso, obtemos um *retrato de fase*, que é um esboço das curvas parametrizadas definidas pelas soluções da equação diferencial cujo objetivo é ilustrar o comportamento global das soluções com diferentes condições iniciais.

Essas soluções estão agrupadas de acordo com os seus respectivos tipos topológicos:

Caso 1 : Se $B = \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{bmatrix}$, com $\lambda < 0 < \mu$, temos uma sela na origem, conforme Figura 3.1.

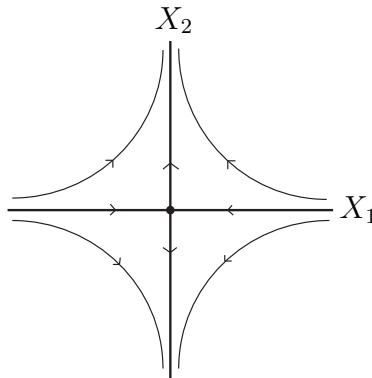


Figura 3.1: Um ponto crítico do tipo **Sela**.

Caso 2(a) : Se $B = \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{bmatrix}$, com $\lambda \leq \mu < 0$ temos que a origem é um nó estável na origem, conforme Figura 3.2(a) e 3.2(b).

Caso 2(b) : Se $B = \begin{bmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}$, com $\lambda < 0$, temos um nó impróprio atrator na origem, conforme Figura 3.2(c).

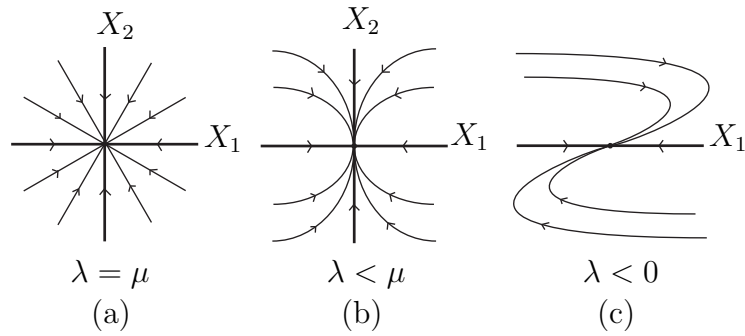


Figura 3.2: **Poço** (a), (b) e **Nó Impróprio** (c) na origem.

Caso 3 : Se $B = \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}$, com $a < 0$, temos um foco estável na origem, conforme Figura 3.3.

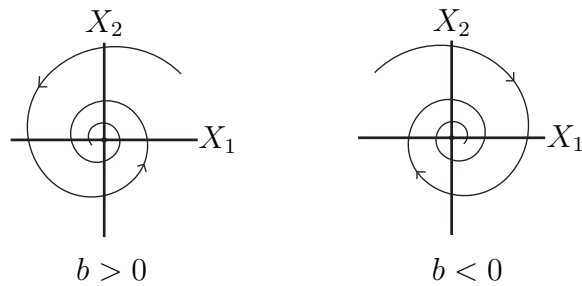


Figura 3.3: Um **Foco Estável** na origem.

Caso 4 : Se $B = \begin{bmatrix} 0 & -b \\ b & 0 \end{bmatrix}$ temos um centro na origem, conforme Figura 3.4.

Definição 3.2.1. Dizemos que o sistema linear (3.1) possui uma sela, nó, foco ou centro na origem se a matriz A for do tipo B , apresentado nos casos (1), (2), (3) ou (4), respectivamente.

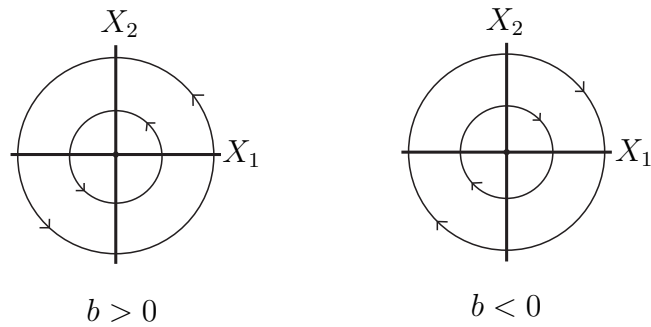


Figura 3.4: Um **Centro** na origem.

Observe que, nos casos (1), (2), (3) e (4), a dinâmica do sistema (3.1) em \mathbb{R}^2 muda de acordo com alguns elementos dessa matriz. O Teorema 3.2.3 a seguir, para o caso $n = 2$, resume o estudo para os sistemas lineares:

Teorema 3.2.3. *Considere o sistema linear (3.1) e sejam $\delta = \det A$ e $\tau = \text{tr } A$ onde $\mathbf{x} = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ e $A \in M_2(\mathbb{R})$. Sendo assim:*

- (a) *Se $\delta < 0$, então (3.1) possui uma sela na origem.*
- (b) *Se $\delta > 0$ e $\tau^2 - 4\delta \geq 0$ então (3.1) possui um nó na origem, sendo:*
 - (i) *estável, se $\tau < 0$;*
 - (ii) *instável, se $\tau > 0$.*
- (c) *Se $\delta > 0$ e $\tau^2 - 4\delta < 0$ então (3.1) possui um foco na origem, sendo:*
 - (i) *estável, se $\tau < 0$;*
 - (ii) *instável, se $\tau > 0$.*
- (d) *Se $\delta > 0$ e $\tau = 0$, então (3.1) possui um centro na origem.*

Veja Figura 3.5.

Demonstração. Seja o sistema (3.1) com a matriz

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

Calculando os autovalores,

$$\det (A - \lambda I) = \begin{vmatrix} a - \lambda & b \\ c & d - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

obtemos equação característica

$$\lambda^2 - (a + d)\lambda + (ad - bc) = 0$$

isto é,

$$\lambda^2 - \tau\lambda + \delta = 0$$

onde obtemos os autovalores

$$\lambda_{1,2} = \frac{\tau \pm \sqrt{\tau^2 - 4\delta}}{2}.$$

Daí, escrevendo o discriminante $\Delta = \tau^2 - 4\delta$:

- (a) se $\delta < 0$ então λ_1 e λ_2 são reais de sinais opostos. A origem, portanto, é uma sela.
- (b) se $\delta > 0$ e $\Delta \geq 0$ então λ_1 e λ_2 são reais de mesmo sinal. Portanto, a origem é um nó, sendo estável para $\tau < 0$ e instável para $\tau > 0$.
- (c) se $\delta > 0$ e $\Delta < 0$ então λ_1 e λ_2 são complexos e conjugados $\lambda_{1,2} = \alpha \pm i\beta$. Portanto, a origem é um foco estável para $\tau < 0$ e instável para $\tau > 0$.
- (d) se $\delta > 0$ e $\tau = 0$ então λ_1 e λ_2 são imaginários puros. Logo, a origem é um centro.

□

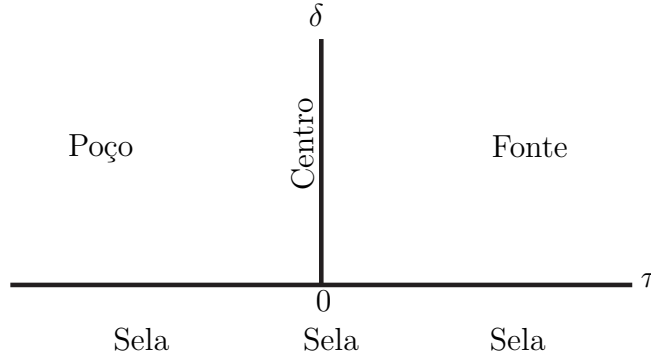


Figura 3.5: Diagrama de variação de δ e τ para o Teorema 3.2.3.

Maiores detalhes podem ser encontrados em [18], Seção 1.5.

3.3 Sistemas Lineares de Dimensão Superior

Para o caso mais geral, onde $n > 2$, considerando a Forma Canônica de Jordan, podemos concentrar nosso estudo nos blocos que compõem sua Forma Canônica. Para ilustrar, vejamos o seguinte exemplo:

Exemplo 3.3.1. *Considere o sistema $\dot{x} = Ax$, com*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Calculando os seus autovalores:

$$\det[\lambda I - A] = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} \lambda - 1 & 0 & 0 \\ -1 & \lambda - 2 & 0 \\ -1 & 0 & \lambda + 1 \end{vmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow (\lambda - 1) \cdot (\lambda - 2) \cdot (\lambda + 1) = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 1, \lambda_2 = 2, \lambda_3 = -1.$$

Explicitemos agora os respectivos autovetores:

(i) Para $\lambda_1 = 1$, seja $\vec{v}_1 = (a \ b \ c)^T$ o autovetor associado ao autovalor λ_1 .

Temos

$$(I - A)(\vec{v}_1) = \vec{0} \Rightarrow \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

onde obtemos o autovetor $\vec{v}_1 = (2, -2, 1)^T$ associado ao autovalor $\lambda_1 = 1$

(ii) Para $\lambda_2 = 2$, temos

$$(I - A)(\vec{v}_2) = \vec{0} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

onde obtemos o autovetor $\vec{v}_2 = (0, 1, 0)^T$ associado ao autovalor $\lambda_2 = 2$

(iii) Para $\lambda_3 = -1$, temos

$$(I - A)(\vec{v}_3) = \vec{0} \Rightarrow \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ -1 & -3 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

onde obtemos o autovetor $\vec{v}_3 = (0, 0, 1)^T$ associado ao autovalor $\lambda_3 = -1$.

Note que os vetores \vec{v}_1, \vec{v}_2 e \vec{v}_3 formam uma base de \mathbb{R}^3 e $x_1(t) = e^t \cdot \vec{v}_1, x_2(t) = e^{2t} \cdot \vec{v}_2$ e $x_3(t) = e^{-t} \cdot \vec{v}_3$ formam uma base para o espaço da solução de (3.1). Temos os seguintes subespaços: $E^S = \text{Span}\{\vec{v}_3\}$ estável ($\lambda_3 < 0$) e $E^U = \text{Span}\{\vec{v}_1, \vec{v}_2\}$ instável ($\lambda_1, \lambda_2 > 0$). Pelo Teorema 3.1.1, obtemos a matriz

$$P = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

que diagonaliza A ; então

$$x(t) = P \cdot \begin{bmatrix} e^t & 0 & 0 \\ 0 & e^{2t} & 0 \\ 0 & 0 & e^{-t} \end{bmatrix} \cdot P^{-1}$$

$$\Rightarrow x(t) = \begin{bmatrix} e^t & 0 & 0 \\ -e^t + e^{2t} & e^{2t} & 0 \\ -(e^{-t} + e^t)/2 & 0 & e^{-t} \end{bmatrix} x_0,$$

Para o retrato de fase, analisaremos os autovalores, dois a dois:

(i) Para $\lambda_1 = 1$ e $\lambda_2 = 2$, ambos positivos, temos um nó repulsor na origem do autoespaço $\text{Span}\{\vec{v}_1, \vec{v}_2\}$;

- (ii) Para $\lambda_1 = 1$ e $\lambda_3 = -1$, temos uma sela na origem do autoespaço $Span\{\vec{v}_1, \vec{v}_3\}$;
- (iii) Para $\lambda_2 = 2$ e $\lambda_3 = -1$, também temos uma sela na origem do autoespaço $Span\{\vec{v}_2, \vec{v}_3\}$.

Finalmente, obtemos o retrato de fase explicitado na Figura 3.6.

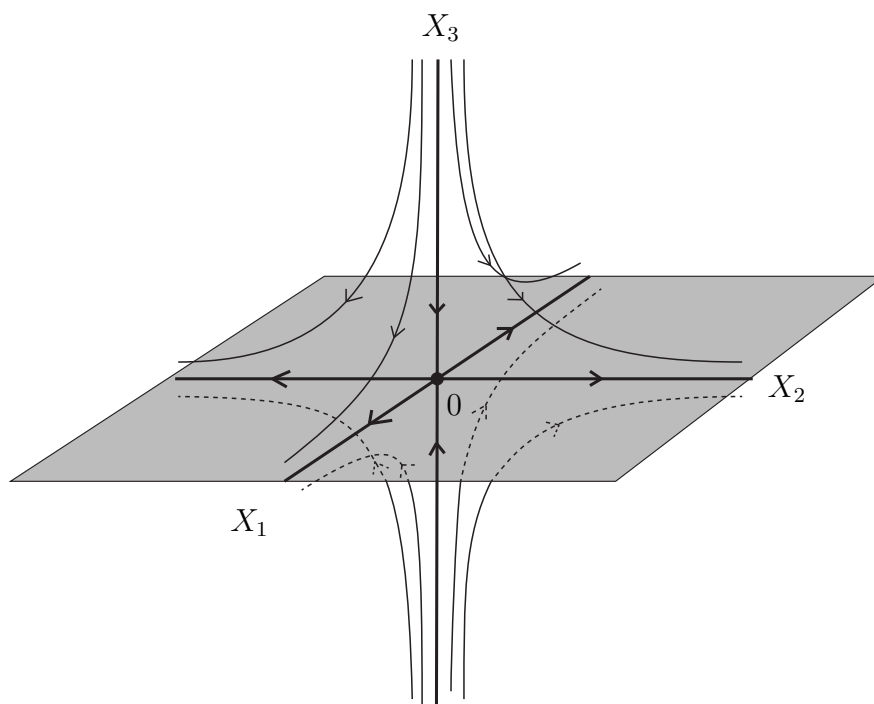


Figura 3.6: Uma **singularidade sela** no espaço \mathbb{R}^3 .

4 Sistemas não-lineares

Nesta seção, apresentaremos resumidamente os principais resultados da teoria local dos sistemas não-lineares bem como o processo de linearização, utilizando o Teorema de Grobman-Hartman para pontos críticos hiperbólicos.

4.1 Classificação de pontos e trajetórias

O sistema linear

$$\dot{x} = Ax \tag{4.1}$$

é chamado de **linearização** do sistema $\dot{x} = f(x)$ em uma vizinhança de $x_0 \in \mathbb{R}^n$, onde $A = Df(x_0)$ é o jacobiano de f em x_0 .

A linearização do campo serve para dar condições, por meio do estudo do campo linearizado (que é mais simples), para que obtenhamos informações sobre a dinâmica do campo $\dot{x} = f(x)$ original. Isto será feito através do Teorema de Grobman-Hartman adiante.

4.2 Teorema do Fluxo Tubular

Nesta subseção, estudaremos um fato peculiar que ocorre numa vizinhança de um ponto regular do campo.

Definição 4.2.1. *Considere um campo de vetores*

$$f : E \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n \text{ tal que } \dot{x} = f(t, x) .$$

*Dizemos que $x_0 \in E$ possui a **propriedade do fluxo tubular** se existem uma vizinhança $U \subset E$ de x_0 , denominada vizinhança tubular de x_0 , um aberto $W \subset \mathbb{R}^{n-1}$, uma constante $\varepsilon > 0$ e um difeomorfismo $h : U \rightarrow (-\varepsilon, \varepsilon) \times W$ que conjuga o fluxo ϕ_t de f em U com o fluxo ψ_t do campo constante $\bar{f}(y_1, y_2, \dots, y_n) = (1, 0, \dots, 0)$ em $(-\varepsilon, \varepsilon) \times W$, ou seja, vale*

$$\psi(t, h(x)) = h(\phi(t, x))$$

qualquer que seja $x \in U$ e cada $|t| < \varepsilon$.

Isto significa que o ponto $x_0 \in U$ possui a propriedade do fluxo tubular se o campo de vetores f , na vizinhança de x_0 , é dado por \bar{f} , a menos de uma mudança de coordenadas. Observe que na vizinhança tubular não pode haver singularidades do campo. Sendo assim, motivando para o próximo teorema que afirma: “todo campo, localmente em torno de um ponto regular, se comporta como o campo constante \bar{f} , como ilustrado na Figura 4.1”. A demonstração deste teorema pode ser encontrado em [20].

Teorema 4.2.1. *(Teorema do Fluxo Tubular)*

Seja $f : E \rightarrow \mathbb{R}^n$ um campo de classe $C^1(E)$, onde $E \subset \mathbb{R}^n$ é um aberto. Se $x_0 \in E$ não é ponto de equilíbrio, então x_0 tem a propriedade do fluxo tubular.

Note que o Teorema do Fluxo Tubular afirma que localmente em torno de x_0 , que não seja singularidade, o campo f na vizinhança U de x_0 é sempre integrável!

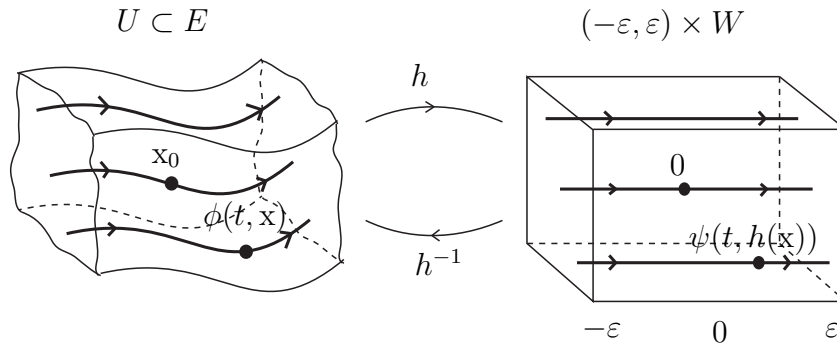


Figura 4.1: Teorema do Fluxo Tubular.

4.3 Sistemas Dinâmicos

Os Sistemas Dinâmicos nos permitem ter a descrição funcional de um fenômeno físico ou de algum modelo matemático descrevendo um problema físico que depende do tempo, conforme [19]. Mas o que é um Sistema Dinâmico?

Definição 4.3.1. *Um sistema dinâmico em E é uma aplicação de classe C^1*

$$\phi : \mathbb{R} \times E \rightarrow E$$

onde E é um conjunto aberto do \mathbb{R}^n e se $\phi_t(x) = \phi(t, x)$, então ϕ_t satisfaz as seguintes propriedades:

- (i) $\phi_0(x) = x$, para todo $x \in E$;
- (ii) $\phi_{t+s}(x) = \phi_t \circ \phi_s(x)$, para todo $s, t \in \mathbb{R}$ e para todo $x \in E$.

Considere o sistema dinâmico $\dot{x} = f(t, x)$, com $f \in C^1(E)$, onde $E \subset \mathbb{R}^n$ é aberto. Para $x \in E$, a função $\phi(\cdot, x) : \mathbb{R} \rightarrow E$ define uma **solução**, **trajetória** ou **órbita** deste sistema passando pelo ponto $x_0 \in E$.

Em outras palavras, um Sistema Dinâmico é uma aplicação que descreve o comportamento de um objeto à medida que o tempo varia.

Do ponto de vista da Álgebra, se $Dif(n) = \{f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n; f \text{ é um difeomorfismo}\}$ (o leitor pode verificar que $(Dif(n), \circ)$ é um grupo com a

composição de aplicações), então um sistema dinâmico agindo em \mathbb{R}^n é um homomorfismo de grupos $\phi(\cdot, x) : \mathbb{R} \rightarrow Dif(n)$ tal que $\phi(t+s) = \phi(t) \circ \phi(s)$.

A partir deste ponto do trabalho, podemos falar em Sistemas Dinâmicos lineares, não-lineares, Sistemas Dinâmicos suaves e suave por partes, dentre outros.

4.4 Teorema de Grobman-Hartman

O próximo teorema nos dá condições de determinarmos completamente o comportamento qualitativo de sistema não linear em uma vizinhança de um ponto crítico hiperbólico, por meio do processo de linearização do campo vetorial.

Suponhamos, sem perda de generalidade, que o ponto crítico está na origem do espaço euclidiano, pois caso contrário, pode-se translada-lo para a origem utilizando a translação $x \mapsto x - x_0$.

Teorema 4.4.1. (*Grobman-Hartman*) *Seja E um subconjunto aberto do \mathbb{R}^n contendo a origem, $f \in C^1(E)$ e seja ϕ_t o fluxo do sistema não linear (2.3). Suponha $f(0) = 0$ e que a matriz $A = Df(0)$ não tenha nenhum autovalor com parte real nula. Então existe um homeomorfismo H de um conjunto aberto U contendo a origem em um conjunto aberto V contendo a origem tal que para cada $x_0 \in U$, existe um intervalo aberto $I_0 \subset \mathbb{R}$ contendo a origem tal que para todo $x_0 \in U$ e $t \in I_0$,*

$$H \circ \phi_t(x_0) = e^{At} H(x_0)$$

i.e., H leva trajetórias de (2.3) em trajetórias de (4.1) em uma vizinhança da origem e preserva a orientação pelo tempo.

Como consequência, temos o seguinte corolário: “ Considere um sistema não linear do tipo (2.3)” :

Corolário 4.4.1. *Seja E um subconjunto aberto do \mathbb{R}^n contendo a origem e seja $f \in C^2(E)$. Suponha que a origem seja um ponto crítico hiperbólico do sistema $\dot{x} = Ax$, onde $A = Df(0)$. Então a origem é um poço (ou fonte) para o sistema não linear $\dot{x} = f(x)$ se, e somente se ele é um poço (ou fonte) para o sistema linear $\dot{x} = Ax$. Analogamente, a origem é um poço (ou fonte) do sistema não linear $\dot{x} = f(x)$ se, e somente se, ele é um poço (ou fonte) do sistema linear $\dot{x} = Ax$.*

4.5 Trajetórias Distintas

Nesta seção, apresentaremos alguns tipos topológicos de órbitas de um campo de vetores

$$\dot{x} = f(x) \quad (4.2)$$

onde $x \in \mathbb{R}^n$.

4.5.1 Órbitas Periódicas

Definição 4.5.1. Um **ciclo** ou **órbita periódica** de período T de $\dot{x} = f(x)$ é qualquer curva solução fechada e limitada de $\dot{x} = f(x)$ que não seja um ponto de equilíbrio de $\dot{x} = f(x)$, isto é,

$$\Gamma = \{\phi(t, x); s \leq t < s + T\}$$

onde a curva solução ϕ descreve toda uma curva fechada e limitada em qualquer intervalo de período T uma única vez, qualquer que seja $s \in \mathbb{R}$.

Definição 4.5.2. Seja E um subconjunto aberto do \mathbb{R}^n . Um ponto $p \in E$ é um **ponto ω -limite** de uma trajetória $\phi(\cdot, x)$ do sistema $\dot{x} = f(x)$ se existir uma sequência $t_n \rightarrow +\infty$ tal que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \phi(t_n, x) = p$$

e, analogamente, se existir uma sequência $t_n \rightarrow -\infty$ tal que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \phi(t_n, x) = q$$

com $q \in E$, então o ponto q é chamado de **ponto α -limite**, conforme ilustrado na Figura 4.2.

Seguindo um raciocínio análogo à definição de ponto limite, temos a seguir os conjuntos limite.

O conjunto de todos os pontos ω -limite de uma trajetória Γ é chamada de **conjunto ω -limite**, denotado por

$$\omega(x) = \{p \in E; \exists \{t_n\} \text{ com } t_n \rightarrow \infty \text{ e } \phi(t_n) \rightarrow p, \text{ quando } n \rightarrow \infty\},$$

e, analogamente, o conjunto de todos os pontos α -limite é chamado de **conjunto α -limite**, denotado por

$$\alpha(x) = \{p \in E; \exists \{t_n\} \text{ com } t_n \rightarrow -\infty \text{ e } \phi(t_n) \rightarrow p, \text{ quando } n \rightarrow \infty\}.$$

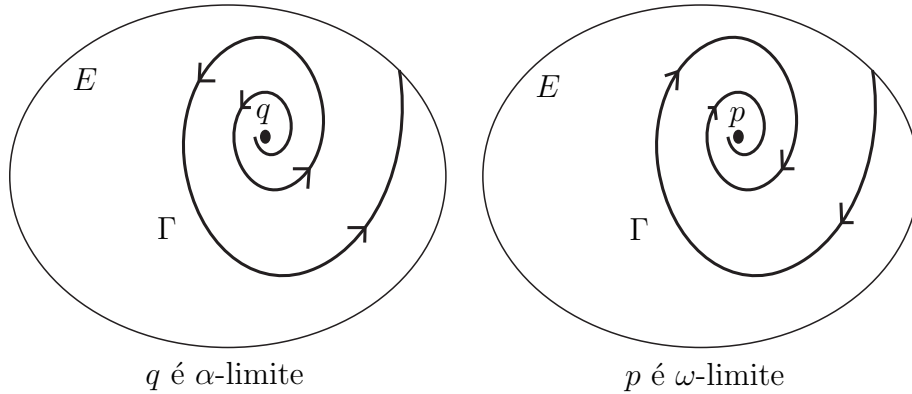


Figura 4.2: Pontos Limite.

Finalmente, o conjunto de todos os pontos limites de Γ , o conjunto $\alpha(x) \cup \omega(x)$ é chamado simplesmente de **conjunto limite de Γ** , conforme Figura 4.3.

Se qualquer ponto p regular está em $\alpha(p)$ ou $\omega(p)$ então a trajetória através de p é chamada de **órbita limite de Γ** .

Definição 4.5.3. *Sejam U um conjunto aberto de \mathbb{R}^2 e $X : U \rightarrow \mathbb{R}^2$ um campo vetorial de classe C^1 . Uma órbita periódica Γ é um **ciclo limite** Γ de um sistema planar $\dot{x} = f(x)$ se existir uma vizinhança V de Γ tal que Γ é a única órbita fechada de X que intercepta V .*

Proposição 4.5.1. *Com as notações da Definição 4.5.3, existem apenas os seguintes tipos de ciclos limites (diminuindo V , se necessário):*

- (a) **Estável**, quando $\lim_{t \rightarrow +\infty} d(\phi(t, x), \Gamma) = 0$, para todo $x \in V$;
- (b) **Instável**, quando $\lim_{t \rightarrow -\infty} d(\phi(t, x), \Gamma) = 0$, para todo $x \in V$;
- (c) **Semi-estável**, quando $\lim_{t \rightarrow +\infty} d(\phi(t, x), \Gamma) = 0$, para todo $x \in V \cap Ext\Gamma$ e $\lim_{t \rightarrow -\infty} d(\phi(t, x), \Gamma) = 0$, para todo $x \in V \cap Int\Gamma$, ou caso contrário.

A demonstração da Proposição 4.5.1 pode ser conferida em [20].

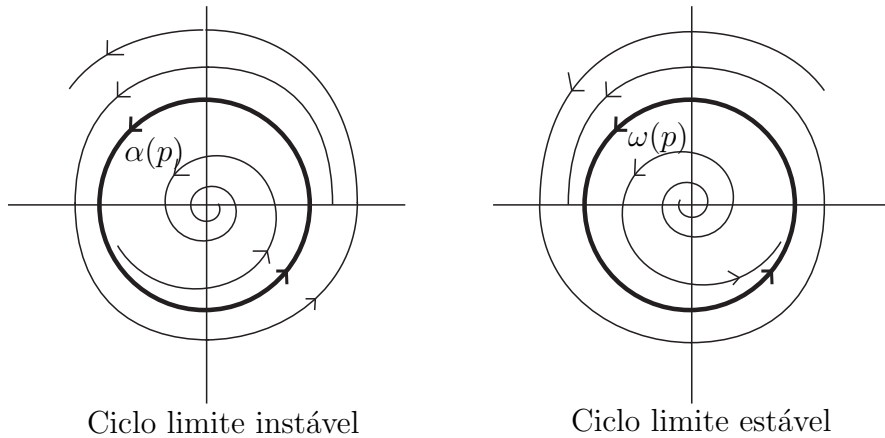


Figura 4.3: Exemplos de Ciclos Limite.

4.6 A Aplicação de Poincaré

A seguir, definiremos um importante conceito no estudo do comportamento de ciclos limite. Primeiramente, introduziremos o conceito de seção transversal local numa vizinhança de $x_0 \in E \subset \mathbb{R}^n$ que é um ponto regular do campo de vetores $\dot{x} = f(x)$.

Sejam M uma variedade diferenciável e $f : M^n \rightarrow \overline{M}^{n+1}$ uma imersão de codimensão 1. Então, para cada $p \in M$, existe uma vizinhança $E \subset M$ de p tal que $f(E) \subset \overline{M}$ é uma subvariedade de \overline{M} . A esta subvariedade $\Sigma = f(E)$ denominamos *hiperplano*.

