

UNIVERSIDADE FEDERAL DE GOIÁS
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA

MAYK JOAQUIM DOS SANTOS

**Estudo qualitativo de campos de vetores
suaves por partes via problema de
perturbação singular**

Goiânia
2017

TERMO DE CIÊNCIA E DE AUTORIZAÇÃO PARA DISPONIBILIZAR AS TESES E DISSERTAÇÕES ELETRÔNICAS NA BIBLIOTECA DIGITAL DA UFG

Na qualidade de titular dos direitos de autor, autorizo a Universidade Federal de Goiás (UFG) a disponibilizar, gratuitamente, por meio da Biblioteca Digital de Teses e Dissertações (BDTD/UFG), regulamentada pela Resolução CEPEC nº 832/2007, sem ressarcimento dos direitos autorais, de acordo com a Lei nº 9610/98, o documento conforme permissões assinaladas abaixo, para fins de leitura, impressão e/ou *download*, a título de divulgação da produção científica brasileira, a partir desta data.

1 **1. Identificação do material bibliográfico:** ☒ **Dissertação** ☐ **Tese**

1 **2. Identificação da Tese ou Dissertação**

2

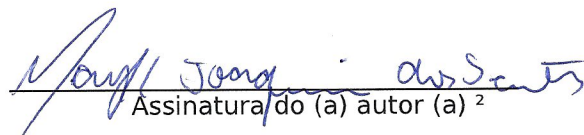
Nome completo do autor: Mayk Joaquim dos Santos

Título do trabalho: Estudo qualitativo de campos de vetores suaves por partes via problema de perturbação singular

3. Informações de acesso ao documento:

Concorda com a liberação total do documento ☒ SIM ☐ NÃO¹

Havendo concordância com a disponibilização eletrônica, torna-se imprescindível o envio do(s) arquivo(s) em formato digital PDF da tese ou dissertação.


Assinatura do (a) autor (a) ²

Data: 16 / 01 / 2017

¹ Neste caso o documento será embargado por até um ano a partir da data de defesa. A extensão deste prazo suscita justificativa junto à coordenação do curso. Os dados do documento não serão disponibilizados durante o período de embargo.

²A assinatura deve ser escaneada.

MAYK JOAQUIM DOS SANTOS

Estudo qualitativo de campos de vetores suaves por partes via problema de perturbação singular

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação do Instituto de Matemática e Estatística da Universidade Federal de Goiás, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Área de concentração: Sistemas Dinâmicos.

Orientador: Prof. Durval José Tonon

Goiânia
2017

Ficha de identificação da obra elaborada pelo autor, através do
Programa de Geração Automática do Sistema de Bibliotecas da UFG.

Joaquim dos Santos, Mayk

Estudo qualitativo de campos de vetores suaves por partes via
problema de perturbação singular [manuscrito] / Mayk Joaquim dos
Santos. - 2017.

92 f.: il.

Orientador: Prof. Dr. Durval José Tonon.

Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal de Goiás, Instituto
de Matemática e Estatística (IME), Programa de Pós-Graduação em
Matemática, Goiânia, 2017.

Bibliografia.

Inclui lista de figuras.

1. campos de vetores suaves por partes. 2. problema de
perturbação singular. 3. campo de Filippov. 4. bifurcação. 5. regularização.
I. José Tonon, Durval, orient. II. Título.

CDU 517.938



UNIVERSIDADE FEDERAL DE GOIÁS
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA
Campus Samambaia – Caixa Postal 131 – CEP: 74.001-970 – Goiânia-GO.
Fones: (62) 3521-1208 e 3521-1137 www.ime.ufg.br

ATA DA REUNIÃO DA BANCA EXAMINADORA DA DEFESA DE DISSERTAÇÃO DE MAYK JOAQUIM DOS SANTOS – Aos dezesseis dias do mês de janeiro do ano de dois mil e dezessete (16/01/2017), às 14:00 horas, reuniram-se os componentes da Banca Examinadora: Prof. Durval José Tonon - Orientador, Prof. Rodrigo Donizete Euzébio, e Prof. Tiago de Carvalho, para, sob a presidência do primeiro, e em sessão pública realizada na Sala de Aula do Instituto de Matemática e Estatística, procederem a avaliação da defesa de dissertação intitulada: **“Estudo qualitativo de campos de vetores suaves por partes via problema de perturbação singular”**, em nível de Mestrado, área de concentração em Sistemas Dinâmicos, de autoria de Mayk Joaquim dos Santos, discente do Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal de Goiás. A sessão foi aberta pelo Presidente da Banca, Prof. Durval José Tonon, que fez a apresentação formal dos membros da Banca. A seguir, a palavra foi concedida ao autor da dissertação que, em 45 minutos procedeu a apresentação de seu trabalho. Terminada a apresentação, cada membro da Banca arguiu o examinando, tendo-se adotado o sistema de diálogo sequencial. Terminada a fase de arguição, procedeu-se a avaliação da defesa. Tendo-se em vista o que consta na Resolução nº. 1403 do Conselho de Ensino, Pesquisa, Extensão e Cultura (CEPEC), que regulamenta o Programa de Pós-Graduação em Matemática e procedidas as correções recomendadas, a dissertação foi **APROVADA** por unanimidade, considerando-se integralmente cumprido este requisito para fins de obtenção do título de **MESTRE EM MATEMÁTICA**, na área de concentração em Sistemas Dinâmicos pela Universidade Federal de Goiás. A conclusão do curso dar-se-á quando da entrega na secretaria do PPGM da versão definitiva da dissertação, com as devidas correções supervisionadas e aprovadas pelo orientador. Cumpridas as formalidades de pauta, às 16:00 horas a presidência da mesa encerrou esta sessão de defesa de dissertação e para constar eu, Flávia Magalhães Freire, secretária do PPGM, lavrei a presente Ata que, depois de lida e aprovada, será assinada pelos membros da Banca Examinadora em quatro vias de igual teor.


Prof. Dr. Durval José Tonon
Presidente - IME/UFG


Prof. Dr. Rodrigo Donizete Euzébio
Membro – IME/UFG


Prof. Dr. Tiago de Carvalho
Membro – UNESP

Todos os direitos reservados. É proibida a reprodução total ou parcial do trabalho sem autorização da universidade, do autor e do orientador(a).

Mayk Joaquim dos Santos

Bacharel em Matemática pela Universidade Federal de Goiás - UFG.

Aos meus pais, Mariza e Juscelino.

Agradecimentos

Este trabalho representa a finalização de mais uma etapa e eu agradeço a todos que estiveram presentes nesse longo trajeto.

Em particular, gostaria de agradecer:

Ao meu orientador, Professor Durval José Tonon, pela paciência que teve, que não foi pouca.

A banca examinadora pelas contribuições.

A todos os Professores que tive até hoje, em especial a Professora Luciana Ávila pelos conselhos no início do curso de Matemática.

A minha família e meus amigos que sempre estiveram presentes fazendo com que o caminho fosse mais agradável.

"Nas palmas de tuas mãos leio as linhas da minha vida.
Linhas cruzadas, sinuosas, interferindo no teu destino.
Não te procurei, não me procurastes, íamos sozinhos por estradas diferentes.
Indiferentes, cruzamos passavas com o fardo da vida...
Corri ao teu encontro. Sorri. Falamos.
Esse dia foi marcado com a pedra branca da cabeça de um peixe.
E, desde então, caminhamos juntos pela vida..."

Cora Coralina,
Meu destino.

Resumo

Santos, Mayk Joaquim dos. **Estudo qualitativo de campos de vetores suaves por partes via problema de perturbação singular**. Goiânia, 2017. 91p. Dissertação de Mestrado. Instituto de Matemática e Estatística, Universidade Federal de Goiás.

Neste trabalho mostraremos que, dado um campo de vetores suaves por partes, podemos aplicar o método de regularização e, a partir deste, via “blow-up”, o transformamos em um problema de perturbação singular. Podemos, dessa forma, fazer uso das ferramentas da teoria de perturbação singular para realizar um estudo qualitativo dos campos de vetores suaves por partes. Por último, mostraremos que através de sucessivas mudanças de coordenadas podemos transformar uma singularidade de uma subvariedade de descontinuidade de codimensão k , onde $k = 1$ ou $k = 2$, em uma singularidade de codimensão 0 e estudar o comportamento qualitativo ao longo desta subvariedade, onde é válida a convenção de Filippov.

Palavras-chave

campos de vetores suaves por partes, problema de perturbação singular, campo de Filippov, bifurcação, regularização.

Abstract

Santos, Mayk Joaquim dos. **Qualitative study of piecewise smooth vector field via singular perturbation problem**. Goiânia, 2017. 91p. MSc. Dissertation. Instituto de Matemática e Estatística, Universidade Federal de Goiás.

In this work we will show that, given a piecewise smooth vector field, we can apply the regularization method and, from it, via blow-up, turn it into a singular perturbation problem. By doing that, we can use the tools from singular perturbation theory to perform a qualitative study of piecewise smooth vector fields. Finally, we will show that, through successive changes of coordinates, a singularity of a discontinuous submanifold of codimension k , where $k = 1$ or $k = 2$, can be transformed into a singularity of codimension 0 in order to study the qualitative behavior in this submanifold, where the Filippov's convention holds.

Keywords

piecewise smooth vector field, singular perturbation problem, Filippov vector field, bifurcation, regularization.

Sumário

Lista de Figuras		11
1	Conceitos Preliminares	15
1.1	Sistemas Dinâmicos Suaves	15
1.1.1	Resultados Clássicos da Teoria Qualitativa das E.D.O's	17
1.2	Campos Definidos em Variedades com Bordo	18
1.3	Problema de Perturbação Singular	23
1.4	Blow-up	24
1.4.1	Blow-up polar	25
1.4.2	Blow-up Direcional	27
2	Campos de Vetores Suaves por partes	29
2.1	Convenção de Filippov	29
2.2	Regularização de Campos de Vetores suaves por Partes	31
2.3	Singularidades de campos de vetores suaves por partes	33
2.4	Bifurcações de campos de vetores suaves por partes bidimensionais	35
2.4.1	Bifurcações de Codimensão 0	35
2.4.2	Bifurcações de Codimensão 1	36
3	Bifurcações de Campos Vetores Suaves por Partes via Problema de Perturbação Singular	38
3.1	Teoremas Principais	38
3.2	Demonstração dos teoremas	39
3.2.1	Demonstração Teorema 3.1	40
3.2.2	Demonstração do Teorema 3.2	42
3.2.3	Exemplos de aplicações do Teorema 3.2	44
3.2.4	Demonstração do Teorema 3.3	45
3.3	Blowing-up aplicado no Problema de Perturbação Singular	46
3.4	Uma classe especial de campos de vetores suaves por partes	47
4	Campo de vetores suaves por partes definido em variedades de descontinuidade de codimensão maior do que um	53
4.1	Algumas superfícies suaves de codimensão maior do que um	53
5	Aplicações	69
5.1	Teoria Geométrica de Perturbação Singular em Campos de Vetores Suaves por Partes de Codimensão Zero	69
5.1.1	Caso Regular-Regular do Tipo Costura	70
5.1.2	Caso Regular-Regular do Tipo Escape	70

5.1.3	Caso Regular-Regular do Tipo Deslize	71
5.1.4	Caso Regular-Regular do Tipo Sela	72
5.1.5	Caso Dobra-Regular	73
5.2	Teoria Geométrica de Perturbação Singular em Campos de Vetores suaves por Partes de Codimensão Um	75
5.2.1	Bifurcação Sela-Regular	75
5.2.2	Bifurcação Foco-Regular	76
5.2.3	Bifurcação Cúspide-Regular	78
5.3	Bífucões Dobra-Dobra	80
5.3.1	Caso Dobra-Dobra Hiperbólico	81
5.3.2	Caso Dobra-Dobra Parabólico do Tipo 1	82
5.3.3	Caso Dobra-Dobra Parabólico do Tipo 2	84
5.3.4	Caso Dobra-Dobra Elíptico	85
6	Conclusão	89
	Referências Bibliográficas	90

Lista de Figuras

1.1	Exemplo de campo estruturalmente estável.	19
1.2	A classe $\Sigma_0(3)$ de campos em variedades com bordo.	21
1.3	Formas normais de Vishik.	21
1.4	Exemplo de “blow-up” polar.	27
1.5	Exemplo de “blow-up” direcional.	28
2.1	Regiões de Costura.	30
2.2	Região de Escape.	30
2.3	Região de Deslize.	30
2.4	Campo Vetorial Deslizante.	31
2.5	Gráfico de uma Função de Transição.	32
2.6	Retrato de fase so Exemplo 2.3.	33
2.7	Pontos de Sela.	33
2.8	Ponto de dobra.	34
2.9	Pontos Σ -regulares.	34
2.10	ponto Σ -singular elementar.	35
4.1	Conjunto $\mathcal{K}$ Geometricamente.	54
(a)	Descontinuidade Dupla $\mathcal{D}$.	54
(b)	Descontinuidade Tripla $\mathcal{T}$.	54
(c)	Destontinuidade Cone $\mathcal{C}$.	54
(d)	Guarda Chuva de Whitney $\mathcal{W}$.	54
4.2	Os sistemas rápido e lento. Dupla flecha representa o fluxo rápido. A superfície verde é a variedade lenta, que é homeomorfa a região de deslize.	58
5.1	Dinâmica rápida e lenta do problema de perturbação singular correspondendo ao caso de costura e seu regularizado.	70
5.2	Dinâmica rápida e lenta do problema de perturbação singular correspondendo ao caso de escape e seu regularizado.	71
5.3	Dinâmica rápida e lenta do problema de perturbação singular correspondendo ao caso de deslize e seu regularizado.	72
5.4	Dinâmica rápida e lenta do problema de perturbação singular correspondendo ao caso de sela, com $p \in \Sigma^e$, e seu regularizado.	73
5.5	Dinâmica rápida e lenta do problema de perturbação singular correspondendo ao caso de dobra e seu regularizado.	75
5.6	Aqui o retrato de fase mostra a variedade lenta no lado esquerdo e o caso $\lambda < 0$ no direito. Em ambos consideramos $\theta \in (\pi/4, 3\pi/4)$.	76
5.7	Aqui, o retrato de fase para $\lambda = 0$ no lado esquerdo e o caso $\lambda > 0$ no direito. Em ambos consideramos $\theta \in (\pi/4, 3\pi/4)$.	77

5.8	Aqui o retrato de fase está mostrando a variedade lenta no lado esquerdo e o caso $\lambda < 0$ no direito. Em ambos, consideramos $\theta \in (\pi/4, 3\pi/4)$.	78
5.9	Aqui o retrato de fase para o caso $\lambda = 0$ à esquerda e o caso $\lambda > 0$ à direita. Em ambos, consideramos $\theta \in (\pi/4, 3\pi/4)$.	78
5.10	Esta figura está relacionada a seção 5.2.3. Aqui aparece o diagrama de bifurcação da cúspide-regular.	80
5.11	Singularidades Dobra-Dobra.	81
5.12	Variedade lenta dependendo do parâmetro λ .	83
5.13	Diagrama de bifurcação das singularidades dobra-dobra parabólico-tipo 1.	84
5.14	Diagrama de bifurcação das singularidades dobra-dobra parabólico-tipo 2.	86
5.15	Diagrama de bifurcação das singularidades dobra-dobra parabólico-tipo 2.	87

Introdução

Dentro do universo das equações diferenciais, o estudo de campos de vetores suaves por partes é bastante recente e está relacionado com vários problemas de engenharia, física e economia. A formulação matemática rigorosa deve-se em grande parte ao trabalhos de Koslova com a publicação de “*Roughness of a Discontinuous System*” em 1984, veja [10], e, com maior ênfase, Filippov com a publicação de “*Differential Equations with Discontinuous Righthand Sides*” em 1988, veja [7], propondo uma terminologia e uma fundamentação teórica que auxilia no estudo de campos de vetores suaves por partes. Uma das principais contribuições de Filippov foi, o que chamamos de convenção de Filippov, que consiste em definir como é a dinâmica do campo em uma região aberta e densa da superfície de descontinuidade.

Hoje, devido a aplicabilidade em outras áreas, para o estudo local da dinâmica de campos de vetores suaves por partes, existem alguns trabalhos que tratam da análise local da dinâmica de campos de vetores suaves por partes bidimensionais, veja por exemplo, [8] e [11].

Este trabalho tem como objetivo abordar o método de regularização de campos de vetores suaves por partes introduzido por Sotomayor e Teixeira apresentado em [19], o qual implementamos com a utilização de blow-ups, possibilitando a utilização da teoria geométrica de perturbação singular, que pode ser vista em [6]. Mostraremos que, a partir de um problema regularizado, podemos obter um problema de perturbação singular e tornando, assim, possível o estudo qualitativo desse problema.

O processo de regularização nos fornece uma valiosa ferramenta matemática para o estudo qualitativo da dinâmica de um campo de vetores suaves por partes como um todo, especialmente da estabilidade estrutural de campos de vetores suaves por partes. O método consiste na análise do campo de vetores regularizado que é uma aproximação suave do campo de vetores suaves por partes. Usando esse processo, obtemos uma família a 1 parâmetro de campos de vetores Z_ϵ , onde ϵ é um valor pequeno diferente de 0.

Em geral, os problemas estudados em campos de vetores suaves por partes consideram a superfície de descontinuidade como sendo, localmente, imagem inversa de um valor regular de uma aplicação suave. No entanto, para o estudo em dimensões maiores ou iguais a dois, podemos ter essa regularidade da região de descontinuidade enfraquecida.

Por exemplo, em dimensão três, podemos considerar a região de descontinuidade dada pelos planos coordenados. Nesse contexto, na intersecção de cada par de planos temos uma dinâmica também, assim como na intersecção dos três, no entanto a convenção de Filippov não se aplica nas interseções dos planos.

Nesse sentido, resultados preliminares já foram obtidos usando técnicas envolvendo teoria de controle e inclusões diferenciais em [1] e [5] e através do processo de regularização de Sotomayor e Teixeira, proposto em [19], e teoria geométrica da perturbação singular em [6]. Nessa linha, utilizaremos as ferramentas fornecidas pelo processo de regularização e da teoria geométrica da perturbação singular para tratar dos casos onde a superfície de descontinuidade possui codimensão maior do que um. O principal artigo a ser usado nessa parte será [13].