Esse hiperplano pode ser imerso de muitas formas. Para nossos propósitos, será mais útil que ele seja transversal ao fluxo do campo de vetores em questão, no seguinte sentido: sejam $f : E \rightarrow \mathbb{R}^n$, $E \subset \mathbb{R}^n$ e $x_0 \in E$ um ponto regular de f . Dizemos que um hiperplano Σ contendo x_0 é *transversal* a f em x_0 se o vetor $f(x_0)$ não está contido em Σ . No caso de Σ ser perpendicular, temos $\Sigma = \{x \in \mathbb{R}^n | (x - x_0) \cdot f(x_0) = 0\}$. É evidente que o hiperplano Σ poderá ser transversal a qualquer órbita, em particular, para órbitas periódicas, conforme detalhamento a seguir. A Aplicação de Poincaré está ilustrada na Figura 4.4. Enunciaremos o seguinte Teorema, cuja demonstração é uma aplicação imediata do Teorema da Função Implícita e pode ser visto em [1], [18] e [26]:

Teorema 4.6.1. *Seja E um subconjunto aberto do \mathbb{R}^n e $f \in C^1(E)$. Suponha*

que $\phi_t(\mathbf{x}_0)$ seja uma solução de (4.2) de período T e que o ciclo limite

$$\Gamma = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n; \mathbf{x} = \phi_t(\mathbf{x}_0), 0 \leq t \leq T\}$$

esteja contido em E . Seja Σ o hiperplano ortogonal a Γ em \mathbf{x}_0 , também chamado de **Seção Transversal**, mais precisamente

$$\Sigma = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n; (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) \cdot \mathbf{f}(\mathbf{x}_0) = 0\}.$$

Então existem um $\delta > 0$ e uma única função $\tau(\mathbf{x})$, definida e continuamente diferenciável em $\mathbf{x} \in N_\delta(\mathbf{x}_0)$, onde $N_\delta(\mathbf{x}_0)$ é vizinhança centrada em \mathbf{x} de raio δ , tal que $\tau(\mathbf{x}_0) = T$ e

$$\phi_{\tau(\mathbf{x})}(\mathbf{x}) \in \Sigma,$$

para todo $\mathbf{x} \in N_\delta(\mathbf{x}_0)$.

Definição 4.6.1. Sejam Γ , Σ , δ e $\tau(\mathbf{x})$ definido no Teorema 4.6.1. Então, para $\mathbf{x} \in N_\delta \cap \Sigma$, a função

$$P(\mathbf{x}) = \phi_{\tau(\mathbf{x})}(\mathbf{x})$$

é denominada **Aplicação de Poincaré**, também chamada de **Aplicação de Primeiro Retorno**.

A Aplicação de Poincaré também é usada para verificar a existência de ciclos limite analisando a imagem da função deslocamento.

Concentramo-nos agora no caso onde $n = 2$. Observe que o Teorema 4.6.1 afirma que a Aplicação de Poincaré $P(s)$ está definida para $|s| < \delta$ e, portanto, $P(0) = 0$. Como consequência, podemos verificar a estabilidade de um ciclo Γ determinado por $P'(0)$ definindo a seguinte função:

Definição 4.6.2. Dado a Aplicação de Primeiro Retorno de Poincaré da Definição 4.6.1, a função deslocamento é dada por:

$$d(s) = P(s) - s.$$

Assim, temos $d(0) = 0$ e $d'(s) = P'(s) - 1$; aplicando o Teorema do Valor Médio, para $|s| < \delta$, existe um número c entre 0 e s tal que

$$d(s) = d'(c) \cdot s.$$

Como $d'(s)$ é contínua, o sinal de $d'(s)$ será o mesmo de $d'(0)$ numa vizinhança de s , desde que $d'(0) \neq 0$. Portanto, se $d'(0) < 0$, temos $d(s) < 0$ para $s > 0$ e $d(s) > 0$ para $s < 0$, isto é, Γ é estável. Isso é equivalente a dizer que se $P'(0) < 1$, então Γ é estável. Analogamente para $d'(0) > 0$, se $P'(0) > 1$, então Γ é instável. Esclareceremos no exemplo a seguir que a estabilidade de Γ fica determinada pela derivada da Aplicação de Poincaré.

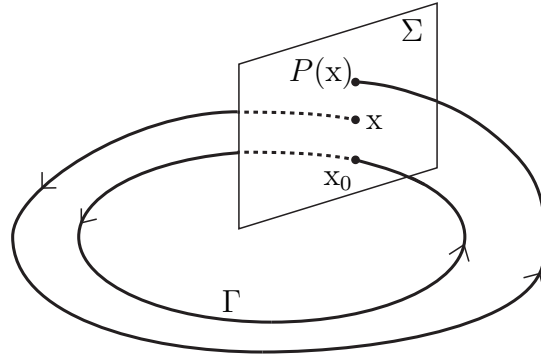


Figura 4.4: Aplicação de Primeiro Retorno de Poincaré.

Exemplo 4.6.1. *Considere o seguinte sistema:*

$$\begin{cases} \dot{x} = -y + x(1 - x^2 - y^2) \\ \dot{y} = x + y(1 - x^2 - y^2). \end{cases} \quad (4.3)$$

O termo $-(x^2 + y^2)$ que aparece no sistema sugere uma mudança para coordenadas polares

$$\begin{cases} x = r \cos \theta \\ y = r \operatorname{sen} \theta, \end{cases}$$

onde

$$\begin{cases} r^2 = x^2 + y^2 \\ \operatorname{tg} \theta = \frac{y}{x}. \end{cases} \quad (4.4)$$

Derivando as equações de (4.4) e substituindo convenientemente \dot{x} e \dot{y} no sistema (4.3), obtemos

$$\begin{cases} \dot{r} = r(1 - r^2) \\ \dot{\theta} = 1, \end{cases} \quad (4.5)$$

em que o leitor pode verificar que (4.5) possui um ciclo limite Γ representado por $\gamma(t) = (\cos(t), \operatorname{sen}(t))^T$, conforme Figura 4.5.

A Aplicação de Poincaré para Γ pode ser obtida resolvendo a primeira equação de (4.5) por separação de variáveis e aplicando frações parciais com a condição inicial $r(0) = r_0$ e $\theta(0) = \theta_0$ de modo que a solução da

primeira equação de (4.5) é dada por

$$r(t, r_0) = \left[1 + \left(\frac{1}{r_0^2} - 1 \right) e^{-2t} \right]^{-1/2}$$

e

$$\theta(t, \theta_0) = t + \theta_0.$$

Supondo que Σ passa pela origem com ângulo $\theta = \theta_0$, então Σ é perpendicular a Γ e a trajetória que passa pelo ponto (r_0, θ_0) em $\Sigma \cap \Gamma$ no instante $t = 0$ intersecta Σ novamente quando $t = 2\pi$, conforme pode ser visto na Figura 4.5.

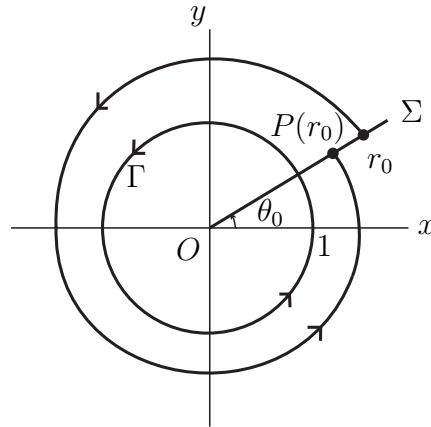


Figura 4.5: Aplicação de Poincaré para o sistema (4.3).

Construída desta maneira, a Aplicação de Poincaré para o sistema (4.3) é dada por

$$P(r_0) = \left[1 + \left(\frac{1}{r_0^2} - 1 \right) e^{-4\pi} \right]^{-1/2}.$$

Pode-se observar que $P(1) = 1$ corresponde ao ciclo limite Γ e a derivada de $P(r_0)$ é facilmente calculada, onde obtemos:

$$P'(r_0) = e^{-4\pi} \cdot r_0^{-3} \cdot \left[1 + \left(\frac{1}{r_0^2} - 1 \right) e^{-4\pi} \right]^{-3/2}$$

em que $P'(1) = e^{-4\pi} < 1$ mostra que Γ é um ciclo limite atrator, conforme mostra a Figura 4.5.

Portanto, o sinal da derivada da Aplicação de Poincaré nos mostra a estabilidade do ciclo limite Γ : se $P'(r_0) < 1$, Γ é estável; se $P'(r_0) > 1$, Γ é instável.

O Teorema 4.6.2 a seguir fornece uma fórmula para $P'(0)$ em termos do campo vetorial $f(x)$ do sistema (2.3), cuja demonstração se encontra em [1], página 118.

Teorema 4.6.2. *Seja E um subconjunto aberto de \mathbb{R}^2 e suponha que $f \in C^1(E)$. Seja $\gamma(t)$ uma solução periódica de (2.3) de período T . Então a derivada da aplicação de Poincaré $P(r_0)$ ao longo da seção transversal Σ normal a $\Gamma = \{x \in \mathbb{R}^2 / x = \gamma(t) - \gamma(0), 0 \leq t \leq T\}$ em $x = 0$ é dada por*

$$P'(0) = \exp \int_0^T \nabla \cdot f(\gamma(t)) dt,$$

onde ∇f denota o divergente de f dado por

$$\nabla f = \frac{\partial f_1}{\partial x} + \frac{\partial f_2}{\partial y}.$$

Uma das importantes consequências do Teorema 4.6.2 é o Corolário 4.6.1 que nos fornece uma interpretação de $P'(0)$ para determinar se dada solução $\gamma(t)$ é um ciclo limite estável ou instável conforme o sinal de $P'(0)$: estável se negativo e instável se positivo.

Corolário 4.6.1. *Sob as hipóteses do Teorema 4.6.2, a solução periódica $\gamma(t)$ é um ciclo limite estável se:*

$$\exp \int_0^T \nabla \cdot f(\gamma(t)) dt < 0$$

e é um ciclo limite instável se

$$\exp \int_0^T \nabla \cdot f(\gamma(t)) dt > 0.$$

A Aplicação de Poincaré é amplamente usada no estudo de ciclos limites e será vista com certa frequência.

Exemplo 4.6.2. *Mostre que $\gamma(t) = (2\cos(2t), \sin(2t))^T$ é uma solução periódica do sistema*

$$\begin{cases} \dot{x} &= -4y + x \left(1 - \frac{x^2}{4} - y^2\right) \\ \dot{y} &= x + y \left(1 - \frac{x^2}{4} - y^2\right) \end{cases}$$

e mostre que $\gamma(t)$ representa um ciclo limite estável deste sistema.

Resolução:

Para mostrar que $\gamma(t)$ é solução periódica, basta substituir $\gamma(t)$ no sistema, onde obtemos

$$\begin{aligned}\dot{x} &= -4 \cdot \text{sen}(2t) \\ \dot{y} &= 2 \cdot \text{cos}(2t)\end{aligned}$$

que é claramente um ciclo do sistema, com período $t = 2\pi$.

Reescrevendo o sistema na seguinte notação:

$$\begin{cases} f_1 = -4y + x \left(1 - \frac{x^2}{4} - y^2\right) \\ f_2 = x + y \left(1 - \frac{x^2}{4} - y^2\right), \end{cases}$$

calcularemos o divergente. Por:

$$(i) \frac{\partial f_1}{\partial x} = 1 - \frac{3x^2}{4} - y^2;$$

$$(ii) \frac{\partial f_1}{\partial x} = 1 - \frac{x^2}{4} - 3y^2,$$

obtemos o divergente $\nabla f = 2 - (x^2 + 4y^2)$. Substituindo $\gamma(t)$, vemos que $\nabla f(\gamma(t)) = -2$. Aplicando o Corolário 4.6.1, tem-se

$$\exp \int_0^T \nabla \cdot f(\gamma(t)) dt = \exp \int_0^T -2 dt = -2 \cdot \exp \int_0^T dt = -2 \cdot e^T < 0.$$

Concluimos que Γ é um ciclo limite estável.

5 Introdução às Formas Normais

Este capítulo será dedicado a uma técnica utilizada para reduzir ao máximo os termos de maior ordem de um sistema para obter outro equivalente mais simples, porém, com a mesma dinâmica do sistema original. Definindo uma relação de equivalência, podemos considerar o grupo quociente dos campos vetoriais e escolher o representante mais simples, isto é, a Forma Normal. Isso simplificará muito nosso trabalho, pois estudaremos os sistemas em sua forma normal.

5.1 Relação de Equivalência Topológica

Seja M uma variedade compacta, C^∞ , orientável de dimensão finita, com fronteira ∂M . Consideraremos $M \subset \mathbb{R}^3$.

Definição 5.1.1. *Considere duas variedades diferenciáveis M e N e um ponto $x \in M$. Sejam U_1 e U_2 duas vizinhanças de $x \in M$. Introduzimos a seguinte relação de equivalência \sim : duas aplicações $f_1 : U_1 \rightarrow N$, $f_2 : U_2 \rightarrow N$ são equivalentes quando existir uma vizinhança U de $x \in M$ que depende de f_1 e f_2 tal que elas coincidam nas restrições $f_1|_U$ e $f_2|_U$. Escreveremos $f_1 \sim f_2$. As classes de equivalência sob essa relação são chamadas de **germes de campos de vetores**.*

Analogamente, define-se germe de funções. Para que aplicações coincidam numa vizinhança não vazia de M , é preciso definir a lei que associa estes campos nesta vizinhança, ponto a ponto. Note que isso pode ser feito de várias maneiras conforme o objeto de estudo. Definiremos esta relação.

Definição 5.1.2. *Dois campos de vetores X e Y em M são ditos **topologicamente equivalentes** se existir um homeomorfismo $h : M \rightarrow M$ levando órbitas de X em órbitas de Y , preservando orientação, isto é, dados $p \in M$ e $\delta > 0$, existe um $\varepsilon > 0$ tal que $0 < t < \delta$, então $h(\phi_X(t, p)) = \phi_Y(\tilde{t}, h(p))$, para algum $0 < \tilde{t} < \varepsilon$.*

Se essa equivalência topológica, além de preservar orientação também preservar o tempo, isto é, se dados $p \in M$ e $t \in \mathbb{R}$, tivermos $h(\phi_X(t, p)) = \phi_Y(t, h(p))$, então dizemos que os campos X e Y são **topologicamente conjugados**, que é uma relação mais forte.

Uma vez estabelecida a relação de equivalência entre sistemas de equações diferenciais, podemos fazer um estudo qualitativo de tal forma que este estará satisfeito se tomarmos um representante dessa classe independentemente da escolha. Desse modo, podemos escolher a forma mais simples

da classe em questão, que é chamada de **Forma Normal** (veja [25] e [26]). Contudo, para obtermos a Forma Normal a partir de um dado sistema de equações diferenciais, precisamos seguir alguns passos, conforme a próxima subseção.

5.2 Preparação Preliminar das Equações

Agora, considere o seguinte campo de vetores

$$\dot{w} = G(w), \quad w \in \mathbb{R}^n \quad (5.1)$$

onde G é de classe C^k e onde k é grande o suficiente para nossos propósitos. Suponha que (5.1) tenha um ponto fixo em $w = w_0$.

Nosso objetivo é transformar (5.1) em sua forma mais simples.

1. Primeiramente, transladamos o ponto crítico para a origem, possível usando da translação

$$v = w - w_0, \quad v \in \mathbb{R}^n,$$

obtendo assim o sistema

$$\dot{v} = G(v + w_0) \equiv H(v). \quad (5.2)$$

2. Aqui, separaremos a parte linear do campo de vetores e reescreveremos (5.2) da seguinte maneira:

$$\dot{v} = DH(0)v + \bar{H}(v) \quad (5.3)$$

onde $\bar{H}(v) \equiv H(v) - DH(0)v$ tal que $\bar{H}(v) = \mathcal{O}(|v|^2)$.

3. Seja T a matriz que transforma a matriz $DH(0)$ na forma canônica de Jordan (real). Então, pela transformação

$$v = T\mathbf{x} \quad (5.4)$$

o campo de vetores (5.3) torna-se

$$\dot{\mathbf{x}} = T^{-1}DH(0)T\mathbf{x} + T^{-1}\bar{H}(T\mathbf{x}). \quad (5.5)$$

Denotando a forma canônica de Jordan (real) de $DH(0)$ por J , temos

$$J \equiv T^{-1}\bar{H}(T\mathbf{x})$$

tal que (5.3) poderá ser escrito como

$$\dot{x} = Jx + F(x), \quad x \in \mathbb{R}^n. \quad (5.6)$$

É importante notar que a transformação (5.4) simplificou a parte linear de (5.3) o máximo possível. Agora prosseguiremos com a tarefa de simplificar a parte não linear $F(x)$. No entanto, se o ponto for regular ou crítico hiperbólico, o processo termina aqui.

4. Podemos expandir na Forma de Taylor de $F(x)$ em torno da origem tal que (5.6) torne-se

$$\dot{x} = Jx + F_2(x) + F_3(x) + \cdots + F_{k-1}(x) + \mathcal{O}(|x|^k), \quad (5.7)$$

onde $F_i(x)$ representa o i -ésimo termo na expansão de Taylor de $F(x)$.

5.3 Simplificação de termos de segunda ordem

A seguir, considerando (5.7), introduziremos a seguinte mudança de coordenadas:

$$x = y + h_2(y), \quad (5.8)$$

onde $h_2(y)$ é um termo de segunda ordem em y . Substituindo (5.8) em (5.7), obtemos:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= (Id + Dh_2(y))\dot{y} = Jy + Jh_2(y) + F_2(y + h_2(y)) \\ &+ F_3(y + h_2(y)) + \cdots + F_{r-1}(y + h_2(y)) + \mathcal{O}(|y|^r), \end{aligned} \quad (5.9)$$

onde Id denota a matriz identidade $n \times n$. Observe que cada termo

$$F_k(y + h_2(y)), \quad 2 \leq k \leq r - 1,$$

pode ser escrito na forma

$$F_k(y) + \mathcal{O}(|y|^{k+1}) + \cdots + \mathcal{O}(|y|^{2k}),$$

de modo que (5.9) torna-se

$$\begin{aligned} (Id + Dh_2(y))\dot{y} &= Jy + Jh_2(y) + F_2(y) + \\ &+ \tilde{F}_3(y) + \cdots + \tilde{F}_{r-1}(y) + \mathcal{O}(|y|^r), \end{aligned} \quad (5.10)$$

em que a mudança de notação para os termos de ordem $\mathcal{O}(|y|^k)$ para $\tilde{F}_k(y)$ serve para denotar que eles foram modificados devido à mudança de coordenadas.

Assim, para y suficientemente pequeno,

$$(Id + Dh_2(y))^{-1}$$

existe e pode ser representado como uma série expandida como segue abaixo:

$$(Id + Dh_2(y))^{-1} = id - Dh_2(y) + \mathcal{O}(|y|^2). \quad (5.11)$$

Substituindo (5.11) em (5.10), obtemos

$$\begin{aligned} \dot{y} &= Jy + Jh_2(y) - Dh_2(y)Jy + F_2(y) + \\ &+ \tilde{F}_3(y) + \cdots + \tilde{F}_{r-1}(y) + \mathcal{O}(|y|^r). \end{aligned} \quad (5.12)$$

Podemos escolher uma forma específica para $h_2(y)$ de modo que simplifique os termos $\mathcal{O}(|y|^2)$ o máximo possível. Portanto, escolhendo convenientemente $h_2(y)$, obtemos

$$Dh_2(y)Jy - Jh_2(y) = F_2(y) \quad (5.13)$$

tal que $F_2(y)$ pode ser eliminado de (5.12). A equação (5.13) pode ser vista como uma equação para um $h_2(y)$ desconhecido. Queremos destacar que, quando visto de maneira correta, ela é de fato uma equação linear agindo num espaço vetorial linear. Isto pode ser obtido da seguinte maneira:

1. definindo um espaço vetorial linear apropriado;
2. definindo o operador linear no espaço vetorial e;
3. descrevendo a equação a ser resolvida neste espaço vetorial (que se tornará (5.13)).

Primeiro passo: Considere o espaço vetorial dos polinômios homogêneos de grau k , denotado por H_k .

Seja $\{s_1, \dots, s_n\}$ uma base de \mathbb{R}^n e seja $y = (y_1, \dots, y_n)$ as coordenadas com relação a essa base, considere que esses elementos da base contém coeficientes consistindo de polinômios homogêneos de grau k , isto é,

$$(y_1^{m_1} y_2^{m_2} \cdots y_n^{m_n}) s_i, \quad \sum_{j=1}^n m_j = k$$

onde $m_j \geq 0$ são inteiros. Referimo-nos a esses objetos como o conjunto de todos os vetores polinomiais homogêneos de grau k . O conjunto de todos esses

vetores formam um espaço vetorial linear, que denotamos por H_k . A base para H_k consiste de elementos formados por todas as possíveis combinações de polinômios homogêneos de grau k de multiplicidade s_i , como no seguinte exemplo:

Exemplo 5.3.1. *Considere a base canônica do \mathbb{R}^2*

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Denotamos as coordenadas com respeito a essa base por x e y , respectivamente. Assim, obtemos

$$H_2 = \text{Span} \left\{ \begin{pmatrix} x^2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} xy \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y^2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ x^2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ xy \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ y^2 \end{pmatrix} \right\}.$$

Segundo passo Definir o operador linear em H_k .

Considere a equação (5.13). Claramente $h_2(y)$ pode ser visto como elemento de H_2 e

$$h_2(y) \mapsto Dh_2(y)Jy - Jh_2(y)$$

é uma aplicação linear de H_2 em H_2 . De modo análogo, para qualquer elemento $h_k(y) \in H_k$, temos

$$h_k(y) \mapsto Dh_k(y)Jy - Jh_k(y)$$

que é uma aplicação linear de H_k em H_k .

Mencionaremos uma terminologia associada à equação (5.13) que se tornou usual. Devido à Álgebra de Lie, essa aplicação é tradicionalmente denotada por

$$L_J^{(k)}(h_k(y)) \equiv -(Dh_k(y)Jy - Jh_k(y))$$

Terceiro passo: A solução de (5.13).

Lembrando que $h_2(y)$ pode ser vista como elemento de H_2 , utilizando a álgebra linear podemos escrever H_2 de maneira única como

$$H_2 = L_J^{(2)}(H_2) \oplus G_2$$

onde G_2 representa o espaço complementar a $L_J^{(2)}(H_2)$. Resolvendo (5.13) do mesmo modo que se resolve a equação $Ax = b$ da álgebra linear. Se $F_2(y)$ estiver na imagem de $L_J^{(2)}(\cdot)$, então todos os termos $\mathcal{O}(|y|^2)$ podem ser

eliminados de (5.13). Em qualquer caso, podemos escolher $h_2(y)$ de tal modo que restem apenas os termos $\mathcal{O}(|y|^2)$ em G_2 . Denota-se esses termos por

$$F_2^r(y) \in G_2$$

em que r denota o termo ressonante, que representa o termo não-linear que não pode ser removido.

Portanto, (5.12) pode ser simplificado a

$$\dot{y} = Jy + F_2^r(y) + \tilde{F}_3(y) + \cdots + \tilde{F}_{r-1} + \mathcal{O}(|y|^r).$$

Procedendo dessa maneira, introduzimos uma mudança de coordenadas de tal modo que o novo sistema de coordenadas possui apenas os termos de segunda ordem no espaço complementar a $L_J^{(2)}(H_2)$. Portanto, se $L_J^{(2)}(H_2) = H_2$, então todos os termos de segunda ordem podem ser eliminados.

5.4 Teorema da Forma Normal

O Teorema da Forma Normal afirma que podemos simplificar um dado sistema de equações diferenciais por uma mudança de coordenadas conveniente. Isso nos permite escrever um sistema em expansão de Taylor separando a parte linear dos termos de ordem mais alta até ordem $k - 1$. Eliminamos os termos de ordem mais alta de maneira análoga ao procedimento da subseção 5.3 (consulte [26], p.272 ~ 275), obtendo um sistema mais simples a partir de (5.7) com a mesma dinâmica do sistema original.

Teorema 5.4.1. *(Teorema da Forma Normal) Dado o sistema (5.7), é possível, através de uma sequência apropriada de mudança de coordenadas escrever (5.7) como:*

$$\dot{y} = Jy + F_2^r(y) + \cdots + F_{r-1}^r(y) + \mathcal{O}(|y|^r), \quad (5.14)$$

onde $F_k^r(y) \in G_k$, $2 \leq k \leq r - 1$ e G_k é o espaço complementar de $L_J^{(k)}(H_k)$. Dizemos que a equação (5.14) está na **Forma Normal** de ordem $r - 1$.

Desta etapa em diante, consideraremos sistemas em sua forma normal. Fazendo uma analogia com o que acontece nos números racionais, preferimos sempre escolher a fração irredutível como representante mais simples de uma classe de frações. Assim, a teoria das formas normais torna-se indispensável para simplificação do Sistema (5.1).

6 Bifurcações em Campos Vetoriais Contínuos

Neste capítulo, nosso objetivo é apresentar os conceitos preliminares para a teoria das bifurcações em campos vetoriais suaves. Estudaremos as bifurcações clássicas de codimensão um em \mathbb{R}^2 : o Teorema de Peixoto, que mostra uma condição necessária e suficiente para a estabilidade estrutural de um campo bidimensional, e o Teorema de Sotomayor que classifica essas bifurcações através da diferencial do campo e dos seus autovalores. Finalizando esta parte, estudaremos a bifurcação clássica de Hopf cujo o campo de vetores possui um par de autovalores imaginários puros.

6.1 Estabilidade Estrutural

Definição 6.1.1. *Seja $f \in C^1(E)$ onde E é um subconjunto aberto do \mathbb{R}^n . Definimos a norma- C^1 no espaço $C^1(E)$ por*

$$\|f\|_1 = \sup_{x \in E} |f(x)| + \sup_{x \in E} \|Df(x)\|$$

onde $|\cdot|$ denota a norma Euclidiana em \mathbb{R}^n e $\|\cdot\|$ denota a norma usual de matrizes $Df(x)$ definida por $\|T\| = \max_{|x| \leq 1} |T(x)|$, onde $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ é um operador linear.

Definição 6.1.2. *Seja E um subconjunto do \mathbb{R}^n . Um campo de vetores $f \in C^1(E)$ é dito **estruturalmente estável** se existir um número $\varepsilon > 0$, tem-se que para todo $g \in C^1(E)$ com*

$$\|f - g\|_1 < \varepsilon$$

*e f deve ser topologicamente equivalente a g em E , ou seja, deve existir um homeomorfismo $h : E \rightarrow E$ que leva trajetórias de $\dot{x} = f(x)$ em trajetórias de $\dot{x} = g(x)$ e preserva orientação do tempo. Neste caso, dizemos que o sistema dinâmico $\dot{x} = f(x)$ é **estruturalmente estável**.*

No próximo exemplo, analisaremos o comportamento qualitativo de um sistema do tipo (2.3) dado por

$$\dot{x} = f(x)$$

e a estabilidade estrutural diante de uma pequena perturbação deste campo de vetores

$$\dot{x} = f(x, \mu). \tag{6.1}$$

O comportamento estrutural de (6.1) varia de acordo com o parâmetro μ . Assim, um valor μ_0 do parâmetro μ na equação (6.1), tal que o campo de vetores $f(x, \mu)$ de classe C^1 não seja estruturalmente estável, é chamado de **valor de bifurcação**. Assumiremos que $f \in C^1(E \times J)$ onde E é um conjunto aberto do \mathbb{R}^n e $J \subset \mathbb{R}$ é um intervalo. Resumindo, a dinâmica do sistema é alterada de acordo com a variação de $\mu \in J$.

Exemplo 6.1.1. *O campo de vetores*

$$f(x) = \begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix}$$

em \mathbb{R}^2 não é estruturalmente estável em qualquer subconjunto compacto $K \subset \mathbb{R}^2$ contendo a origem em seu interior.

De fato, se considerarmos a perturbação μ a seguir, relativa ao sistema acima, temos

$$f(x, \mu) = \begin{pmatrix} -y + \mu x \\ x + \mu y \end{pmatrix}. \quad (6.2)$$

Então, chamando $g(x) = f(x, \mu)$,

$$\|f - g\|_1 = \sup_{x \in K} \left| \begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -y + \mu x \\ x + \mu y \end{pmatrix} \right| + \sup_{x \in K} \left\| \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 + \mu \\ 0 + \mu \end{pmatrix} \right\|$$

$$\|f - g\|_1 = \sup_{x \in K} \left| \begin{pmatrix} -\mu x \\ -\mu y \end{pmatrix} \right| + \sup_{x \in K} \left\| \begin{pmatrix} -\mu \\ -\mu \end{pmatrix} \right\|$$

$$\|f - g\|_1 = |\mu| \cdot \sup_{x \in K} \left| \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right| + |\mu| \cdot \sup_{x \in K} \left\| \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\|;$$

como K é compacto, então

$$\|f - g\|_1 = |\mu|(\max_{x \in K} |x| + 1).$$

Seja d o diâmetro de K , isto é, se $d = \max_{x, y \in K} |x - y|$, então

$$\|f - g\|_1 = |\mu|(\max_{x \in K} |x| + 1) \leq |\mu|(d + 1).$$

Se tomarmos $\mu \in \mathbb{R}$ tal que $|\mu| = \frac{\varepsilon}{(d + 2)}$, obtemos $\|f - g\|_1 < \varepsilon$.