Este trabalho está dividido da seguinte maneira: no Capítulo 1, definiremos sistemas dinâmicos suaves, abordaremos os resultados clássicos da teoria qualitativa das equações diferenciais ordinárias, discutiremos sobre variedades com bordo, que são necessárias para a compreensão dos teoremas principais e aplicações. Definiremos também o problema de perturbação singular e apresentaremos a técnica do “blow-up”. No Capítulo 2, abordaremos a teoria para campos suaves por partes onde discutiremos a convenção de Filippov e da regularização de campos suaves por partes. Discutiremos sobre singularidades de codimensão 0, bifurcações de codimensão 0 e codimensão 1. No Capítulo 3, exibiremos os teoremas principais que foram estudados em [2] e os demonstraremos. Isso dará toda a fundamentação para fazermos uma conexão entre um problema regularizado e um problema de perturbação singular. No Capítulo 4, mostraremos que através de sucessivos blow-ups podemos transformar uma singularidade de codimensão maior que 1 em uma singularidade de codimensão 0. No Capítulo 5, exibiremos algumas aplicações que foram obtidas do artigo [3].

Conceitos Preliminares

Iniciaremos definindo formalmente um sistema dinâmico e em seguida apresentaremos alguns conceitos da teoria de sistemas dinâmicos suaves.

1.1 Sistemas Dinâmicos Suaves

Podemos dizer que um sistema dinâmico é um conjunto de estados de posição de um objeto que evolui ao longo do tempo. Quando conhecemos o estado presente do sistema e as leis que regem sua evolução, podemos prever o comportamento desse sistema, em certa medida, desde que essas leis não se alterem com o tempo. Assim, um sistema dinâmico pode ser definido através de três componentes: um espaço de seus estados possíveis (espaço de estados), um conjunto não-vazio representando o espaço de tempo e uma lei de evolução de estado no tempo.

Seja U um espaço de estados, o qual, nesse trabalho, será um aberto do $\mathbb{R}^2$ ou $\mathbb{R}^3$. Podemos definir um operador ϕ_t em U que evolui elementos $x_0 \in U$ previamente conhecidos através do tempo t para um estado x_t :

$$\begin{aligned}\phi_t : U &\rightarrow U \\ x_0 &\rightarrow \phi_t(x_0) = x_t.\end{aligned}$$

O tempo t assume valores em um conjunto de índices, T , o qual, geralmente, é discreto (os inteiros $\mathbb{Z}$) ou contínuo (um subconjunto dos números reais $\mathbb{R}$). O operador ϕ_t , chamado um **operador evolução**, define um sistema dinâmico quando munido de uma estrutura de semi-grupo.

Definição 1.1 Um *semigrupo* é um par $(U, *)$, onde $*$ é uma operação binária associativa em U . Em outras palavras, $*$ é uma função $U \times U \rightarrow U$ onde $(a, b) \mapsto a * b$ e para todo $a, b, c \in U$ temos $a * (b * c) = (a * b) * c$.

Definição 1.2 O espaço de estados U , o conjunto T de variação do tempo e o operador evolução ϕ_t definem um **sistema dinâmico** se

- (i) $\phi_0(x) = x$, para todo $x \in U$,
- (ii) $\phi_{t+s}(x) = \phi_t(\phi_s(x))$, para todo $x \in U$ e para todo $t, s \in T$.

A Definição 1.2 é bastante geral e engloba as duas grandes vertentes da teoria dos sistemas dinâmicos, a saber, os sistemas dinâmicos de tempo contínuo e os de tempo discreto. Vamos considerar aqui apenas sistemas contínuos, isto é, quando T for um intervalo $I \subset \mathbb{R}$.

Considere um sistema de **equações diferenciais ordinárias (E.D.O's)**

$$\dot{x} = F(x), \quad x \in U \subset \mathbb{R}^2, \quad (1-1)$$

onde U é um domínio aberto, $F : U \rightarrow \mathbb{R}^2$ é um campo de vetores suficientemente diferenciável, $T = I \subset \mathbb{R}$, onde $0 \in I$ e $\phi_t(x) = \varphi_F(t, x)$, onde $\varphi_F : I \times U \rightarrow U$ é o **fluxo** que leva a condição inicial x para sua solução no momento t :

$$\varphi_F(0, x) = x, \quad \frac{\partial \varphi_F}{\partial t}(t, x) = F(\varphi_F(t, x)), \quad (1-2)$$

então a tripla $\{U, T, \phi_t\}$ define um sistema dinâmico de tempo contínuo.

De agora em diante, quando escrevermos ‘sistemas dinâmicos’, ficará subentendido que estamos tratando de sistemas de tempo contínuo, isto é, quando o operador evolução for um fluxo gerado por um sistema de **E.D.O's** dados por (1-1) e (1-2).

Dizemos que um sistema dinâmico é **suave de índice r** , ou C^r , se as r primeiras derivadas de φ_F em relação a x existem e são contínuas em todo ponto $x \in U$. Assim, se supomos que o campo F em (1-1) de classe C^{r-1} para algum $r \geq 2$, então (1-2) implica que o fluxo $\varphi_F(x, t)$ é de classe C^r e portanto o sistema dinâmico $\{U, I, \varphi_F\}$ é C^r .

Definição 1.3 O subconjunto $\gamma(p) = \{x \in U : x = \varphi_F(t, p), t \in I\}$ chama-se **órbita** através do ponto p . O **retrato de fase** do sistema dinâmico é o particionamento do espaço de estados em órbitas.

Definição 1.4 Um ponto $p \in U$ é dito um **ponto de equilíbrio** de (1-1) se $F(p) = 0$, caso contrario é chamado de ponto regular.

Definição 1.5 Um **ciclo** (ou uma **órbita fechada**) é uma órbita periódica se cada ponto regular $x \in \gamma(p)$ satisfaz $\varphi_F(t + t_0, x) = \varphi_F(t, x)$, para algum $t_0 > 0$, para todo $t \in T$.

Definição 1.6 Uma órbita fechada $\gamma(p)$ em uma vizinhança na qual não existem outros ciclos é chamada um **ciclo limite**.

1.1.1 Resultados Clássicos da Teoria Qualitativa das E.D.O's

Um dos objetivos da teoria de sistemas dinâmicos é classificar a dinâmica qualitativamente, visto que, explicitar a solução de um sistema de **E.D.O's** é uma tarefa árdua e muitas vezes não dispomos de ferramentas e técnicas para fazê-lo.

O estudo qualitativo de uma equação diferencial consiste na descrição geométrica de seu espaço de órbitas. Então é natural perguntarmos quando é que dois espaços de órbitas têm a mesma descrição, que é equivalente a perguntarmos quando podemos estabelecer uma relação de equivalência entre equações diferenciais. Uma relação de equivalência que exprime a estrutura geométrica das órbitas é a equivalência topológica.

Definição 1.7 *Dois sistemas dinâmicos $\{U, T, \phi_t\}$ e $\{V, T, \psi_t\}$ são **topologicamente equivalentes** se existe um homeomorfismo $h : U \rightarrow V$ que leva as órbitas do primeiro sistema em órbitas do segundo, preservando a direção do fluxo. Em outras palavras, sejam ϕ e ψ fluxos dos sistemas $\dot{x} = F(x)$ e $\dot{y} = G(y)$, respectivamente, então*

$$\phi(t, x) = h^{-1}(\psi(t', h(x))),$$

com $t', t > 0$, onde $U, V \subseteq \mathbb{R}^n$ são conjuntos abertos.

Esta definição não diz que, dependendo do nosso sistema, podemos analisar o comportamento qualitativo de um outro sistema através da equivalência topológica.

Uma relação mais forte, que a equivalência topológica, é a conjugação entre os fluxos dos campos de vetores. Dois campos X e Y são **topologicamente conjugados** se existir uma equivalência topológica que preserva o parâmetro t , isto é, $h(\phi_X(t, p)) = \phi_Y(t, h(p))$ para todo $p \in M$ e $t \in I, I \subset \mathbb{R}$.

Definição 1.8 *Um ponto de equilíbrio p de um sistema dinâmico suave $\dot{x} = F(x)$ chama-se **hiperbólico** se todos os autovalores de $F_x(p)$ têm parte real não nula, onde $F_x(p)$ é a matriz jacobiana de $F(x)$, avaliada em $x = p$.*

A seguir apresentaremos dois teoremas, o Teorema de Grobman-Hartman que será utilizado para analisar as singularidades ao plicarmos o “blowin-up”, na Seção 1.4 e no capítulo de aplicações, e o Teorema da Variedade Central, que será utilizado para uma segunda demonstração do Teorema 3.1. Os quais as demonstrações dos teoremas podem ser encontradas em [17].

Teorema 1.9 (Grobman-Hartman). *Sejam $F : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ um campo vetorial suave e $p \in U$ um ponto de equilíbrio hiperbólico. Então, existem vizinhanças W de p em U e V de $0 \in \mathbb{R}^n$ tais que $\dot{x} = F(x)$ é topologicamente equivalente a $\dot{y} = F_x(p)y$, para $x \in W$ e $y \in V$.*

Basicamente o Teorema 1.9 diz que, próximo de um ponto de equilíbrio hiperbólico, podemos utilizar a parte linear do sistema e assim analisar a estrutura qualitativa na vizinhança do ponto singular hiperbólico.

Teorema 1.10 (Teorema da Variedade Central). *Seja $F \in C^r(E)$, onde E é um subconjunto aberto de $\mathbb{R}^n$ contendo a origem, com $r \geq 1$. Suponha que $F(0) = 0$ e que $DF(0)$ tem k autovalores com parte real negativa, j autovalores com parte real positiva e $m = n - k - j$ autovalores com parte real nula. Então existem uma variedade central m -dimensional $W^c(0)$ de classe C^r tangente ao subespaço central E^c de $\dot{x} = DF(0)x$, uma variedade estável k -dimensional $W^s(0)$ de classe C^r tangente ao subespaço estável E^s de $\dot{x} = DF(0)x$ e uma variedade instável j -dimensional $W^u(0)$ de classe C^r tangente ao subespaço instável E^u de $\dot{x} = DF(0)x$. Além disso, $W^c(0)$, $W^s(0)$ e $W^u(0)$ são invariantes pelo fluxo ϕ_t de $\dot{x} = F(x)$.*

1.2 Campos Definidos em Variedades com Bordo

Consideremos M uma variedade compacta de classe C^∞ orientável, de dimensão dois, com fronteira ∂M e $0 \in M$.

Definição 1.11 *Dois campos de vetores X e $\tilde{X}$ são ditos **germe equivalentes** se eles coincidem em uma vizinhança aberta não vazia de $0 \in M$.*

As classes de equivalência, conforme a definição acima, são chamadas de **germes de campos de vetores**. Podemos definir, analogamente, germes de funções. Um campo de vetores X em M é, por definição, um representante da classe de campos de vetores tangentes em M . Seja ϕ_X o fluxo do representante X dos campos de vetores definidos em um conjunto $D(X) = \{(x, t) \in M \times \mathbb{R} : t \in I_X\}$ onde I_X é o intervalo maximal aberto com extremos $\alpha(x)$ e $\beta(x)$ contendo 0 para o qual $\phi_X(t, x) \in M$, para todo $t \in I_X$. Podemos ter $\alpha(x)$ e $\beta(x)$ infinitos e o fluxo ϕ_X não depende da escolha particular do representante da classe de campos.

A órbita $\gamma(x)$ de X passando por $x \in M$ é, por definição, a imagem de I_X pela curva integral $\phi_X(., x) : t \mapsto \phi_X(t, x)$. A orientação das órbitas é induzida por essa aplicação via orientação positiva de I_X .

Denotemos por $\mathfrak{X}(2)$ o espaço de todos os germes de campos de vetores de classe C^r em $(\mathbb{R}^2, 0)$ com a topologia C^r , onde r é grande o suficiente para nossos propósitos, e $(\mathbb{R}^2, 0)$ denota uma vizinhança aberta de $0 \in \mathbb{R}^2$.

Definição 1.12 *Dizemos que $X \in \mathfrak{X}(2)$ é **estruturalmente estável** em $\mathfrak{X}(2)$ se existe uma vizinhança $B \subset \mathfrak{X}(2)$ de X tal que, para todo $Y \in B$, Y é topologicamente conjugado a X .*

Faremos a seguir um resumo dos resultados sobre estabilidade estrutural para campos definidos em variedades de dimensão dois. Sabemos dos trabalhos [14, 15, 16] de Peixoto, que o conjunto dos campos estruturalmente estáveis em variedades compactas orientáveis de dimensão dois, o qual denotaremos por $\Sigma_0(2)$ é aberto e denso em $\mathfrak{X}(2)$ e coincide com a coleção de campos de vetores X tais que:

- Ω_1 : X possui todos os pontos singulares genéricos (hiperbólicos);
- Ω_2 : X possui todas as trajetórias periódicas genéricas (hiperbólicas);
- Ω_3 : X não possui conexão de selas;
- Ω_4 : X não possui trajetórias recorrentes não triviais;
- B_1 : X possui todos os pontos críticos no interior de M ;
- B_2 : X possui todas as trajetórias periódicas no interior de M ;
- B_3 : qualquer trajetória de X possui no máximo um ponto de tangência com ∂M ;
- B_4 : qualquer separatriz de sela de X é transversal a ∂M ;
- B_5 : se uma trajetória de X é tangente a ∂M em p , temos que o contato entre essas duas curvas em p é de ordem 2;
- B_6 : existe no máximo um número finito de pontos de tangência de X e ∂M .

No trabalho [20] de Sotomayor prova-se que as condições $B_1, \dots, B_5$ implicam a condição B_6 .

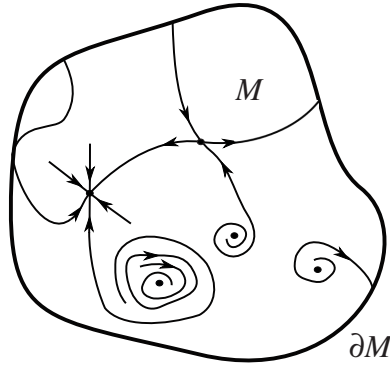


Figura 1.1: Exemplo de campo estruturalmente estável.

O conjunto limite positivo de uma órbita $\gamma(p)$ de X é o conjunto de pontos $y \in M$ que são pontos limites da sequência da forma $\phi_X(t_n, p)$ com $t_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \omega(p)$. Denotamos esse conjunto por $\gamma^+(p)$. O conjunto limite negativo $\gamma^-(p)$ é definido de maneira similar para $t_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \alpha(p)$.

A seguir suponhamos $r > 3$. No trabalho [21], de Teixeira, está provado o seguinte resultado:

Teorema 1.13 *Existe uma subvariedade $\Sigma^c(2)$ de classe C^{r-1} , de codimensão 1, imersa em $\mathfrak{X}(2)$ que satisfaz*

- (a) $\Sigma^c(2)$ é densa em $\mathfrak{X}_1^r(2) = \mathfrak{X}(2) - \Sigma_0(2)$, ambos com a topologia relativa;
- (b) Para todo $X \in \Sigma^c(2)$ existe uma vizinhança B , com a topologia de $\Sigma^c(2)$, tal que todo $Y \in B$ é topologicamente equivalente a X .

Notação: Vamos denotar a fronteira da variedade compacta M por N , a qual será uma subvariedade compacta de M .

A seguir, seguindo a linha de trabalho de Vishik em [22], definimos os tipos de contato genérico em uma variedade de dimensão n .

Observação 1 *Suponhamos que N contém a origem e é dada implicitamente pela imagem inversa $f^{-1}(0)$, onde $f : (\mathbb{R}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{R}, 0)$ é o germe de uma aplicação C^∞ que possui 0 como valor regular.*

Neste contexto de campos definidos em variedades de dimensão n , onde $n > 1$, denotemos por $\Sigma_0(n)$ o conjunto dos elementos em $\mathfrak{X}(n)$ satisfazendo uma das seguintes condições:

- (1) $(Xf)(0) \neq 0$ (0 é ponto regular de X), onde $Xf(0) = \langle X(0), \nabla f(0) \rangle$, e $\langle \cdot, \cdot \rangle$ denota o produto interno canônico em $\mathbb{R}^n$. Nesse caso, dizemos que X é transversal a N em 0;
- (2) $(Xf)(0) = 0$ e $(X^2f)(0) = X(Xf) \neq 0$, onde $(X^2f)(0) = \langle X(0), \nabla Xf(0) \rangle$, (0 é um ponto de dobra de X);
- (3) $(Xf)(0) = 0$, $(X^2f)(0) = 0$ e $X^3f(0) = X(X^2f)(0) \neq 0$ e o conjunto $\{df(0), d(Xf)(0), d(X^2f)(0)\}$ é linearmente independente (0 é um ponto de cúspide de X);
- $\vdots$
- (n) $(Xf)(0) = (X^2f)(0) = \dots = (X^{n-1}f)(0) = 0$ e $(X^n f)(0) = X(X^{n-1}f)(0) \neq 0$ e o conjunto $\{df(0), d(Xf)(0), \dots, d(X^{n-1}f)(0)\}$ é linearmente independente e 0 é um ponto regular da aplicação $Xf|_N$,

onde $d(\cdot)$ denota o operador diferencial.

Seja $S_X = \{x \in M : f(x) = (Xf)(x) = 0\}$ o conjunto das N -singularidades de $X \in \mathfrak{X}(n)$. Genericamente temos que todas as dobras constituem um conjunto aberto e denso de S_X . Note que se $X(0) = 0$ então $X \notin \Sigma_0(n)$. O conjunto das N -bifurcações é caracterizado por $\mathfrak{X}_1(n) = \mathfrak{X}(n) - \Sigma_0(n)$. Vishik em seu trabalho [22] exibiu as formas normais das N -singularidades de codimensão 0:

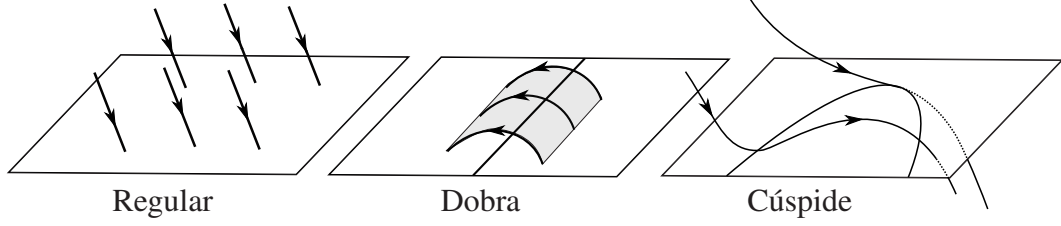


Figura 1.2: A classe $\Sigma_0(3)$ de campos em variedades com bordo.