No entanto, pode-se verificar o jacobiano de cada campo:

$$Df(x, \mu) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ e } Dg(x, \mu) = \begin{pmatrix} \mu & -1 \\ 1 & \mu \end{pmatrix}$$

e verificar que, pelo Teorema 3.2.3, f possui um centro e g possui um foco para $\mu \neq 0$ e não existe homeomorfismo que leva trajetórias fechadas de f em g , pois este não as possui. Assim, f não é topologicamente equivalente a g e, portanto, f não é estruturalmente estável em \mathbb{R}^2 .

O número $\mu_0 = 0$ é chamado de **valor de bifurcação** do sistema $\dot{x} = g(x)$. O retrato de fase deste sistema está na Figura 6.1.

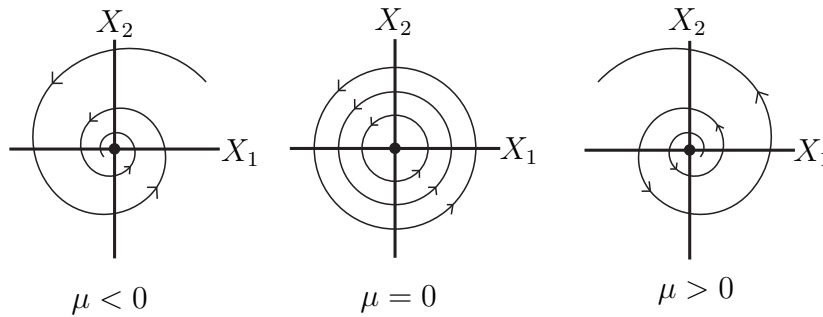


Figura 6.1: Retrato de fase do sistema (6.2) de acordo com o sinal de μ .

Antes de concluirmos esta parte introdutória, definiremos o que é ponto não errante para enunciar o Teorema de Peixoto, que merece destaque na parte de estabilidade estrutural.

Seja E um conjunto aberto do \mathbb{R}^n (ou M uma subvariedade compacta do \mathbb{R}^n).

Definição 6.1.3. Um ponto $x \in E$ (ou $x \in M$) é chamado um **ponto não errante do fluxo** ϕ_t , definido por $\dot{x} = f(x)$ se para toda vizinhança $U \subset E$ ($U \subset M$) de x e para todo $T > 0$ existir um $t > T$ tal que

$$\phi_t(U) \cap U \neq \emptyset.$$

O **conjunto não errante** Ω do fluxo ϕ_t , é o conjunto de todos os pontos não errantes de ϕ_t em E (ou em M). Qualquer ponto $x \in E \setminus \Omega$ (ou em $M \setminus \Omega$) é chamado de **ponto errante de** ϕ_t .

6.2 Teorema de Peixoto

Estabelecidas essas definições, podemos enunciar o Teorema de Peixoto, provado pelo matemático brasileiro Maurício Matos Peixoto, um dos pioneiros mundiais nos estudos de estabilidade estrutural.

Teorema 6.2.1. (Peixoto,1962) *Seja f um campo de vetores de classe C^1 definido em uma variedade M diferenciável compacta e bidimensional. Então f é estruturalmente estável em M se, e somente se,*

1. *o número de pontos críticos e ciclos limites é finito e todos são hiperbólicos;*
2. *não existem trajetórias conectando pontos de sela;*
3. *o conjunto de pontos não errantes Ω consiste somente de pontos críticos e ciclos limites.*

Exemplo 6.2.1. *Considere o sistema*

$$\begin{cases} \dot{x} = -y + xy \\ \dot{y} = x + \frac{x^2 - y^2}{2}. \end{cases}$$

Calculando os pontos críticos deste campo de vetores:

- *da primeira equação, os pontos críticos estão sobre os conjuntos: $(x, 0)$ e $(1, y)$.*
- *da segunda equação, os pontos críticos estão sobre a hipérbole*

$$(x + 1)^2 - y^2 = 1.$$

Se $y = 0$, temos $x = 0$ ou $x = -2$. Se $x = 1$, temos $y = \sqrt{3}$ ou $y = -\sqrt{3}$. Os pontos críticos são $(0, 0)$, $(-2, 0)$, $(1, -\sqrt{3})$ e $(1, \sqrt{3})$.

Determinando os autovalores,

$$Df = \begin{pmatrix} y & x - 1 \\ x + 1 & -y \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{vmatrix} \lambda - y & 1 - x \\ -1 - x & \lambda + y \end{vmatrix} = 0$$

temos o polinômio característico

$$\lambda^2 - x^2 - y^2 + 1 = 0,$$

que na origem nos fornecem autovalores imaginários puros, $\lambda = \pm i$, sendo $(0, 0)$ um ponto crítico não hiperbólico. Pelo Teorema 6.2.1, esse sistema é estruturalmente instável.

6.3 Bifurcações em Pontos de Equilíbrio Não Hiperbólicos

Da teoria local dos sistemas não lineares, sabemos que podemos determinar localmente a dinâmica do sistema (2.3)

$$\dot{x} = f(x)$$

com $x \in \mathbb{R}^n$, por meio do processo de linearização do sistema (2.3) em uma vizinhança do ponto crítico x_0 usando o Teorema 4.4.1 (*Grobman-Hartman*), desde que nenhum dos autovalores da matriz $Df(x_0)$ tenham parte real nula. Além disso, se (2.3) é um sistema, isto é, $\dot{x} = f(x, \mu)$.

Sabemos que, se variarmos pouco o parâmetro μ , não alteramos a natureza da estabilidade estrutural do sistema nos pontos hiperbólicos.

Desta forma, nossos estudos se concentrarão em pontos críticos **não** hiperbólicos em sistemas na sua forma normal, conforme Capítulo 5.

Neste capítulo, discutiremos o comportamento qualitativo das soluções de um sistema do tipo (6.1) que dependem de um parâmetro $\mu \in \mathbb{R}$.

Para ilustrar as principais bifurcações no caso contínuo, exibiremos os três exemplos mais importantes de bifurcações que ocorrem em pontos críticos não hiperbólicos.

Iniciaremos nosso estudo para campo de vetores unidimensionais e, em seguida, estudaremos o caso geral.

6.3.1 Bifurcação Sela-Nó

Considere o campo de vetores unidimensional na forma normal

$$\dot{x} = \mu - x^2 \tag{6.3}$$

com $x \in \mathbb{R}$ e $\mu \in J \subset \mathbb{R}$, onde J é um intervalo contendo a origem. Para calcular os pontos críticos, devemos ter $f(x, \mu) = 0$, isto é, $\mu - x^2 = 0$, onde obtemos $x = \pm\sqrt{\mu}$. Analisando a matriz jacobiana neste caso, obtemos $Df(\pm\sqrt{\mu}, \mu) = \pm 2\sqrt{\mu}$.

Note que, pelo Teorema 4.4.1 (*Grobman-Hartman*):

- Se $\mu > 0$, temos dois pontos críticos hiperbólicos em $x = \pm\sqrt{\mu}$. Analisando a estabilidade sobre o eixo- x (ver Figura 6.2), verificamos que um desses pontos é estável, representado na Figura 6.3 pela parte sólida do ramo da parábola e o outro ponto é instável, que está representado pela parte pontilhada na parábola.
- Se $\mu = 0$, temos um ponto crítico não hiperbólico ou singularidade em $x = 0$, pois $Df(0, 0) = 0$. Para este caso, o ponto $\mu = 0$ é chamado de **valor de bifurcação**. (Figura 6.3).

- Se $\mu < 0$, não há pontos críticos.

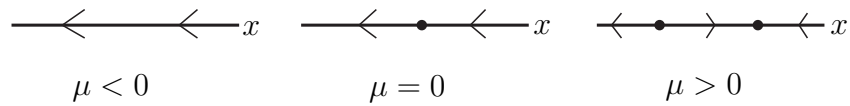


Figura 6.2: *Bifurcação Sela-nó*: pontos críticos conforme a variação do parâmetro μ .

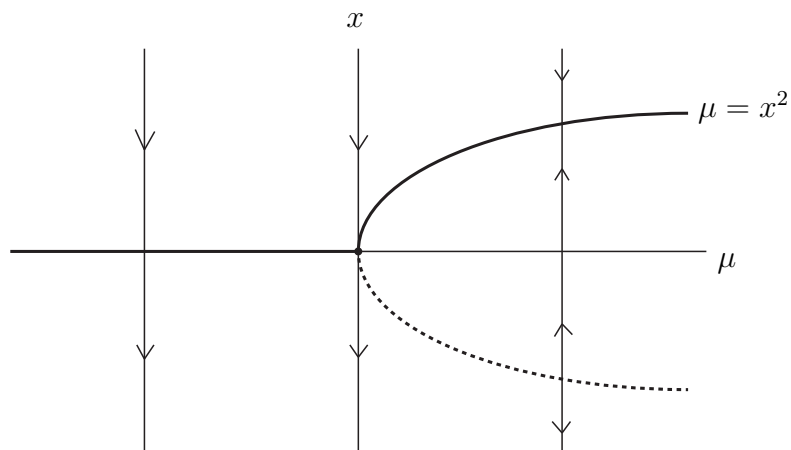


Figura 6.3: *Bifurcação Sela-Nó*: parábola que representa estabilidade dos pontos críticos do sistema $\dot{x} = f(x, \mu)$ no plano de bifurcação.

Na Figura 6.3, as setas ao longo das linhas verticais representam o fluxo gerado por (6.3) ao longo da direção x . Cada linha vertical da Figura 6.3 está representada individualmente na Figura 6.2. A Figura 6.3 é denominada **diagrama de bifurcação**. Este caso particular é conhecido como Bifurcação **Sela-Nó**.

Assim, o campo de vetores unidimensional $f(x) = -x^2$ é estruturalmente instável com valor de bifurcação $\mu_0 = 0$, pois para pequenas perturbações de μ , o comportamento do campo se altera.

6.3.2 Bifurcação Transcrítica

Considere o sistema unidimensional na forma normal

$$\dot{x} = \mu x - x^2. \quad (6.4)$$

Os pontos críticos são obtidos por $\mu x - x^2 = 0$, de onde obtemos $x = 0$ ou $x = \mu$. Mas observe que se $\mu = 0$, temos que $x = 0$ é o único ponto crítico e ele é não hiperbólico, pois $Df(x, \mu) = \mu - 2x$.

- (i) Se $x = 0$, temos $Df(0, \mu) = \mu$ com as seguintes possibilidades:
- $\mu < 0 \Rightarrow Df(0, \mu) < 0$. Logo $x = 0$ é ponto crítico estável.
 - $\mu = 0 \Rightarrow Df(0, 0) = 0$. Ponto crítico não hiperbólico.
 - $\mu > 0 \Rightarrow Df(0, \mu) > 0$. Logo, $x = 0$ é um ponto crítico instável.
- (ii) Se $x = \mu$, temos $Df(\mu, \mu) = -\mu$ com as seguintes possibilidades:
- $\mu < 0 \Rightarrow Df(\mu, \mu) > 0$. Logo, $x = \mu$ é um ponto crítico instável.
 - $\mu = 0 \Rightarrow Df(0, 0) = 0$. Ponto crítico não hiperbólico.
 - $\mu > 0 \Rightarrow Df(\mu, \mu) < 0$. Logo $x = \mu$ é ponto crítico estável.

Na Figura 6.4, temos os retratos de fase para cada valor de μ e na Figura 6.5, o diagrama de bifurcação.

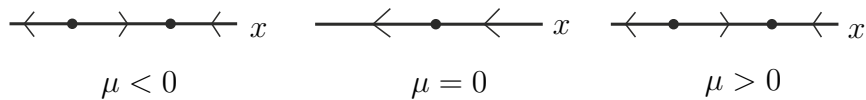


Figura 6.4: *Bifurcação Transcrítica*: pontos críticos conforme a variação do parâmetro μ .

Assim, o campo de vetores $f(x) = -x^2$ é estruturalmente instável com valor de bifurcação $\mu_0 = 0$, pois para pequenas perturbações μ , a dinâmica do campo se altera.

No diagrama de bifurcação da Figura 6.5, cada reta vertical representa o fluxo gerado por (6.4) ao longo da direção x . Cada reta vertical está representada individualmente na Figura 6.4.

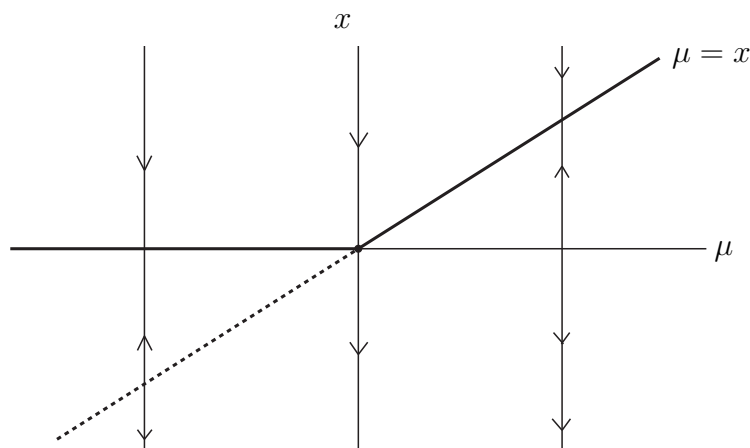


Figura 6.5: *Bifurcação Transcrítica*: reta que representa $\mu = x$ no diagrama de bifurcação.

O valor de bifurcação é $\mu_0 = 0$. Esse tipo de bifurcação é chamado de **Bifurcação Transcrítica**.

6.3.3 Bifurcação Pitchfork

Considere o sistema unidimensional em sua forma normal

$$\dot{x} = \mu x - x^3. \quad (6.5)$$

Os pontos críticos ocorrem em $x = 0$ ou $x = \pm\sqrt{\mu}$. Denotando (6.5) por $f(x, \mu) = \mu x - x^3$, analisaremos seu jacobiano $Df(x, \mu) = \mu - 3x^2$.

Se $x = 0$, temos o jacobiano $Df(0, \mu) = \mu$. Daí, segue que

- $\mu < 0 \Rightarrow Df < 0$. Então, a origem é um ponto crítico atrator.
- $\mu = 0 \Rightarrow Df = 0$, temos um ponto crítico não hiperbólico de $\dot{x} = -x^3$ em $x = 0$, o que implica que 0 é o único ponto crítico não hiperbólico,

pois

$$\mu x - x^3 = 0 \Rightarrow x \underbrace{(\mu - x^2)}_{\neq 0} = 0.$$

- $\mu > 0 \Rightarrow Df > 0$. Logo, a origem é um ponto crítico repulsor.

De modo inteiramente análogo, analisando para $x = \pm\sqrt{\mu}$, temos o jacobiano $Df(\sqrt{\mu}, \mu) = -2\mu$ onde

- $\mu < 0 \Rightarrow Df > 0$. Portanto, $x = \pm\sqrt{\mu}$ é um ponto crítico repulsor.
- $\mu = 0 \Rightarrow Df = 0$. Portanto, $x = \pm\sqrt{\mu}$ é um ponto crítico não hiperbólico.
- $\mu > 0 \Rightarrow Df < 0$, Portanto, $x = \pm\sqrt{\mu}$ é um ponto crítico atrator.

Na Figura 6.7, as setas ao longo das linhas verticais representam o fluxo gerado por (6.5) ao longo da direção x . Cada linha vertical da Figura 6.7 está representada individualmente na análise unidimensional na Figura 6.6.

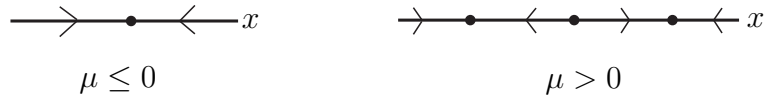


Figura 6.6: *Bifurcação Pitchfork*: pontos críticos conforme a variação do parâmetro μ .

Definição 6.3.1. *Considere o sistema de equações diferenciais (6.1). Dizemos que o sistema possui um ponto crítico de multiplicidade m em $x = 0$, se $Df(0, 0) = \dots = D^{m-1}f(0, 0) = 0$ e $D^m f(0, 0) \neq 0$.*

Note que nos sistemas (6.3) e (6.4), com o valor de bifurcação $\mu_0 = 0$, a origem é um ponto crítico de multiplicidade 2. No sistema (6.5), a origem é um ponto crítico de multiplicidade 3.

Existe uma relação intrínseca entre esses fatos e a caracterização dessas bifurcações. Um fato notável é que esta caracterização é válida também

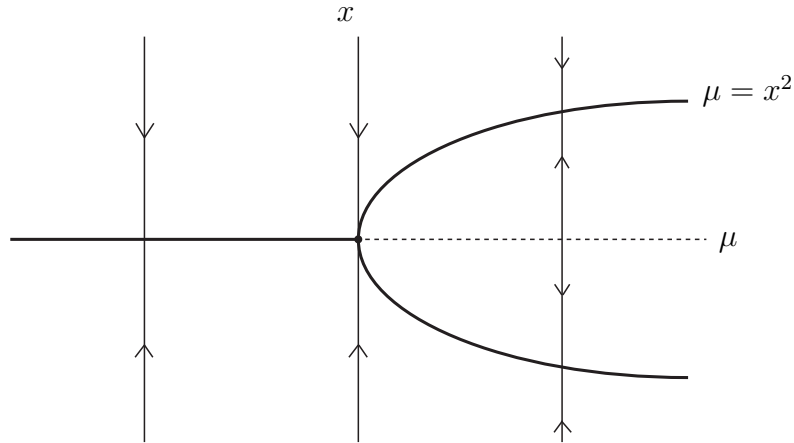


Figura 6.7: *Bifurcação Pitchfork*: parábola que representa $\mu = x^2$ no diagrama de bifurcação.

para sistemas de dimensões mais altas, o que foi provado por Jorge Sotomayor em 1976 (veja [10] p. 148), conforme enunciaremos a seguir. Com a seguinte notação para o sistema diferenciável onde assumiremos que as funções

$$\begin{aligned} f_i : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (\mathbf{x}, \mu) &\longmapsto f_i(\mathbf{x}, \mu) \end{aligned}$$

são contínuas. Considere

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = f_1(\mathbf{x}, \mu) \\ \dot{x}_2 = f_2(\mathbf{x}, \mu) \\ \vdots \\ \dot{x}_n = f_n(\mathbf{x}, \mu) \end{cases} \quad (6.6)$$

em que Df denota a matriz jacobiana de f com relação a x , e f_μ denota o vetor das derivadas parciais das componentes de f com respeito ao escalar μ .

Teorema 6.3.1. (Sotomayor) *Seja $\dot{x} = f(x, \mu)$ um sistema de equações diferenciais em \mathbb{R}^n que depende de um único parâmetro $\mu \in \mathbb{R}$. Quando $\mu = \mu_0$, assumamos que exista um equilíbrio para o qual a matriz jacobiana $A_{n \times n} \equiv Df(\mathbf{x}, \mu)$ tenha um único autovalor nulo $\lambda = 0$, com autovetor correspondente*

v e A^T possua um autovetor w correspondente ao autovalor nulo. Além disso, suponhamos que A possua k autovalores com parte real negativa e $n - k - 1$ autovalores com parte real positiva. Se ocorrer:

$$\begin{aligned} (i) \quad & w^T \cdot f_\mu(x_0, \mu_0) \neq 0; \\ (ii) \quad & w^T \cdot [D^2 f(x_0, \mu_0)(v, v)] \neq 0, \end{aligned} \tag{6.7}$$

então existe uma curva suave de pontos de equilíbrio de (6.6) em $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ passando por (x_0, μ_0) , tangente ao hiperplano $\mathbb{R}^n \times \{\mu_0\}$. Dependendo do sinal das expressões em (6.7), não existem pontos de equilíbrio de (6.6) próximos de x_0 quando $\mu < \mu_0$ (ou quando $\mu > \mu_0$) e existem dois pontos de equilíbrio de (6.6) próximos de x_0 quando $\mu > \mu_0$ (ou quando $\mu < \mu_0$). Os dois pontos de equilíbrio de (6.6) próximos de x_0 são hiperbólicos e tem variedades estáveis de dimensões k e $k + 1$ respectivamente, i.e., o sistema (6.6) possui uma **Bifurcação Sela-Nó** no ponto de equilíbrio x_0 , em que o parâmetro μ assume o valor de bifurcação $\mu = \mu_0$.

Se as condições descritas em (6.7) forem substituídas por

$$\begin{aligned} (i) \quad & w^T \cdot f_\mu(x_0, \mu_0) = 0; \\ (ii) \quad & w^T \cdot [Df_\mu(x_0, \mu_0)v] \neq 0; \\ (iii) \quad & w^T \cdot [D^2 f(x_0, \mu_0)(v, v)] \neq 0; \end{aligned}$$

então o sistema (6.6) possui uma **Bifurcação Transcrítica** no ponto de equilíbrio x_0 , em que o parâmetro μ assume o valor de bifurcação $\mu = \mu_0$.

E ainda, se as condições (6.7) forem substituídas por

$$\begin{aligned} (i) \quad & w^T \cdot f_\mu(x_0, \mu_0) = 0; \\ (ii) \quad & w^T \cdot [Df_\mu(x_0, \mu_0)v] \neq 0; \\ (iii) \quad & w^T \cdot [D^2 f(x_0, \mu_0)(v, v)] = 0; \\ (iv) \quad & w^T \cdot [D^3 f(x_0, \mu_0)(v, v, v)] \neq 0; \end{aligned}$$

então o sistema (6.6) possui uma **Bifurcação Pitchfork** no ponto de equilíbrio x_0 , em que o parâmetro μ assume o valor de bifurcação $\mu = \mu_0$.

Para ilustrar, veja o seguinte exemplo em que o comportamento qualitativo do sistema em uma vizinhança de um ponto não-hiperbólico pode ser determinado utilizando o Teorema de Sotomayor.

Exemplo 6.3.1. Considere o sistema planar

$$\begin{cases} \dot{x} = \mu x - x^3 \\ \dot{y} = -y. \end{cases}$$

O único ponto crítico é a origem. Calculando $A = Df$, $D^2 f$, $D^3 f$, f_μ e Df_μ :

- $Df = \begin{bmatrix} \mu - 3x^2 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \Rightarrow Df(0,0) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix};$
- $D^2f = \begin{bmatrix} -6x & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \Rightarrow D^2f(0,0) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix};$
- $D^3f = \begin{bmatrix} -6 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \Rightarrow D^3f(0,0) = \begin{bmatrix} -6 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix};$
- $f_\mu = \begin{bmatrix} (f_1)_\mu \\ (f_2)_\mu \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow f_\mu(0,0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} e$
- $Df_\mu = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$

O autovetor v associado ao autovalor $\lambda = 0$ é $v = w = (1,0)^T$. Verificando as condições do Teorema:

$$(i) \quad w^T \cdot f_\mu(0,0) = [1 \ 0] \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} = [0];$$

$$(ii) \quad w^T \cdot [Df_\mu(0,0) \cdot v] = [1 \ 0] \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = [1] \neq 0;$$

$$(iii) \quad w^T \cdot [D^2f(0,0) \cdot (v, v)] = [1 \ 0] \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = [0] e$$

$$(iv) \quad w^T \cdot [D^3f(0,0) \cdot (v, v, v)] = [1 \ 0] \cdot \begin{bmatrix} -6 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = [-6] \neq 0.$$

Pelo Teorema 6.3.1, temos uma Bifurcação Pitchfork (Figura 6.7) na origem onde o valor de bifurcação é $\mu_0 = 0$.

6.4 Bifurcação Hopf

Até esta etapa, consideramos alguns tipos de bifurcação que ocorrem em pontos de equilíbrios não-hiperbólicos x_0 de um sistema do tipo (6.1), no qual $(x, \mu) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ e a matriz jacobiana Df possui um único autovalor nulo. Nesta seção, verificaremos comportamentos que podem ocorrer em um sistema se este possui um único par de autovalores imaginários puros e os demais autovalores possuem parte real não nula. Considere o sistema planar na forma normal:

$$\begin{cases} \dot{x} = -y + x(\mu - x^2 - y^2) \\ \dot{y} = x + y(\mu - x^2 - y^2). \end{cases} \quad (6.8)$$

Observe que o único ponto crítico deste sistema é a origem, pois, supondo que existam outros pontos críticos diferentes da origem, chegamos a uma contradição:

$$\begin{cases} -y + x(\mu - x^2 - y^2) = 0 \\ x + y(\mu - x^2 - y^2) = 0. \end{cases}$$

Assim, concluímos que $(\mu - x^2 - y^2)^2 = -1$. Logo

$$Df((x, y), \mu) = \begin{bmatrix} (\mu - x^2 - y^2) - 2x^2 & -1 - 2xy \\ 1 - 2xy & (\mu - x^2 - y^2) - 2y^2 \end{bmatrix},$$

sendo

$$Df(0, \mu) = \begin{bmatrix} \mu & -1 \\ 1 & \mu \end{bmatrix}.$$

Pelo Corolário 4.4.1, a origem será um foco estável ou instável do sistema (6.8) para $\mu < 0$ e $\mu > 0$, respectivamente. Observe que se $\mu = 0$, temos que

$$Df(0, 0) = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

que nos fornece um par de autovalores imaginários puros e portanto a origem será um centro ou um foco de seu sistema com $\mu = 0$. Fazendo mudança de coordenadas polares, podemos reescrever o sistema (6.8) como:

$$\begin{cases} \dot{r} = r(\mu - r^2) \\ \dot{\theta} = 1. \end{cases}$$

Observe que:

- Se $r < \sqrt{\mu}$, então $\dot{r} > 0$. O raio r aumenta, i.e., a trajetória converge para o parabolóide por dentro;
- Se $r = \sqrt{\mu}$, então $\dot{r} = 0$. O raio r não varia e portanto temos um ciclo limite Γ sobre o parabolóide;
- Se $r > \sqrt{\mu}$, então $\dot{r} < 0$. O raio r diminui, i.e., a trajetória converge para o parabolóide por fora.

Esse comportamento pode ser observado na Figura 6.8.

Observe que se $\dot{r} = 0$, então $r = \sqrt{\mu}$ (raio invariante) nos fornece a família de ciclos limite

$$\Gamma_{\mu} = \gamma_{\mu}(t) = \sqrt{\mu}(\cos t, \sin t)^T.$$

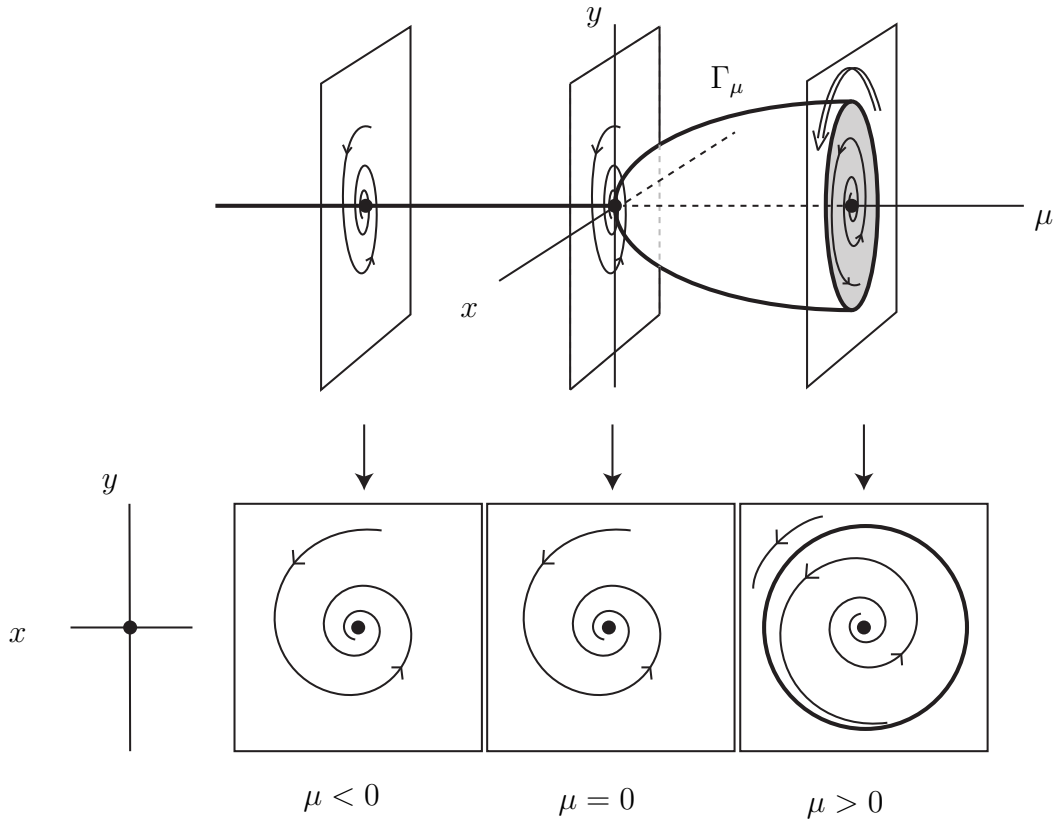


Figura 6.8: Diagrama de Bifurcação Hopf.

Assim, se $\mu > 0$, temos um ciclo limite para $\mu_0 = \sqrt{\mu}$ e trajetórias que se aproximam de Γ para outros valores de $\mu > 0$, onde Γ_μ representa uma família de ciclos limite deste sistema.

O parabolóide representado na Figura 6.8 representa a família de ciclos limite Γ_μ que define uma superfície em $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}$.

A seguir, definiremos o número de Liapunov que será usado no Teorema de Hopf.

A definição a seguir foi obtida por Liapunov e pode ser conferida em [1] p. 252 e [18] p. 218-219, na qual enunciaremos, sem demonstração, um teorema que nos será útil para mostrar que m ciclos limites podem ser bifurcados a partir de um foco de multiplicidade m sob pequenas perturbações do sistema do tipo

$$\begin{cases} \dot{x} = ax - by + p(x, y) \\ \dot{y} = cx + dy + q(x, y) \end{cases} \quad (6.9)$$

onde p e q são funções da forma:

$$\begin{aligned} p(x, y) &= \sum_{i+j \geq 2} a_{ij} x^i y^j = (a_{20}x^2 + a_{11}xy + a_{02}y^2) + \\ &\quad + (a_{30}x^3 + a_{21}x^2y + a_{12}xy^2 + a_{03}y^3) + \dots \\ q(x, y) &= \sum_{i+j \geq 2} b_{ij} x^i y^j = (b_{20}x^2 + b_{11}xy + b_{02}y^2) + \\ &\quad + (b_{30}x^3 + b_{21}x^2y + b_{12}xy^2 + b_{03}y^3) + \dots \end{aligned}$$

Neste caso, se $\mu = 0$ e $Df(0, 0)$ tiver um par de autovalores imaginários puros, a origem é chamada de **foco fraco**.

Definição 6.4.1. *Seja a Função Deslocamento da Definição 4.6. Se $d'(0) = d''(0) = 0$ e $d'''(0) \neq 0$, então o **número de Liapunov** para o foco na origem de (6.9) é dado pela expressão:*

$$\begin{aligned} \sigma \equiv d'''(0) &= \frac{3\pi}{2b} \left\{ [3(a_{30} + b_{03}) + (a_{12} + b_{21}) \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{b} [2(a_{20}b_{20} - a_{02}b_{02}) - a_{11}(a_{02} + a_{20}) + b_{11}(b_{02} + b_{20})] \right\}. \end{aligned} \quad (6.10)$$

Lembrando da Aplicação de Poincaré da Definição 4.6.1 e de sua *Função Deslocamento* da Definição 4.6, dada por $d(s) = P(s) - s$, enunciaremos o seguinte Teorema, demonstrado em [1], p. 241.

Teorema 6.4.1. *Seja $P(s)$ a Aplicação de Poincaré para um foco na origem do sistema planar analítico (6.9) com $b \neq 0$ e suponha que $P(s)$ é definido para $0 < s < \delta_0$. Então existe um número $\delta > 0$ tal que $P(s)$ pode ser expandido como uma função analítica para $|s| < \delta$. Além disso, $P(0) = 0$, $P'(0) = \exp(2\pi a/b)$, e se $d(s) = P(s) - s$, então $d(s) \cdot d(-s) < 0$ para $0 < |s| < \delta$.*

A consequência desse Teorema é que o fato de $d(s) \cdot d(-s) < 0$ para $0 < |s| < \delta$ pode ser usado para mostrar que se

$$d(0) = d'(0) = \dots = d^{(k-1)}(0) = 0 \text{ e } d^{(k)}(0) \neq 0,$$

então k é ímpar, isto é, $k = 2m + 1$ para $m \in \mathbb{N}$. O número inteiro $m = (k - 1)/2$ é chamado de *multiplicidade* do foco. Se $m = 0$, o foco é chamado de *foco simples* e pelo Teorema 6.4.1, segue que o sistema (6.9), com $b \neq 0$ tem um foco simples na origem se, e somente se, $a \neq 0$. Portanto, o sinal de $d'(0)$ determina a estabilidade da origem. Se $a < 0$, a origem é um foco estável; caso contrário, instável. Em qualquer caso, se $d'(0) = 0$, o sistema (6.9) tem um foco ou centro na origem. Daí, se $d'(0) = 0$, então a primeira derivada não nula $\sigma \equiv d^k(0) \neq 0$ é chamada de **número de Liapunov** do foco. Segue que, se $\sigma < 0$, então o foco é estável; se $\sigma > 0$, o foco é instável. Em particular, se $\sigma \neq 0$, então a origem será um foco fraco de multiplicidade 1, foco estável se $\sigma < 0$ e instável se $\sigma > 0$.

Para o caso planar mais geral

$$\begin{cases} \dot{x} = ax + by + p(x, y) \\ \dot{y} = bx + ay + q(x, y) \end{cases}$$

com $\Delta = ad - bc > 0$, $a + d = 0$ e $p(x, y)$, $q(x, y)$, tem-se

$$Df(0) = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}.$$

Esse jacobiano possui um par de autovalores imaginários puros e, portanto, a origem será um foco fraco (i.e., possui um par de autovalores com parte real nula). Em geral, quaisquer que sejam os termos de ordem mais alta acrescentados ao sistema linear (6.9), ocorrerá uma bifurcação Hopf na origem com o valor de bifurcação $\mu_0 = 0$ desde que o número de Liapunov seja diferente de zero.

Teorema 6.4.2. (*Bifurcação de Hopf*) *Se o número de Liapunov $\sigma \neq 0$, então uma bifurcação de Hopf ocorre na origem do sistema planar (6.9) com um valor de bifurcação $\mu_0 = 0$; em particular, se $\sigma < 0$, então um único ciclo limite estável bifurca na origem de (6.9) com uma perturbação $\mu > 0$, e se $\sigma > 0$, então um único ciclo limite instável bifurca na origem de (6.9) com uma perturbação $\mu < 0$. Se $\sigma < 0$, o retrato de fase local para (6.9) é topologicamente equivalente a um dos apresentados na Figura 6.8 e tem uma superfície de órbitas periódicas que possuem uma tangência quadrática com o plano xy na origem em $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}$.*

A demonstração desse Teorema pode ser conferida em [1], p. 261-264.

Exemplo 6.4.1. *Considere o seguinte sistema planar:*

$$\begin{cases} \dot{x} = \mu x - y + x^2 \\ \dot{y} = x + \mu y + x^2, \end{cases} \quad (6.11)$$

temos que $Df(0,0) = \begin{bmatrix} \mu & -1 \\ 1 & \mu \end{bmatrix}$ e, para $\mu = 0$, esta matriz jacobiana possui um par de autovalores imaginários puros que coincide com a matriz jacobiana de (6.8) e a origem, portanto, é um foco fraco.

Calculando seu número de Liapunov pela Definição 6.4.1, temos $a = \mu$, $b = 1$, $c = 1$ e $d = -\mu$ com $a_{20} = b_{20} = 1$, coeficientes de x^2 na primeira e segunda equação, respectivamente:

$$\sigma = \frac{3 \cdot \pi}{2 \cdot b} \cdot \left(-\frac{1}{b}\right) (2 \cdot a_{20}b_{20}) \frac{3 \cdot \pi}{2 \cdot 1} \cdot \left(-\frac{1}{1}\right) [2 \cdot 1 \cdot 1] = -3\pi \neq 0.$$

Segue do Teorema 6.4.2 que o sistema possui um foco fraco de multiplicidade 1 na origem para $\mu = 0$. Além disso, se $\sigma < 0$, o sistema possui um único ciclo limite estável que bifurca na origem para $\mu = 0$. Observe que, neste caso, $\Delta = ad - bc = \mu^2 + 1 > 0$ e $a + d = 2\mu = 0$, que está de acordo com (6.9).

Encerramos aqui esta seção. Na próxima seção, comentaremos primeiramente sobre campos vetoriais definidos em variedades com bordo, a fim de estabelecermos conceitos necessários ao nosso estudo para, então, estudarmos as bifurcações nos campos de vetores suaves por partes. Adiante relacionaremos as bifurcações em campos contínuos e campos suaves por partes.

7 Campos vetoriais definidos em variedades com bordo

Considerando a Definição 5.1.1 de germes de campos vetoriais e de conjugação topológicas já discutidas naquela seção, estudaremos os campos em variedades M com bordo ou fronteira ∂M , baseado em [24].

7.1 Estabilidade Estrutural em Campos Vetoriais definidos em Variedades com bordo

Para nossos propósitos, denote $\mathfrak{X}^r(n)$ o espaço de todos os germes dos campos de vetores C^r em \mathbb{R}^n munido da topologia C^r com $r > 1$ suficientemente grande para nossos propósitos e $n = 2, 3$.

Definição 7.1.1. *Dizemos que $X \in \mathfrak{X}^r(n)$ é estruturalmente estável em $\mathfrak{X}^r(n)$ se existir uma vizinhança $V \subset \mathfrak{X}^r(n)$ tal que, para todo $Y \in V$ é topologicamente equivalente a X , para todo $Y \in V$.*

Antes de mostrarmos condições para classificar os diferentes tipos de contato entre um campo suave X e a fronteira ∂M da variedade compacta M , denote por $\Sigma = \partial M$. Seja $\Sigma = h^{-1}(0)$ (onde 0 é um valor regular), uma subvariedade em que $h \in C^r$ é (um germe de) uma função suave

$$h : U \subset \mathbb{R}^n, 0 \rightarrow \mathbb{R}, 0 \quad (7.1)$$

possuindo 0 como valor regular. Essa notação significa que h é um germe de uma função definida em uma vizinhança de 0 em \mathbb{R}^n .

7.1.1 As Classes de Equivalência Topológicas

Definição 7.1.2. *Sejam $X : U \rightarrow U$ um campo vetorial definido em $U \subset \mathbb{R}^n$ e $h : U \rightarrow \mathbb{R}$ uma aplicação, onde ambas são de classe C^r em U . Se ∇h denota o gradiente de h , definimos*

$$Xh = \langle X, \nabla h \rangle = \left\langle (X_1, \dots, X_n), \left(\frac{\partial h}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial h}{\partial x_n} \right) \right\rangle = \sum_{i=1}^n X_i \frac{\partial h}{\partial x_i} \quad (7.2)$$

chamada **Derivada de Lie**, onde $X = (X_1, \dots, X_n)$.

Essa derivada é nossa principal ferramenta para caracterizar os tipos de contato do fluxo do campo sobre uma variedade $\Sigma = \partial M = h^{-1}(0)$, como veremos a seguir:

Definição 7.1.3. O conjunto $\Gamma_0(n)$ de elementos X em $\mathfrak{X}^r(n)$ é um conjunto que satisfaz uma das seguintes condições:

- (0) $Xh(0) \neq 0$ (0 é ponto regular e X é transversal a Σ);
- (1) $Xh(0) = 0$ e $X^2h(0) \neq 0$ (0 é um ponto de **dobra** ou **tangência quadrática** de X);
- (2) $Xh(0) = X^2h(0) = 0$ e $X^3(0) \neq 0$ e o conjunto $\{Dh(0), DXh(0), DX^2h(0)\}$ é linearmente independente (0 é chamado de ponto de **cúspide** ou **tangência cúbica** (ou ainda, dobra de grau 3) de X);
- \vdots
- (n) $Xh(0) = X^2h(0) = \dots = X^nh(0) = 0$ e $X^{n+1}h(0) \neq 0$ com $\{Dh(0), DXh(0), DX^2h(0), \dots, D^nXh(0)\}$ é linearmente independente.

Denotemos por $\tau_X = \{p \in \Sigma; h(p) = X.h(p) = 0\}$, o conjunto das Σ -**singularidades** ou conjunto das tangências de $X \in \mathfrak{X}^r(n)$.

Por exemplo, se $n = 3$, temos a classe $\Gamma_0(3)$, conforme Figura 7.1.

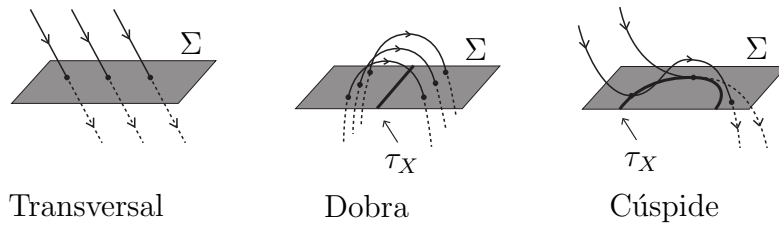


Figura 7.1: A classe $\Gamma_0(3)$ de campos em variedades com bordo.

O nosso objetivo é estudar casos de bifurcações sobre as dobras. A seguir, conforme mostrado na Figura 7.2, diremos que a tangência ou dobra do campo de vetores para Σ é:

- visível, se $X^2h(p) > 0$ e
- invisível, se $X^2h(p) < 0$.

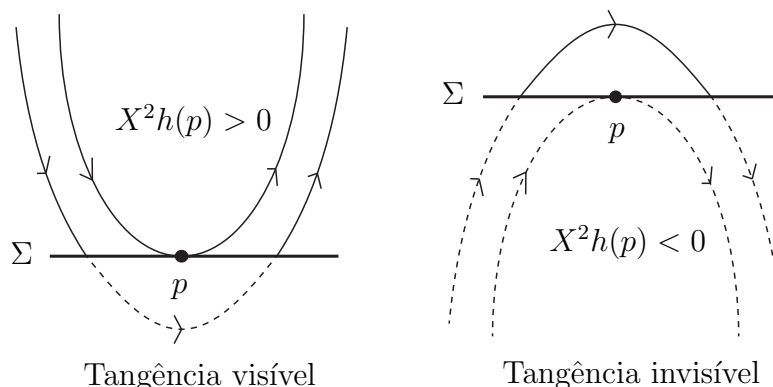


Figura 7.2: Tangências em $p \in \Sigma$.

Como demonstrado em [25], sabemos que $\Gamma_0(n) \subset \mathfrak{X}^r(n)$ é aberto e denso¹ e que ele coincide com o campo de vetores Σ -estruturalmente estável em $\mathfrak{X}^r(n)$. Deste modo, dizemos que $\Gamma_0(n)$ é uma subvariedade de codimensão 0 em $\mathfrak{X}^r(n)$.

Note que, genericamente, toda dobra constitui um conjunto aberto e denso de τ_X . E se $X(0) = 0$, então $X \notin \Gamma_0(n)$.

O conjunto das Σ -bifurcações está representado por

$$\mathfrak{X}_1^r(n) = \mathfrak{X}^r(n) \setminus \Gamma_0(n).$$

Vishik, em [25], considerou duas maneiras de se abordar os campos vetoriais em variedades com bordo. Ele exibiu as formas normais das Σ -singularidades de codimensão zero, que são as seguintes:

(i) **Fluxo tubular:** $X(x) = (1, 0, \dots, 0)$ e $h(x) = x_1^k + x_2x_1^{k-1} + x_3x_1^{k-2} + \dots + x_kx_1^1 + x_k$ onde $k = 0, 1, \dots, n$ ou

(ii) **Fronteira Plana:** $X(x) = (x_2, x_3, \dots, x_k, 1, 0, 0, \dots, 0)$ e $h(x) = x_1$

em que k é a ordem do contato.

As duas diferentes abordagens de Vishik estão representadas na Figura 7.3.

Discutiremos adiante uma importante interação entre o campo de vetores próximo de Σ e as singularidades dessas aplicações. Veremos de que maneira algumas técnicas poderão ajudar na compreensão da dinâmica de nossos sistemas.

¹Cf. Teorema de Sard, página 4.

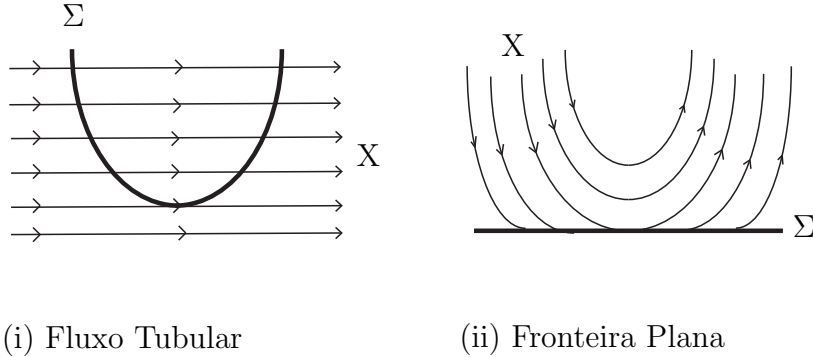


Figura 7.3: Exemplos de Formas Normais de Vishik.

7.1.2 Aplicação de Primeiro Retorno para Campos Vetoriais em Variedades com Bordo

Considere a seguinte construção, que pode ser encontrada em [24]: seja $X \in \mathfrak{X}^r(n)$. Considere o sistema de coordenadas $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n, 0$ tal que $\Sigma = \{x_1 = 0\}$ e $X = (X_1, X_2, \dots, X_n)$, onde assumiremos que $X(0) \neq 0$ e $X_1(0) = 0$. Seja N_0 uma seção transversal a X em 0 .

Pelo Teorema da Função Implícita, para cada $p \in \Sigma, 0$, existe um único $t = t(p)$ em $\mathbb{R}, 0$ tal que a órbita-solução $t \mapsto \gamma(t, p)$ de X através de p passa por N_0 no ponto $\tilde{p} = \gamma(t(p), p)$, como mostrado na Figura 7.4.

Definimos a aplicação suave

$$\begin{aligned} \phi_X : \mathbb{R}^n, 0 &\rightarrow \mathbb{R}^n, 0 \\ p &\mapsto \tilde{p} = \gamma(t(p), p). \end{aligned}$$

Essa aplicação é uma ferramenta usada no estudo dos campos de vetores na vizinhança da fronteira de uma variedade. Observe que o conjunto τ_X coincide com o conjunto de pontos fixos de ϕ_X .

Essa construção simplificará nosso trabalho, uma vez que estamos interessados em encontrar uma relação de equivalência entre dois campos de vetores que preservem Σ , pois eventualmente podemos reduzir esse problema encontrando equivalências entre ϕ_X e ϕ_Y no âmbito das singularidades dessas aplicações.

Lembrando que quando 0 é uma Σ -singularidade do tipo dobra de X então, associado à aplicação ϕ_X , existe um difeomorfismo simétrico β_X que satisfaz a relação $\phi_X \circ \beta_X = \phi_X$. A construção foi realizada sobre uma

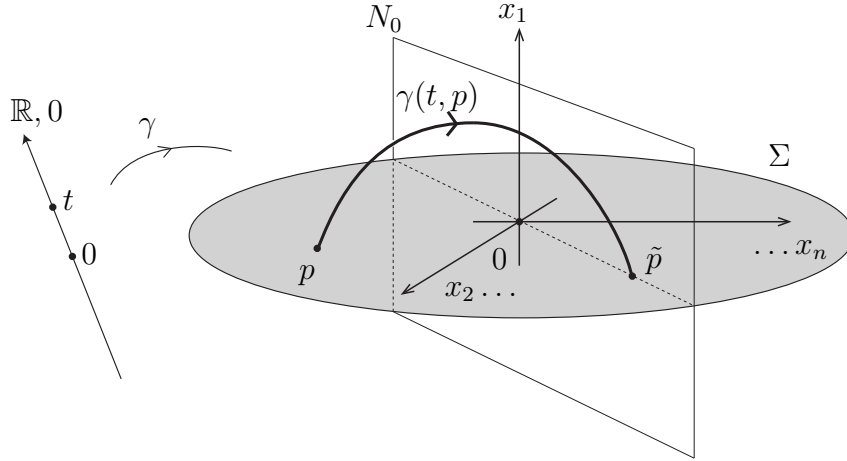


Figura 7.4: Órbita $\gamma(t, p)$ que passa pela seção N_0 em \tilde{p} .

variedade em que o campo deve ser definido em duas partes para que haja primeiro retorno. O fato de considerarmos o campo em duas partes já nos induz aos próximos capítulos, em que definiremos campos de vetores suaves por partes.

Para isto, precisaremos adiantar uma definição: considere um campo $Z = (X, Y)$, como definido em (8.1), tal que ϕ_X e ϕ_Y são dobras com $X^2h(0) < 0$ e $Y^2h(0) > 0$. Então a composta β_X com β_Y nos fornece a aplicação de primeiro retorno β_Z associado a Z e Σ . Veremos adiante que essa situação será chamada de singularidade dobra-dobra elíptica, onde a aplicação β_Z desempenhará um papel fundamental nos estudos da dinâmica dos campos de vetores suaves por partes.

7.2 Σ -singularidades de codimensão um em variedades de dimensões dois e três

7.2.1 Variedades de dimensão 2

No caso das variedades de dimensão 2, a única Σ -singularidade de codimensão zero é um ponto de dobra em $\mathbb{R}^2, 0$. As Σ -singularidades de codimensão um, definidas a seguir, são representadas pelos subconjuntos $\Gamma_1(2)$ de $\mathfrak{X}_1^r(2)$ de acordo com [24].

Definição 7.2.1. Dizemos que a p é uma Σ -singularidade de codimensão um de $X \in \Gamma_1(2)$, se a $p \in \Sigma$ é uma singularidade do tipo cúspide ou se $p \in \Sigma$ é um ponto crítico Σ -hiperbólico do campo de vetores X .

Uma singularidade cúspide é caracterizada por $Xh(p) = X^2h(p) = 0$ e $X^3h(p) \neq 0$ (ver Figura 7.5). No segundo caso, isto significa que p é um ponto crítico hiperbólico de X (ver Figura 7.6) com autovalores distintos e com variedades invariantes transversais (estável, instável e fortemente estável ou fortemente instável).

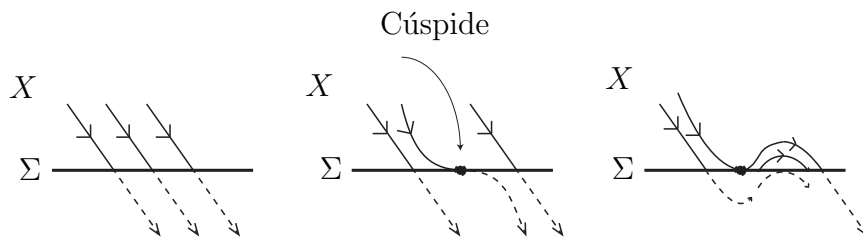


Figura 7.5: Singularidade Cúspide e seu desdobramento.

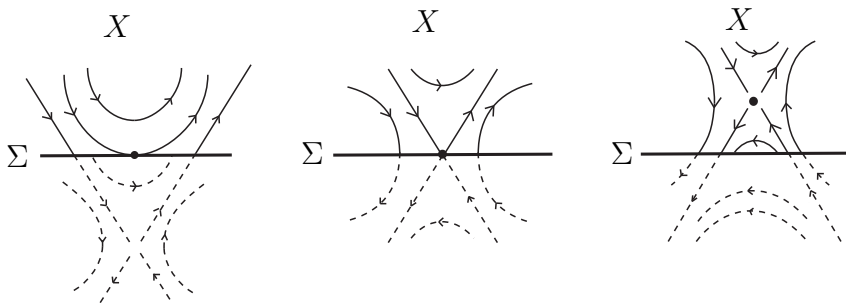


Figura 7.6: Ponto de sela na fronteira e seu desdobramento.

Nesta subsubseção, considere o sistema de coordenadas em $\mathbb{R}^2, 0$ tal que $h(x, y) = y$.

O próximo teorema, provado em [22], apresenta as formas normais das singularidades de codimensão um, tais como na Definição 7.2.1. As formas normais são as representantes mais simples da classe de equivalência

dos germes dos campos de vetores e, por isso, a grande importância de se estabelecer as formas normais para cada caso. Nesta subseção, considere $h(x, y) = y$ e o Teorema 3.2.3.

Teorema 7.2.1. *Seja $X \in \mathfrak{X}_1^r(2)$. O campo de vetores X é estruturalmente estável relativamente a $\mathfrak{X}_1^r(2)$ se, e somente se, $X \in \Gamma_1(2)$. Além disso, $\Gamma_1(2)$ é uma subvariedade mergulhada de codimensão um e denso em $\mathfrak{X}_1^r(2)$.*

Além disso, temos as seguintes formas normais:

• Para codimensão zero:

1: $X_\mu(x, y) = (1, 0)$ (ponto regular);

2: $X_\mu(x, y) = (1, x)$ (singularidade de dobra).

• Para codimensão um:

1: $X_\mu(x, y) = (1, \mu + x^2)$ (singularidade cúspide);

2: $X_\mu(x, y) = (ax, x + by + \mu)$, com $a = \pm 1$ e $b = \pm 2$, onde obtemos as seguintes Formas de Jordan:

* $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, que é uma fonte;

* $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$, que é uma sela;

* $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, que é uma sela;

* $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$, que é um poço;

3: $X_\mu(x, y) = (x, x - y + \mu)$, obtemos a Forma de Jordan

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},$$

que é um poço;

4: $X_\mu(x, y) = (x + y, -x + y + \mu)$, obtemos a Forma de Jordan

$$\begin{pmatrix} 1 - i & 0 \\ 0 & 1 + i \end{pmatrix},$$

que é um foco repulsor.

7.2.2 Variedades de dimensão 3

Nossa atenção agora será dada aos casos de dimensão 3. Nesta subsecção, considere $h(x, y, z) = z$. Em [21], Sotomayor e Teixeira estudaram o conjunto de Σ -bifurcações, que denotamos por $\mathfrak{X}_1^r(3)$, e caracterizaram sua estabilidade estrutural, que é caracterizada no seguinte Teorema.

Teorema 7.2.2. *Um campo $X \in \mathfrak{X}^r(3)$ é estruturalmente estável se, e somente se:*

- (1) $X(p) \neq 0$, para todo $p \in \Sigma$;
- (2) Para toda definição local h de Σ em p , uma das seguintes condições é satisfeita:
 - (2.1) Caso regular: $(X.h)(p) \neq 0$;
 - (2.2) Caso dobra: $(X.h)(p) = 0$ e $(X^2.h)(p) \neq 0$;
 - (2.3) Caso cúspide: $(X.h)(p) = 0$, $(X^2.h)(p) = 0$, $(X^3.h)(p) \neq 0$ onde o conjunto de vetores $\{Dh(p), D(X.h)(p), D(X^2.h)(p)\}$ é linearmente independente.

Considere $\Gamma_0(3)$ a classe de campos de vetores em $\mathfrak{X}^r(3)$ satisfazendo (2.1), (2.2) ou (2.3). Fixando $h(x, y, z) = z$, ainda em [21] são exibidas as formas normais dos campos de vetores em $\Gamma_0(3)$:

- (3) Caso regular: $X(x, y, z) = (0, 0, 1)$;
- (4) Caso dobra: $X(x, y, z) = (1, 0, x)$;
- (5) Caso cúspide: $X(x, y, z) = (1, 0, x^2 + y)$ e $\Gamma_0(3)$ é denso em $\mathfrak{X}^r(3)$.

Definição 7.2.2. *Seja $\mathfrak{X}_1^r(3) = \mathfrak{X}^r(3) \setminus \Gamma_0(3)$. Diremos que um campo de vetores X está em $\Gamma_1(a) \subset \mathfrak{X}_1^r(3)$, se as seguintes condições forem satisfeitas:*

- (a.1) $X(0) = 0$ e 0 é um ponto crítico hiperbólico de X ;
- (a.2) os autovalores de $DX(0)$ são dois a dois distintos e os autoespaços correspondentes são transversais a Σ em 0 ;
- (a.3) cada par de autovalores não complexos conjugados de $DX(0)$ possui partes reais distintas.

Definição 7.2.3. *Diremos que um campo de vetores X está em $\Gamma_1(b) \subset \mathfrak{X}_1^r(3)$, se $X(0) \neq 0$, $Xh(0) = 0$, $X^2h(0) = 0$ e uma das condições forem satisfeitas:*

(b.1) $X^3h(0) \neq 0$, $\text{posto}\{Dh(0), DXh(0), DX^2h(0)\} = 2$ e 0 é um ponto crítico não-degenerado de $Xh|_{\Sigma}$;

(b.2) $X^3h(0) = 0$, $X^4h(0) \neq 0$ e 0 é um ponto regular de $Xh|_{\Sigma}$.

O próximo resultado também pode ser encontrado em [21] e nos fornece as condições intrínsecas de um campo de codimensão um, definido em uma variedade de dimensão três, com bordo Σ .