Fluxo tubular: $X = (1, 0, \dots, 0)$ e $f(x) = x_1^{k+1} + x_2 x_1^{k-1} + x_3 x_1^{k-2} + \dots + x_{k+1}$.

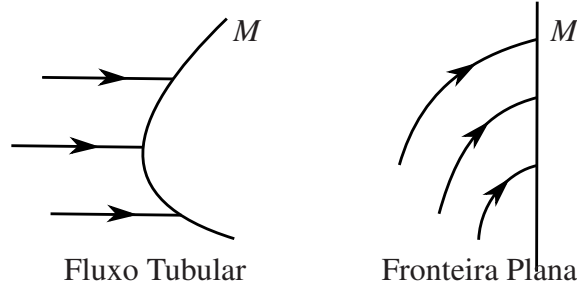


Figura 1.3: Formas normais de Vishik.

Fronteira plana: $X = (x_2, x_3, \dots, x_{k+1}, 1, 0, \dots, 0)$ e $f(x) = x_1$, onde $k = 0, 1, \dots, n-1$.

Concentraremos nossa atenção agora nos casos onde a dimensão da variedade M é 2 ou 3. Para $n = 3$, no trabalho [18] Sotomayor e Teixeira estudaram o conjunto de bifurcação que ocorre em N . Neste trabalho está caracterizado o conjunto de campos em $\mathfrak{X}(3)$ que é estruturalmente estável, denotado por $\Sigma_0(3)$.

Teorema 1.14 *Um campo $X \in \mathfrak{X}(3)$ é estruturalmente estável se, e somente se,*

- (1) $X(p) \neq 0$, para todo $p \in N$;
- (2) Para toda definição local f de N em p , uma das seguintes condições é satisfeita:
 - b.1 Caso regular: $(Xf)(p) \neq 0$;
 - b.2 Caso dobra: $(Xf)(p) = 0$ e $(X^2f)(p) \neq 0$;
 - b.3 Caso cúspide: $(Xf)(p) = 0 = (X^2f)(p)$, $(X^3f)(p) \neq 0$ e o conjunto de vetores $\{df(p), d(Xf)(p), d(X^2f)(p)\}$ é linearmente independente;

Além disso, fixando $f(u, v, w) = w$, as formas normais dos campos de vetores em $\Sigma_0(3)$ são dadas por:

- (1) Caso regular: $X(u, v, w) = (0, 0, 1)$;
- (2) Caso dobra: $X(u, v, w) = (1, 0, u)$;

(3) *Caso Cúspide*: $X(u, v, w) = (1, 0, u^2 + v)$.

Além disso, $\Sigma_0(3)$ é denso em $\mathfrak{X}(3)$.

Observe que 0 é uma N -singularidade de codimensão 0 se $X \in \Sigma_0(3)$. Consideremos o conjunto $\mathfrak{X}_1(3) = \mathfrak{X}(3) - \Sigma_0(3)$ e o conjunto $\Sigma^c(3)$ dos campos de vetores estruturalmente estáveis relativamente a $\mathfrak{X}_1(3)$. Dado $X = (f^1, f^2, g)$ em $\mathfrak{X}(n)$ tal que $g(0) = 0$, temos as seguintes possibilidades:

- (i) $(f^1(0), f^2(0)) \neq (0, 0)$;
- (ii) $(f^1(0), f^2(0)) = (0, 0)$.

Para o caso (i), todas as formas normais estáveis de singularidades genéricas podem ser obtidas a partir do “Lema das formas normais de Vishik”, o qual está provado em [22]. Observemos que o caso (ii) não ocorre em codimensão 0. Considere as seguintes definições:

Definição 1.15 Dizemos que X está em $\Sigma^c(a) \subset \mathfrak{X}_1(3)$ se as seguintes condições valem:

- (1) 0 é um ponto singular hiperbólico de X ;
- (2) os autovalores de $DX(0)$ são dois a dois distintos e os autovalores correspondentes são transversais à N em 0;
- (3) cada par de autovalores complexos não conjugados de $DX(0)$ têm parte real distinta.

Definição 1.16 Dizemos que X está em $\Sigma^c(b)$ se $X(0) \neq 0$, $(Xf)(0) = 0 = (X^2f)(0)$ e vale uma das seguintes condições:

- (b.1) $(X^3f)(0) \neq 0$, posto $\{df(0), d(Xf)(0), d(X^2f)(0)\} = 2$ e a função $Xf|_N$ tem em 0 um ponto singular não-degenerado (Morse);
- (b.2) $(X^3f)(0) = 0, (X^4f)(0) \neq 0$ e 0 é um ponto regular de $Xf|_N$.

O resultado a seguir está provado em [18] e nos fornece as condições intrínsecas para um campo definido em uma variedade de dimensão três com bordo possuindo codimensão um.

Teorema 1.17 As seguintes afirmações valem

- (1) $\Sigma^c(3) = \Sigma^c(a) \cup \Sigma^c(b)$;
- (2) $\Sigma^c(3)$ é uma subvariedade de codimensão 1 de $\mathfrak{X}_1(3)$;
- (3) $\Sigma^c(3)$ é aberto e denso em $\mathfrak{X}_1(3)$, na topologia induzida de $\mathfrak{X}(3)$;
- (4) Para uma conjunto residual de curvas suaves $\eta : \mathbb{R} \rightarrow \mathfrak{X}(3)$, η intercepta $\Sigma^c(3)$ transversalmente e $\eta^{-1}(\mathfrak{X}_2(3)) = \emptyset$ onde $\mathfrak{X}_2(3) = \mathfrak{X}_1(3) - \Sigma^c(3)$.

Observação 2 Ressaltamos aqui que todos os resultados e definições não dependem da particular escolha da função f .

1.3 Problema de Perturbação Singular

Um Problema de Perturbação Singular (**P.P.S.**) é dado por uma equação diferencial $z' = \alpha(z, \varepsilon)$, onde $z \in \mathbb{R}^{n+m}$, ε é um número real pequeno não-negativo e α é uma aplicação de classe C^r .

Utilizaremos dois tempos escalares, o denominado tempo lento, na variável t , e o denominado tempo rápido, na variável τ . A diferencial de $z(t)$, com respeito a t , será denotada por $\dot{z}(t)$ e a diferencial de $z(t)$ e com respeito a τ , será denotado por $z'(\tau)$.

Seja $z = (x, y) \in \mathbb{R}^{n+m}$ e $f : \mathbb{R}^{m+n} \rightarrow \mathbb{R}^m$, $g : \mathbb{R}^{m+n} \rightarrow \mathbb{R}^n$ aplicações suaves. Vamos considerar o seguinte sistema

$$\begin{cases} x' = \frac{dx}{d\tau} = f(x, y, \varepsilon), \\ y' = \frac{dy}{d\tau} = \varepsilon g(x, y, \varepsilon), \end{cases} \quad (1-3)$$

o qual é chamado o sistema rápido. Fazendo um reescalonamento de tempo, $t = \varepsilon\tau$ temos que $dt = \varepsilon d\tau$ e assim obtemos

$$\begin{cases} \dot{x} = \frac{dx}{dt} = \frac{dx}{d\tau} \frac{d\tau}{dt} = \frac{f(x, y, \varepsilon)}{\varepsilon}, \\ \dot{y} = \frac{dy}{dt} = \frac{dy}{d\tau} \frac{d\tau}{dt} = g(x, y, \varepsilon). \end{cases}$$

ou equivalentemente

$$\begin{cases} \varepsilon \dot{x} = \frac{dx}{dt} = f(x, y, \varepsilon), \\ \dot{y} = \frac{dy}{dt} = g(x, y, \varepsilon), \end{cases} \quad (1-4)$$

o qual é chamado sistema lento e é equivalente ao sistema (1-3), desde que $\varepsilon > 0$.

Exemplo 1.18 *Um exemplo interessante de tal sistema pode ser obtido da equação de Van der Pol*

$$\varepsilon \ddot{y} + (y^2 + y)\dot{y} + y - a = 0. \quad (1-5)$$

Fazendo $\dot{y} = x$, em (1-5), obtemos $\ddot{y} = \dot{x}$ e, assim, temos o sistema de equações diferenciais

$$\begin{cases} \varepsilon \dot{x} = -(y^2 + y)x - y + a = f(x, y, \varepsilon) \\ \dot{y} = x = g(x, y, \varepsilon). \end{cases}$$

O bom entendimento do retrato de fase do campo de vetores associado a um problema de perturbação singular é o objetivo principal da *teoria geometria da perturbação singular*. As técnicas dessa teoria podem ser usadas para obter informações da dinâmica de (1-3) para valores pequenos de $\varepsilon > 0$, como por exemplo na busca de ciclos limites.

Observe que, para $\varepsilon > 0$, os retratos de fase dos sistemas rápido e lento coincidem. Para $\varepsilon = 0$, considere o conjunto

$$\mathcal{S} = \{(x, y, 0) : f(x, y, 0) = 0\} \quad (1-6)$$

de todos os pontos singulares de (1-3). O conjunto $\mathcal{S}$ é chamado variedade lenta do problema de perturbação singular e note que a equação (1-4) define um sistema dinâmico em $\mathcal{S}$, chamado *problema reduzido*, o qual é dado por:

$$f(x, y, 0) = 0, \quad \dot{y} = g(x, y, 0).$$

Combinando resultados na dinâmica destes dois problemas limite, com $\varepsilon = 0$, obtemos informações na dinâmica de (1-3) e (1-4) para valores pequenos de ε .

Definição 1.19 Dizemos que o sistema (1-3) é **normalmente hiperbólico** em $p_0 = (x_0, y_0, 0) \in \mathcal{S}$ se $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0, 0)$ tem posto máximo.

Começemos nossas análises considerando o sistema rápido (1-3) com a adição da equação trivial $\varepsilon' = 0$

$$\begin{cases} x' = f(x, y, \varepsilon) \\ y' = \varepsilon g(x, y, \varepsilon) \\ \varepsilon' = 0. \end{cases} \quad (1-7)$$

Seja $G(x, y, \varepsilon) := (f(x, y, \varepsilon), \varepsilon g(x, y, \varepsilon), 0)$ o campo de vetores definido pelo sistema (1-7). Assumimos que a parte linear de G nos pontos $(x, y, 0) \in \mathcal{S}$ tem k^s autovalores com parte real negativa e k^u autovalores com parte real positiva. Os autoespaços estável e instável correspondentes tem dimensões k^s e k^u , respectivamente.

Definição 1.20 Sejam $A, B \subseteq \mathbb{R}^{n+m}$ conjuntos compactos. A **distância de Hausdorff** entre A e B é definida por $D(A, B) = \max_{(z_1 \in A, z_2 \in B)} \{d(z_1, B), d(z_2, A)\}$.

1.4 Blow-up

Nesta seção, nos concentraremos os estudos em dimensão 2, apesar de podermos generalizar as técnicas para o $\mathbb{R}^n$, com $n \in \mathbb{N}$.

A técnica do blow-up consiste em uma mudanças de coordenadas com intuito de estudar a dinâmica do campo de vetores na vizinhança de um ponto singular não hiperbólico, o qual assumiremos estar na origem. O comportamento topológico de cada ponto singular, que surge ao aplicarmos o blow-up, é investigado usando o Teorema de Grobman-Hartman. As mudanças de coordenadas são difeomorfismos locais que levam

um ponto singular em uma curva, onde surgirá novas singularidades sobre a curva. O tipo de “blow-up” mais utilizado é o “blow-up” polar.

1.4.1 Blow-up polar

Seja $X = (P(x, y), Q(x, y))$ um campo de vetores polinomial em $\mathbb{R}^2$. Suponha que $(0, 0)$ seja um ponto singular isolado de X . Considere a aplicação:

$$\begin{aligned}\varphi: \mathbb{S}^1 \times \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R}^2 \\ (\theta, r) &\mapsto (r \cos \theta, r \sin \theta).\end{aligned}$$

Podemos definir um campo de vetores polinomial $\bar{X}$ sobre o cilindro $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}$ tal que $\varphi(\bar{X}) = X$, de modo que $D\varphi_v(\bar{X}(v)) = X(\varphi(v))$. Este campo é, na verdade, o campo X escrito em coordenadas polares. A aplicação φ é um difeomorfismo, e portanto uma autêntica mudança de coordenadas em $\mathbb{S}^1 \times (0, \infty)$.

Para estudar o retrato de fase de X numa vizinhança V da origem, é suficiente estudar o retrato de fase de $\bar{X}$ na vizinhança $\varphi^{-1}(V)$ do círculo $\mathbb{S}^1 \times \{0\}$. A seguir exibiremos a expressão do campo X em coordenadas polares.

Se $x = r \cos \theta$ e $y = r \sin \theta$ então temos

$$x^2 + y^2 = r^2, \quad \tan \theta = \frac{y}{x}. \quad (1-8)$$

Derivando (1-8), obtemos

$$x\dot{x} + y\dot{y} = r\dot{r}, \quad \dot{\theta} \sec^2 \theta = \frac{\dot{y}x - \dot{x}y}{y^2}.$$

O novo sistema em função de r e θ é dado por

$$\begin{cases} \dot{r} = P(r \cos \theta, r \sin \theta) \cos \theta + Q(r \cos \theta, r \sin \theta) \sin \theta, \\ r\dot{\theta} = Q(r \cos \theta, r \sin \theta) \cos \theta - P(r \cos \theta, r \sin \theta) \sin \theta. \end{cases}$$

Por simplicidade denotaremos $P = P(r \cos \theta, r \sin \theta)$ e $Q = Q(r \cos \theta, r \sin \theta)$.

Tome o campo $\tilde{X}(r, \theta) = \left(X_r(r, \theta), \frac{1}{r} X_\theta(r, \theta) \right)$, onde $X_r = P \cos \theta + Q \sin \theta$ e $X_\theta = Q \cos \theta - P \sin \theta$.

Agora escolha k sendo o maior inteiro positivo de modo que r^k divida $P(r \cos \theta, r \sin \theta)$ e $Q(r \cos \theta, r \sin \theta)$. Defina $\bar{X} = \frac{\tilde{X}}{r^{k-1}}$.

Com isso, $\bar{X}(r, \theta) = \bar{X}_r(r, \theta)$ e $\bar{X}_\theta(r, \theta) = \left(r \frac{X_r}{r^k}, \frac{X_\theta}{r^k} \right)$, que possuem a mesma orientação de $\tilde{X}$, pois $r > 0$.

Observe que, o ponto singular $(0,0)$ foi levado para a curva $\mathbb{S}^1 \times \{0\}$. Além disso, ao longo de $\mathbb{S}^1 \times \{0\}$, os pontos singulares são determinados pelas soluções de $\bar{X}_\theta(0, \theta) = 0$.

Se os novos pontos singulares obtidos forem hiperbólicos, podemos usar o Teorema de Grobman-Hartman para estudar os pontos singulares no círculo $r = 0$. Caso algum desses pontos singulares não seja hiperbólico, será necessário aplicar mais de um “blow-up”.

Observação 3 *Se um campo satisfaz a desigualdade de Lojasiewicz, isto é, existem um $k \in \mathbb{N}$ e $c > 0$ tal que*

$$||X(x,y)|| \geq c||x,y||^k,$$

em alguma vizinhança do 0, então quantidade de “blow-ups” é finito.

Exemplo 1.21 *Consideremos o campo $X(x,y) = (x^2 - 2xy, y^2 - 2xy)$. Observe que a origem é um ponto singular não hiperbólico. Assim, fazendo a mudança de coordenadas $x = r \cos \theta$, $y = r \sin \theta$ e substituindo em (1-8) obtemos:*

$$\tilde{X}(r, \theta) = (r^2(\cos^3 \theta + \sin^3 \theta - 2\cos^2 \theta \sin \theta + 2\sin^2 \theta \cos \theta), 3r \cos \theta \sin \theta (\sin \theta - \cos \theta)).$$

Observe que $k = 2$ é o maior inteiro positivo tal que $r^k |P(r \cos \theta, r \sin \theta)|$ e $r^k |Q(r \cos \theta, r \sin \theta)|$. Logo, $\bar{X}(r, \theta) = \frac{\tilde{X}(r, \theta)}{r}$, isto é,

$$\bar{X}(r, \theta) = (r(\cos^3 \theta + \sin^3 \theta - 2\cos^2 \theta \sin \theta + 2\sin^2 \theta \cos \theta), 3 \cos \theta \sin \theta (\sin \theta - \cos \theta)).$$

Colocando $r = 0$, obtemos que a solução de $\bar{X}_\theta(0, \theta) = 0$ é dada por $\theta = 0, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{5\pi}{4}, \frac{3\pi}{2}$. Agora estudaremos o comportamento local do campo em cada um desses pontos singulares.

$$J\bar{X}(r, \theta) = \begin{pmatrix} \frac{\partial \bar{X}_r}{\partial r}(r, \theta) & \frac{\partial \bar{X}_r}{\partial \theta}(r, \theta) \\ \frac{\partial \bar{X}_\theta}{\partial r}(r, \theta) & \frac{\partial \bar{X}_\theta}{\partial \theta}(r, \theta) \end{pmatrix}.$$

Como $\frac{\partial \bar{X}_\theta}{\partial r}(r, \theta) = 0$, temos que os autovalores são os elementos da diagonal, os quais são dados por:

$$\begin{cases} \frac{\partial \bar{X}_r}{\partial r}(r, \theta) = (\cos^3 \theta + \sin^3 \theta - 2\cos^2 \theta \sin \theta + 2\sin^2 \theta \cos \theta), \\ \frac{\partial \bar{X}_\theta}{\partial \theta}(r, \theta) = 6 \sin \theta \cos^2 \theta - 3 \sin^3 \theta + 6 \cos \theta \sin^2 \theta - 3 \cos^3 \theta. \end{cases}$$

Avaliando nos pontos singulares, obtemos que todos os pontos singulares são do tipo sela. Com isso, temos que o retrato de fase dado na Figura 1.4.

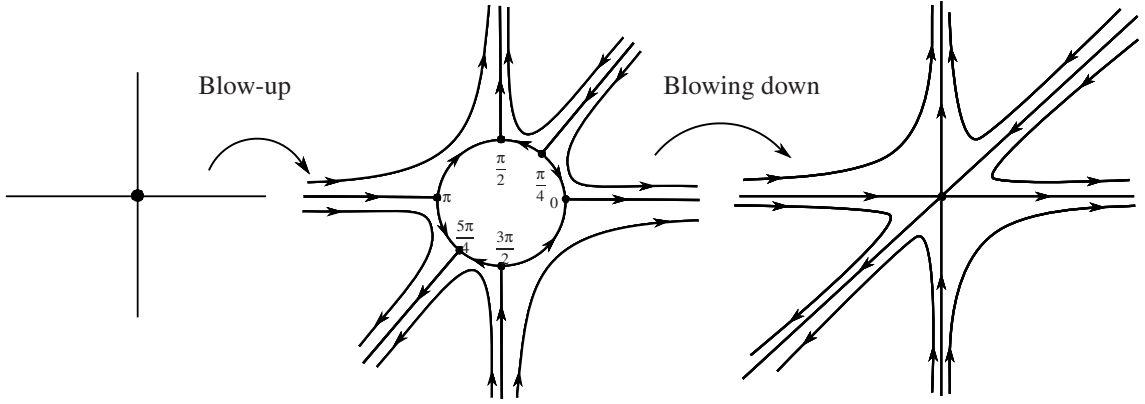


Figura 1.4: Exemplo de “blow-up” polar.

1.4.2 Blow-up Direcional

Explicitaremos o “blow-up” direcional na direção x , de modo análogo podemos denotar o “blow-up” na direção y .

Seja $X = (P(x,y), Q(x,y))$ um campo de vetores em $\mathbb{R}^2$, com ponto singular isolado em $(0,0)$. Se $x = u$ e $y = uv$, derivando temos

$$\begin{cases} \dot{x} = \dot{u} \\ \dot{y} = \dot{u}v + \dot{v}u \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dot{u} = \dot{x} \\ \dot{v} = \frac{\dot{y} - \dot{u}v}{u} \end{cases}.$$

Assim, obtemos o campo $\tilde{X}$ dado por

$$\begin{cases} \dot{u} = P(u, uv) \\ \dot{v} = \frac{Q(u, uv) - vP(u, uv)}{u} \end{cases}.$$

Considere o campo $\tilde{X}(u, v) = (\tilde{X}_u, \tilde{X}_v)$ onde $\tilde{X}_u = P(u, uv)$ e $\tilde{X}_v = \frac{Q(u, uv) - vP(u, uv)}{u}$. Seja k o maior inteiro tal que u^k é um fator de $\tilde{X}_u$ e $\tilde{X}_v$.

Defina $\bar{X} = (\bar{X}_u, \bar{X}_v) = \frac{1}{u^k} \tilde{X}(u, v)$. O ponto singular $(0,0)$ é levado para curva $u = 0$ e, em $u = 0$, os pontos singulares são determinadas pelas soluções de $\bar{X}_u(0, v) = 0$.

Exemplo 1.22 Considere o campo

$$X(x, y) = (x^2 - 2xy, y^2 - 2xy)$$

com ponto singular isolado em $(0,0)$, o qual não é hiperbólico. Aplicando o “blow-up” na direção x em $(0,0)$, $x = u$ e $y = uv$, obtemos

$$\tilde{X}(u, v) = (\tilde{X}_u, \tilde{X}_v) = (u^2 - 2u^2v, 3uv^2 - 3uv).$$

Como $k = 1$ é o maior inteiro tal que u é um fator de $\tilde{X}_u$ e $\tilde{X}_v$, temos

$$\bar{X} = \frac{\tilde{X}}{u} = (\bar{X}_u, \bar{X}_v) = (u - 2uv, 3v^2 - 3v).$$

Colocando $u = 0$, obtemos que as soluções de $\bar{X}_v(0, v) = 0$ são $v = 0$ e $v = 1$. A matriz Jacobiana é dada por

$$J\bar{X}(u, v) = \begin{bmatrix} 1 - 2v & -2u \\ 0 & 6v - 3 \end{bmatrix}$$

cujos autovalores no ponto $(0,0)$ são 1 e -3 e no ponto $(0,1)$ são -1 e 3 . Pelo Teorema de Grobman-Hartman, temos que ambos os pontos são ponto de sela. O retrato de fase é dado pela Figura 1.5.

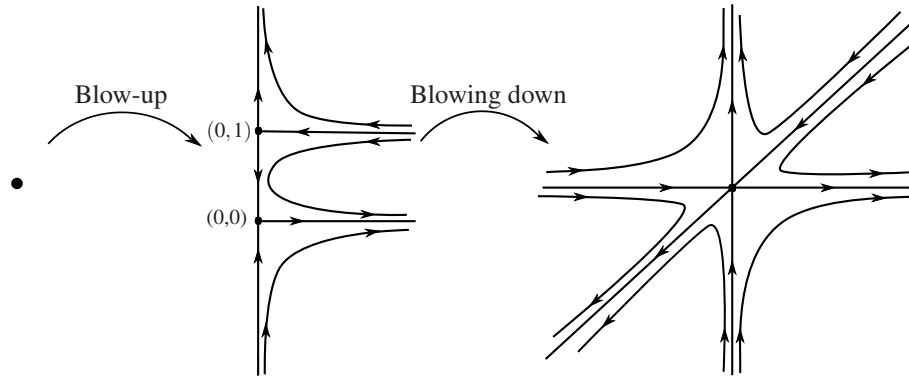


Figura 1.5: Exemplo de “blow-up” direcional.

Campos de Vetores Suaves por partes

Nesse capítulo introduziremos os conceitos básicos de sistemas dinâmicos suaves por partes que serão necessários para o desenvolvimento deste trabalho. A partir de agora, nos concentraremos em campos de vetores bidimensionais.

2.1 Convenção de Filippov

Sejam $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ uma função de classe C^r , com $r > 1$, tendo 0 como valor regular, e $\Sigma = f^{-1}(0)$. Denotemos $\Sigma^+ = f^{-1}[(0, +\infty))$, $\Sigma^- = f^{-1}((-\infty, 0])$ e $\mathfrak{X}(2)$ o espaço dos campos vetoriais C^r em $(\mathbb{R}^2, 0)$, munido com a topologia C^r .

Consideremos $\Omega(2)$ o espaço dos campos vetoriais X sobre Σ definidos por:

$$X(q) = \begin{cases} X_+(q) & \text{se } f(q) \geq 0 \\ X_-(q) & \text{se } f(q) \leq 0 \end{cases}, \quad \text{onde } X_+, X_- \in \mathfrak{X}(2),$$

munido com a topologia produto de $\mathfrak{X}(2) \times \mathfrak{X}(2)$. No restante do capítulo, utilizaremos a notação $X = (X_+, X_-)$ para ressaltar a dependência sobre X_+ e X_- .

Observação 4 *Se analisarmos as soluções de $\dot{q} = X(q)$, observamos que pode não haver unicidade sobre pontos de Σ . Assim, podem surgir pontos singulares típicos de campos de vetores suaves por partes, cujas órbitas podem ser somente um ponto, ou uma curva não regular ou ainda órbitas de X que atingem um ponto singular em tempo finito.*

Observação 5 *Sobre Σ , as soluções de $\dot{q} = X(q)$ obedecem a convenção de Filippov, a qual descrevemos abaixo, e pode ser encontrada em [7].*

Dado $X = (X_+, X_-) \in \Omega(2)$, seguindo a terminologia estabelecida por Filippov, distinguimos as seguintes regiões em Σ :

- **Região de Costura:** $\Sigma^c = \{p \in \Sigma; (X_+f)(X_-f) > 0\};$
- **Região de Escape:** $\Sigma^e = \{p \in \Sigma; X_+f > 0 \text{ e } X_-f < 0\};$

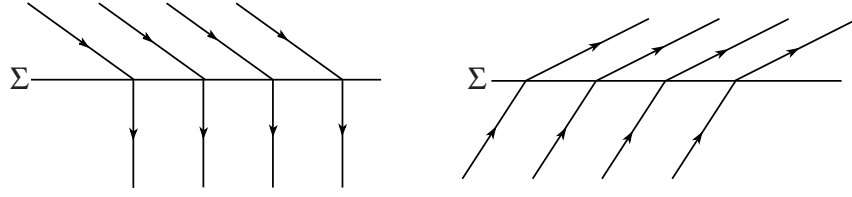


Figura 2.1: *Regiões de Costura.*

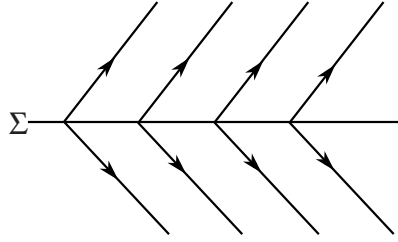


Figura 2.2: *Região de Escape.*

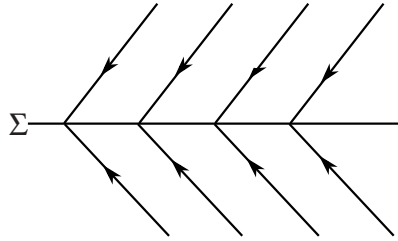


Figura 2.3: *Região de Deslize.*

- **Região de Deslize:** $\Sigma^s = \{p \in \Sigma; X_+f < 0 \text{ e } X_-f > 0\}$;

onde $X_{\pm}(p)f(p) = \langle X_{\pm}(p), \nabla f(p) \rangle$.

Na região Σ^s , definimos um campo vetorial X^s , chamado **campo vetorial deslizando** associado a $X = (X_+, X_-)$, da seguinte maneira: se $p \in \Sigma^s$, então $X^s(p)$ denota o vetor, no cone gerado por $X_+(p)$ e $X_-(p)$, isto é, a combinação convexa de X_+ e X_- , que é denotado por

$$X^s(p) = \lambda X_+(p) + (1 - \lambda)X_-(p), \quad (2-1)$$

que é tangente a Σ em p . Segue que

$$\begin{aligned} \langle X^s(p), \nabla f(p) \rangle = 0 &\Rightarrow \langle \lambda X_+(p) + (1 - \lambda)X_-(p), \nabla f(p) \rangle = 0, \\ &\Rightarrow (\lambda X_+(p) + (1 - \lambda)X_-(p))f(p) = 0, \\ &\Rightarrow \lambda(X_+(p)f(p) - X_-(p)f(p)) + X_-(p)f(p) = 0, \\ &\Rightarrow \lambda = \frac{X_-(p)f(p)}{X_-(p)f(p) - X_+(p)f(p)}. \end{aligned} \quad (2-2)$$

Substituindo (2-2) em (2-1), obtemos

$$X^s(p) = \frac{X_-(p)f(p)X_+(p) - X_+(p)f(p)X_-(p)}{X_-(p)f(p) - X_+(p)f(p)}.$$

Geometricamente temos que o campo deslizando é definido como na Figura 2.4.

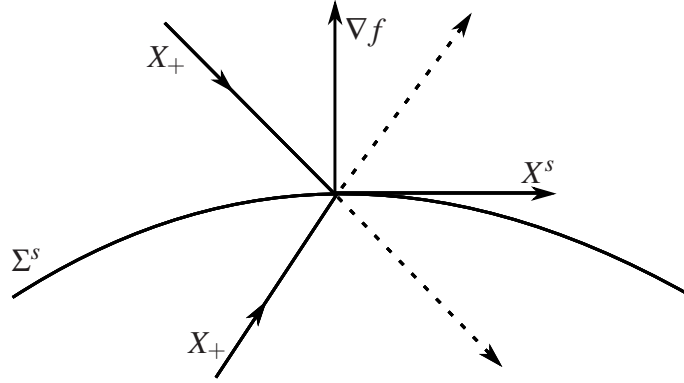


Figura 2.4: Campo Vetorial Deslizante.

Observação 6 Note que se Σ^e é a região de escape para X então esta será a região de deslize para o campo $-X$. Assim, podemos definir o campo na região de escape da seguinte forma: $-(-X)^s$. Para ambos os casos, usaremos a mesma notação X^s para $p \in \Sigma^s \cup \Sigma^e$.

2.2 Regularização de Campos de Vetores suaves por Partes

Nesta seção, estudaremos o processo de regularização de campos de vetores suaves por partes definidos em variedades de dimensão 2, desenvolvido por Sotomayor e Teixeira em [19], sendo que tais descontinuidades ocorrem sobre uma subvariedade de codimensão 1. Este processo consiste em definir um novo campo de vetores suaves que é uma aproximação do campo suave por partes.

Definição 2.1 Dizemos que uma função $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^∞ é uma função de transição se

$$\varphi(t) = \begin{cases} -1, & \text{para } t \leq -1, \\ 1, & \text{para } t \geq 1, \end{cases}$$

e $\varphi'(t) > 0$ se $t \in (-1, 1)$. Geometricamente:

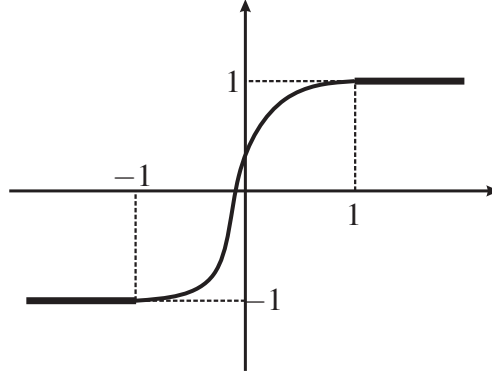


Figura 2.5: Gráfico de uma Função de Transição.

Definição 2.2 Uma φ -regularização de $X = (X_+, X_-) \in \Omega(2)$ é uma família a 1-parâmetro de campos vetoriais $X_\varepsilon \in \mathfrak{X}(2)$ dada por

$$X_\varepsilon(q) = \frac{1}{2} (1 + \varphi_\varepsilon(F(q))) X_+(q) + \frac{1}{2} (1 - \varphi_\varepsilon(F(q))) X_-(q), \quad (2-3)$$

com $\varphi_\varepsilon(x) = \varphi(x/\varepsilon)$, para $\varepsilon > 0$.

Exemplo 2.3 Consideremos o campo de vetores suaves por partes $\dot{z} = X(z)$, com $z = (x, y) \in \mathbb{R}^2$ e $X(x, y) = (1, 2 + \text{sgn}(y))$. Logo,

$$X_+(x, y) = (1, 3) \text{ e } X_-(x, y) = (1, 1).$$

Considerando $f(x, y) = y$, temos que $\nabla f(x, y) = (0, 1)$, logo

$$\begin{aligned} \langle X_+(x, y), \nabla f(x, y) \rangle &= \langle (1, 3), (0, 1) \rangle = 3, \\ \langle X_-(x, y), \nabla f(x, y) \rangle &= \langle (1, 1), (0, 1) \rangle = 1, \end{aligned}$$

com isto

$$\langle X_+(x, y), \nabla f(x, y) \rangle \langle X_-(x, y), \nabla f(x, y) \rangle > 0$$

segue que Σ é uma região de costura. Geometricamente, veja Figura 2.6, para o campo não regularizado. Definimos $\varphi\left(\frac{t}{\varepsilon}\right)$ uma função de transição. A φ_ε -regularização do

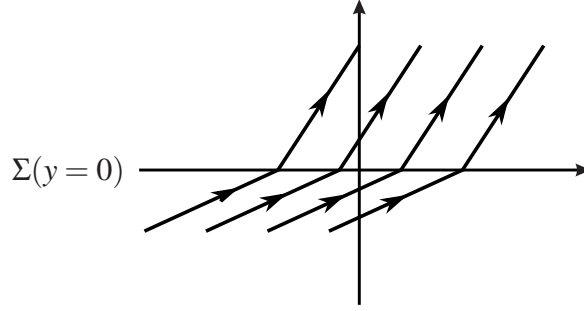


Figura 2.6: Retrato de fase so Exemplo 2.3.

campo é dado por:

$$\begin{aligned}
 X_\varepsilon(x, y) &= (1 - \varphi_\varepsilon(F(x, y)))X_-(x, y) + \varphi_\varepsilon(F(x, y))X_+(x, y) \\
 &= (1 - \varphi_\varepsilon(y))X_-(x, y) + \varphi_\varepsilon(y)X_+(x, y) \\
 &= \left(1 - \varphi\left(\frac{y}{\varepsilon}\right)\right)(1, 1) + \varphi\left(\frac{y}{\varepsilon}\right)(1, 3) \\
 &= \left(1 - \varphi\left(\frac{y}{\varepsilon}\right), 1 - \varphi\left(\frac{y}{\varepsilon}\right)\right) + \left(\varphi\left(\frac{y}{\varepsilon}\right), 3\varphi\left(\frac{y}{\varepsilon}\right)\right) \\
 &= \left(1, 1 + 2\varphi\left(\frac{y}{\varepsilon}\right)\right).
 \end{aligned}$$

2.3 Singularidades de campos de vetores suaves por partes

Consideremos $p \in \Sigma$ e $X = (X_+, X_-)$.

Definição 2.4 Seja $p \in \Sigma^s$ (resp. $p \in \Sigma^e$) um ponto singular de X^s . Dizemos que p é **ponto de sela** se p é um ponto singular repulsor (resp. atrator) de X^s sobre Σ .

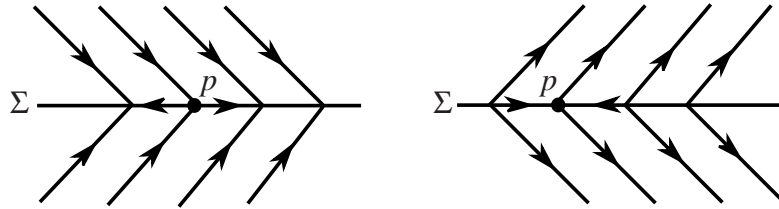


Figura 2.7: Pontos de Sela.

Definição 2.5 Dizemos que um ponto $p \in \Sigma$ é um **ponto de dobra** de $X \in \Omega(2)$ se $Xf(p) = 0$ e $X^2f(p) \neq 0$. Isto significa que, o contato em p entre a órbita de X e Σ é quadrático no ponto $p \in \Sigma$.

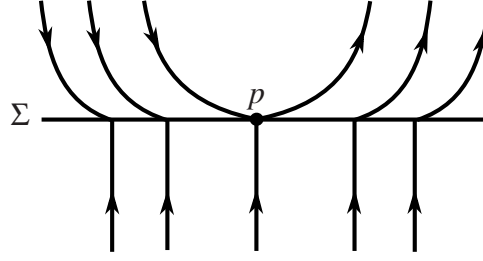
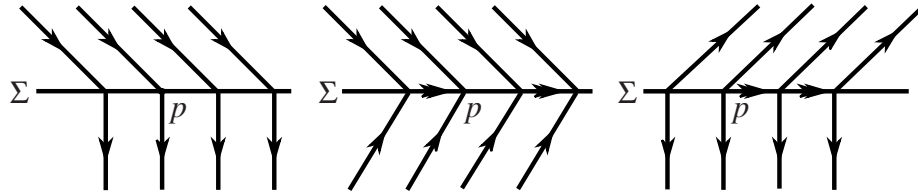


Figura 2.8: Ponto de dobra.