Teorema 7.2.3. *São válidas as seguintes afirmações:*

(i) $\Gamma_1(3) = \Gamma_1(a) \cup \Gamma_1(b)$;

(ii) $\Gamma_1(3)$ é uma subvariedade de codimensão um de $\mathfrak{X}_1(3)$;

(iii) $\Gamma_1(3)$ é um conjunto aberto e denso em $\mathfrak{X}_1(3)$ na topologia induzida de $\mathfrak{X}^r(3)$;

(iv) Para um conjunto residual² de curvas suaves $\gamma : \mathbb{R}, 0 \rightarrow \mathfrak{X}^r(3)$, a curva γ encontra $\Gamma_1(3)$ transversalmente.

Lema 7.2.1. *(Lema de classificação)*

- Os elementos de $\Gamma_1(a)$ são classificados da seguinte maneira:

(a.1.1) **Σ -singularidade Nó:** Se $X(0) = 0$, os autovalores de $DX(0)$, λ_1 , λ_2 e λ_3 são reais e distintos, com $\lambda_i\lambda_j > 0$, $j = 2, 3$ e os autoespaços são transversais à Σ em 0 .

(a.1.2) **Σ -singularidade Sela:** Se $X(0) = 0$, os autovalores de $DX(0)$, λ_1 , λ_2 e λ_3 são reais, distintos, com $\lambda_1\lambda_j < 0$, $j = 2$ ou 3 e os autoespaços são transversais à Σ em 0 .

(a.1.3) **Σ -singularidade Foco:** Se 0 é um ponto crítico hiperbólico de X , os autovalores de $DX(0)$ são $\lambda_{12} = a \pm bi$, $\lambda_3 = c$ com a , b e c distintos de zero e $c \neq a$, e os autoespaços são transversais à Σ em 0 .

- Os elementos de $\Gamma_1(b)$ são classificados da seguinte maneira:

Considerando a definição 7.2.3, temos:

²É o complementar de um conjunto magro.

(b.1.1) Σ -singularidade **Lips**: Se ocorrer (b.1), com

$$\det(\text{Hess}(Xh|_{\Sigma})) > 0$$

(Ver Figura 7.7).

(b.1.2) Σ -singularidade **Bec to Bec**: Se ocorrer (b.1), com

$$\det(\text{Hess}(Xh|_{\Sigma})) < 0$$

(Ver Figura 7.8).

(b.1.3) Σ -singularidade **Dove's Tail**: Se ocorrer (b.2) (Ver Figura 7.9).

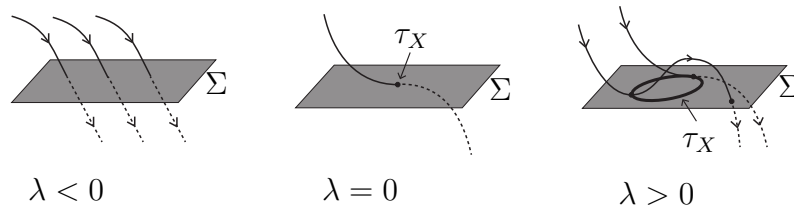


Figura 7.7: Σ -Singularidade do tipo Lips.

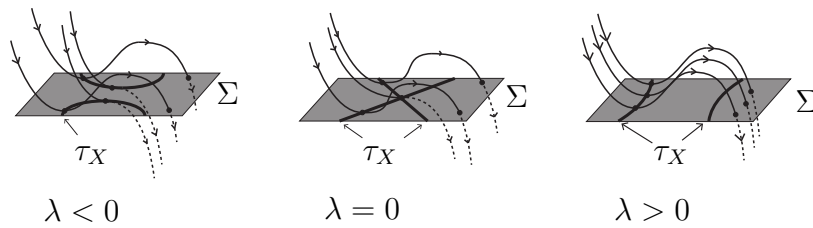


Figura 7.8: Σ -Singularidade do tipo Bec to Bec.

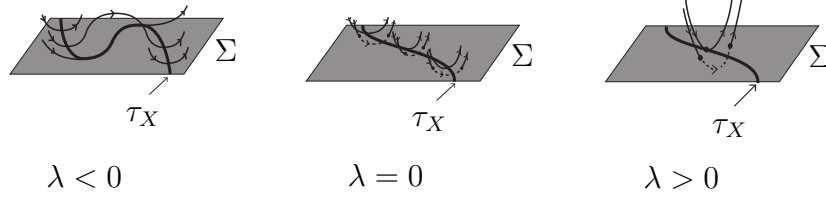


Figura 7.9: Σ -Singularidade do tipo Dove's Tail.

O próximo teorema, cuja demonstração encontra-se em [17], relaciona formas normais de uma singularidade de codimensão um.

Teorema 7.2.4. (*Bifurcações genéricas e formas normais*)

(i) *Seja $X \in \mathfrak{X}^r(3)$. O campo de vetores X é Σ -estruturalmente estável relativamente à $\mathfrak{X}_1^r(3)$ se, e somente se, $X \in \Gamma_1(3)$.*

(ii) (*Desdobramento versal*) *No espaço de famílias um-parâmetro de campo de vetores X_α em $\mathfrak{X}^r(3)$, com $\mu \in (-\varepsilon, \varepsilon)$ em todo conjunto denso é formado por famílias genéricas tais que suas formas normais são as seguintes:*

Codim 0: Para $X_\mu \in \Gamma_0(3)$:

- 1) $X_\mu(x, y, z) = (0, 0, 1)$.
- 2) $X_\mu(x, y, z) = (z, 0, \pm x)$.
- 3) $X_\mu(x, y, z) = (z, 0, x^2 + y)$.

Codim 1: Para $X_0 \in \Gamma_1(3)$:

- 1) $X_\mu(x, y, z) = \left(z, 0, \frac{-3x^2 \pm y^2 + \mu}{2} \right)$.
- 2) $X_\mu(x, y, z) = \left(z, 0, \frac{4\delta x^3 + y + \mu x}{2} \right)$, com $\delta = \pm 1$.
- 3) $X_\mu(x, y, z) = \left(axz, byz, \frac{ax + by + cz^2 + \mu}{2} \right)$, com $(a, b, c) = \delta(3, 2, 1)$, $\delta = \pm 1$.
- 4) $X_\mu(x, y, z) = \left(axz, byz, \frac{ax + by + cz^2 + \mu}{2} \right)$, com $(a, b, c) = \delta(1, 3, 2)$, $\delta = \pm 1$.
- 5) $X_\mu(x, y, z) = \left(axz, byz, \frac{ax + by + cz^2 + \mu}{2} \right)$, com $(a, b, c) =$

$\delta(1, 2, 3), \delta = \pm 1.$

$$6) X_\mu(x, y, z) = \left(xz, 2yz, \frac{x + 2y - cz^2 + \mu}{2} \right).$$

$$7) X_\mu(x, y, z) = \left((-x + y)z, (-x - y)z, \frac{-3x^2 - y^2 + z^2 + \mu}{2} \right).$$

A notação $\delta = \pm 1$ significa que, ou $\delta(1, 2, 3) = (1, 2, 3)$ ou $\delta(1, 2, 3) = (-1, -2, -3)$, por exemplo.

8 Sistemas Descontínuos

8.1 Campos de Filippov

Antes de estudarmos as bifurcações em campos descontínuos, apresentaremos algumas definições importantes. Existem vários tipos de convenções para se definir um campo vetorial descontínuo, onde cada uma dessas convenções têm seus respectivos propósitos e aplicações. Aquela que melhor se aplica neste trabalho é a seguinte convenção de Filippov:

Seja $\Omega^r(n)$ o espaço de todos os germes dos campos de vetores $Z \in \mathbb{R}^n$ tal que

$$Z(p) = \begin{cases} X(p) & , \text{ se } h(p) \geq 0 \\ Y(p) & , \text{ se } h(p) \leq 0, \end{cases} \quad (8.1)$$

em que $X, Y \in \mathfrak{X}^r(n)$ são campos de vetores suaves em \mathbb{R}^n e a função h é uma função escalar definida em (10.2). Caso esse sistema não esteja em sua forma normal, é possível aplicar os procedimentos do Capítulo 5 de modo que possamos obter uma forma mais simples com a mesma dinâmica que o campo original, isto é, um representante mais simples da mesma classe de equivalência. Adiante, explanaremos os conceitos exemplificando campos em sua forma normal.

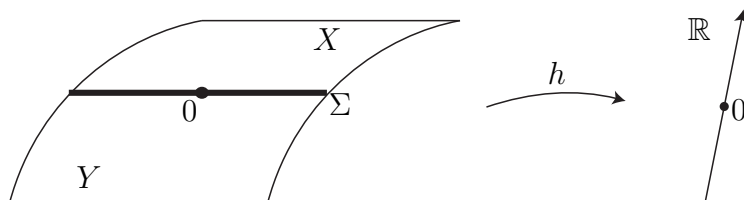


Figura 8.1: Região de descontinuidade Σ .

Adotaremos a notação tradicional $Z = (X, Y)$ para o campo (8.1), que está ilustrado na Figura 8.1. A região de descontinuidade $\Sigma = h^{-1}(0) \cap U$, sendo 0 um valor regular, é uma subvariedade diferenciável de codimensão um e divide o conjunto aberto U em duas regiões abertas que podem ser denotadas, respectivamente, por $\Sigma^+ = \{p \in U : h(p) > 0\}$ e $\Sigma^- = \{p \in U : h(p) < 0\}$.

Note que Z é um campo vetorial suave por partes, com diferentes dinâmicas no campo X e no campo Y . Consideraremos $\Omega^r(n) = \mathfrak{X}^r(n) \times \mathfrak{X}^r(n)$, munidos com a topologia produto.

8.2 Regiões de descontinuidade

Conforme a convenção de Filippov estabelecida em [7], dado qualquer campo descontínuo $Z = (X, Y)$, tem-se a seguinte classificação das regiões sobre as variedades de descontinuidade Σ , representadas na Figura 8.2:

- Região de Costura (*crossing region*):
 $\Sigma^c = \{p \in \Sigma : Xh(p) \cdot Yh(p) > 0\};$
- Região de Deslize (*sliding region*):
 $\Sigma^s = \{p \in \Sigma : Xh(p) < 0 \text{ e } Yh(p) > 0\};$
- Região de Escape (*escape region*):
 $\Sigma^e = \{p \in \Sigma : Xh(p) > 0 \text{ e } Yh(p) < 0\}.$

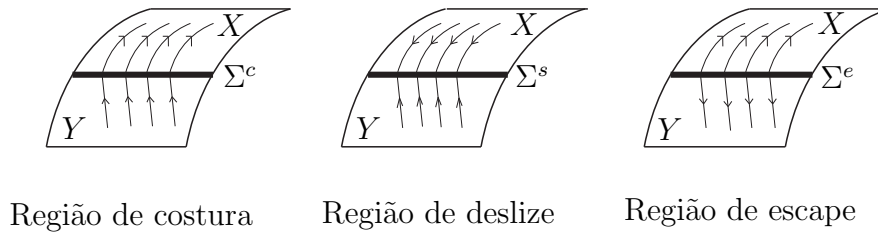


Figura 8.2: As diferentes regiões de descontinuidades, segundo Filippov.

Definição 8.2.1. *Sejam dois campos de Filippov Z e \tilde{Z} definidos em abertos $U \subset \mathbb{R}^n, 0$ e $\tilde{U} \subset \mathbb{R}^n, 0$ possuindo regiões de descontinuidade Σ e $\tilde{\Sigma}$. Dizemos que $Z, \tilde{Z} \in \Omega^r(n)$ são Σ -**equivalentes** se existir um homeomorfismo $h : U \rightarrow \tilde{U}$ que leva órbitas de Z em órbitas de \tilde{Z} e $h(\Sigma) = \tilde{\Sigma}$.*

Deste modo, definiremos o conceito de **estabilidade Σ -estrutural** em $\Omega(n)$.

Definição 8.2.2. *Dizemos que $Z \in \Omega^r(n)$ é Σ -**estruturalmente estável** se existir uma vizinhança $V \subset \Omega^r(n)$ tal que todo $\tilde{Z} \in V$ é Σ -equivalente a Z .*

8.3 Combinação convexa para campos vetoriais deslizantes

A seguir, definiremos as trajetórias passando por p em Σ^c , Σ^s e Σ^e . Se p estiver na região de costura, os campos apontam na mesma direção e, portanto, é suficiente justapor as trajetórias de X e Y por aquele ponto. Caso contrário, isto é, se $p \in \Sigma^s$ ou $p \in \Sigma^e$, adotaremos a órbita local dada pela convenção de Filippov, definindo a **combinação convexa**.

Definição 8.3.1. Para cada $p \in \Sigma^s \cup \Sigma^e$ é dado uma combinação linear convexa de $X(p)$ e $Y(p)$, que denotaremos por $\bar{Z}^s(p)$ o campo que seja tangente em todo $p \in \Sigma$, que é dado por:

$$\bar{Z}^s = \frac{1}{(Y - X) \nabla h} (Y \nabla h \cdot X - X \nabla h \cdot Y) \Big|_{p \in \Sigma^{e,s}}. \quad (8.2)$$

Definido desta forma, \bar{Z}^s é chamado um **campo vetorial deslizante**³ e independe de estar definido na região de deslize ou de escape, conforme ilustrado na Figura 8.3.

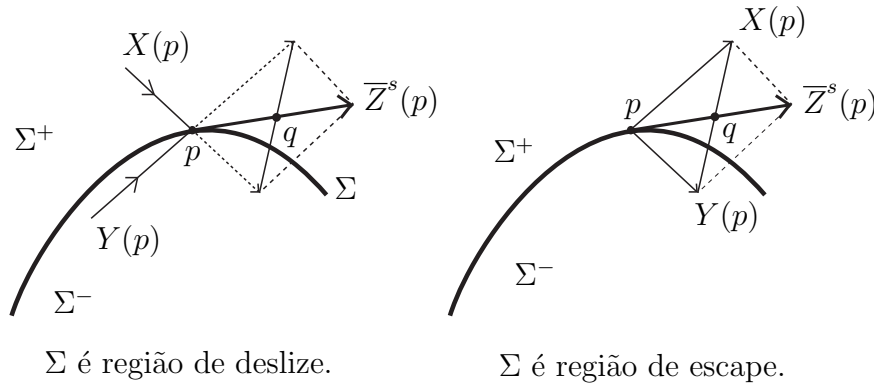


Figura 8.3: Combinação convexa de Filippov para estabelecer o campo \bar{Z}^s .

Geometricamente, a combinação linear convexa do campo \bar{Z}^s é formado pelos campos $X(p)$ e $Y(p)$ da seguinte maneira: para cada $p \in \Sigma$, o vetor $\bar{Z}^s(p)$ esteja contido no cone formado pelos campos $X(p)$ e $Y(p)$ e intercepte

³ou **Campo Vetorial de Filippov**.

o segmento $X(p) - Y(p)$ no ponto q e o vetor $\vec{q} - \vec{p} = \bar{\Sigma}^s$ seja tangente à variedade Σ .

O denominador em \bar{Z}^s se anula na origem e não há como fazer uma C^r -extensão numa vizinhança da origem. No entanto, podemos observar que a órbita futura de \bar{Z}^s coincide, em Σ , com a órbita futura do campo de vetores

$$Z^s = (Y\nabla h \cdot X - X\nabla h \cdot Y) \Big|_{p \in \Sigma^{e,s}}.$$

Faremos uso desse campo em vez de \bar{Z}^s . Chamaremos esse campo de **campo de vetores deslizante normalizado**. Assim, Z^s pode ser C^r -estendido na origem. Portanto, toda vez que afirmarmos C^r -estendido, fica subentendido que estamos utilizando o campo deslizante normalizado.

Lema 8.3.1. *Quando $X(p)$ e $Y(p)$, com $p \in \Sigma^e \cup \Sigma^s$, são linearmente dependentes, então $\bar{Z}^s(p) = 0$. Neste caso, dizemos que p é uma **singularidade simples** de Z .*

Demonstração. Se $X(p)$ e $Y(p)$ são linearmente dependentes, então, para cada $p \in \Sigma^{e,s}$, existe um número $K \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ tal que $X(p) = K \cdot Y(p)$, onde é imediato por (8.2) que $\bar{Z}^s(p) = 0$. \square

Definição 8.3.2. *A trajetória local (ou solução orbital) de um campo vetorial descontínuo $Z(q)$ é definida da seguinte maneira:*

- Para $p \in \Sigma^+$ (pontos regulares do campo X em Σ^+), a trajetória é dada por $\phi_Z(t, p) = \phi_X(t, p)$ para $t \in I \subset \mathbb{R}$.
- Para $p \in \Sigma^c$ tal que $Xh(p) \cdot Yh(p) > 0$ e tomando a origem do tempo em p , a trajetória é definida como $\phi_Z(t, p) = \phi_Y(t, p)$ para $t \in (I \cap \{t \leq 0\})$ e $\phi_Z(t, p) = \phi_X(t, p)$ para $t \in (I \cap \{t \geq 0\})$. Analogamente, para $Xh(p) \cdot Yh(p) < 0$.
- Para $p \in \Sigma^e \cup \Sigma^s$, a trajetória é definida por $\phi_Z(t, p) = \phi_{Z^s}$ para $t \in I \subset \mathbb{R}$, onde Z^s é um campo vetorial deslizante.
- Para $p \in \partial\Sigma^c \cup \partial\Sigma^s \cup \partial\Sigma^e$ tais que as definições de trajetórias por pontos em Σ em ambos os lados de p podem ser estendidas para p e coincidirem, então a trajetória por p será esta trajetória. Chamaremos esses pontos de **pontos de tangência regulares**.
- Para qualquer outro ponto $\phi_Z(t, p) = p$ para todo $t \in \mathbb{R}$, temos que os pontos de tangência sobre Σ não regulares serão chamados de **pontos de tangência singulares** nos pontos críticos do campo X em Σ^+ , Y em Σ^- e Z^s em $\Sigma^s \cup \Sigma^e$.

Uma vez que definimos precisamente o que é trajetória, passaremos ao conceito de órbita.

Definição 8.3.3. A *órbita local* de um ponto $p \in U$ é o conjunto

$$\gamma(p) = \{\phi_Z(t, p) : t \in I\}.$$

Nos sistemas autônomos, usaremos os termos trajetória e órbita indistintamente quando não houver perigo de ambiguidade.

Definida a aplicação de primeiro retorno para campos contínuos na Definição 4.6.1 e para campos em variedades com bordo na Seção 7.1.2 e agora definiremos de modo semelhante a aplicação de primeiro retorno para campos suaves por partes, usando um exemplo concreto.

Exemplo 8.3.1. Considere o seguinte campo de vetores $Z \in \Omega^r(n)$:

$$Z = (X, Y) = \begin{cases} X = (a, b, x) & , \text{ se } h(p) \geq 0 \\ Y = (c, d, y) & , \text{ se } h(p) \leq 0 \end{cases}, p \in \mathbb{R}^3 \quad (8.3)$$

onde $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, ou seja, o campo (8.3) é da forma

$$X = \begin{cases} \dot{x} = a \\ \dot{y} = b \\ \dot{z} = x \end{cases}, \quad Y = \begin{cases} \dot{x} = c \\ \dot{y} = d \\ \dot{z} = y \end{cases},$$

de maneira que a origem seja um ponto de dobra para ambos os campos. Calculando os fluxos associados a cada campo, temos:

$$\phi_X(t, p) = \phi_X(t, (x_0, y_0, t_0)) = \left(at + x_0, bt + y_0, \frac{at^2}{2} + x_0t + z_0 \right)$$

e

$$\phi_Y(\bar{t}, \bar{p}) = \phi_Y(\bar{t}, (\bar{x}_0, \bar{y}_0, \bar{t}_0)) = \left(c\bar{t} + \bar{x}_0, d\bar{t} + \bar{y}_0, \frac{d\bar{t}^2}{2} + \bar{x}_0\bar{t} + \bar{z}_0 \right).$$

Sem perda de generalidade, considere para nossos propósitos, $a = -1$ e $d = 2$ no campo (8.3) em $z_0 = 0$, temos os fluxos

$$\phi_X(t, p) = \phi_X(t, (x_0, y_0, t_0)) = \left(-t + x_0, bt + y_0, \frac{-t^2}{2} + x_0t \right)$$

e

$$\phi_Y(\bar{t}, \bar{p}) = \phi_Y(\bar{t}, (\bar{x}_0, \bar{y}_0, \bar{t}_0)) = \left(c\bar{t} + \bar{x}_0, 2\bar{t} + \bar{y}_0, \bar{t}^2 + \bar{x}_0\bar{t} \right).$$

Como estamos interessados em saber qual o tempo de retorno, queremos $z = 0$. Pelo Teorema da Função Implícita, para cada $p \in \Sigma, 0$, existe um único tempo positivo $t(p) = t_1$ tal que a órbita-solução $t \rightarrow \phi_X(t(p), p)$ de X através de p intercepta Σ no ponto $p_1 = \phi_X(t(p), p)$, respectivamente. Logo,

$$X : \frac{-t^2}{2} + x_0 t = 0 \Rightarrow t_0 = 0 \text{ ou } t_1 = 2x_0$$

e analogamente,

$$Y : \bar{t}^2 + \bar{y}_0 \bar{t} = 0 \Rightarrow \bar{t}_0 = 0 \text{ ou } \bar{t}_1 = -\bar{y}_0,$$

em que t_1 é o tempo de retorno da aplicação ϕ_X e \bar{t}_1 , da aplicação ϕ_Y . Sendo assim, substituindo t_1 em $\phi_X|_{z=0}$ e \bar{t}_1 em $\phi_Y|_{z=0}$ temos os caminhos

$$\gamma_X = (-x_0, 2bx_0 + y_0)$$

e

$$\gamma_Y = (\bar{x}_0 - c\bar{y}_0, -\bar{y}_0).$$

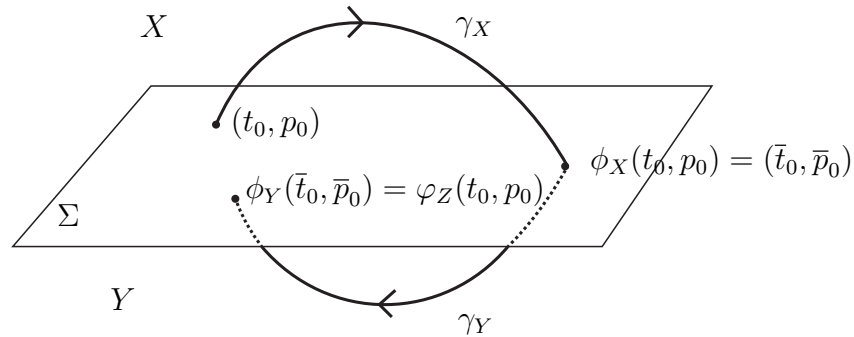


Figura 8.4: Aplicação de Primeiro Retorno para campos descontínuos.

Compondo, obtemos a aplicação de primeiro retorno para este caso particular

$$\varphi_Z(t, p) = \gamma_Y \circ \gamma_X(t, p) = ((-1 - 2bc)x_0 - cy_0, -2bx_0 - y_0).$$

Assim, procedendo de modo análogo, podemos definir a aplicação de primeiro retorno para campos descontínuos.

Definição 8.3.4. A aplicação de primeiro retorno $\varphi_Z : \Sigma, 0 \rightarrow \Sigma, 0$ para o campo (8.1) é definida pela composição

$$\varphi_Z = \gamma_Y \circ \gamma_X.$$

Vamos denotar por L_Z a parte linear de φ_Z .

8.4 Singularidades e Estabilidade Estrutural em Campos de Filippov

Como já definimos as trajetórias e a aplicação de primeiro retorno para campos suaves por partes, daremos agora uma classificação para as singularidades conforme o comportamento do campo planar de Filippov.

Definição 8.4.1. Seja $p \in \Sigma^s \cup \Sigma^e$.

- Os pontos $p \in \Sigma^s \cup \Sigma^e$ tais que $Z^s(p) = 0$, são chamados de **pseudo-equilíbrios** ou **equilíbrios singulares** de Z .
- Os pontos $p \in \Sigma^s$ que satisfazem $Z^s(p) = 0$ e os autovalores de $D(Z^s)(p)$ que possuem parte real negativa são chamados de **pseudo-atratores**.
- Os pontos $p \in \Sigma^e$ que satisfazem $Z^s(p) = 0$ e os autovalores de $D(Z^s)(p)$ que possuem parte real positiva são chamados de **pseudo-repulsores**.
- Os pontos $p \in \Sigma^s$ que satisfazem $Z^s(p) = 0$ e os autovalores de $D(Z^s)(p)$ que possuem parte real positiva ou $p \in \Sigma^e$ com $Z^s(p) = 0$ e os autovalores de $D(Z^s)(p)$ que possuem parte real negativa são chamados de **pseudo-sela**.

As singularidades podem ser caracterizadas como zeros de certas funções apropriadas, como se segue:

Definição 8.4.2. As singularidades de um campo de vetores suaves por partes podem ser classificadas como:

- $p \in \Sigma^\pm$ tal que p é um equilíbrio de X ou de Y (ou seja, $X(p) = 0$ ou $Y(p) = 0$);
- $p \in \Sigma^s \cup \Sigma^e$ tal que p é um pseudo-equilíbrio (ou seja, $Z^s(p) = 0$);
- $p \in \partial\Sigma^e \cup \partial\Sigma^s \cup \partial\Sigma^c$ é uma tangência regular ou singular (ou seja, $Xh(p) = 0$ ou $Yh(p) = 0$).

- Qualquer outro ponto é chamado um **ponto regular**.

De suma importância, a próxima definição é um dos pilares do Teorema principal desta subseção.

Definição 8.4.3. *Em um campo planar de Filippov, as **Singularidades Genéricas** em Σ podem ser dos seguintes tipos:*

- pontos de dobra regulares, ou seja, $p \in \Sigma$ tal que $Xh(p) = 0$ e $X^2h(p) \neq 0$ e $Yh(p) \neq 0$ (respectivamente, $p \in \Sigma$ tal que $Yh(p) = 0$ e $Y^2h(p) \neq 0$ e $Xh(p) \neq 0$);
- pontos críticos hiperbólicos de campo de deslize, ou seja, pontos $p \in \Sigma^s \cup \Sigma^e$ tais que $X(p) \parallel Y(p)$, p é ponto crítico hiperbólico de Z^s e $D(Z^s)(p) \neq 0$.

Notação: $X(p) \parallel Y(p)$ significa que os campos são paralelos no ponto $p \in \Sigma$.

No caso em que $n = 2$, temos o Teorema 8.4.1 a seguir, que caracteriza a estabilidade estrutural e Σ -estrutural do campo de Filippov $Z = (X, Y)$ numa vizinhança da origem. A demonstração deste Teorema pode ser encontrado em [9], p. 1982.

Teorema 8.4.1. *Seja $Z_0 = (X_0, Y_0) \in \Omega$ definido em uma vizinhança da origem $(0, 0) \in \Sigma$ e com curva de descontinuidade $\Sigma = \{(x, 0) : x \in \mathbb{R}\}$. Se $(0, 0) \in \Sigma$ é um ponto regular ou uma singularidade genérica, então Z_0 é local e estruturalmente estável e local e Σ -estruturalmente estável.*

O Teorema 8.4.1 caracteriza o conjunto Σ_0 de sistemas planares de Filippov que são estruturalmente estáveis numa vizinhança da origem em \mathbb{R}^2 .

Na próxima seção, vamos analisar o que ocorre no conjunto complementar de $\Sigma_0(n) \subset \Omega^r(n)$, isto é, no **conjunto das bifurcações**.

9 Bifurcações Genéricas em $\Omega^r(n)$

Sejam $Z = (X, Y) \in \Omega^r(n)$ e $\Sigma_0(n)$ (respectivamente $\Sigma_1(n)$) o conjunto de todos os elementos que são estruturalmente estáveis em $\Omega^r(n)$ (respect. $\Omega_1^r(n) = \Omega^r(n) \setminus \Sigma_0(n)$).

É evidente que uma pré-classificação das singularidades genéricas também garante que se $Z = (X, Y) \in \Sigma_0(n)$ (respect. $Z = (X, Y) \in \Sigma_1(n)$) então X e Y estão em $\Gamma_0(n)$ (respect. $X \in \Gamma_0(n)$ e $Y \in \Gamma_1(n)$ ou vice-versa). Caso ocorra $X \in \Gamma_1(n)$ e $Y \in \Gamma_1(n)$, teremos um fenômeno de, pelo menos, codimensão 2.

9.1 Caso Bi-dimensional

O teorema a seguir caracteriza a estabilidade estrutural em $\Omega^r(2)$ e os detalhes podem ser encontrados em [14].