Definição 2.6 Um ponto $p \in \Sigma$ é um **ponto Σ -regular** de X se uma das seguintes condições é satisfeita:

- (i) $X_+f(p)X_-f(p) > 0$ (nesse caso temos $p \in \Sigma^c$).
- (ii) $X_+f(p)X_-f(p) < 0$ mas $\det[X_+, X_-](p) = \begin{vmatrix} \frac{\partial X_+}{\partial x}(p) & \frac{\partial X_+}{\partial y}(p) \\ \frac{\partial X_-}{\partial x}(p) & \frac{\partial X_-}{\partial y}(p) \end{vmatrix} \neq 0$ (neste caso $p \in \Sigma^s$ ou $p \in \Sigma^e$) e p não é um ponto singular de X^s .

Figura 2.9: Pontos Σ -regulares.

Definição 2.7 Dizemos que $p \in \Sigma$ é um **ponto Σ -singular elementar** de $X = (X_+, X_-)$ se uma das seguintes condições é satisfeita:

- (i) p é um ponto de dobra-regular de $X = (X_+, X_-)$. Isto significa que: ou p é um ponto regular de X_+ e de dobra de X_- (e assim teríamos $X_+f(p) \neq 0$, $X_-f(p) = 0$ e $X_-^2f(p) \neq 0$), ou p é um ponto de dobra de X_+ (e assim teríamos $X_-f(p) \neq 0$, $X_+f(p) = 0$ e $X_+^2f(p) \neq 0$) e regular de X_- .
- (ii) $X_+f(p)X_-f(p) < 0$, $\det[X_+, X_-](p) = 0$ mas $\frac{d}{dt}(\det[X_+, X_-])|_{\Sigma} \neq 0$.

Observação 7 Um simples cálculo mostra que a condição (ii) na definição anterior é equivalente a p ser um ponto singular hiperbólico de X^s .

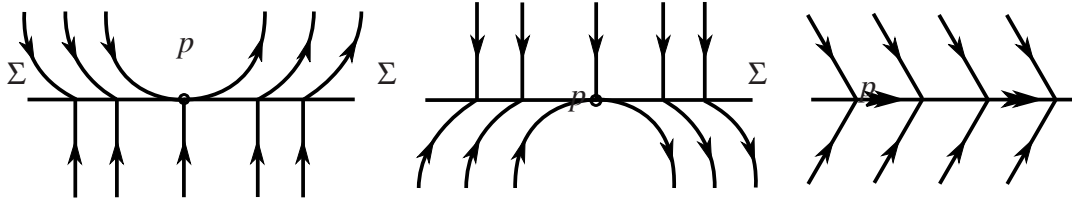


Figura 2.10: ponto Σ -singular elementar.

2.4 Bifurcações de campos de vetores suaves por partes bidimensionais

Nesta seção, caracterizaremos os conjuntos de bifurcações de codimensão 0 e codimensão 1, respectivamente, dos sistemas de Filippov, onde exibiremos uma forma normal de um campo $X \in \Omega(2)$ em cada caso.

2.4.1 Bifurcações de Codimensão 0

Apresentamos a seguir a forma normal dos campos de vetores suaves por partes bidimensionais de codimensão 0, que pode ser encontrada em [3], [8] e [11], e com maiores detalhes, em [12].

- (i) Seja $X = (X_+, X_-) \in \Omega(2)$ e $p = (0, 0) \in \Sigma^c$, isto é, $X_+f(p)X_-f(p) > 0$. A forma normal para o campo X , em uma vizinhança de $(0, 0)$ é dada por $X = (X_+, X_-)$, onde $X_+ = (0, \alpha)$ e $X_- = (0, \alpha)$, com $\alpha = \text{sgn}(X_+f(p))$.
- (ii) Seja $X = (X_+, X_-) \in \Omega(2)$ e $p = (0, 0) \in \Sigma^S$, isto é, $X_+f(p) < 0$ e $X_-f(p) > 0$. A forma normal para o campo X , em uma vizinhança de $(0, 0)$ é dada por $X = (X_+, X_-)$, onde $X_+ = (\alpha, -1)$ e $X_- = (\alpha, 1)$, com $\alpha = \text{sgn}(X^S(p))$.
- (iii) Seja $X = (X_+, X_-) \in \Omega(2)$ e $p = (0, 0) \in \Sigma^e$, isto é, $X_+f(p) > 0$ e $X_-f(p) < 0$. A forma normal para o campo X , em uma vizinhança de $p = (0, 0)$ é dada por $X = (X_+, X_-)$ onde $X_+ = (\alpha, 1)$ e $X_- = (\alpha, -1)$ com $\alpha = \text{sgn}(X_+f(p))$.
- (iv) Seja $X = (X_+, X_-) \in \Omega(2)$ e $p = (0, 0) \in \Sigma$ um ponto de dobra-regular. A forma normal para o campo X , em uma vizinhança de $(0, 0)$, é dada por $X = (X_+, X_-)$, onde $X_+ = (b, bax)$ e $X_- = (0, c)$ com $a = \text{sgn}(X^2f(p))$, $b = (\text{sgn}(\pi_1(X_+(p))))$, $c = \text{sgn}(X_-f(p))$.
- (v) Seja $p \in \Sigma^S \cup \Sigma^e$ um ponto singular hiperbólico do campo deslizante X^S , que tem a forma normal, para uma vizinhança $p = (0, 0)$, dada por $X = (X_+, X_-)$ com $X_+ = (ax, b)$ e $X_- = (ax, -b)$ onde $a = \text{sgn}((X^S)'(0, 0))$ e $b = \text{sgn}(Xf(p))$.

2.4.2 Bifurcações de Codimensão 1

Segue abaixo as formas normais dos campos de vetores suaves por partes de codimensão 1 em $\mathbb{R}^2$, que podem ser encontradas em [4], [8] e [11], e com maiores detalhes em [12].

- (i) Sejam $X = (X_+, X_-) \in \Omega(2)$ e $p = (0, 0) \in \Sigma$ um foco-regular, isto é, a forma normal, em uma vizinhança de $(0, 0)$, é dada por $\tilde{X} = (\tilde{X}_+, \tilde{X}_-)$ com $\tilde{X}_+ = (\alpha_1 x - \alpha_2 y, \alpha_1 x + \alpha_2 y)$ e $\tilde{X}_- = (\beta_1, \beta_2)$, onde $\alpha_1 \pm \alpha_2 i$ são os autovalores conjugados de $DX((0, 0))$, $\beta_1 = \text{sgn}(\langle X^s, (1, 0) \rangle)$ e $\beta_2 = \text{sgn}(X_f((0, 0)))$.
- (ii) Sejam $X = (X_+, X_-) \in \Omega(2)$ e $p \in \Sigma$ um nó hiperbólico, isto é, os autoespaços associados a $DX_+(p)$ são transversais à Σ e $X_-f(p) \neq 0$. A forma normal, em uma vizinhança de $(0, 0)$, é dada por $\tilde{X} = (\tilde{X}_+, \tilde{X}_-)$ com $\tilde{X}_+ = ((\alpha_1 + \alpha_2)x + (-\alpha_1 + \alpha_2)y, (-\alpha_1 + \alpha_2)x + (\alpha_1 + \alpha_2)y)$ e $\tilde{X}_- = (\beta_1, \beta_2)$ onde α_1, α_2 são os autovalores de $DX((0, 0))$, $\beta_1 = \text{sgn}(\langle X^s, (1, 0) \rangle)$ e $\beta_2 = \text{sgn}(X_f((0, 0)))$.
- (iii) Sejam $X = (X_+, X_-) \in \Omega(2)$ e $p \in \Sigma$ um ponto de sela hiperbólica, isto é, X_+ possui separatrizes transversais à Σ e $X_-f(p) \neq 0$. A forma normal, em uma vizinhança de $(0, 0)$, é dada por $\tilde{X} = (\tilde{X}_+, \tilde{X}_-)$ com $\tilde{X}_+ = ((\alpha_1 + \alpha_2)x + (\alpha_1 - \alpha_2)y, (\alpha_1 - \alpha_2)x + (\alpha_1 + \alpha_2)y)$ e $\tilde{X}_- = (\beta_1, \beta_2)$, onde α_1, α_2 são os autovalores de $DX((0, 0))$, $\beta_1 = \text{sgn}(\langle X^s, (1, 0) \rangle)$ e $\beta_2 = \text{sgn}(X_f((0, 0)))$.
- (iv) Sejam $X = (X_+, X_-) \in \Omega(2)$ e $p \in \Sigma$ um ponto de cúspide-regular, isto é, $X_+f(p) = 0$, $X_+^2f(p) = 0$, $X_+^3f(p) \neq 0$ e $X_-f(p) \neq 0$. A forma normal, em uma vizinhança de $(0, 0)$, é dada por $\tilde{X} = (\tilde{X}_+, \tilde{X}_-)$ com $\tilde{X}_+ = (a, bx^2)$ e $\tilde{X}_- = (\mu, \beta_2)$, onde $a = \text{sgn}(\langle X_+(0, 0), (1, 0) \rangle)$, $b = \text{sgn}(X_+^3f((0, 0)))$, $\mu = \text{sgn}(\langle X_+((0, 0)), X_-((0, 0)) \rangle)$ e $\beta_2 = \text{sgn}(X_f((0, 0)))$.
- (v) Sejam $X = (X_+, X_-) \in \Omega(2)$ e $p = (0, 0) \in \Sigma$ um ponto de dobra-dobra, visível-visível, isto é, $X_+f(p) = 0$, $X_-f(p) = 0$, $X_+^2f(p) > 0$ e $X_-^2f(p) < 0$. A forma normal, em uma vizinhança de $(0, 0)$, é dada por $\tilde{X} = (\tilde{X}_+, \tilde{X}_-)$ com $\tilde{X}_+ = (a, bx)$ e $\tilde{X}_- = (c, -bx)$ onde $a = \text{sgn}(\langle X_+(0, 0), (1, 0) \rangle)$, $b = \text{sgn}(X_+^3f((0, 0)))$ e $c = \text{sgn}(\langle X_-((0, 0)), (1, 0) \rangle)$.
- (vi) Sejam $X = (X_+, X_-) \in \Omega(2)$ e $p = (0, 0) \in \Sigma$ um ponto de dobra-dobra, visível-invisível, isto é, $X_+f(p) = 0$, $X_-f(p) = 0$, $X_+^2f(p) > 0$ e $X_-^2f(p) > 0$. A forma normal, em uma vizinhança de $(0, 0)$, é dada por $\tilde{X} = (\tilde{X}_+, \tilde{X}_-)$ com $\tilde{X}_+ = (a, bx)$ e $\tilde{X}_- = (c, bx)$ onde $a = \text{sgn}(\langle X_+(0, 0), (1, 0) \rangle)$, $b = \text{sgn}(X_+^3f((0, 0)))$ e $c = \text{sgn}(\langle X_-((0, 0)), (1, 0) \rangle)$.
- (vii) Sejam $X = (X_+, X_-) \in \Omega(2)$ e $p = (0, 0) \in \Sigma$ um ponto de dobra-dobra, invisível-invisível, isto é, $X_+f(p) = 0$, $X_-f(p) = 0$, $X_+^2f(p) < 0$ e $X_-^2f(p) > 0$. A forma normal, em uma vizinhança de $(0, 0)$, é dada por $\tilde{X} = (\tilde{X}_+, \tilde{X}_-)$ com

- (vii.a) se $\pi'_X(0) > 1$, temos $\tilde{X}_+ = (a, bx)$ e $\tilde{X}_- = (c, -bx + x^2)$,
- (vii.b) se $\pi'_X(0) < 1$, temos $\tilde{X}_+ = (a, bx + x^2)$ e $\tilde{X}_- = (c, -bx)$,
- onde $\pi_X : (\Sigma, 0) \rightarrow (\Sigma, 0)$ é a aplicação de primeiro retorno, $a = \text{sgn}(\langle X_+(0, 0), (1, 0) \rangle)$, $b = \text{sgn}(X_+^3 f((0, 0)))$ e $c = \text{sgn}(\langle X_-((0, 0)), (1, 0) \rangle)$
- (viii) Sejam $X = (X_+, X_-) \in \Omega(2)$ e $p = (0, 0) \in \Sigma$ é um ponto singular tipo sela-nó para o campo deslizante, isto é, $X^s(p) = 0$, $(X^s)'(p) = 0$, $(X^s)''(p) \neq 0$, $X_+ f(p) > 0$ e $X_- f(p) < 0$. A forma normal, em uma vizinhança de $(0, 0)$, é dada por $\tilde{X} = (\tilde{X}_+, \tilde{X}_-)$ com $\tilde{X}_+ = (x^2, c)$ e $\tilde{X}_- = (x^2, -c)$ onde $c = \text{sgn}(X_+ f(0))$.

Bifurcações de Campos Vetores Suaves por Partes via Problema de Perturbação Singular

Nesta seção, apresentaremos a teoria desenvolvida em [2], que faz a ponte entre o método de regularização apresentado em [19] e a teoria geométrica de perturbação singular, que pode ser vista com mais detalhes em [6].

3.1 Teoremas Principais

Teorema 3.1 *Dados $X \in \Omega(2)$, X_ε sua φ -regularização e $p \in \Sigma$. Suponha que φ é um polinômio de grau k em um intervalo $I \subset (-1, 1)$, com $0 \in I$. Então as trajetórias de X_ε em $V_\varepsilon = \left\{ q \in K : \frac{f(q)}{\varepsilon} \in I \right\}$, onde $K \subset \mathbb{R}^2$ é um compacto, estão em correspondência com as soluções de uma equação diferencial ordinária $z' = h(z, \varepsilon)$, tal que $h \in C^r$ e $h(z, 0) = 0$, para algum $z \in \Sigma$. Além disso, se $((X_+ - X_-)f^k)(p) \neq 0$ então podemos considerar um sistema de coordenadas locais de classe C^{r-1}*

$$\left\{ \left(\frac{\partial}{\partial x}(p), \frac{\partial}{\partial y}(p) \right) \right\},$$

tal que esta equação diferencial ordinária é um problema de perturbação singular.

O Teorema 3.1 nos diz que podemos transformar um campo de vetores suaves por partes em um problema de perturbação singular. Em geral, essa transformação não pode ser feita explicitamente. O Teorema 3.2, a seguir, determina uma fórmula do problema de perturbação singular para uma classe conveniente de campos de vetores.

Considere $C = C(k) = \{ \xi : K \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} : \xi \in C^r, L(\xi) = 0 \}$ onde $L(\xi)$ denota a parte linear de ξ em $(0, 0)$.

Seja $\Omega_d \subset \Omega(2)$ o conjunto de campos de vetores $X = (X_+, X_-)$ em Ω^r tal que, existe $\xi \in C$ que é uma solução de

$$\nabla \xi(X_+ - X_-) = \Pi_i(X_+ - X_-),$$

onde Π_i denota a projeção canônica, para $i = 1, 2$.

O segundo resultado principal é

Teorema 3.2 *Dados $X \in \Omega_d$ e X_ε sua φ -regularização. Suponha que φ é um polinômio de grau k , em um intervalo $I \subseteq \mathbb{R}$ com $0 \in I$. Então as trajetórias de X_ε em $V_\varepsilon = \left\{ q \in K : \frac{f(q)}{\varepsilon} \in I \right\}$ são soluções de um problema de perturbação singular.*

Observe que o problema de perturbação singular discutido no teorema anterior, quando $\varepsilon \rightarrow 0$, define um sistema dinâmico na variedade de descontinuidade do problema original. Esse fato pode ser muito útil para problemas em áreas aplicadas, como por exemplo, teoria do controle.

O Teorema 3.3 trata do problema de perturbação singular, onde os sistemas rápido e lento aproximam-se do campo de vetores descontínuo. Mais especificamente, o sistema rápido aproxima-se do campo de vetores suaves por partes, enquanto o sistema lento aproxima-se do campo de vetores deslizante (na variedade de descontinuidade).

Considere $X \in \Omega$ e $\rho : K \rightarrow \mathbb{R}$, onde $\rho(x, y)$ é a distância entre (x, y) e Σ . Denotaremos por $\hat{X}$ o campo de vetores dado por $\hat{X}(x, y) = \rho(x, y)X(x, y)$.

No que se segue, identificaremos $\hat{X}_\varepsilon$ e o campo de vetores em $[(K \setminus \Sigma) \times I] \subset \mathbb{R}^3$ dado por $\hat{X}(x, y, \varepsilon) = (\hat{X}_\varepsilon(x, y), 0)$.

Teorema 3.3 *Se $p \in \Sigma$, então existem um conjunto aberto $U \subset \mathbb{R}^2$, $p \in U$, uma variedade tri-dimensional M , uma função suave $\phi : M \rightarrow \mathbb{R}^3$ e um problema de perturbação singular Y em M tal que ϕ leva órbitas de $Y|_{\phi^{-1}(U \times (0, +\infty))}$ em órbitas $\hat{X}|_{(U \times (0, +\infty))}$.*

3.2 Demonstração dos teoremas

Antes de apresentarmos as demonstrações dos Teoremas, apresentaremos um lema, no qual não demonstraremos e sua demonstração pode ser encontrada em [6], que nos auxiliará na demonstração do Teorema 3.1.

Lema 3.4 *Sejam $z = (x, y) \in \mathbb{R}^{n+m}$, $f : \mathbb{R}^{m+n} \rightarrow \mathbb{R}^m$, $g : \mathbb{R}^{m+n} \rightarrow \mathbb{R}^n$ e $h : \mathbb{R}^{m+n} \rightarrow \mathbb{R}^{m+n}$ de classe C^r . Se todo autovalor não trivial de $J(h)$, matriz jacobiana de h , estão no lado esquerdo ou do lado direito do plano então existe um sistema de coordenadas local C^{r-1} que transforma*

$$z' = h(z, \varepsilon) \quad \text{em} \quad \begin{cases} x' = \varepsilon f(x, y, \varepsilon) \\ y' = g(x, y, \varepsilon). \end{cases}$$

As demonstrações a seguir se encontram em [2].

3.2.1 Demonstração Teorema 3.1

Seja $X_i = (f_i, g_i) \in \mathfrak{X}(2)$, com $i = 1, 2$. Suponha que $\varphi(t) = a_1 t + \dots + a_k t^k$. As trajetórias do campo regularizado X_ε em V_ε são soluções de

$$\begin{cases} \dot{x} = \frac{f_1 + f_2}{2} + \varphi\left(\frac{f}{\varepsilon}\right) \frac{(f_1 - f_2)}{2} \\ \dot{y} = \frac{g_1 + g_2}{2} + \varphi\left(\frac{f}{\varepsilon}\right) \frac{(g_1 - g_2)}{2}. \end{cases} \quad (3-1)$$

Usando a hipótese de que φ é um polinômio de grau k na equação (3-1) temos

$$\begin{cases} \dot{x} = \frac{f_1 + f_2}{2} + \left(a_1 \frac{f}{\varepsilon} + \dots + a_k \frac{f^k}{\varepsilon^k}\right) \frac{(f_1 - f_2)}{2} \\ \dot{y} = \frac{g_1 + g_2}{2} + \left(a_1 \frac{f}{\varepsilon} + \dots + a_k \frac{f^k}{\varepsilon^k}\right) \frac{(g_1 - g_2)}{2}. \end{cases} \quad (3-2)$$

Colocando $1/\varepsilon^k$ em evidência, em (3-2) obtemos

$$\begin{cases} \dot{x} = \frac{1}{\varepsilon^k} \left[\varepsilon^k \frac{f_1 + f_2}{2} + (a_1 \varepsilon^{k-1} f + \dots + a_k f^k) \frac{(f_1 - f_2)}{2} \right] \\ \dot{y} = \frac{1}{\varepsilon^k} \left[\varepsilon^k \frac{g_1 + g_2}{2} + (a_1 \varepsilon^{k-1} f + \dots + a_k f^k) \frac{(g_1 - g_2)}{2} \right]. \end{cases}$$

Fazendo o reescalonamento de tempo $\varepsilon^k \tau = t$ temos

$$\begin{cases} x' = \varepsilon^k \frac{f_1 + f_2}{2} + (a_1 f \varepsilon^{k-1} + \dots + a_k f^k) \frac{(f_1 - f_2)}{2} \\ y' = \varepsilon^k \frac{g_1 + g_2}{2} + (a_1 f \varepsilon^{k-1} + \dots + a_k f^k) \frac{(g_1 - g_2)}{2}. \end{cases} \quad (3-3)$$

Tomando $h_1 = x'$ e $h_2 = y'$, teremos $\dot{z} = h(z, \varepsilon)$. Como $z \in \Sigma$, temos que $f(z) = 0$. Assim $h(z, 0) = 0$.

Para demonstrar a segunda parte, consideremos a parte linear de h , do sistema (3-3), com $\varepsilon = 0$, obtemos

$$J(X_\varepsilon) = \frac{a}{2} \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x}(f_1 - f_2) + f \left(\frac{\partial f_1}{\partial x} - \frac{\partial f_2}{\partial x} \right) & \frac{\partial f}{\partial y}(f_1 - f_2) + f \left(\frac{\partial f_1}{\partial y} - \frac{\partial f_2}{\partial y} \right) \\ \frac{\partial f}{\partial x}(g_1 - g_2) + f \left(\frac{\partial g_1}{\partial x} - \frac{\partial g_2}{\partial x} \right) & \frac{\partial f}{\partial y}(g_1 - g_2) + f \left(\frac{\partial g_1}{\partial y} - \frac{\partial g_2}{\partial y} \right) \end{bmatrix}, \quad (3-4)$$

onde $J(X_\epsilon)$ representa a matriz jacobiana de X_ϵ . Aplicando em $z \in \Sigma$ em (3-4), obtemos

$$J(X_\epsilon)(z) = \frac{a}{2} \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x}(f_1 - f_2) & \frac{\partial f}{\partial y}(f_1 - f_2) \\ \frac{\partial f}{\partial x}(g_1 - g_2) & \frac{\partial f}{\partial y}(g_1 - g_2) \end{bmatrix}. \quad (3-5)$$

Temos que os autovalores de (3-5) são determinados por

$$\lambda^2 - \lambda \text{tr}(J(X_\epsilon)) + \det(J(X_\epsilon)) = 0.$$

Calculando o determinante de (3-5), obtemos

$$\det(J(X_\epsilon)(z)) = \frac{\partial f}{\partial x}(f_1 - f_2) \frac{\partial f}{\partial y}(g_1 - g_2) - \frac{\partial f}{\partial y}(f_1 - f_2) \frac{\partial f}{\partial x}(g_1 - g_2) = 0. \quad (3-6)$$

Calculando o traço de (3-5), obtemos

$$\begin{aligned} \text{tr}(J(X_\epsilon)) &= \frac{a}{2} \left(\frac{\partial f}{\partial x}(f_1 - f_2) + \frac{\partial f}{\partial y}(g_1 - g_2) \right) \\ &= \frac{a}{2} \left\langle \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y} \right), (f_1 - f_2, g_1 - g_2) \right\rangle \\ &= \frac{a}{2} \langle \nabla f, (X_+ - X_-) \rangle \\ &= \frac{a}{2} (X_+ - X_-) f. \end{aligned} \quad (3-7)$$

Segue de (3-6) e (3-7), que os autovalores de (3-5) são

$$\begin{cases} \lambda_1 = 0 \\ \lambda_2 = \frac{a}{2} (X_+ - X_-) f. \end{cases} \quad (3-8)$$

Com isto, 0 é um autovalor de multiplicidade pelo menos 1. Por outro lado, nossas hipóteses garantem que existe um autovalor não nulo. Então temos um cenário normalmente hiperbólico e podemos aplicar o Lema 3.4, para obtermos o desejado.

□

Observação 8 *A seguir, apresentaremos uma outra versão da demonstração desse teorema, de uma maneira mais explícita, que fizemos analisando as aplicações, que apresentaremos no Capítulo 5, juntamente com a teoria do Fenichel, veja [6], notamos que acrescentando algumas hipóteses poderíamos aplicar o Teorema 1.10 (Teorema da Variedade Central).*

Considerando (3-8) temos que $\lambda_2 = \frac{a}{2} (X_+ - X_-) f \neq 0$ daí, aplicando o teorema da função implícita para a função h , concluímos que existe uma função $y = y(x, \epsilon)$, definida em

um conjunto aberto $U \subset \mathbb{R}^2$ com $0 \in U$, tal que $\bar{h}(x, \varepsilon) = h(x, y(x, \varepsilon), \varepsilon)$. Desta forma, aplicando o Teorema 1.10 (Teorema da Variedade Central) ao sistema

$$\begin{cases} x' = \varepsilon \frac{f_1 + f_2}{2} + \frac{a}{2} f(f_1 - f_2) \\ y' = \varepsilon \frac{g_1 + g_2}{2} + \frac{a}{2} f(g_1 - g_2) \\ \varepsilon' = 0, \end{cases}$$

obtemos $y' = D\bar{h}(x, \varepsilon)w'$, onde

$$w' = \begin{pmatrix} x' \\ \varepsilon' \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \begin{aligned} \bar{h}(x, \varepsilon) &= \sum_{i+j=2}^m a_{ij} x^i \varepsilon^j \\ &= a_{20}x^2 + a_{11}x\varepsilon + \varepsilon^2 a_{02} + O(|(x, \varepsilon)|^3). \end{aligned}$$

Dai

$$\begin{aligned} \frac{\varepsilon}{2}(g_1 + g_2) + \frac{ax}{2}(g_1 - g_2) &= \left\langle \left(\frac{\partial \bar{h}}{\partial x}, \frac{\partial \bar{h}}{\partial \varepsilon} \right), (x', \varepsilon') \right\rangle \Rightarrow \\ \frac{\varepsilon}{2}(g_1 + g_2) + \frac{ax}{2}(g_1 - g_2) &= (2a_{20}x + a_{11}\varepsilon + O(|x|^2)) \left(\frac{\varepsilon}{2}(f_1 + f_2) + \frac{ax}{2}(f_1 - f_2) \right) \Rightarrow \\ ax(g_1 - g_2) &= (2a_{20}x + O(|x|^2)) ax(f_1 - f_2). \end{aligned}$$

Note que, para obtermos a identidade é necessário e suficiente que $g_1 = g_2$ e $a_{i,0} = 0$, com $i = 2, 3, 4, \dots$. Portanto, concluímos que próximo da origem podemos tomar $x' = \varepsilon f(x, y, \varepsilon)$ implicando que $x'|_{\varepsilon=0} = f(x, y, 0) = 0$, determinando assim um problema de perturbação singular.

□

3.2.2 Demonstração do Teorema 3.2

Para demonstrar o Teorema 3.2, antes apresentaremos um lema, no qual o demonstraremos.

Lema 3.5 (*Lema Fundamental*). *Considere $X \in \Omega$ e $\xi \in C$ satisfazendo $\nabla \xi(X_+ - X_-) = \Pi_2(X_+ - X_-)$. Se $\bar{x} = x$ e $\bar{y} = y - \xi(x, y)$, então o sistema diferencial*

$$\begin{cases} \dot{x} = \frac{f_1 + f_2}{2} + \varphi\left(\frac{f}{\varepsilon}\right) \left(\frac{f_1 - f_2}{2}\right) \\ \dot{y} = \frac{g_1 + g_2}{2} + \varphi\left(\frac{f}{\varepsilon}\right) \left(\frac{g_1 - g_2}{2}\right) \end{cases} \quad (3-9)$$

pode ser escrito

$$\begin{cases} \varepsilon \dot{\bar{x}} = \varepsilon \left[\frac{\bar{f}_1 + \bar{f}_2}{2} \bar{\varphi} \left(\frac{f}{\varepsilon} \right) \left(\frac{\bar{f}_1 - \bar{f}_2}{2} \right) \right], \\ \dot{\bar{y}} = \frac{\bar{g}_1 + \bar{g}_2}{2} - \left(\frac{\partial \bar{\xi}}{\partial x} \right) \frac{\bar{f}_1 + \bar{f}_2}{2} - \left(\frac{\partial \bar{\xi}}{\partial y} \right) \left(\frac{\bar{g}_1 + \bar{g}_2}{2} \right), \end{cases}$$

onde a barra sobre a função quer dizer que a respectiva função é dada no novo sistema de coordenadas.

Demonstração. Reescrevendo o campo de vetores nas novas coordenadas, obtemos:

$$\dot{x} = \dot{\bar{x}} = \frac{\bar{f}_1 + \bar{f}_2}{2} + \bar{\varphi} \left(\frac{f}{\varepsilon} \right) \left(\frac{\bar{f}_1 - \bar{f}_2}{2} \right)$$

e

$$\begin{aligned} \dot{\bar{y}} &= \dot{y} - \frac{\partial \xi}{\partial x} \dot{x} - \frac{\partial \xi}{\partial y} \dot{y} \\ &= \frac{\bar{g}_1 + \bar{g}_2}{2} + \bar{\varphi} \left(\frac{f}{\varepsilon} \right) \left(\frac{\bar{g}_1 - \bar{g}_2}{2} \right) - \frac{\partial \bar{\xi}}{\partial x} \left[\frac{\bar{f}_1 + \bar{f}_2}{2} + \bar{\varphi} \left(\frac{f}{\varepsilon} \right) \left(\frac{\bar{f}_1 - \bar{f}_2}{2} \right) \right] \\ &\quad - \frac{\partial \bar{\xi}}{\partial y} \left[\frac{\bar{g}_1 + \bar{g}_2}{2} + \bar{\varphi} \left(\frac{f}{\varepsilon} \right) \left(\frac{\bar{g}_1 - \bar{g}_2}{2} \right) \right] \\ &= \frac{\bar{g}_1 + \bar{g}_2}{2} - \frac{\partial \bar{\xi}}{\partial x} \left(\frac{\bar{f}_1 + \bar{f}_2}{2} \right) - \frac{\partial \bar{\xi}}{\partial y} \left(\frac{\bar{g}_1 + \bar{g}_2}{2} \right) \\ &\quad + \frac{1}{2} \bar{\varphi} \left(\frac{f}{\varepsilon} \right) \left[(\bar{g}_1 - \bar{g}_2) - \frac{\partial \bar{\xi}}{\partial x} (\bar{f}_1 - \bar{f}_2) - \frac{\partial \bar{\xi}}{\partial y} (\bar{g}_1 - \bar{g}_2) \right] \\ &= \frac{\bar{g}_1 + \bar{g}_2}{2} - \frac{\partial \bar{\xi}}{\partial x} \left(\frac{\bar{f}_1 + \bar{f}_2}{2} \right) - \frac{\partial \bar{\xi}}{\partial y} \left(\frac{\bar{g}_1 + \bar{g}_2}{2} \right) \\ &\quad + \frac{1}{2} \bar{\varphi} \left(\frac{f}{\varepsilon} \right) [\Pi_2(X_+ - X_-) - \langle \nabla \xi, (f_1 - f_2, g_1 - g_2) \rangle] \\ &= \frac{\bar{g}_1 + \bar{g}_2}{2} - \frac{\partial \bar{\xi}}{\partial x} \frac{\bar{f}_1 + \bar{f}_2}{2} - \frac{\partial \bar{\xi}}{\partial y} \frac{\bar{g}_1 + \bar{g}_2}{2}. \end{aligned}$$

Portanto

$$\begin{cases} \dot{\bar{x}} = \frac{\bar{f}_1 + \bar{f}_2}{2} + \bar{\varphi} \left(\frac{f}{\varepsilon} \right) \left(\frac{\bar{f}_1 - \bar{f}_2}{2} \right), \\ \varepsilon \dot{\bar{y}} = \varepsilon \left[\frac{\bar{g}_1 + \bar{g}_2}{2} - \frac{\partial \bar{\xi}}{\partial x} \left(\frac{\bar{f}_1 + \bar{f}_2}{2} \right) - \frac{\partial \bar{\xi}}{\partial y} \left(\frac{\bar{g}_1 + \bar{g}_2}{2} \right) \right]. \end{cases}$$

□

Observação 9 Analogamente, se $\nabla \xi(X_+ - X_-) = \Pi_1(X_+ - X_-)$ e $\bar{x} = x - \xi(x, y)$, $\bar{y} = y$

teremos

$$\begin{cases} \varepsilon \dot{\bar{x}} = \varepsilon \left[\frac{\bar{f}_1 - \bar{f}_2}{2} - \frac{\partial \bar{\xi}}{\partial x} \left(\frac{\bar{f}_1 + \bar{f}_2}{2} \right) - \frac{\partial \bar{\xi}}{\partial y} \left(\frac{\bar{g}_1 + \bar{g}_2}{2} \right) \right], \\ \dot{\bar{y}} = \frac{\bar{g}_1 + \bar{g}_2}{2} + \bar{\varphi} \left(\frac{\bar{f}}{\varepsilon} \right) \left(\frac{\bar{g}_1 - \bar{g}_2}{2} \right). \end{cases}$$

Demonstração do Teorema 3.2 Consideremos $X \in \Omega$ e suponhamos que φ é um polinômio de grau k em um intervalo $I \subseteq \mathbb{R}$ com $0 \in I$. Então existe $\xi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ satisfazendo $\xi \in C^r$, $L(\xi) = 0$ e a equação diferencial parcial $\nabla \xi(X_+ - X_-) = \Pi_i(X_+ - X_-)$, $i = 1, 2$. Suponhamos, sem perda de generalidade, que $i = 2$. As trajetórias do campo de vetores X_ε em V_ε , são soluções do sistema diferencial (3-9). Consideremos as coordenadas $(\bar{x}, \bar{y})$ dado por $\bar{x} = x$, $\bar{y} = y - \xi(x, y)$ e $\varphi(t) = a_1 t + \dots + a_k t^k$ e aplicando o Lema 3.5 temos

$$\begin{cases} \varepsilon^k \dot{\bar{x}} = \varepsilon^k \left(\frac{\bar{f}_1 + \bar{f}_2}{2} \right) + (a_1 \bar{f} \varepsilon^{k-1} + \dots + a_k \bar{f}^k) \left(\frac{\bar{f}_1 - \bar{f}_2}{2} \right) \\ \dot{\bar{y}} = \frac{\bar{g}_1 + \bar{g}_2}{2} - \frac{\partial \bar{\xi}}{\partial x} \left(\frac{\bar{f}_1 + \bar{f}_2}{2} \right) - \frac{\partial \bar{\xi}}{\partial y} \left(\frac{\bar{g}_1 + \bar{g}_2}{2} \right). \end{cases}$$

Fazendo o reescalonamento de tempo $t = \tau \varepsilon^k$, obtemos

$$\begin{cases} \bar{x}' = \varepsilon^k \left(\frac{\bar{f}_1 + \bar{f}_2}{2} \right) + (a_1 \bar{f} \varepsilon^{k-1} + \dots + a_k \bar{f}^k) \left(\frac{\bar{f}_1 - \bar{f}_2}{2} \right), \\ \bar{y}' = \varepsilon^k \left[\frac{\bar{g}_1 - \bar{g}_2}{2} - \frac{\partial \bar{\xi}}{\partial x} \left(\frac{\bar{f}_1 + \bar{f}_2}{2} \right) - \frac{\partial \bar{\xi}}{\partial y} \left(\frac{\bar{g}_1 + \bar{g}_2}{2} \right) \right], \end{cases}$$

e assim concluímos a demonstração. □

3.2.3 Exemplos de aplicações do Teorema 3.2

Exibiremos alguns exemplos, onde assumiremos, para simplificar os cálculos, que $\varphi(x) = x$, para $-1/2 < x < 1/2$.

Exemplo 3.6 Consideremos o campo de vetores suaves por partes $X = (X_+, X_-) \in \Omega(2)$, com $X_+ = (f_1, g_1)$ e $X_- = (f_2, g_2)$, $f(x, y) = x$ e $g_1 = g_2 = g$. A equação $\nabla \xi(X_+ - X_-) = \Pi_2(X_+ - X_-)$, torna-se $\xi_x(f_1 - f_2) = 0$. Vemos que $\xi \equiv 0$ é uma solução para essa equação. Isto implica que em coordenadas canônicas temos um problema de perturbação singular.