Teorema 9.1.1. *Seja $\Sigma_0(2)$ um conjunto aberto e denso de $\Omega^r(2)$. Um campo de vetores $Z = (X, Y)$ está em $\Sigma_0(2)$ se, e somente se, uma das seguintes condições forem satisfeitas:*

- (i) *Ambos os elementos X e Y são regulares. Quando $0 \in \Sigma$ é uma singularidade simples de Z então assumimos que ele seja um ponto crítico hiperbólico de Z^s ;*
- (ii) *X é uma singularidade do tipo dobra e Y é regular (e vice-versa).*

O próximo teorema segue a mesma linha de raciocínio do Teorema 7.2.3, considerando sua utilidade para classificar as bifurcações genéricas.

Teorema 9.1.2. *$\Gamma_1(2)$ é um conjunto aberto e denso de $\Omega_1^r(2)$. O campo de vetores $Z = (X, Y)$ está em $\Sigma_1(2)$ desde que uma das seguintes condições estejam satisfeitas:*

- (i) *Ambos elementos X e Y são Σ -regulares. Quando $0 \in \Sigma$ é uma singularidade simples de Z , então assumimos que é um ponto crítico de codimensão um;*
- (ii) *0 é uma Σ -singularidade de X e Y , um ponto regular. Neste caso temos que 0 é ou uma Cúspide Σ -singular ou um ponto crítico;*
- (iii) *Ambos X e Y são dobras Σ -singulares em 0 . Neste caso temos que exigir que 0 seja um ponto crítico hiperbólico de uma C^r -extensão de Z^s , desde que esteja na fronteira de $\Sigma^e \cup \Sigma^s$. Além disso, quando 0 é uma singularidade distinta do tipo dobra-dobra de Z então 0 é um ponto fixo hiperbólico da aplicação de primeiro retorno β_Z .*

9.2 Caso tridimensional: dobra-dobra

Considere $Z = (X, Y) \in \Omega^r(3)$. Analisaremos apenas o caso mais relevante para nossos propósitos, onde ambos os campos de vetores X e Y apresentam singularidades tipo dobra na origem.

Denotemos por $A = \{Z \in \Omega^r(3); 0 \text{ é uma singularidade dobra-dobra de } Z\}$. Antes de prosseguir, observe os seguintes fatos:

- (i) Os conjuntos de tangência τ_X e τ_Y em Σ em geral se interceptam transversalmente, de maneira que determinam 4 quadrantes sobre a variedade Σ , a saber, duas sendo de costura, uma sendo de escape e outra sendo de deslize, conforme Figura 9.1;
- (ii) As regiões de deslize e escape revertem a orientação, conforme mostra a Figura 9.1.
- (iii) As trajetórias dos campos X e Y que passam pela origem possuem contato quadrático com Σ em 0;
- (iv) A é um subconjunto aberto de $\Omega^r(3)$ se, e somente se, ocorrer (i);
- (v) O campo de Filippov Z^s pode ser C^r -estendida para uma vizinhança da origem em Σ . Além disso, $Z^s(0) = 0$.

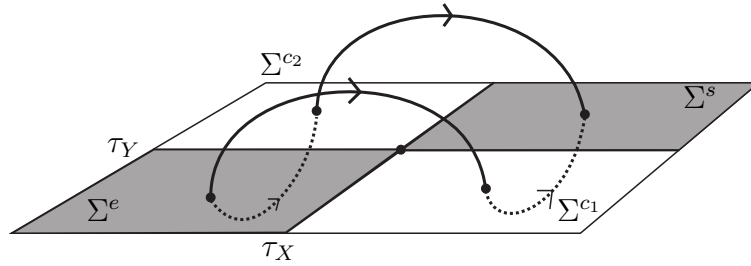


Figura 9.1: Os 4 quadrantes sobre a variedade de descontinuidade Σ e uma dobra-dobra elíptica com uma T-singularidade.

9.2.1 Partições do Conjunto das Singularidades Dobra-dobra.

De acordo com a definição 7.1.3, concentraremos agora no caso de contato quadrático (dobra) e suas possíveis combinações, dois a dois, respectivamente nos campos X e Y .

Nosso objetivo será estudar bifurcações sobre uma variedade de descontinuidade de dimensão 2, $\Sigma \subset \Omega^r(3)$. Nossa maior atenção estará voltada para as dobras. Para isso, é importante conhecermos os casos de dobra-dobra, que estão na seguinte Definição:

Definição 9.2.1. *Considere os seguintes conjuntos:*

(1) **Regular:**

- (i) $R_r = \{Z = (X, Y); X \text{ e } Y \text{ são regulares na origem}\}$ (Caso regular-regular);
- (ii) $R_d = \{Z = (X, Y); 0 \text{ é uma singularidade do tipo dobra para } X \text{ e } Y \text{ é regular à } \Sigma \text{ na origem (ou vice-versa)}\}$ (Caso dobra-regular), que está ilustrado na Figura 9.2;
- (iii) $R_c = \{Z = (X, Y); 0 \text{ é uma singularidade do tipo cúspide para } X \text{ e } Y \text{ é regular à } \Sigma \text{ (ou vice-versa)}\}$ (Caso cúspide-regular).

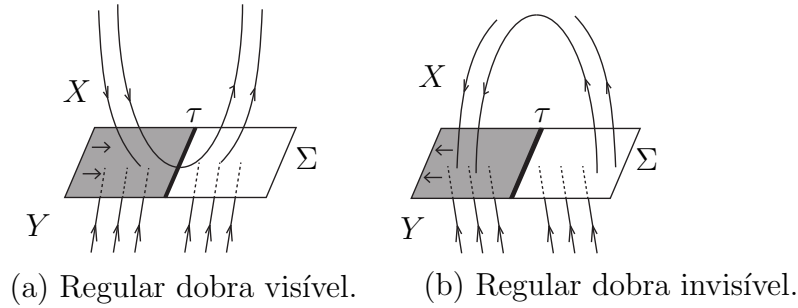


Figura 9.2: Campos do conjunto R_d para X possuindo uma dobra na origem e Y regular à Σ na origem.

(2) **Dobras:** $A_0 = \{Z = (X, Y) \in A; \text{ tal que o contato entre } \tau_X \text{ e } \tau_Y \text{ sejam transversais em } 0, \text{ os autovetores de } DZ^s(0) \text{ são transversais a } \tau_X \text{ e } \tau_Y \text{ em } 0, \text{ sendo este um ponto crítico hiperbólico de } Z^s\}$. Observe que A_0 é um subconjunto aberto e denso de A . Assim, em A_0 , podemos classificar os seguintes subconjuntos em três casos, conforme o tipo de dobra-dobra, conforme esboçado na figura 9.3.

- (i) **Caso Elíptico:** é conjunto $A_e = \{Z \in A_0 : X^2h(0) < 0 \text{ e } Y^2h(0) > 0\}$, chamado de dobra-dobra invisível e pode ser vista na Figura 9.1.
- (ii) **Caso Parabólico:** $A_p = \{Z \in A_0 : X^2h(0) > 0, Y^2h(0) > 0 \text{ ou } X^2h(0) < 0, Y^2h(0) < 0\}$, chamado de dobra-dobra visível-invisível.
- (iii) **Caso Hiperbólico:** $A_h = \{Z \in A_0 : X^2h(0) > 0 \text{ e } Y^2h(0) < 0\}$, chamado de dobra-dobra visível.

Definição 9.2.2. *Seja $Z \in A_e$. Dizemos, neste caso, que $p \in Z$ é uma **T-singularidade**⁴.*

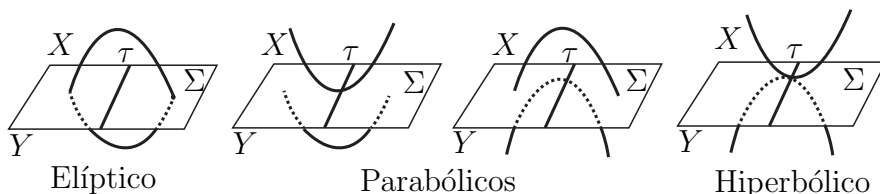


Figura 9.3: Esboço dos tipos de tangência.

Na Figura 9.3 está esboçado como foram pensadas as possibilidades de contato quadrático, duas a duas. Uma ilustração mais precisa pode ser vista na Figura 9.4.

Após essa classificação, podemos enunciar o seguinte resultado, demonstrado em [24]:

Teorema 9.2.1. *O campo de vetores $Z = (X, Y)$ pertence a $\Sigma_0(3)$ desde que uma das seguintes condições seja satisfeita:*

- (i) *Ambos elementos X e Y são regulares. Quando $0 \in \Sigma$ é uma singularidade simples de Z então assumimos que ele é um ponto crítico hiperbólico de Z ;*
- (ii) *X é uma singularidade tipo dobra em 0 e Y é regular em 0 ;*
- (iii) *X é uma singularidade tipo cúspide em 0 e Y é regular em 0 ;*
- (iv) *Ambos sistemas X e Y são do tipo dobra em 0 . Além disso:*
 - (a) *Os conjuntos de tangência τ_X e τ_Y são transversais em $0 \in \Sigma$;*
 - (b) *Os autoespaços associados à Z^s são transversais a τ_X e τ_Y em $0 \in \Sigma$;*

Encerramos então esta subseção apresentando algumas das bifurcações genéricas mais relevantes para o caso em que o campo de vetores suave por partes apresenta uma singularidade do tipo dobra-dobra na origem.

⁴Esta nomenclatura é em homenagem a Marco Antonio Teixeira, que em 1990 estudou pela primeira vez a singularidade sobre a dobra-dobra invisível.

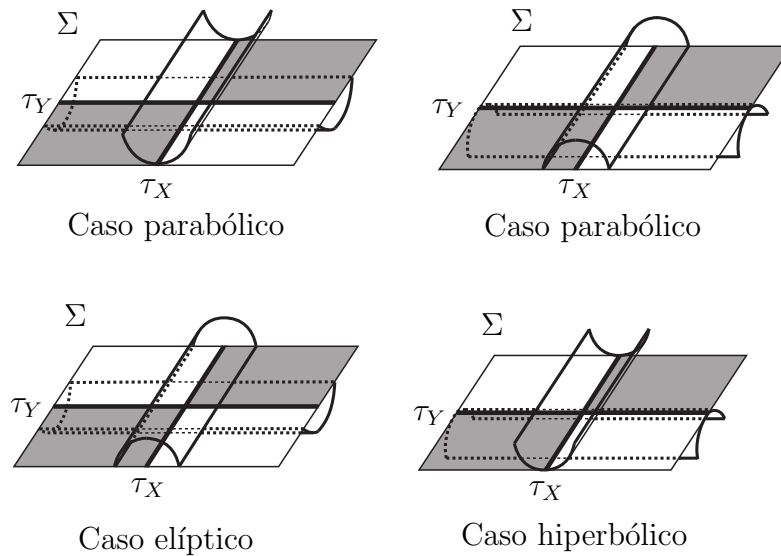


Figura 9.4: Tipos de tangência da Definição 9.2.1 (2).

10 Bifurcações do tipo *Grazing* e do tipo *Catastrophic* nos ciclos limite no \mathbb{R}^3

10.1 Introdução

Neste capítulo apresentaremos dois tipos de bifurcações bem distintas daquelas já vistas nos capítulos anteriores. Essas bifurcações envolvem ciclos limite no espaço tridimensional, que podem ser encontradas em [12].

Existem vários modelos matemáticos aplicados aos sistemas dinâmicos descontínuos nas atuais linhas de pesquisa, tais como modelos de chaveamento, sistemas de controle e relê, aplicações em economia, ecologia e neurofisiologia.

Essas teorias ainda estão em franco desenvolvimento com trabalhos recentes mostrando que as singularidades do tipo *Grazing* formam centros de estabilidade de modo que bifurcações de ciclos limites foram descritos por di Bernardo em [6] e rotas para o Caos, descrito por Galvanetto em [8]. O termo “*Grazing*” refere-se a uma órbita que tangencialmente se choca e

desliza sobre a variedade de descontinuidade, avançando sobre a fronteira entre a dinâmica suave e não-suave.

Já o termo “*Catastrophic*” refere-se às bifurcações de ciclos limite que são destruídos depois do choque com a variedade de descontinuidade, conforme condições que veremos adiante.

Neste capítulo, analisaremos um caso particular e interessante de um caso genérico em três dimensões: a singularidade dobra-dobra (conforme Subseção 7.1.2 e Seção 9.2). Neste caso, dinâmicas importantes de um sistema suave por partes estão presentes: órbitas que são transversais às superfícies deslizantes (segundo a convenção de Filippov) e regiões deslizantes instáveis. Dentro deste contexto, o caso dobra-dobra com dinâmica mais rica é a Teixeira singularidade ou T -singularidade.

10.2 O problema dobra-dobra

Considere o campo de vetores:

$$Z = \begin{cases} X = a^R + g^R(x), & \text{se } h(x) \geq 0 \\ Y = a^L + g^L(x), & \text{se } h(x) \leq 0 \end{cases}, \quad x \in \mathbb{R}^3, \quad (10.1)$$

para uma função real monótona h , vetores constantes a^i e polinômios contínuos g^i tais que $g^i(0) = 0$, $i = R$ ou L .

A função real h é escolhida convenientemente por:

$$h(w, y, z) = w + \frac{\alpha y^2 + \beta z^2 - 2\alpha\beta yz}{2(1 - \alpha\beta)}, \quad (10.2)$$

onde $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, representado na Figura 10.1.

A variedade de descontinuidade é $\Sigma = \{x \in \mathbb{R}^3 : h(x) = 0\}$. Se $p \in \Sigma$ é tangenciada por ambos os lados, então $Xh(p) = Yh(p) = 0$. De acordo com a Definição 7.1.3, as condições genéricas $X^2h, Y^2h \neq 0$ devem ser satisfeitas a fim de que as tangências sejam quadráticas.

Para nossos propósitos, vamos considerar os seguintes conjuntos de tangência que intersectam transversalmente:

$$\begin{aligned} \tau_X &= \{p \in \Sigma : Xh = 0\} \\ \tau_Y &= \{p \in \Sigma : Yh = 0\} \end{aligned} \quad (10.3)$$

e vetores da forma

$$a^R = \eta \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \alpha \end{pmatrix}, \quad a^L = \mu \begin{pmatrix} 0 \\ \beta \\ 1 \end{pmatrix}, \quad (10.4)$$

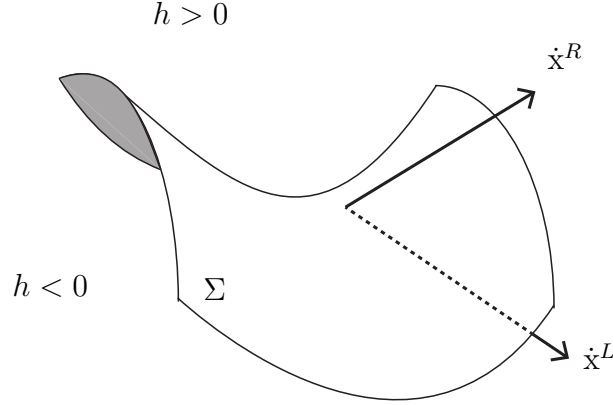


Figura 10.1: Variedade de descontinuidade Σ tipo Sela em \mathbb{R}^3 : um sistema dinâmico constante por partes com região de descontinuidade em $h = 0$, onde h é da forma $h \sim w + y^2 - z^2$.

com $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, onde podemos escrever (10.1) como

$$X = \begin{cases} \dot{w} = 0 \\ \dot{y} = \eta \\ \dot{z} = \alpha\eta \end{cases} + \mathcal{O}(1), \quad Y = \begin{cases} \dot{w} = 0 \\ \dot{y} = \beta\mu \\ \dot{z} = \mu \end{cases} + \mathcal{O}(1).$$

Geometricamente, α (respectivamente β) é o valor da tangente do ângulo θ_X (respect. θ_Y) entre o campo de vetores X (respect. Y) e sua linha de dobra $Xh|_{h=0} = 0$ (respect. $Yh|_{h=0} = 0$). De acordo com [4], os números α e β podem ser obtidos na T-singularidade pela seguinte fórmula:

$$\alpha = \text{tg}(\theta_X) = \frac{\sqrt{-(X^2h)(Y^2h)}}{X(Yh)} \quad \text{e} \quad \beta = \text{tg}(\theta_Y) = -\frac{\sqrt{-(X^2h)(Y^2h)}}{Y(Xh)} \quad (10.5)$$

avaliados na dobra-dobra, desde que $(X^2h) \cdot (Y^2h) < 0$.

Podemos escolher convenientemente o sinal dos parâmetros $\eta, \mu = \pm 1$ que nos fornece três casos distintos pela combinação de sinais, uma vez que o caso $\eta = -\mu = 1$ é equivalente a $-\eta = \mu = -1$.

Nesta seção, considere $h(x, y, z) = x$. A escolha de (10.2) não é por acaso. Esse sistema é equivalente à forma normal dobra-dobra definida por

Teixeira em [23], para o qual a variedade de descontinuidade é plana. A mudança de coordenadas a fim de obtermos uma fronteira plana, conforme Figura 7.3, é dada substituindo-se a variável w pela variável x , com a seguinte dinâmica:

$$\dot{x} = \dot{w} + \frac{\alpha y(\dot{y} - \beta \dot{z}) - \beta z(\alpha \dot{y} - \dot{z})}{1 - \alpha\beta}$$

que foi obtida derivando (10.2) em relação a t . Substituindo (10.4), obtemos

$$\dot{x} = \begin{cases} \eta\alpha y, & h \geq 0 \\ -\mu\beta z, & h \leq 0 \end{cases} + g^i(\mathbf{x}) + \mathcal{O}(2) \quad (10.6)$$

que está de acordo com a forma normal dobra-dobra de Teixeira nas coordenadas (x, y, z) . Para simplificar (10.6), reescalamos as coordenadas através da transformação $x \rightarrow -\eta\alpha x$ em $\{(x, y, z); h > 0\}$ e $x \rightarrow \mu\beta x$ em $\{(x, y, z); h < 0\}$, com $\alpha, \beta \neq 0$.

Desta forma, obtemos $Z = (X, Y)$ onde

$$Z = \begin{cases} X = (\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}) = (-y, \eta, \eta\alpha), & \text{se } h(p) \geq 0 \\ Y = (\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}) = (z, \mu\beta, \mu), & \text{se } h(p) \leq 0 \end{cases}, \quad p \in \mathbb{R}^3. \quad (10.7)$$

Posteriormente, consideraremos os diferentes casos para a escolha dos sinais de $\eta, \mu = \pm 1$.

Conforme as classificações das variedades de descontinuidade da Seção 8.2, considere a combinação convexa de Filippov, o campo \bar{Z}^s e a função

$$h(x, y, z) = x.$$

Esse campo de vetores está confinado em $x = 0$ planificado. Pela Combinação Convexa (8.2), podemos escrever como $\dot{\mathbf{x}} = \bar{Z}^s(y, z)$ e desconsiderar o termo x (ou w), obtendo

$$\bar{Z}^s(y, z) = \left(\frac{\mu\beta y + \eta z}{y + z}, \frac{\mu y + \eta\alpha z}{y + z} \right)$$

e o seu normalizado

$$Z^s(y, z) = (\mu\beta y + \eta z, \mu y + \eta\alpha z) \quad (10.8)$$

que pode ser C^r -estendido na origem. Deste modo, temos os três ingredientes principais da dobra-dobra, que são os campos X, Y e Z^s .

O jacobiano de (10.8) é dado por

$$J = \begin{pmatrix} \mu\beta & \eta \\ \mu & \eta\alpha \end{pmatrix},$$

onde o seu determinante é

$$\delta = -\mu\eta(1 - \alpha\beta) \quad (10.9)$$

e o seu traço

$$\text{tr} = \eta\alpha + \mu\beta.$$

Calculando os autovalores de J , obtemos

$$\lambda_{1,2} = \frac{1}{2} \left(\eta\alpha + \mu\beta \pm \sqrt{(\eta\alpha - \mu\beta)^2 + 4\eta\mu} \right), \quad (10.10)$$

e seus autovetores associados

$$\vec{v}_{1,2} = \left(\frac{\eta}{\frac{1}{2}[\eta\alpha - \mu\beta \pm \sqrt{(\eta\alpha - \mu\beta)^2 + 4\eta\mu}]}, 1 \right). \quad (10.11)$$

Tomando (10.10) e adicionando $-\mu\beta$ a ambos os termos, chegamos a:

$$\begin{aligned} \lambda_{1,2} &= \frac{1}{2} \left(\eta\alpha + \mu\beta \pm \sqrt{(\eta\alpha - \mu\beta)^2 + 4\eta\mu} \right) \\ \lambda_{1,2} &= \frac{1}{2}\eta\alpha + \frac{1}{2}\mu\beta \pm \frac{1}{2}\sqrt{(\eta\alpha - \mu\beta)^2 + 4\eta\mu} \\ \lambda_{1,2} - \mu\beta &= \frac{1}{2}\eta\alpha - \frac{1}{2}\mu\beta \pm \frac{1}{2}\sqrt{(\eta\alpha - \mu\beta)^2 + 4\eta\mu} \\ \lambda_{1,2} - \mu\beta &= \frac{1}{2} \left[\eta\alpha - \mu\beta \pm \sqrt{(\eta\alpha - \mu\beta)^2 + 4\eta\mu} \right] \end{aligned}$$

onde os autovetores (10.11) ficam escritos como

$$\vec{v}_{1,2} = \left(\frac{\eta}{\lambda_{1,2} - \mu\beta}, 1 \right). \quad (10.12)$$

Note que usaremos o Teorema 3.2.3 nos casos a seguir, onde existe esse paralelo entre os casos contínuos e suaves por partes. Uma vez determinados esses importantes elementos, analisaremos os casos $\eta = \mu = -1$, $\eta = -\mu = 1$ e $\eta = \mu = 1$.

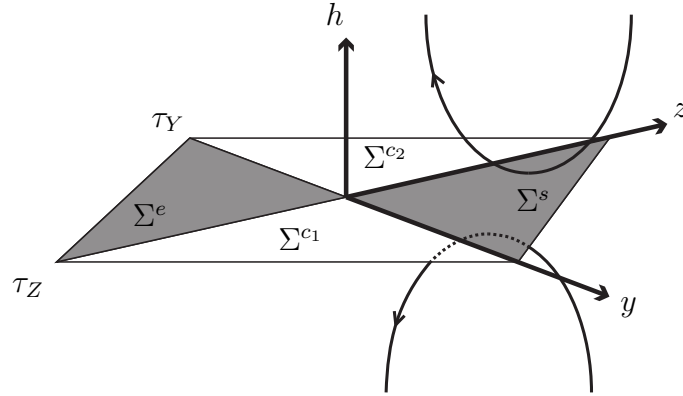


Figura 10.2: Coordenadas e conjuntos de tangência em uma dobra-dobra visível.

10.2.1 Dobra-dobra visível

O campo de vetores descontínuo (10.7) com $\eta = \mu = -1$, possui tangências de ordem 2, com dobras visíveis, conforme Figura 10.2, e tem a forma

$$Z = \begin{cases} (-y, -1, -\alpha), & \text{se } h(p) \geq 0 \\ (z, -\beta, -1), & \text{se } h(p) \leq 0 \end{cases}, \quad p \in \mathbb{R}^3. \quad (10.13)$$

Computando os elementos δ , $\lambda_{1,2}$ e $\vec{v}_{1,2}$, obtemos

$$\delta = \alpha\beta - 1,$$

$$\lambda_{1,2} = -\frac{1}{2} \left(\alpha + \beta \pm \sqrt{(\beta - \alpha)^2 + 4} \right)$$

e

$$\vec{v}_{1,2} = \left(\frac{-1}{\lambda_{1,2} - \beta}, 1 \right).$$

Segue do Teorema 3.2.3 que:

- (i) Se $\alpha\beta < 1$, então $\delta < 0$, temos que a origem é uma sela;
- (ii) Se $\alpha\beta > 1$, então $\delta > 0$, a origem é:

* um nó, se $(\beta - \alpha)^2 + 4 > 0$;

* um centro, se $\alpha + \beta = 0$.

Os autovalores são ambos reais, uma vez que $(\beta - \alpha)^2 + 4 > 0$, para todo $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

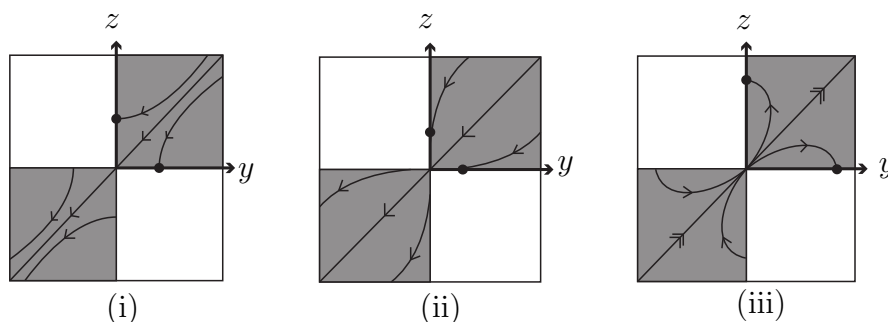


Figura 10.3: Dinâmica próxima à dobra-dobra visível.

Na Figura 10.3, podemos observar os seguintes casos:

- (i) Caso Sela, com $\alpha\beta < 1$;
- (ii) Caso Nó, com $\alpha\beta > 1$ e $\alpha, \beta > 0$;
- (iii) Caso Nó, com $\alpha\beta > 1$ e $\alpha, \beta < 0$.

Os pontos sobre os eixos y e z são os pontos onde as trajetórias deixam a região de descontinuidade.

Suponhamos, então, que o sistema (10.13) (ou mais genericamente (10.7)) seja a aproximação local de um sistema global onde um ciclo limite desliza Σ próxima a uma singularidade dobra-dobra e assumamos que este ciclo limite esteja inteiramente contido em $h \geq 0$ com um único ponto de contato ao longo da linha τ_Z . É possível observar que τ_Z faz fronteira com Σ^e e Σ^s . O sistema global não é genérico: sob certas perturbações, o ciclo limite pode deslizar por um certo tempo e perder contato com Σ ou atravessar Σ . A bifurcação tipo *Grazing* é constituída de um ponto de bifurcação, cujo sistema pode ser desdobrado com um único parâmetro global.

Mas, se considerarmos que o ciclo limite desliza sobre $\{\tau_Z : z < 0\}$ na fronteira de Σ^e , temos as seguintes condições:

$$Xh = 0 \text{ e } Yh < 0 < X^2h.$$

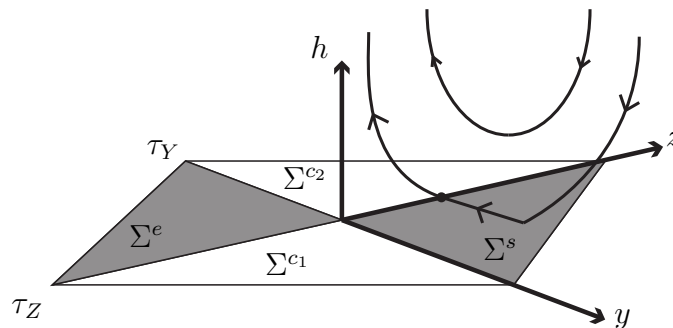


Figura 10.4: Bifurcação tipo *Grazing* numa tangência visível.

Em um dos lados da bifurcação, uma órbita está em $h > 0$, mas em outro lado, a órbita que está bifurcando sofrerá um impacto em Σ e atravessará até $h < 0$, conforme mostra a Figura 10.5. O segmento externo da órbita salta descontinuamente de $h > 0$ para $h < 0$ de tal modo que o ciclo limite é destruído e, por tal razão, este é denominado bifurcação *Catastrofic*.

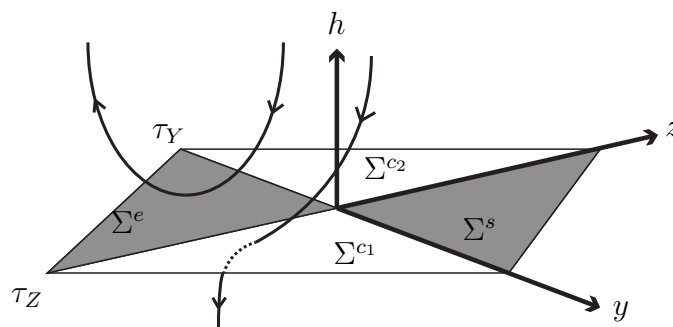


Figura 10.5: Bifurcação tipo *Catastrofic* numa tangência visível de ordem 2.

Sob a variação de um único parâmetro, um ciclo limite *Grazing* pode não interceptar o ponto de dobra-dobra $(0, 0, 0)$. No entanto, um ciclo limite com uma órbita deslizante pode. As diferentes topologias podem ser conferidas na Figura 10.3. Destes, podemos deduzir uma nova classe de bifurcações

Catastrophic.

Para isto, suponha um ciclo limite em $h \geq 0$, com um segmento deslizante que intercepta a singularidade. O segmento deslizante começa em um ponto de impacto em Σ^s e termina em uma singularidade, em que a dinâmica é peculiar: a órbita pode retornar para $h > 0$ ou para $h < 0$ ou ainda, pode seguir no campo deslizante em direção a Σ^e . Este segmento deslizante em Σ^s é parte de uma órbita deslizante especial: a variedade estável da sela para $\alpha\beta < 1$ descrita anteriormente e as direções estáveis fortes ou fracas nas singularidades tipo nó, para $\alpha\beta > 1$.

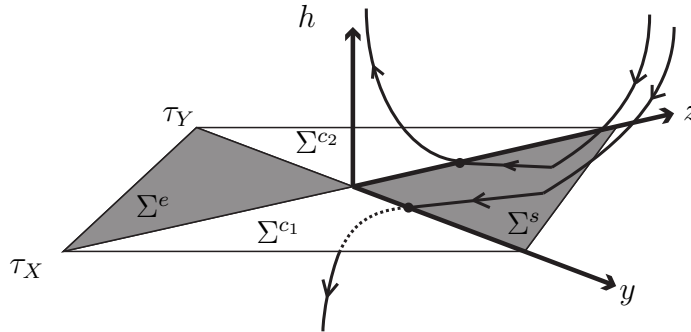


Figura 10.6: Bifurcação tipo Catastrophic numa dobra-dobra visível.

Esta órbita, particularmente, é constituída do ponto de bifurcação degenerado. Como um ponto de impacto de um ciclo limite, ele passa através de uma órbita especial, o ponto que faz o ciclo limite retornar move-se de τ_Z para τ_Y . Em um dos lados da bifurcação, a órbita retorna de Σ para $h > 0$; em outro lado, retorna para $h < 0$ e nunca retornando para $h \geq 0$, o que significa que o ciclo foi destruído. Assim, obtemos uma bifurcação do tipo *Catastrophic*, ilustrada na Figura 10.6.

Descrevemos as situações em que um ciclo limite esteja em $h \geq 0$ e intercepta τ_Z . Os casos de ciclos limite para $h < 0$ que interceptam τ_Y são análogos, devido à simetria dos sistemas do tipo dobra-dobra visível.

10.2.2 Dobra-dobra visível-invisível

O campo (10.7) com $\eta = -\mu = 1$, possui tangências de ordem 2, com dobras visíveis e invisíveis, conforme Figura 10.7, e tem a forma

$$Z = \begin{cases} (-y, 1, \alpha), & \text{se } h(p) \geq 0 \\ (z, -\beta, -1), & \text{se } h(p) \leq 0 \end{cases}, \quad p \in \mathbb{R}^3. \quad (10.14)$$

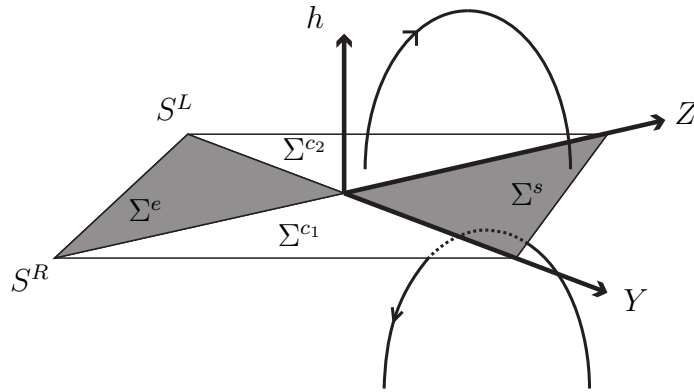


Figura 10.7: Coordenadas e conjuntos de tangência em uma dobra-dobra visível-invisível.

Calculando os elementos δ , $\lambda_{1,2}$ e $\vec{v}_{1,2}$, obtemos

$$\delta = 1 - \alpha\beta,$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{1}{2} \left(\alpha - \beta \pm \sqrt{(\alpha + \beta)^2 - 4} \right)$$

e

$$\vec{v}_{1,2} = \left(\frac{1}{\lambda_{1,2} + \beta}, 1 \right).$$

Os autovalores são reais para $|\alpha + \beta| \geq 2$ e os autovetores estão em Σ^s ou Σ^e para $\alpha + \beta > 0$ e em Σ^c para $\alpha + \beta < 0$.

O campo de vetores deslizante próximo à dobra-dobra visível-invisível pode ter uma das seguintes dinâmicas :

- (i) Para $\alpha\beta > 1$, temos $\delta < 0$ e se $|\alpha + \beta| \geq 2$, a origem é um ponto crítico do tipo sela; (Figura 10.8 (i))
- (ii) Para $\alpha\beta < 1$, temos $\delta > 0$ e se $|\alpha + \beta| \geq 2$, a origem é um ponto crítico do tipo fonte, se $\alpha - \beta > 0$ (Figura 10.8 (ii)) e poço, se $\alpha - \beta < 0$.

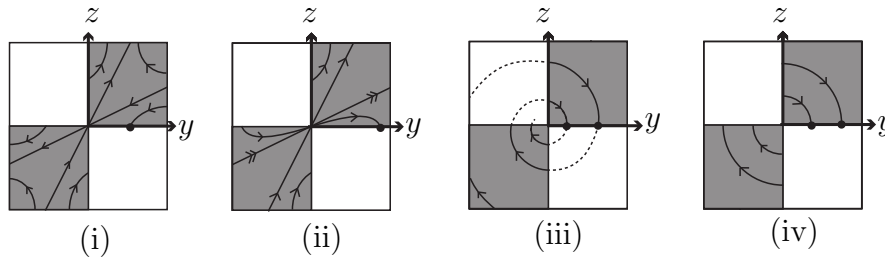


Figura 10.8: Dinâmica deslizante próxima à dobra-dobra visível-invisível.

(iii) Para $\alpha\beta < 1$, temos $\delta > 0$ e se $|\alpha + \beta| < 2$, a origem é um foco atrator, se $\alpha - \beta < 0$ (Figura 10.8 (iii)) e foco repulsor, se $\alpha - \beta > 0$.

(iv) Para $\alpha\beta < 1$ e $\alpha - \beta = 0$ temos que a origem é um ponto crítico do tipo centro, como mostra a (Figura 10.8 (iv)).

Novamente aplicamos o Teorema 3.2.3 do caso contínuo. No entanto, os retratos de fase omitiram as regiões de costura, como pode ser visto nas Figuras 10.3, 10.8 e 10.13.

Assim como fizemos na dobra-dobra visível, suporemos que exista um ciclo limite com pelo menos uma parte que seja um segmento deslizante que se aproxima da dobra-dobra. O ciclo limite pode interceptar o ponto de dobra-dobra de diferentes formas sobre o campo deslizante (10.8).

Se o campo deslizante é do tipo sela, ilustrado na Figura 10.8 (i), então existem duas maneiras em que um ciclo limite pode conter uma dobra-dobra, ilustrado na Figura 10.9.

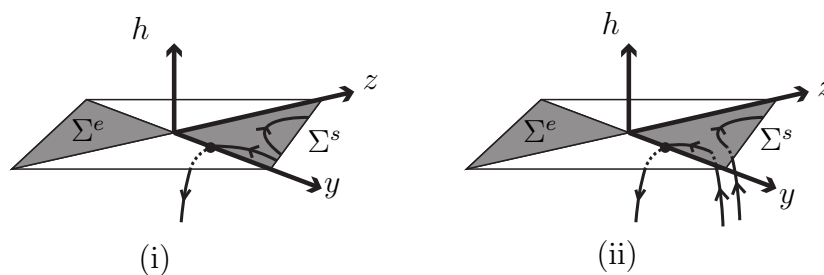


Figura 10.9: Bifurcação *Catastrophic* em uma dobra-dobra visível-invisível.

Na Figura 10.9 (i), temos um caso de ciclo limite suave contido em Σ com uma conexão com a singularidade. Em um dos lados da bifurcação está o ciclo limite suave em Σ ; em outro lado, a órbita é ejetada em τ_Y rumo a $h < 0$.

Na Figura 10.9 (ii), temos um ciclo limite em $h \leq 0$, com um segmento deslizante sobre Σ^s que intercepta o ponto de dobra-dobra em τ_Y . Em um dos lados da bifurcação, há um ciclo limite com um segmento deslizante e um ponto de ejeção em τ_Y que está em $h \leq 0$; em outro lado, não há ponto de ejeção de modo que o fluxo está confinado em Σ^s . Em ambos os casos, o ciclo limite é destruído, constituindo uma bifurcação do tipo *Catastrofic*.

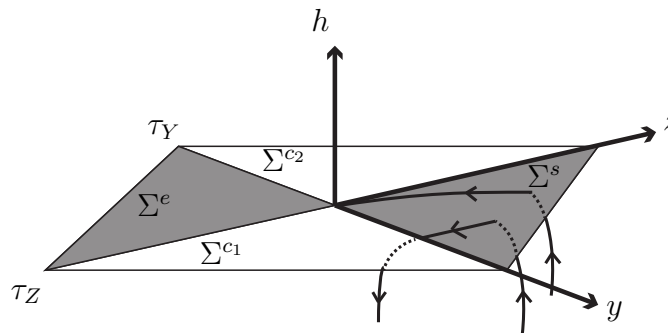


Figura 10.10: Bifurcação *Non-deterministic* em uma dobra-dobra visível-invisível.

Se o campo deslizante é do tipo nó atrator (Figura 10.8 (iii)), então em um dos lados da bifurcação existe um ciclo limite em $h \leq 0$, com um segmento deslizante que termina em um ponto de ejeção em τ_Y , que está ilustrado na Figura 10.10.

Note que a órbita é estável porque o conjunto das órbitas de todos os fluxos na dobra-dobra apontam para o autoespaço estável.

A dinâmica do futuro da singularidade não é única, segundo a convenção de Filippov. Pode ser observado que se o fluxo está sobre a região Σ^e , temos várias direções futuras. Analogamente para a região Σ^s , também não temos a unicidade do passado. Com isso, fica claro o fato de que o Teorema 2.3.1 (existência e unicidade) não vale para caso suave por partes.

Então, neste conjunto, o ciclo limite é destruído e substituído por uma evolução não determinística (do termo inglês *non-deterministic*), ou seja, o campo de vetores não é unicamente determinado pelo ponto de dobra-dobra. A Figura 10.11 ilustra um não determinismo na Teixeira singularidade, que será estudada na seção seguinte. As órbitas que são inicialmente

suaves, ao alcançar a região de deslize Σ^s , movem-se rumo à singularidade, onde retornam para um dos campos, X ou Y , assim que a atravessam e não há como determinar a direção das órbitas a partir deste ponto.

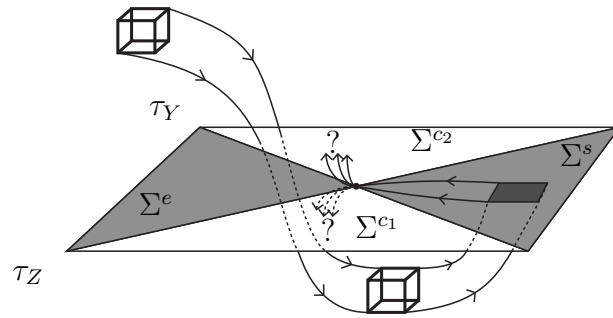


Figura 10.11: Ilustração do “não-determinismo” na Teixeira singularidade.

Consideremos um ciclo limite que desliza sobre $\{\tau_Z : z > 0\}$, com as condições $Xh = 0$, $X^2h > 0$ e $Y^2h > 0$. Isso significa que um ciclo limite desliza ao longo de τ_Z onde ele faz fronteira com Σ^s que sofre uma bifurcação denominada *Grazing*, descrito por [15]: em um dos lados da bifurcação, uma órbita suave está em $h > 0$; em outro lado, ela desliza em Σ^s e é toca τ_Z e retorna a $h > 0$, conforme Figura 10.4. Podemos observar que o ciclo limite permanece sobre a região Σ^s pois em $p \in U \setminus \Sigma$ ambas X e Y apontam para Σ^s onde podemos afirmar que Σ^s é uma região atratora para Z .

10.3 A Teixeira singularidade

Considerando que um ponto p é um ponto de dobra-dobra quando as seguintes condições são satisfeitas:

- $Xh(p) = 0$ e $X^2h(p) \neq 0$;
- $Yh(p) = 0$ e $Y^2h(p) \neq 0$,

em que nem X nem Y tenha ponto de equilíbrio próximo da origem, isto é, $X \neq 0$ e $Y \neq 0$, onde o par de retas τ_X e τ_Y se intersectam transversalmente na origem com a condição de que $\det(Dh(p), DXh(p), DYh(p)) \neq 0$. No caso da T-singularidade, tem-se $X^2h(0) < 0$ e $Y^2h(0) > 0$.

Considerando o campo de vetores (10.7) com $\eta = \mu = 1$, este possui tangências quadráticas, com dobra-dobra invisíveis, conforme Figura 10.12, e tem a forma

$$\bar{Z} = \begin{cases} (-y, 1, \alpha), & \text{se } h(p) \geq 0 \\ (z, \beta, 1), & \text{se } h(p) \leq 0 \end{cases}, \quad p \in \mathbb{R}^3, \quad (10.15)$$

onde o seu normalizado é

$$Z^s(Y, Z) = (\beta y + z, y + \alpha z).$$

Assim, seu jacobiano é

$$J = \begin{pmatrix} \beta & 1 \\ 1 & \alpha \end{pmatrix},$$

onde obtemos o determinante

$$\delta = \alpha\beta - 1,$$

os autovalores

$$\lambda_{1,2} = \frac{1}{2} \left(\alpha + \beta \pm \sqrt{(\alpha - \beta)^2 + 4} \right)$$

e os seus autovetores associados

$$\vec{v}_{1,2} = \left(\frac{1}{\lambda_{1,2} - \beta}, 1 \right).$$

Os autovalores são ambos reais e os autovetores estão em diferentes quadrantes de Σ de modo que \vec{v}_1 está em Σ^s (ou Σ^e) e \vec{v}_2 está em Σ^c , conforme mostra a Figura 10.13. Se o autovalor λ_i tem parte real negativa (respect. positiva), então os seus autoespaços gerados pelos autovetores associados são estáveis (respect. instáveis). Calculando, podemos verificar que um dos

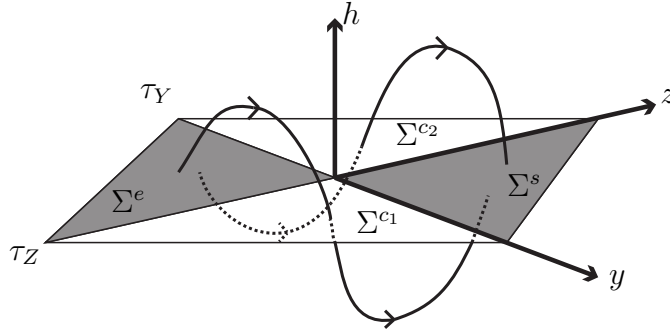


Figura 10.12: Coordenadas e conjuntos de tangência na Teixeira Singularidade.

autoespaços atravessam as regiões $\Sigma^e \cup \Sigma^s$ e o outro, $\Sigma^{c1} \cup \Sigma^{c2}$, passando pela origem. É possível notar também que esses autoespaços nunca podem ser tangentes a qualquer uma das linhas de dobra, pois corresponderia a uma tangência cúbica, que não é o caso. Em particular,

- (i) Se $\alpha, \beta < 0$ e $\alpha\beta > 1$, ambos autoespaços gerados por $\vec{v}_{1,2}$, são estáveis;
- (ii) Se $\alpha, \beta > 0$ e $\alpha\beta > 1$, ambos autoespaços gerados por $\vec{v}_{1,2}$, são instáveis;
- (iii) Se $\alpha\beta < 1$ o autoespaço gerado por \vec{v}_1 , em Σ^e é estável e o autoespaço gerado por \vec{v}_2 em Σ^s é instável (ou vice-versa).

Além disso, quando o autoespaço em $\Sigma^{e,s}$ é estável, ele está associado com o autovalor fraco estável, onde os segmentos de órbita deslizantes são assintoticamente atraídos para ele, onde se aproximam da singularidade.

A T-Singularidade é bastante peculiar. Ao contrário dos casos anteriores, falta-lhes a tangência visível, o que as impede de conter quaisquer pontos de retorno em τ_Y ou τ_Z , exceto na própria singularidade. Sendo assim, ela se difere das dinâmicas apresentadas nas Seções 10.2.1 e 10.2.2. De todas as singularidades, ela é a única que apresenta todos os elementos da dinâmica: o campo deslizante Z^s , X , Y e a aplicação de primeiro retorno. É possível notar que não há esses elementos em outros casos por causa das tangências visíveis.

No entanto, a dinâmica em torno da T-Singularidade consiste de órbitas em $h > 0$ e $h < 0$ que retornam continuamente sobre Σ , em um número finito ou infinito de vezes. A partir disso, podem surgir ou não ciclos limite, dependendo do parâmetro para que a dobra invisível em $h > 0$ se una à dobra invisível em $h < 0$, como sugere a Figura 10.12.

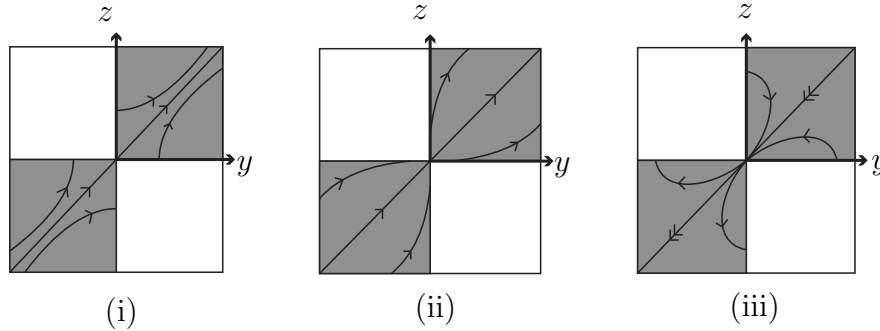


Figura 10.13: Dinâmica próxima à T-Singularidade. (i) Caso Sela, com $\alpha\beta < 1$, onde \vec{v}_1 é repulsor; (ii) Caso Nó, com $\alpha\beta > 1$, onde $\alpha + \beta > 0$, a origem é um nó repulsor, com $|\lambda_1| > |\lambda_2|$; (iii) Caso Nó, com $\alpha\beta > 1$, onde $\alpha + \beta < 0$, a origem é um nó atrator, com $|\lambda_1| < |\lambda_2|$.

A seguir, enunciaremos sem demonstração, um teorema que formaliza essa idéia e pode ser encontrada em [13].

Teorema 10.3.1. *As órbitas em uma vizinhança de uma T-Singularidade do campo (10.15) satisfazem as seguintes condições:*

- (i) *Se $\alpha\beta > 1$ e $\alpha, \beta < 0$, então qualquer órbita de (10.15) atravessa Σ um número infinito de vezes. Além disso, existe um par de superfícies invariantes que se interceptam na T-Singularidade;*
- (ii) *Se $\alpha\beta < 1$ ou $\alpha > 0$ ou $\beta > 0$, então qualquer órbita de (10.15) atravessa Σ um número finito de vezes.*

Uma consequência deste Teorema é a seguinte:

Corolário 10.3.1. *Seja uma T-Singularidade do campo (10.15) e N o número de vezes em que uma órbita atravessa a variedade de descontinuidade Σ .*

- (i) *Se $\alpha > 0$, então $N \leq 1$ e a órbita atravessa Σ em $y < 0 < z$;*
- (ii) *Se $\beta > 0$, então $N \leq 1$ e a órbita atravessa Σ em $z < 0 < y$;*
- (iii) *Se $0 < \alpha\beta < 1$ e $\alpha, \beta < 0$, então $N \geq 1$.*

Para analisarmos esta singularidade, usaremos a aplicação de primeiro retorno da Definição 8.3.4 no campo (10.15):

$$Z = \begin{cases} (-y, 1, \alpha), & \text{se } h(x) \geq 0 \\ (z, \beta, 1), & \text{se } h(x) \leq 0 \end{cases}, \quad x \in \mathbb{R}^3.$$

Integrando, obtemos os fluxos:

$$\phi_X(t, p) = \left(-\frac{t^2}{2} - y_0 t + h_0, t + y_0, \alpha t + z_0 \right)$$

e

$$\phi_Y(\bar{t}, \bar{p}) = \left(\frac{\bar{t}^2}{2} + \bar{z}_0 \bar{t} + \bar{h}_0, \beta \bar{t} + \bar{y}_0, \bar{t} + \bar{z}_0 \right).$$

Como queremos a dinâmica sobre $h = 0$, pelo Teorema da Função Implícita, para cada $p = (y_0, z_0) \in \Sigma, 0$, existe um único tempo positivo $t(p) = \bar{t}$ tal que a órbita-solução $t \rightarrow \phi_X(t(p), p)$ de Y através de p intercepta Σ no ponto $\bar{p} = \phi_X(t(p), p)$. Para o campo X , obtemos o tempo de retorno:

$$\frac{-t^2}{2} + y_0 t = 0 \Rightarrow t_0 = 0 \text{ ou } t_1 = -2y_0 = \bar{t}$$

e um único tempo positivo $\bar{t}(\bar{p}) = \bar{t}_1$ tal que a órbita-solução $\bar{t} \rightarrow \phi_Y(\bar{t}(\bar{p}), \bar{p})$ de Z através de \bar{p} intercepta Σ no ponto $\bar{p}_1 = \phi_Y(\bar{t}(\bar{p}), \bar{p})$. Para o campo Y , obtemos o tempo de retorno:

$$\frac{\bar{t}^2}{2} + \bar{z}_0 \bar{t} = 0 \Rightarrow \bar{t}_0 = 0 \text{ ou } \bar{t}_1 = -2\bar{z}_0,$$

onde t_1 é o tempo de retorno. Substituindo t_1 em $\phi_X|_{h=0}$ e $\phi_Y|_{h=0}$ temos os caminhos

$$\gamma_X = (-y_0, -2\alpha y_0 + z_0)$$

e

$$\gamma_Y = (\bar{y}_0 - 2\beta \bar{z}_0, -\bar{z}_0).$$

Note que podemos escrever γ_X e γ_Y na forma matricial

$$\begin{aligned} & \gamma_X : \mathbb{R}^- \times \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}, \text{ onde} \\ & \begin{pmatrix} \bar{y} \\ \bar{z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -2\alpha & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix} + \mathcal{O}(\|y, z\|^2) \end{aligned} \quad (10.16)$$

que localmente equivale a $(\bar{y}, \bar{z}) = (-y, -2\alpha y + z)$ e

$$\begin{aligned} & \gamma_Y : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^- \mapsto \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+, \text{ onde} \\ & \begin{pmatrix} \tilde{y} \\ \tilde{z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2\beta \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{y} \\ \bar{z} \end{pmatrix} + \mathcal{O}(\|\bar{y}, \bar{z}\|^2) \end{aligned} \quad (10.17)$$

que localmente equivale a $(\tilde{y}, \tilde{z}) = (\bar{y} - 2\beta\bar{z}, -\bar{z})$.

Desde o início, estamos omitindo os termos de ordem mais alta da expansão de Taylor, pois estamos estudando localmente a dinâmica em $\Sigma, 0$.

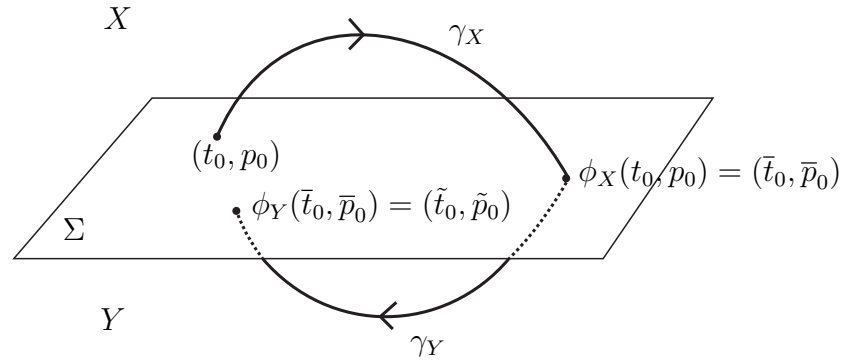


Figura 10.14: Aplicação de Primeiro Retorno φ_Z para a T-Singularidade.

Podemos então analisar a aplicação $\varphi : \Sigma, 0 \rightarrow \Sigma, 0$ da Definição 8.3.4 e verificar as dinâmicas de acordo com o comportamento da aplicação de primeiro retorno.

Assim, a aplicação de primeiro retorno, ilustrada na Figura 10.14, é obtida pela composição $\varphi_Z(p) = (\gamma_Y \circ \gamma_X)(p)$, multiplicando-se as matrizes de (10.16) e (10.17), isto é:

$$\varphi_Z : \mathbb{R}^- \times \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+, \text{ onde} \quad (10.18)$$

$$\begin{pmatrix} \tilde{y} \\ \tilde{z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 2\beta \\ -2\alpha & 4\alpha\beta - 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix} + \mathcal{O}(\|y, z\|^2)$$

que pode ser escrito simplesmente como

$$\varphi_Z(y, z) = (-y + 2\beta z, -2\alpha y + (4\alpha\beta - 1)z).$$

Calculando os autovalores da matriz de (10.18), obtemos

$$\lambda_{1,2} = -1 + 2\alpha\beta \pm 2\sqrt{\alpha\beta(\alpha\beta - 1)}$$

e os autovetores associados

$$\vec{v}_{1,2} = \left(\frac{2\beta}{2\alpha\beta + 2\sqrt{\alpha\beta(\alpha\beta - 1)}}, 1 \right),$$

ou simplesmente,

$$\vec{v}_{1,2} = \left(\frac{2\beta}{1 + \lambda_{1,2}}, 1 \right).$$

Pelo Teorema 10.3.1, se $\alpha\beta < 1$ ou $\alpha, \beta > 0$, então todas as órbitas suficientemente próximas da singularidade alcançam Σ^s após um número finito de voltas. Uma bifurcação ocorre quando $\alpha\beta = 1$ e $\alpha, \beta < 0$, pois se exigirmos a condição $\varphi_Z(p) = p$, isto é, resolvendo (10.18) igual a (y, z) , chegamos ao sistema:

$$\begin{cases} y = \beta z \\ (2\alpha\beta - 1)z - \alpha y = 0, \end{cases} \quad (10.19)$$

onde obtemos $\alpha\beta = 1$, que é o valor de bifurcação para a T-Singularidade. Essa é a condição necessária para que o sistema possua órbitas periódicas e pseudo-periódicas, definida a seguir.

Definição 10.3.1. *Seja $Z = (X, Y) \in \Omega$ e $p \in \mathbb{R}^3$. Dizemos que uma órbita é **pseudo-periódica** de Z se ela é fechada, composta por segmentos de órbitas de X e Y com a orientação não preservada. Veja Figura 10.15.*

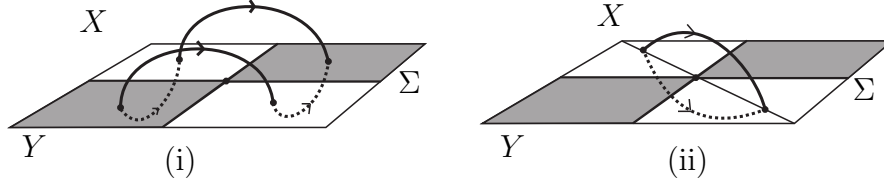


Figura 10.15: Em (i), temos a representação de uma órbita pseudo periódica. Em (ii), temos uma família de órbitas pseudo-periódicas sobre um conjunto de pontos fixos.

A seguir, exibiremos as famílias de órbitas periódicas e pseudo-periódicas da T-Singularidade. Para isto, considere a aplicação φ_Z avaliado em $\alpha\beta = 1$, isto é

$$\varphi_Z|_{\alpha\beta=1} = (-y + 2\beta z, -2\alpha y + 3z) \quad (10.20)$$

cujo jacobiano é

$$J = \begin{pmatrix} -1 & 2\beta \\ -2\alpha & 3 \end{pmatrix}.$$

Seus autovalores são

$$\lambda_{1,2} = 1 \pm 2\sqrt{1 - \alpha\beta}$$

e seus autovetores associados são

$$\vec{v}_{1,2} = \left(\frac{\beta}{1 \pm \sqrt{1 - \alpha\beta}}, 1 \right).$$

Como estamos avaliando em $\alpha\beta = 1$, temos que

$$\lambda_{1,2} = 1 \text{ e } \vec{v}_{1,2} = (\beta, 1).$$

Se $|\lambda| = 1$ então o ponto fixo do difeomorfismo dado pela aplicação de primeiro retorno é não-hiperbólico e, portanto, o sistema é estruturalmente instável, pois não podemos concluir que, para $\alpha\beta = 1$, o conjunto de pontos fixos seja atrator ou repulsor, conforme Proposição a seguir, cuja demonstração pode ser encontrada em [5].