Exemplo 3.7 Consideremos o campo de vetores suaves por partes $X = (X_+, X_-) \in \Omega(2)$, com $X_+ = (f_1, g_1)$ e $X_- = (f_2, g_2)$, $f(x, y) = y$, $f_1 = f_2 = h$, $g_1 = -g_2 = g$. A equação $\nabla \xi(X_+ - X_-) = \Pi_1(X_+ - X_-)$, torna-se $2\xi_y g = 0$, como no exemplo anterior, $\xi \equiv 0$ é uma solução para essa equação. Portanto em coordenadas canônicas temos o problema de perturbação singular

$$\dot{x} = h(x, y), \quad \varepsilon \dot{y} = yg(x, y).$$

Exemplo 3.8 Sejam $X_+(x, y) = (1, x)$, $X_-(x, y) = (-1, -3x)$ e $f(x, y) = y$. O conjunto de descontinuidade é $\Sigma = \{(x, 0); x \in \mathbb{R}\}$. Temos, ainda, que $X_+ f = x$, $X_- f = -3x$, então o único ponto não regular é $(0, 0)$. Aplicamos o Teorema 3.2 e o campo ϕ -regularizado é

$$X_\varepsilon(x, y) \begin{cases} \dot{x} = y/\varepsilon \\ \dot{y} = 2xy/\varepsilon. \end{cases}$$

A equação diferencial parcial $\nabla \xi(X_+ - X_-) = \Pi_2(X_+ - X_-)$ torna-se

$$2\xi_x + 4x\xi_y = 4x. \quad (3-10)$$

Uma solução $\xi \in C$, para o sistema (3-10) é dada por $\xi(x, y) = x^2$. Assim, fazendo a mudança de coordenadas $\bar{x} = x$, $\bar{y} = y - x^2$, as trajetórias de X_ε , nestas coordenadas, são soluções do problema singular

$$\varepsilon \dot{\bar{x}} = \bar{y} + \bar{x}^2, \quad \dot{\bar{y}} = -\bar{x}.$$

3.2.4 Demonstração do Teorema 3.3

Considere $X = (X_+, X_-) \in \Omega(2)$ com $X_+ = (f_1, g_1)$, $X_- = (f_2, g_2)$, um sistema de coordenadas locais em uma vizinhança de $p \in \Sigma$ tal que, $f(x, y) = x$ e $p = (0, 0)$. Seja $\hat{X}(x, y) = |x|X(x, y)$ e as trajetórias de sua ϕ -regularização, $\hat{X} = (x, y, \varepsilon)$, satisfazem o sistema diferencial

$$\begin{aligned} \dot{x} &= (f_1 + f_2)/2 + \phi(x/\varepsilon)(f_1 - f_2)/2, \\ \dot{y} &= (g_1 + g_2)/2 + \phi(x/\varepsilon)(g_1 - g_2)/2, \\ \dot{\varepsilon} &= 0, \end{aligned} \quad (3-11)$$

para $\varepsilon > 0$ e $(x, y) \in U \subseteq \mathbb{R}^2$, onde U é uma vizinhança de $(0, 0)$. Observamos que o sistema (3-11) não está definido para $\varepsilon = 0$ e não explicita um problema de perturbação singular, segundo a Definição 2.1. Porém, se considerarmos no sistema (3-11) o “blow-

up” direcional $\beta : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ dado por $(x, y, \varepsilon) = \beta(\bar{x}, y, \bar{\varepsilon}) = (\bar{x} \cdot \bar{\varepsilon}, y, \bar{\varepsilon})$, obtemos

$$\begin{aligned}\bar{\varepsilon} \dot{\bar{x}} &= (f_1 + f_2)/2 + \varphi(x/\varepsilon)(f_1 - f_2)/2, \\ \dot{y} &= (g_1 + g_2)/2 + \varphi(x/\varepsilon)(g_1 - g_2)/2, \\ \dot{\bar{\varepsilon}} &= 0.\end{aligned}\tag{3-12}$$

Tomando $\bar{\varepsilon} = 0$ com um parâmetro do sistema (3-12) teremos um problema de perturbação singular. Além disso, podemos considerar o parâmetro $\bar{\varepsilon} = 0$.

Seja $V = U \times (0, +\infty)$ e $M = \beta^{-1}(V)$. Do sistema (3-12), temos um problema de perturbação singular $Y \in M$ e a aplicação $\psi = \beta|_M$ leva órbitas de $Y|_{\beta^{-1}(V)}$ em órbitas de $\hat{X}|_V$. $\square$

3.3 Blowing-up aplicado no Problema de Perturbação Singular

Geometricamente, é mais conveniente considerar o “blow-up” polar dado pela aplicação $\alpha : [0, +\infty) \times [0, \pi] \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ com o sistema de coordenadas $x = r \cos \theta$ e $\varepsilon = r \sin \theta$ aplicado ao sistema 3-11, a aplicação α induz o campo de vetores, com domínio $[0, +\infty) \times [0, \pi] \times \mathbb{R}$, dado por

$$\begin{aligned}\theta' &= -\sin \theta [(f_1 + f_2)/2 + \varphi(\cotg \theta)(f_1 - f_2)/2], \\ y' &= r [(g_1 + g_2)/2 + \varphi(\cotg \theta)(g_1 - g_2)/2], \\ r' &= r \cos \theta [(f_1 + f_2)/2 + \varphi(\cotg \theta)(f_1 - f_2)/2].\end{aligned}\tag{3-13}$$

O valor do parâmetro $\varepsilon = 0$, agora é representado por $r = 0$ no campo de vetores induzido acima.

Na região $(r, \theta, y) \in (\{0\} \times (0, \pi) \times \mathbb{R})$, obtemos o campo de vetores

$$\begin{aligned}\theta' &= -\sin \theta [(f_1 - f_2)/2 + \varphi(\cotg \theta)(f_1 - f_2)/2], \\ y' &= 0.\end{aligned}\tag{3-14}$$

Na região $(r, \theta, y) \in (\{0\} \times \{0\} \times \mathbb{R}) \cup (\{0\} \times \{\pi\} \times \mathbb{R})$, obtemos

$$\theta' = 0, \quad y' = 0.$$

Observamos que o “blow-up” direcional e o “blow-up” polar são essencialmente os mesmos. De fato, se considerarmos a aplicação $G : C = [0, +\infty) \times (0, \pi) \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$

dada por $G(r, \theta, \pi) = (\cotg \theta, y, r \sen \theta)$, então $\beta \circ G = \alpha$.

$$\begin{array}{ccc} C & \xrightarrow{\alpha} & \mathbb{R}^3 \\ G \downarrow & \nearrow \beta & \\ \mathbb{R}^3 & & \end{array}$$

No que segue, apresentaremos a descrição geométrica do retrato de fase do sistema $\hat{X}_\varepsilon$. Suas trajetórias na região $\{(x, y, 0) : x < 0\}$ (respectivamente na região $\{(x, y, 0) : x > 0\}$) são determinadas pelas órbitas de $-xX_-(x, y)$ (respectivamente $xX_+(x, y)$). Representamos o conjunto $\{(0, y, 0) : y \in \mathbb{R}\}$ por $S_+^1 \times \mathbb{R} = \{(\cos \theta, \sen \theta, y) : \theta \in (0, \pi), y \in \mathbb{R}\}$. As curvas $\theta = 0$ e $\theta = \pi$ são compostas por pontos singulares. O fluxo rápido em $S_+^1 \times \mathbb{R}$ é dado pela solução do sistema (3-14) e o fluxo lento é dado pela solução do sistema

$$\begin{aligned} 0 &= -\sen \theta [(f_1 - f_2)/2 + \varphi(\cotg \theta)(f_1 - f_2)/2], \\ \dot{y} &= (g_1 + g_2)/2 + \varphi(\cotg \theta)(g_1 - g_2)/2. \end{aligned}$$

Se necessário, podemos considerar sucessivos blow-ups para pontos normalmente hiperbólicos na variedade lenta.

3.4 Uma classe especial de campos de vetores suaves por partes

Nesta seção, consideraremos a classe de campos de vetores suaves por partes $X_i = (f_i, g_i)$, $i = 1, 2$, satisfazendo as condições adicionais

$$f(x, y) = x, \quad g_1 = g_2. \quad (3-15)$$

Para simplificar, assumimos que $\varphi(x) = x$, para $-1/2 < x < 1/2$.

Proposição 3.9 *Seja $X \in \Omega^r$ satisfazendo as hipóteses do Teorema 3.1 e X_ε sua φ -regularização como em (2-3). Temos*

- (i) *se $p \in \Sigma^s$, então p é um atrator de X_0 para o fluxo rápido;*
- (ii) *se $p \in \Sigma^e$, então p é um repulsor de x_0 para o fluxo rápido;*
- (iii) *se $p \in \Sigma$ é um ponto regular, então ou p é um atrator, ou p é um repulsor, ou p é um ponto de costura de X_0 .*

Demonstração. A parte linear do problema de perturbação singular determinado por (1-4) com $p \in \Sigma$ e $\varepsilon = 0$ tem dois autovalores: $\lambda_1 = 0$ e $\lambda_2 = (1/2)(X_+ - X_-)f(p)$ (como

vimos na demonstração do Teorema 3.1). O autovalor λ_1 determina a variedade lenta (ou o conjunto de descontinuidade, de acordo com a terminologia usada anteriormente) e o autovalor λ_2 determina a estabilidade do campo em uma vizinhança de p , isto é, se p é atrator ($\lambda_2 < 0$) ou repulsor ($\lambda_2 > 0$).

Se $p \in \Sigma^s$, então $(X_+f)(p) < 0$ e $(X_-f)(p) > 0$, assim $\lambda_2 = (1/2)(X_+ - X_-)f(p) < 0$.

Se $p \in \Sigma^e$, então $(X_+f)(p) > 0$ e $(X_-f)(p) < 0$, assim $\lambda_2 = (1/2)(X_+ - X_-)f(p) > 0$.

Se $p \in \Sigma$ não é um atrator e nem um repulsor, segue que $p \in \Sigma^c$, implicando que $(X_+f)(X_-f)(p) > 0$ e, portanto, p é um ponto de costura. $\square$

Notação: De agora em diante, considere $(\Omega_d)^*$ de modo que $X \in \Omega_d$ com as condições adicionais (3-15).

Corolário 3.10 Considere $X \in (\Omega_d)^*$. As trajetórias de X_ϵ dadas por (2-3), em $|f(q)| < \epsilon/2$ são as soluções do sistema singular

$$\epsilon \dot{x} = f(x, y, \epsilon), \quad \dot{y} = g(x, y) \quad (3-16)$$

com $f(x, y, \epsilon) = \epsilon(f_1 + f_2)/2 + x(f_1 - f_2)/2$ e $g \in C^r$.

Demonstração. Análoga a demonstração do Teorema 3.1. $\square$

Proposição 3.11 Considere $X \in (\Omega_d)^*$. Temos

(a) A variedade lenta de (3-16) é o conjunto

$$\Sigma \cup \{(x, y) : f_1(x, y) = f_2(x, y)\}.$$

(b) $p \in \Sigma^c$ se, e somente se, $f_1(p)f_2(p) > 0$.

(c) $p \in \Sigma^e$ se, e somente se, $f_1(p) > 0$ e $f_2(p) < 0$.

(d) $p \in \Sigma^s$ se, e somente se, $f_1(p) < 0$ e $f_2(p) > 0$.

(e) Se $p \in \Sigma^c \cup \Sigma^e \cup \Sigma^s$ e $f_1(p) \neq f_2(p)$, então p é um ponto normalmente hiperbólico de (3-16).

Demonstração. A variedade lenta de (3-16) é o conjunto

$$\mathcal{S} = \{(x, y) : f(x, y, 0) = 0\},$$

assim

$$0 = \frac{x}{2}(f_1 - f_2) \Rightarrow f_1 = f_2,$$

portanto, a variedade lenta de (3-16) é da por

$$\Sigma \cup \{(x, y) : f_1(x, y) = f_2(x, y)\}.$$

Temos que

$$X_+f = \langle (f_1, g_1), (1, 0) \rangle = f_1$$

$$X_-f = \langle (f_2, g_2), (1, 0) \rangle = f_2,$$

assim

$$p \in \Sigma^c \Leftrightarrow (X_+f)(X_-f) > 0 \Leftrightarrow f_1f_2 > 0,$$

$$p \in \Sigma^e \Leftrightarrow (X_+f) > 0 \text{ e } (X_-f) < 0 \Leftrightarrow f_1 > 0 \text{ e } f_2 < 0,$$

$$p \in \Sigma^s \Leftrightarrow (X_+f) < 0 \text{ e } (X_-f) > 0 \Leftrightarrow f_1 < 0 \text{ e } f_2 > 0,$$

Por último, para provar o item (e), considere o sistema

$$x' = f(x, y, \epsilon), \quad y' = \epsilon g(x, y, \epsilon).$$

Temos que,

$$\left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{p \in \mathcal{S}} = \left(\frac{f_1 - f_2}{2} + x \left(\frac{f_{1x} - f_{2x}}{2} \right) \right) \Big|_{p \in \mathcal{S}}$$

Como, por hipótese, $f_1(p) \neq f_2(p)$, temos

$$\frac{\partial f}{\partial x}(p) \neq 0,$$

com $p \in \mathcal{S}$. Portanto, p é um ponto normalmente hiperbólico de (3-16). $\square$

Proposição 3.12 *Considere $X \in (\Omega_d)^*$. As trajetórias do campo deslizando X^s são as soluções do problema reduzido (3-16).*

Demonstração. O campo deslizando é dado por $(1 - \lambda)X_+ + \lambda X_-$, que satisfaz

$$\langle (1 - \lambda)X_+ + \lambda X_-, \nabla f \rangle = 0.$$

De onde obtemos que $\lambda = \frac{f_1}{f_1 - f_2}$. Substituindo na equação acima, obtemos

$$\begin{aligned} X^s &= \left(1 - \frac{f_1}{f_1 - f_2}\right) (f_1, g) + \frac{f_1}{f_1 - f_2} (f_2, g) \\ &= \left(-\frac{f_2}{f_1 - f_2}\right) (f_1, g) + \frac{f_1}{f_1 - f_2} (f_2, g) \\ &= \left(0, g \left(\frac{f_1 - f_2}{f_1 - f_2}\right)\right) = (0, g). \end{aligned}$$

O problema reduzido é dado por

$$\begin{cases} 0 = 0 \left(\frac{f_1 + f_2}{2}\right) + x(f_1 - f_2) \\ \dot{y} = \frac{g_1 + g_2}{2} + x(g_1 - g_2), \end{cases}$$

de onde obtemos que

$$x = 0, \quad \dot{y} = g(x, y, 0).$$

□

Proposição 3.13 *Considere $X \in (\Omega_d)^*$. Temos que $p \in \Sigma$ é um ponto de dobra se, e somente se, $f_1(p) = 0$ e o campo de vetores X_+ não é tangente ao nível 0 da função f_1 .*

Demonstração. Para que p seja ponto de dobra é necessário que

$$(X_+ f)(p) = 0 \text{ e } (X_+^2 f)(p) \neq 0.$$

Assim,

$$(X_+ f)(p) = \langle X_+(p), \nabla f(p) \rangle = \langle (f_1, f_2), (1, 0) \rangle = f_1(p)$$

$$(X_+^2 f)(p) = X_+(p) \langle X_+, \nabla f \rangle = (X_+ f_1)(p) = \langle X_+(p), \nabla f_1 \rangle$$

e, portanto, p é ponto de dobra se, e somente se, $f_1(p) = 0$ e $X_+(p)$ é perpendicular a $\nabla f_1(p)$. □

Lema 3.14 *Considere $X \in (\Omega_d)^*$ e o sistema Φ -regularizado de X_ϵ dado por (2-3). Temos que $q \in \Sigma$ é um ponto regular de X se, e somente se, $f_1(q)f_2(q) > 0$ ou $q = (0, y_0)$ com $g(q) \neq 0$.*

Demonstração. Pela definição, temos que q é ponto regular de X se, e somente se, $(X_+ f(q))(X_- f(q)) > 0$ ou $q \in \Sigma^e \cup \Sigma^s$ e não é um ponto singular de X^s . Para provar

a primeira condição, note que $(X_+f(q))(X_-f(q)) = f_1(q)f_2(q)$. Segue que q é ponto regular de X se, e somente se, $(f_1(q))(f_2(q)) > 0$.

Para provar a segunda condição, note que se q é um ponto singular de X^s então q é um ponto singular do seu problema reduzido. Tomando $q = (0, y_0)$, segue da Proposição (3.12) que $g(q) \neq 0$ se, e somente se, q é um ponto regular de X . $\square$

No Lema a seguir, consideremos X um campo de vetores dado por (1-3) e $\mathcal{S}$ sua variedade lenta dada por (1-6). Assumimos que, para todo ponto $q \in \mathcal{S}$ normalmente hiperbólico, $(\partial f / \partial x)(q, 0)$ tem k^s autovalores com parte real negativa e k^u autovalores autovalores com parte real positiva.