Proposição 10.3.1. *Seja $L : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ uma aplicação linear. Se L possuir todos os autovalores com valor absoluto menor (respect. maior) que 1, então $L^n(x) \rightarrow 0$ quando $n \rightarrow \infty$ ($n \rightarrow -\infty$), para todo $x \in \mathbb{R}^3$.*

Em outras palavras, a atratividade de cada autovetor associado está relacionada com o valor absoluto de seu respectivo autovalor, i.e., denotando os autovalores de L por λ_j temos $|\lambda_j| < 1$, atrator; $|\lambda_j| > 1$, repulsor, onde $j = 1, 2, \dots, k$. Em particular, vale para \mathbb{R}^2 .

Geometricamente, podemos ver que a condição é que o conjunto de pontos fixos da aplicação de primeiro retorno esteja sobre a reta $y = -x$ sobre o plano $z = 0$, conforme Definição 2.1.4. Pode-se observar que o coeficiente angular dessa reta é igual a -1 .

Para exibir o par de retas invariantes citados no Teorema 10.3.1, usaremos o fato de que $\alpha\beta = 1$ na aplicação de primeiro retorno de (10.20). Resolvendo $\varphi_Z|_{\alpha\beta=1}(y, z) = (y, z)$, obtemos $y = \beta z$ e $z = \alpha y$, que são as retas procuradas. Como $\alpha = 1/\beta$, as retas invariantes, que passam pela origem, são simétricas em relação à bissetriz do primeiro (ou segundo) quadrante do plano yz .

A seguir, mostraremos que, para a T-Singularidade, temos os planos invariantes $z = y$ e $z = -y$. Para mostrar esse fato, enunciaremos as definições a seguir, que são oriundas de [11].

Definição 10.3.2. *Dizemos que um campo de vetores suaves por partes $Z \in \Omega$ com a variedade de descontinuidade Σ é ξ -reversível, se existir uma involução $\xi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ tal que:*

- $Fix(\xi) \subset \Sigma$;
- $\forall p \notin \Sigma$, vale $\xi \circ Z(p) = -Z(\xi(p))$.

Definição 10.3.3. Definimos $\Omega_\xi \subset \Omega$ o conjunto dos elementos $Z = (X, Y)$ tais que:

- $Z \in A_e$ (da Definição 9.2.1);
- Z é ξ -reversível.

Para mostrar que o campo (10.15) é reversível, usaremos o Lema da seguinte proposição:

Proposição 10.3.2. Se o campo $Z \in \Omega$ possui uma dobra-dobra invisível em 0, então Z é C^0 -equivalente ao campo $\tilde{Z} = (\tilde{X}, \tilde{Y})$ onde:

$$\begin{aligned}\tilde{X} &= (-y, -X^2h(0), XYh(0)) + (\mathcal{O}(x, y, z), \mathcal{O}(x, y, z), \mathcal{O}(x^2, y^2, z^2)), \\ \tilde{Y} &= (z, -YXh(0), Y^2h(0)) + (\mathcal{O}(x, y, z), \mathcal{O}(x, y, z), \mathcal{O}(x^2, y^2, z^2)).\end{aligned}$$

Demonstração. A origem pertence à fronteira da região Σ^s . Como Z possui uma dobra-dobra invisível, então ele possui duas regiões de tangência que se interceptam transversalmente e, portanto, podemos escolher um sistema local de coordenadas tal que

$$\tau_X = \{(x, y, z); x = y = 0\} \text{ e } \tau_Y = \{(x, y, z); x = z = 0\}.$$

Com isso, a forma normal local é escrita como:

$$\begin{aligned}\tilde{X} &= (-y, -X^2h(0), XYh(0)) + (\mathcal{O}(x, y, z), \mathcal{O}(x, y, z), \mathcal{O}(x^2, y^2, z^2)), \\ \tilde{Y} &= (z, -YXh(0), Y^2h(0)) + (\mathcal{O}(x, y, z), \mathcal{O}(x, y, z), \mathcal{O}(x^2, y^2, z^2)).\end{aligned}$$

□

O Lema que usaremos no campo (10.15) nos dá a condição necessária para que um campo em Ω_ξ seja ξ -reversível.

Lema 10.3.1. Se $Z \in \Omega_\xi$, então deve satisfazer as condições

- (i) $XYh(0) = -YXh(0)$;
- (ii) $X^2h(0) = -Y^2h(0)$.

Desta forma, considerando o campo (10.15) e $h(x, y, z) = x$, temos:

- $Xh = X\nabla h = (-y, 1, \alpha)(1, 0, 0) = -y$.
- $X^2h = X(\nabla Xh) = (-y, 1, \alpha)(0, -1, 0) = -1$.

- $Yh = Y\nabla h = (z, \beta, 1)(1, 0, 0) = z$.
- $Y^2h = Y(\nabla Yh) = (z, \beta, 1)(0, 0, 1) = 1$.
- $XYh = X(\nabla Yh) = (-y, 1, \alpha)(0, 0, 1) = \alpha$.
- $YXh = Y(\nabla Xh) = (z, \beta, 1)(0, -1, 0) = -\beta$.

Calculando α e β pela fórmula (10.5) para o campo (10.15), obtemos $\alpha = \beta = 1$ ou $\alpha = \beta = -1$, pois estamos avaliando em $\alpha\beta = 1$. Portanto, o campo (10.15) é reversível.

Definição 10.3.4. Dizemos que $Z \in \Omega$ é **simples** em 0 se $|X^2h(0)| \neq |XYh(0)|$.

Para o campo (10.15), temos $|Xh^2| = |X(Yh)|$, onde concluímos que Z é simples.

Por convenção, se $p \in \Sigma^s$, a órbita futura de Z através de p é dada pela trajetória do campo deslizante Z^s através de p . Defina-se o conjunto de retas que passam pela origem

$$C_\alpha = \{(x, \alpha x, 0) : x \in \mathbb{R}^3\}$$

para que possamos enunciar as condições para existência de órbitas pseudo-periódicas de $Z \in \Omega_\xi$. O próximo Teorema pode ser encontrado em [11].

Teorema 10.3.2. Seja $Z \in \Omega_\xi$. Existe uma vizinhança da origem $V_0 \subset \mathbb{R}^3$, tal que:

(1) Se Z é simples em 0 e:

(a) $XYh(0) \neq 0$, então, para todo $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, não existem nem órbitas n -periódicas e nem órbitas pseudo-periódicas de Z em V_0 .

(b) $XYh(0) = 0$, então, para todo:

* $\alpha < 0$, para todo $p \in C_\alpha \cap V_0$, existe um $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ tal que a órbita de Z passando por p é uma órbita $2n$ -periódica.

* $\alpha > 0$, para todo $p \in C_\alpha \cap V_0$, existe um $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ tal que a órbita de Z passando por p é uma órbita pseudo $2n$ -periódica.

(2) Se Z não é simples em 0:

(a) então para todo $p \in C_{-1} \cap V_0$, existe uma única órbita 1-periódica de Z passando por p .

- (b) então para todo $p \in C_1 \cap V_0$, existe em V_0 uma única órbita pseudo 1-periódica de Z passando por p .
- (c) dado $\alpha \in \mathbb{R}$ com $|\alpha| \neq 1$, então para todo $p \in C_\alpha \cap V_0$ e para todo $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, não existem nem órbitas n -periódicas nem órbitas pseudo n -periódicas de Z passando por p .

Resumindo:

- (1) Pelo Teorema 10.3.2 parte (2), para cada p sobre a reta $z = y$ (respectivamente $z = -y$), existe uma única órbita pseudo 1-periódica (respectivamente órbita 1-periódica) passando por p , conforme ilustrado na Figura 10.16.
- (2) As retas C_{-1} ($z = -y$) e C_1 ($z = y$) possuem infinitos pontos, o que implica dizer que há infinitas órbitas (pseudo 1-periódica se $p \in C_1 \cap V_0$ ou 1-periódica, se $p \in C_{-1} \cap V_0$) sobre as retas, ilustrado na Figura 10.16.
- (3) Para cada ponto $p \in C_{\pm 1}$ existe uma órbita que é estruturalmente instável, como já visto anteriormente, pois por uma pequena perturbação, a órbita pode tornar-se um foco atrator ou repulsor, conforme o sinal de $\alpha\beta$.
- (4) Concluimos que esse campo de vetores não é estruturalmente estável.
- (5) Os conjuntos $C_{\pm 1}$ possuem infinitos pontos fixos para aplicação de primeiro retorno. Logo, possuem infinitas órbitas periódicas ou pseudo-periódicas. Observe ainda que as duas variedades invariantes não podem coexistir. Caso contrário, sendo cada campo X e Y separadamente contínuos, contrariaria o Teorema da Existência e Unicidade.
- (6) Esse campo possui codimensão infinita.

Isso é um fato notável que, juntamente com a dinâmica caótica da T-Singularidade quando $\alpha\beta = 1$, nos mostra que esta singularidade é uma das dinâmicas mais ricas vistas até agora neste trabalho.

Encerramos assim, nosso trabalho de relacionar bifurcações em sistemas suaves e sistemas suaves por partes e suas respectivas dinâmicas.

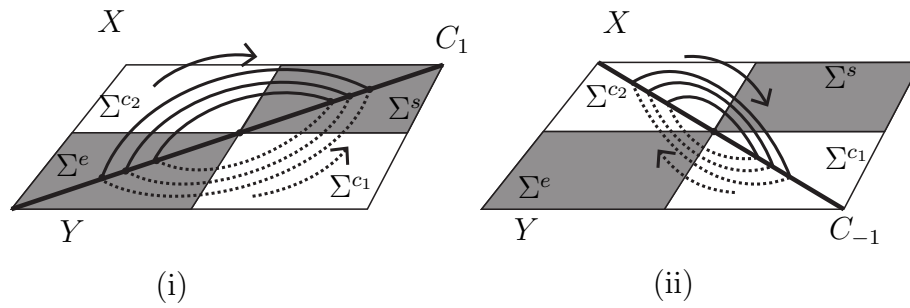


Figura 10.16: (i): Para $\alpha = 1$, temos uma família de órbitas pseudo 1-periódicas sobre a reta C_1 .(ii): Para $\alpha = -1$, temos uma família de órbitas 1-periódicas sobre a reta C_{-1} .

CONCLUSÕES

Há algumas relações de semelhanças e diferenças entre bifurcações de campos vetoriais contínuos e campos vetoriais suaves por partes, como alguns teoremas que podem ser aplicados considerando apenas uma parte do campo.

Vimos que o Teorema da Existência e Unicidade pode ser aplicado em cada campo X e Y de Z separadamente. No entanto, não vale para pontos sobre a variedade de descontinuidade.

Outra semelhança são as definições de estabilidade estrutural e equivalência topológica. No entanto, existe uma grande dificuldade em perturbar sistemas suaves por partes de uma maneira apropriada.

Observamos também que o Teorema 3.2.3 foi amplamente aplicado sobre as regiões $\Sigma^{e,s}$ e os respectivos retratos de fase foram apenas omitidos nas regiões Σ^c nos casos dobra-dobra. Os casos poço, fonte, foco, sela e centro se repetiram no caso suave por partes, com algumas restrições como foi observado.

Os critérios para definir se um ponto crítico é atrator ou repulsor também mudaram um pouco, pois ora trabalhamos com sinal da parte real dos autovalores para o caso contínuo usando a Definição 2.3.2, ora trabalhamos com módulo dos autovalores para os pontos fixos dos difeomorfismos dadas pela aplicação de primeiro retorno do caso suave por partes, usando a Definição 2.1.6.

Outro teorema usado foi o Teorema do Fluxo Tubular, que no caso suave por partes usamo-lo previamente em variedades com bordo no Teorema de Vishik para planificar uma variedade de descontinuidade. Transformamos por mudança de coordenadas uma fronteira curva em uma fronteira plana a fim de simplificarmos os cálculos.

Um Teorema que foi amplamente utilizado em todos os capítulos de forma sutil, foi o Teorema da Forma Normal, pois devido à complexidade do assunto, usamos apenas os sistemas na forma normal e isso pode ser aplicado no caso contínuo e no caso suave por partes. Os sistemas que estudamos são todos analíticos e podem ser expandidos na Forma de Taylor, onde a simplificação desses campos foi omitida, mas pode ser estudada em [26].

Também foram usadas as classificações de contato da Definição 7.1.3, que são uma pequena parte da Teoria do Contato. Note que não as usamos no caso contínuo.

Outra ferramenta que devemos mencionar é a Derivada de Lie, que não utilizamos em nenhum momento para o caso contínuo, pois a derivada

tradicional cumpre bem o seu papel de definir campos. Mas, para o caso suave por partes, a Derivada de Lie é a principal ferramenta de estudo. Sem ela, não poderíamos nem ao menos saber o que seria uma dobra.

Nos campos de vetores contínuos, podemos determinar a existência de trajetórias periódicas utilizando o Critério de Bendixson (ou sua generalização, o Critério de Dulac) que pode ser encontrado em qualquer bom livro do Curso de Equações Diferenciais Ordinárias. Já para campos vetoriais suaves por partes, precisamos de mais ingredientes: os campos X e Y , o campo Z^s e uma aplicação de primeiro retorno, condição *sine qua non* para encontrarmos trajetórias periódicas. Por isso, a T-Singularidade é tão rica a ponto de fazermos essa conexão com o caso suave.

No entanto, a T-Singularidade se mostrou mais rica e complexa, no sentido em que encontramos um sistema estruturalmente instável de codimensão infinita, o que é um fato notável, considerando que não há casos semelhantes em campos de vetores suaves.

Portanto, a habilidade de Filippov para definir a dinâmica em campos descontínuos é muito consistente a ponto de termos uma teoria extremamente sólida em torno deste assunto e com importantes aplicações em diversas áreas da ciência.

Porém, muito trabalho há de ser feito. Essas foram apenas algumas bifurcações dentre as diversas existentes, cuja pesquisa está em franca ascensão. Existem outras bifurcações interessantes e com dinâmicas ricas também, como a Bifurcação Bogdanov-Takens que possui dois autovalores nulos, de codimensão dois. Apesar de não abordarmos o assunto, pode ser conferida em [18] e [26]. A teoria das bifurcações nos oferece um amplo terreno a ser ainda explorado e espera-se que este trabalho possa servir de apoio para os estudos na área dos Sistemas Dinâmicos. Nosso objetivo inicial era comparar as bifurcações para campos vetoriais contínuos e suaves por partes e vimos dinâmicas surpreendentes como a Hopf, Grazing, Catastrophic e a T-Singularidade.

Em trabalhos futuros, esperamos explicitar os parâmetros das bifurcações nos ciclos limites e seu valor de bifurcação para o caso *Grazing* e *Catastrophic*, além de verificar em quais condições os ciclos limites são destruídos, em quais condições temos o controle dos valores de bifurcação mediante perturbações e também ampliar mais ainda a gama de instrumentos dessa parte da teoria das bifurcações que todavia já possui muitas aplicações na mecânica (osciladores), biologia (modelos predador-presa) e sistemas elétricos (sistemas com chaveamento).

Lista de Figuras

3.1	Um ponto crítico do tipo Sela	11
3.2	Poço (a), (b) e Nó Impróprio (c) na origem.	12
3.3	Um Foco Estável na origem.	12
3.4	Um Centro na origem.	13
3.5	Diagrama de variação de δ e τ para o Teorema 3.2.3.	15
3.6	Uma singularidade sela no espaço \mathbb{R}^3	17
4.1	Teorema do Fluxo Tubular.	19
4.2	Pontos Limite.	22
4.3	Exemplos de Ciclos Limite.	23
4.4	Aplicação de Primeiro Retorno de Poincaré.	25
4.5	Aplicação de Poincaré para o sistema (4.3).	26
6.1	Retrato de fase do sistema (6.2) de acordo com o sinal de μ	37
6.2	<i>Bifurcação Sela-nó</i> : pontos críticos conforme a variação do parâmetro μ	40
6.3	<i>Bifurcação Sela-Nó</i> : parábola que representa estabilidade dos pontos críticos do sistema $\dot{x} = f(x, \mu)$ no plano de bifurcação.	40
6.4	<i>Bifurcação Transcrítica</i> : pontos críticos conforme a variação do parâmetro μ	41
6.5	<i>Bifurcação Transcrítica</i> : reta que representa $\mu = x$ no diagrama de bifurcação.	42
6.6	<i>Bifurcação Pitchfork</i> : pontos críticos conforme a variação do parâmetro μ	43
6.7	<i>Bifurcação Pitchfork</i> : parábola que representa $\mu = x^2$ no diagrama de bifurcação.	44
6.8	Diagrama de Bifurcação Hopf.	48
7.1	A classe $\Gamma_0(3)$ de campos em variedades com bordo.	53
7.2	Tangências em $p \in \Sigma$	54
7.3	Exemplos de Formas Normais de Vishik.	55
7.4	Órbita $\gamma(t, p)$ que passa pela seção N_0 em \tilde{p}	56
7.5	Singularidade Cúspide e seu desdobramento.	57
7.6	Ponto de sela na fronteira e seu desdobramento.	57
7.7	Σ -Singularidade do tipo Lips.	61
7.8	Σ -Singularidade do tipo Bec to Bec.	61
7.9	Σ -Singularidade do tipo Dove's Tail.	62
8.1	Região de descontinuidade Σ	64
8.2	As diferentes regiões de descontinuidades, segundo Filippov.	65
8.3	Combinação convexa de Filippov para estabelecer o campo \overline{Z}^s	66
8.4	Aplicação de Primeiro Retorno para campos descontínuos.	69

9.1	Os 4 quadrantes sobre a variedade de descontinuidade Σ e uma dobra-dobra elíptica com uma T-singularidade.	73
9.2	Campos do conjunto R_d para X possuindo uma dobra na origem e Y regular à Σ na origem.	74
9.3	Esboço dos tipos de tangência.	75
9.4	Tipos de tangência da Definição 9.2.1 (2).	76
10.1	Variedade de descontinuidade Σ tipo Sela em \mathbb{R}^3 : um sistema dinâmico constante por partes com região de descontinuidade em $h = 0$, onde h é da forma $h \sim w + y^2 - z^2$	78
10.2	Coordenadas e conjuntos de tangência em uma dobra-dobra visível.	81
10.3	Dinâmica próxima à dobra-dobra visível.	82
10.4	Bifurcação tipo <i>Grazing</i> numa tangência visível.	83
10.5	Bifurcação tipo <i>Catastrophic</i> numa tangência visível de ordem 2.	83
10.6	Bifurcação tipo <i>Catastrophic</i> numa dobra-dobra visível.	84
10.7	Coordenadas e conjuntos de tangência em uma dobra-dobra visível-invisível.	85
10.8	Dinâmica deslizante próxima à dobra-dobra visível-invisível.	86
10.9	Bifurcação <i>Catastrophic</i> em uma dobra-dobra visível-invisível.	86
10.10	Bifurcação <i>Non-deterministic</i> em uma dobra-dobra visível-invisível.	87
10.11	Ilustração do “não-determinismo” na Teixeira singularidade.	88
10.12	Coordenadas e conjuntos de tangência na Teixeira Singularidade.	90
10.13	Dinâmica próxima à T-Singularidade. (i) <i>Caso Sela</i> , com $\alpha\beta < 1$, onde \vec{v}_1 é repulsor; (ii) <i>Caso Nó</i> , com $\alpha\beta > 1$, onde $\alpha + \beta > 0$, a origem é um nó repulsor, com $ \lambda_1 > \lambda_2 $; (iii) <i>Caso Nó</i> , com $\alpha\beta > 1$, onde $\alpha + \beta < 0$, a origem é um nó atrator, com $ \lambda_1 < \lambda_2 $	91
10.14	Aplicação de Primeiro Retorno φ_Z para a T-Singularidade.	93
10.15	Em (i), temos a representação de uma órbita pseudo periódica. Em (ii), temos uma família de órbitas pseudo-periódicas sobre um conjunto de pontos fixos.	94
10.16	(i): Para $\alpha = 1$, temos uma família de órbitas pseudo 1-periódicas sobre a reta C_1 .(ii): Para $\alpha = -1$, temos uma família de órbitas 1-periódicas sobre a reta C_{-1}	99

Referências

- [1] ANDRONOV A.A., *Theory of Bifurcations of Dynamical Systems on a Plane*, Israel Program for Scientific Translations, Jerusalem, 1971.
- [2] CARMO, MANFREDO P. DO, *Geometria Diferencial de Curvas e Superfícies*, 5ª edição, Rio de Janeiro, SBM, 2012.
- [3] CARMO, MANFREDO P. DO, *Geometria Riemanniana*, IMPA-Projeto Euclides, Rio de Janeiro, 2011.
- [4] COLOMBO, A. AND JEFFREY, M.R., *Nondeterministic Chaos and the Two-fold Singularity in Piecewise Smooth Flows*, SIAM J. Appl. Dyn. Syst, vol. 10, pp. 423-451.
- [5] DEVANEY, R. L., *A First Course in Chaotic Dynamical Systems*, Massachusetts, Perseus Books, 1992.
- [6] DI BERNARDO, M; BUDD, C.J.; CHAMPNEYS, A.R. AND KOWALCZYK, P., *Piecewise-smooth Dynamical Systems: Theory and Applications*, Springer, 2008.
- [7] FILIPPOV, A.F., *Differential equations with discontinuous righthand sides*, vol. 18 of Mathematics and its Applications (Soviet Series), Kluwer Academic Publishers Group, Dordrecht, 1988.
- [8] GALVANETTO, U, *Bifurcations and Chaos in a Four-Dimensional Mechanical System with a Dry Friction*, Journal of Sound and Vibration, 204, p.690-695, 1997.
- [9] GUARDIA, M., SEARA T.M. AND TEIXEIRA M.A., *Generic bifurcations of low codimension of planar Filippov Systems*, Journal of Differential Equations 250, pg. 1967-2023, 2011.
- [10] GUCKENHEIMER, J. AND HOLMES P., *Nonlinear Oscillations, Dynamical Systems and Bifurcations of Vector Fields*, 42, 2002.
- [11] JACQUEMARD, A; TEIXEIRA M.A.; TONON, D.J., *Piecewise Smooth Reversible Dynamical Systems at a Two-Fold Singularity*, International Journal of Bifurcation and Chaos, Vol 22, n^o 8, 2012.
- [12] JEFFREY, M., *Two-folds in Nonsmooth Dynamical Systems*, University of Bristol, 2nd IFAC Conference on Analysis and Control of Chaotic Systems, Paper p. 81 86, 2009.

- [13] JEFFREY, M. AND COLOMBO, A., *The Two-Fold Singularity of Discontinuous Vector Fields*, SIADS, submitted July 2008.
- [14] KOSLOVA, V.S., *Roughness of a discontinuous systems*, Vestnik Moskovskogo Universiteta, Matematika 5:16-20, 1984.
- [15] KOWALCZYK, P. AND DI BERNARDO, M., *Two Parameter Degenerate Sliding Bifurcations in Filippov Systems*, , Physica D, 204-229, 2005.
- [16] LIMA, ELON L., *Curso de Análise*, vol.2, 11 ed, Rio de Janeiro, IMPA, 2011.
- [17] MEDRADO J. AND TEIXEIRA M.A., *Symmetric Singularities of Reversible Vector Fields in Dimension Three*, Physica D 112:122-131, 1998.
- [18] PERKO, L., *Differential Equations and Dynamical Systems*, Texts in Applied Mathematics, vol. 7, Springer, 2000.
- [19] SIMPSON, D. J. W., *Bifurcations in Piecewise-Smooth Continuous Systems*, World Scientific Series on Nonlinear Science, Serie A, vol. 70, 2010.
- [20] SOTOMAYOR, J., *Equações Diferenciais Ordinárias*, Coleção Textos Universitários do IME-USP vol. 3, Editora Livraria da Física, São Paulo, 2011.
- [21] SOTOMAYOR J. AND TEIXEIRA M. A., *Vector fields near the boundary of a 3-manifold*, Lect. Notes in Math., vol. 331, Springer Verlag, 169-195, 1988.
- [22] TEIXEIRA, M.A., *Generic Bifurcations in Manifolds with Boundary*, Journal of Differential Equations 25, p.65-89, 1977.
- [23] TEIXEIRA, M.A., *Generic Bifurcation of Sliding Vector Fields*, J. Math. Anal. Appl., 176, p. 436-457, 1993.
- [24] TEIXEIRA, M.A., *Perturbation Theory for Non-smooth Systems*, Meyers: Encyclopedia of Complexity and Systems Science, vol.152, 2008.
- [25] VISHIK, *Vector Fields near the boundary of a manifold*; Vestnik Moskovskogo Universiteta, 1972
- [26] WIGGINS, S, *Introduction to Applied Nonlinear Dynamical Systems and Chaos*, 2nd Edition, Springer-Verlag, New York, 2000.

Índice Remissivo

- C^r -extensão, 67
- Σ -Singularidades, 53
- Σ -equivalência, 65
- Órbita, 19
 - Limite de Γ , 22
 - Local, 68
 - Pseudo-Periódica, 94
 - Periódica, 21
- Non-Deterministic*, 88
- Aplicação
 - Diferenciável, 3
 - de Poincaré
 - para campos de vetores em variedades com bordo, 55
 - para campos de vetores contínuos, 23
 - para campos de vetores suaves por partes, 93
 - Lipschitziana, 7
- Bec to Bec, 61
- Bifurcação
 - Catastrophic*, 83, 87
 - Grazing*, 82, 88
- Cúspide, 53
- Campo de Vetores, 6
 - Deslizante, 66
 - Reversível, 95
 - Simplex, 97
- Campo Vetorial Deslizante
 - Normalizado, 67
- Ciclo, 21
 - Limite, 22
- Combinação Convexa, 66, 79
- Conjugação Topológica, 29
- Conjunto
 - ω -limite, 21
 - Limite de Γ , 22
 - Magro, 8
 - Não errante, 37
- Contração, 7
- Convenção de Filippov, 64
- Derivada de Lie, 52
- Diagrama de Bifurcação, 40
- Difeomorfismo, 3
 - Hiperbólico, 4
- Diferenciabilidade, 3
- Dobra, 53
- Dobra-dobra
 - Elíptica, 74, 89
 - Hiperbólica, 74, 81
 - Parabólica, 74, 84
- Dove's Tail, 61
- Equivalência Topológica, 29
- Estabilidade Σ -estrutural, 65
- Estabilidade Estrutural, 35
- Exponencial de Matriz, 9
- Fluxo, 7
- Fluxo Tubular, Propriedade do, 18
- Foco Fraco, 49
- Fonte, 8
- Forma Normal, 30
- Fronteira Plana, 54
- Função
 - Deslocamento, 24
- Germes, 29
- Hiperplano, 23
- Homeomorfismo, 3
- Involução, 4
- Linearização, 18

- Lips, 61
- Mergulho, 4
- Multiplicidade do Foco, 50
- Nó Impróprio, 11
- Número de Liapunov, 50
- Norma C^1 , 35
- Poço, 7
- Ponto
 - α -limite, 21
 - ω -limite, 21
 - de Equilíbrio, 7
 - Hiperbólico, 8
 - Singular, 70
 - de Sela, 8
 - Não errante, 37
 - Regular, 8
 - Crítico
 - Crítico, 7
 - Degenerado, 8
 - Não Degenerado, 8
 - Fixo, 4
 - Pseudo
 - Atratores, 70
 - Equilíbrios, 70
 - Repulsores, 70
 - Sela, 70
- Pontos
 - de Tangência
 - Regulares, 67
 - Singulares, 67
- Região
 - de Costura, 65
 - de Deslize, 65
 - de Escape, 65
- Retrato de Fase, 11
- Seção Transversal, 24
- Singularidade, 7
- Simples, 67
- Sistema
 - Dinâmico, 19
 - Linear, 8
 - Não Linear, 17
 - Linear
 - Bidimensional, 9
 - Tridimensional, 15
- Solução, 19
- T-Singularidade, 75, 87, 89
- Tangência
 - Cúbica, 53
 - de ordem n , 53
 - Invisível, 53
 - Quadrática, 53
 - Visível, 53
- Teorema
 - da Forma Normal, 34
 - de Hopf, 50
 - de Peixoto, 38
 - de Sotomayor, 44
 - de Vishik, 54
 - do Fluxo Tubular, 18
 - Existência e Unicidade, 7
 - Grobman-Hartman, 20
 - Sard, 4
- Topologia
 - Produto, 8
 - Induzida, 8
- Trajetória, 19
 - Regular, 8
 - Singular, 8
 - Distinta, 21
- Valor de Bifurcação, 36
- Variedade Diferenciável, 5
- Vetor Tangente, 5