Lema 3.15 *Seja $q \in \mathcal{S}$ um ponto singular hiperbólico do fluxo lento com uma variedade local estável W^s , j^s -dimensional, e uma variedade local instável W^u , j^u -dimensional. Se X é normalmente hiperbólico em q , então existe uma família ε -contínua q_ε tal que $q_0 = q$ e q_ε tem uma variedade local estável W_ε^s , $(j^s + k^s)$ -dimensional, e uma variedade local instável W_ε^u , $(j^u + k^u)$ -dimensional.*

Demonstração. Para uma prova, veja [6]. $\square$

Teorema 3.16 *Considere $X \in (\Omega_d)^*$ e o sistema Φ -regularizado dado por (2-3).*

- (a) *Se $q \in \Sigma$ é um ponto regular de X , então existem uma vizinhança $V \subseteq \mathbb{R}^2$ com $q \in V$ e $\varepsilon_0 > 0$ tal que, para $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$, X_ε não tem ponto singular em V ;*
- (b) *Se $q \in (\Sigma^e \cup \Sigma^s)$ é um ponto singular hiperbólico de X^s , então existe um $\varepsilon_0 > 0$ tal que, para $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$, X_ε tem um ponto de sela ou um ponto de nó próximo de q .*

Demonstração. (a) Suponha que $q \in \Sigma$ é um ponto regular, pelo Lema 3.14 temos

$$f_1(q)f_2(q) > 0,$$

ou $q = (0, y_0)$ com $g(q) \neq 0$. Suponha que

$$f_1(q)f_2(q) > 0.$$

Então, f_1 e f_2 tem o mesmo sinal implicando que $X_\varepsilon(q)$ é transversal à reta $x = 0$ em qualquer $\bar{q}$ próximo de q , para um $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno. E assim, pelo Teorema do Fluxo Tubular, $X_\varepsilon(q)$ não possui pontos singulares numa vizinhança de q . Se $g(q) \neq 0$ então, por continuidade, $g(\bar{q}) \neq 0$ para qualquer $\bar{q}$ próximo de q e, portanto,

$$X_\varepsilon(q) \neq (0, 0),$$

numa vizinhança de q

(b) Considere $q \in (\Sigma^e \cup \Sigma^s)$. Sem perda de generalidade, vamos supor que $q \in \Sigma^s$. Pela Proposição 3.11 temos que q é normalmente hiperbólico. O Lema 3.15 implica que X_ε tem um ponto singular q_ε que se aproxima de q , quando $\varepsilon \rightarrow 0$. Se $f_1(q) > f_2(q)$ então $k^s = 0$ e $k^u = 1$ e q_ε é um nó repulsor se $j^u = 1$, $j^s = 0$ ou uma sela se $j^u = 0$, $j^s = 1$. Se $f_1(q) < f_2(q)$ então $k^s = 1$ e $k^u = 0$, logo q_ε é um nó atrator se $j^u = 0$, $j^s = 1$, ou uma sela se $j^u = 1$, $j^s = 0$. A prova para o caso em que $q \in \Sigma^e$ é similar. $\square$

Campo de vetores suaves por partes definido em variedades de descontinuidade de codimensão maior do que um

Até o momento, trabalhamos com campos de vetores suaves por partes onde vale a convenção de Filippov, ou seja, a variedade de descontinuidade possui codimensão um. Será nosso objetivo nesse capítulo, através de sequência de “blow-up”s, fornecer condições de realizar um estudo qualitativo de um campo de vetores suaves por partes onde a superfície de descontinuidade possui codimensão maior do que um. Pois, como foi dito, a convenção de Filippov somente se aplica no caso onde a superfície de descontinuidade possui codimensão um. No entanto, em muitas aplicações a superfície de descontinuidade possui codimensão maior. Os resultados que apresentaremos garantem que para cada variedade de descontinuidade de codimensão maior que um (dupla, tripla, cone ou guarda-chuva de Whitney), sob certas hipóteses podemos aplicar um número finito de blow-ups para reduzir o estudo para o caso regular. Consequentemente, temos um campo de vetor deslizante bem definido, segundo a convenção de Filippov

4.1 Algumas superfícies suaves de codimensão maior do que um

Nos capítulos anteriores trabalhamos com campos de vetores suaves por partes definidos em $\mathbb{R}^2$, agora vamos considerar tais campos definidos em $\mathbb{R}^3$. Além disso, não exigiremos que a variedade de descontinuidade possua codimensão um. A definição dada anteriormente é naturalmente estendida para este caso.

Se 0 é um valor regular, existe um difeomorfismo $C^\infty \Psi : (\mathcal{F}, 0) \rightarrow (\Sigma, p_0)$, onde $\mathcal{F} = \{p \in \mathbb{R}^3 : z = 0\}$. Neste caso, dizemos que Σ é uma variedade de descontinuidade regular, definida da seguinte maneira.

Seja $U \subset \mathbb{R}^3$ um conjunto aberto e $H : U \rightarrow \mathbb{R}$ uma função suave. Suponha que $p_0 \in \Sigma = H^{-1}(0)$. Um sistema diferencial suave por partes, como antes, é denotado por

$$\dot{p} = X(x) = \begin{cases} X_+(p), & \text{se } p \in \Sigma_+ \\ X_-(p), & \text{se } p \in \Sigma_- \end{cases}$$

com $p = (x, y, z) \in (U \setminus \Sigma) \subset \mathbb{R}^3$, $X_+, X_- : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ são campos de vetores suaves, $\Sigma_+ = H^{-1}[0, +\infty)$ e $\Sigma_- = H^{-1}(-\infty, 0]$. O espaço de fases, $(U \setminus \Sigma)$, é dividido em dois subconjuntos Σ_+ e Σ_- por Σ . Nos referimos a Σ como a variedade de descontinuidade.

Se 0 é um valor regular, existe um difeomorfismo $C^\infty \Psi : (\mathcal{F}, 0) \rightarrow (\Sigma, p_0)$, onde $\mathcal{F} = \{p \in \mathbb{R}^3 : z = 0\}$. Neste caso, dizemos que Σ é uma variedade de descontinuidade regular.

Quando 0 é um valor crítico, de acordo com a teoria de singularidades, (veja [9]), as condições de regularidade são quebradas em uma forma estável se existe um difeomorfismo de classe $C^\infty \Psi : (\mathcal{K}, 0) \rightarrow (\Sigma, p_0)$, onde $\mathcal{K}$ é uma das seguintes variedades, apresentadas na Figura 4.1.

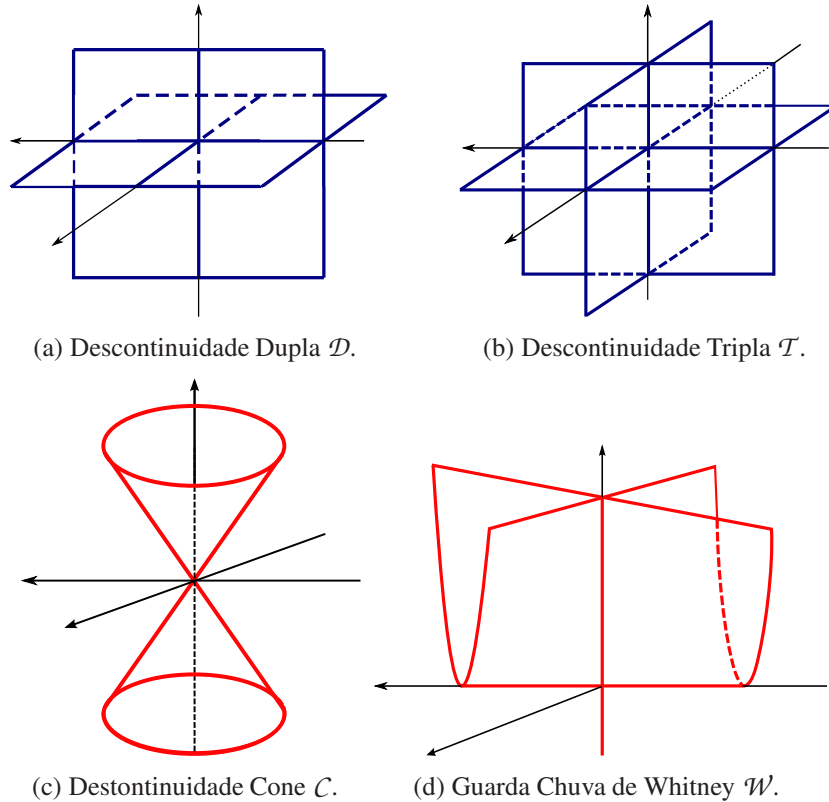


Figura 4.1: Conjunto $\mathcal{K}$ Geometricamente.

Por [9], temos que genericamente a superfície de descontinuidade pode ser:

- (a) $\mathcal{D} = \{p \in \mathbb{R}^3 : xy = 0\}$. Neste caso, dizemos que Σ é uma *descontinuidade dupla*.

- (b) $\mathcal{T} = \{p \in \mathbb{R}^3 : xyz = 0\}$. Neste caso, dizemos que Σ é uma *descontinuidade tripla*
- (c) $\mathcal{C} = \{p \in \mathbb{R}^3 : z^2 - x^2 - y^2 = 0\}$. Neste caso, dizemos que Σ é uma *descontinuidade cone*.
- (d) $\mathcal{W} = \{p \in \mathbb{R}^3 : x^2z - y^2 = 0\}$. Neste caso, dizemos que Σ é uma *descontinuidade de Whitney*.

Denotemos por $\varphi_p^+(t)$, a trajetória de X_+ por $p \in \Sigma$, isto é, $\frac{d}{dt}\varphi_p^+(t) = X_+(\varphi_p^+(t))$ e $\varphi_p^+(0) = p \in \Sigma_+$. Analogamente, a trajetória de X_- passando por $p \in \Sigma_-$ é denotado por $\varphi_p^-(t)$. Um caso de estudo é quando, para alguma condição inicial próximo de Σ , as soluções são atraídas para Σ . Neste caso, as trajetórias que chegam em Σ são forçadas a permanecerem em Σ . Filippov, veja [7], percebeu que nesta situação o movimento é contínuo em Σ , se Σ é difeomorfo a $\mathcal{F}$.

Para $\Sigma = \mathcal{F}$, temos $\Sigma_+ = \{(x, y, z); z > 0\}$ e $\Sigma_- = \{(x, y, z); z < 0\}$. Denote $X_+ = (f_1, g_1, h_1)$ e $X_- = (f_2, g_2, h_2)$. Dado $p \in \Sigma_\pm$, a órbita que passa por p é formada pela órbita de $X_\pm$ por p em $\Sigma_\pm$ e se a órbita intersecta Σ , então seguimos a convenção de Filippov.

Vimos no Capítulo 3 que existe uma forte conexão entre o estudo de sistemas suaves por partes e a técnicas de perturbação singular. Esta conexão pode ser resumida no seguinte Teorema 3.1, o qual enunciaremos novamente no contexto tridimensional.

Teorema 4.1 *Sejam $X = (X_+, X_-)$ campo de vetor suave por partes, $U \in \mathbb{R}^3$ aberto, $0 \in U$ e Σ representado por $\mathcal{F}(x, y, z) = z$. Se para todo $p \in \Sigma$ tivermos que $X_+\mathcal{F}(p) \neq 0$ ou $X_-\mathcal{F}(p) \neq 0$, então existe um problema de perturbação singular*

$$\begin{cases} \dot{x} = \beta(x, y, \theta, r) \\ \dot{y} = \gamma(x, y, \theta, r) \\ r\dot{\theta} = \alpha(x, y, \theta, r), \end{cases} \quad (4-1)$$

com $x, y \in \mathbb{R}$, $\theta \in (0, \pi)$, $r > 0$ tal que;

- (a) a variedade lenta $\mathcal{S} = \{(x, y, \theta)\} \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times (0, \pi) : \alpha(x, y, \theta, 0) = 0$, e $\Sigma^s \cup \Sigma^e$ são homeomorfas,
- (b) o problema reduzido, considerando $r = 0$ em (4-1) e o sistema dinâmico correspondido para o campo deslizando

$$X^s = \frac{1}{h_1 - h_2}(h_1 f_2 - h_2 f_1, h_1 g_2 - h_2 g_1)$$

são topologicamente equivalentes.

A seguir reexaminaremos o Teorema 4.1 através de uma interpretação geométrica. Por meio de um “blow-up” polar podemos expressar a descontinuidade Σ no cilindro em $\mathbb{R}^2 \times [0, \pi]$. Neste espaço desenhamos o retrato de fase do sistema lento-rápido (4-1), que é composto de uma variedade lenta e um fluxo horizontal rápido. Na variedade lenta, temos o retrato de fase do sistema reduzido. A projeção da variedade lenta na superfície Σ coincide, pelo Teorema 4.1, com a região deslizante e o sistema reduzido tem o mesmo retrato de fase do sistema deslizante. Para facilitar o entendimento do teorema, consideremos o seguinte exemplo:

Exemplo 4.2 Assuma que $\Sigma = \mathcal{F}$ e $X_+ = (0, 1, y)$, $X_- = (0, 0, 1)$. Considere a função suave, $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ satisfazendo $\lim_{s \rightarrow \pm\infty} \varphi(s) = \pm 1$ e $\varphi'(s) > 0$, para todo $s \in \mathbb{R}$. A φ -regularização de $X = (X_+, X_-)$ é a família a um parâmetro X_ε dada por

$$X_\varepsilon(q) = \left(\frac{1}{2} + \frac{\varphi(z/\varepsilon)}{2} \right) (0, 1, y) + \left(\frac{1}{2} - \frac{\varphi(z/\varepsilon)}{2} \right) (0, 0, 1),$$

com $\varepsilon > 0$. As trajetórias do campo vetorial regularizado X_ε são soluções do sistema diferencial $(\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}) = X_\varepsilon(q)$, dado por

$$\begin{cases} \dot{x} = 0 \\ \dot{y} = \frac{1}{2} + \frac{\varphi(z/\varepsilon)}{2} \\ \dot{z} = \frac{y+1}{2} + \varphi(z/\varepsilon) \left(\frac{y-1}{2} \right). \end{cases}$$

Agora, consideremos o “blow-up” polar nas coordenadas $z = r \cos \theta$ e $\varepsilon = r \sin \theta$, com $r > 0$ e $\theta \in [0, \pi]$, no qual induz um problema de perturbação singular dado por

$$\begin{cases} \dot{x} = 0 \\ \dot{y} = \frac{1}{2} + \frac{\psi(\theta)}{2} \\ r\dot{\theta} = -\sin \theta \left[\frac{y+1}{2} + \psi(\theta) \left(\frac{y-1}{2} \right) \right]. \end{cases} \quad (4-2)$$

Obtemos o sistema rápido após um reescalonamento de tempo $t = r\tau$, em (4-2), no qual é dado por

$$\begin{cases} x' = 0 \\ y' = r \left[\frac{1}{2} + \frac{\psi(\theta)}{2} \right] \\ \theta' = -\sin \theta \left[\frac{y+1}{2} + \psi(\theta) \left(\frac{y-1}{2} \right) \right]. \end{cases}$$

Temos que o fluxo lento é dado pela solução do problema reduzido, representado por

$$\begin{cases} \dot{x} = 0 \\ \dot{y} = \frac{1}{2} + \frac{\psi(\theta)}{2} \\ 0 = \frac{y+1}{2} + \psi(\theta) \left(\frac{y-1}{2} \right). \end{cases} \quad (4-3)$$

A variedade lenta, que surge a partir do sistema rápido, avaliando em $r = 0$, para $\theta \in (0, \pi)$ é determinada implicitamente pela equação

$$\theta' = -\sin \theta \left[\frac{y+1}{2} + \psi(\theta) \left(\frac{y-1}{2} \right) \right].$$

Por outro lado, o campo deslizante, definido por Filippov, é

$$X^s = \left(0, \frac{-1}{y-1}, 0 \right)$$

Note ainda que, do problema reduzido, (4-3), temos que

$$\dot{y} = \frac{1}{2} + \frac{\psi(\theta)}{2} \quad e \quad \psi(\theta) = -\frac{y+1}{y-1}.$$

Obtemos assim que

$$\dot{y} = \frac{-1}{y-1}.$$

Com isto, vemos que o fluxo de X^s e o problema reduzido são equivalentes. Veja a Figura 4.2.

A seguir apresentaremos a demonstração do Teorema 4.1, a qual segue os mesmos passos do Exemplo 4.2.

Demonstração do Teorema 4.1 Tomemos $X(p) = (X_+(p), X_-(p))$ com $X_+ = (f_1, g_1, h_1)$, $X_- = (f_2, g_2, h_2)$ e $\Sigma = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; z = 0\}$. Aplicando o processo de regularização obtemos

$$X_\varepsilon(q) = \left(\frac{1 + \varphi(z/\varepsilon)}{2} \right) X_+(q) + \left(\frac{1 - \varphi(z/\varepsilon)}{2} \right) X_-(q),$$

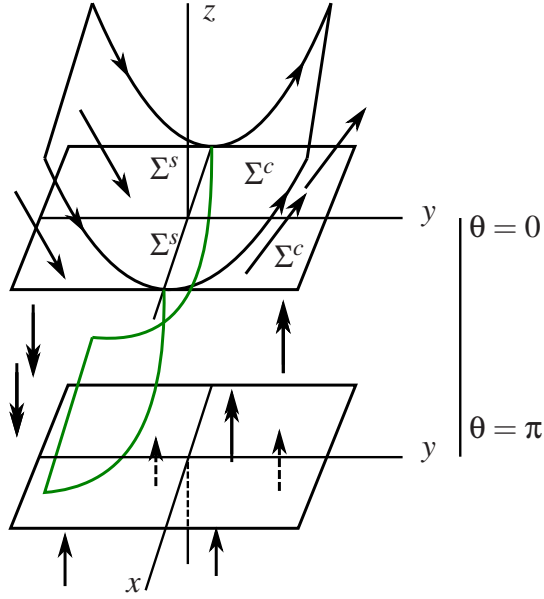


Figura 4.2: Os sistemas rápido e lento. Dupla flecha representa o fluxo rápido. A superfície verde é a variedade lenta, que é homeomorfa a região de deslize.

ou equivalentemente

$$\begin{cases} \dot{x} = \frac{f_1 + f_2}{2} + \varphi(z/\epsilon) \left(\frac{f_1 - f_2}{2} \right) \\ \dot{y} = \frac{g_1 + g_2}{2} + \varphi(z/\epsilon) \left(\frac{g_1 - g_2}{2} \right) \\ \dot{z} = \frac{h_1 + h_2}{2} + \varphi(z/\epsilon) \left(\frac{h_1 - h_2}{2} \right) \\ \dot{\epsilon} = 0. \end{cases} \quad (4-4)$$

Agora, considerando o “blow-up” polar nas coordenadas $z = r \cos \theta$ e $\epsilon = r \sin \theta$, com $r \geq 0$ e $\theta \in [0, \pi]$, em (4-4), temos

$$\begin{cases} \dot{x} = \frac{f_1 + f_2}{2} + \psi(\theta) \left(\frac{f_1 - f_2}{2} \right) \\ \dot{y} = \frac{g_1 + g_2}{2} + \psi(\theta) \left(\frac{g_1 - g_2}{2} \right) \\ r\dot{\theta} = -\sin \theta \left[\frac{h_1 + h_2}{2} + \psi(\theta) \left(\frac{h_1 - h_2}{2} \right) \right] \\ \dot{r} = \cos \theta \left[\frac{h_1 + h_2}{2} + \psi(\theta) \left(\frac{h_1 - h_2}{2} \right) \right]. \end{cases}$$

onde $\psi(\theta) = \varphi(\cotg \theta)$. Fazendo o reescalonamento de tempo $t = r\tau$, obtemos

$$\begin{cases} x' = r \left[\frac{f_1 + f_2}{2} + \psi(\theta) \left(\frac{f_1 - f_2}{2} \right) \right] \\ y' = r \left[\frac{g_1 + g_2}{2} + \psi(\theta) \left(\frac{g_1 - g_2}{2} \right) \right] \\ \theta' = -\sin \theta \left[\frac{h_1 + h_2}{2} + \psi(\theta) \left(\frac{h_1 - h_2}{2} \right) \right] \\ r' = r \cos \theta \left[\frac{h_1 + h_2}{2} + \psi(\theta) \left(\frac{h_1 - h_2}{2} \right) \right], \end{cases}$$

o qual é o sistema rápido. Observe que na região $(r, \theta, x, y) \in (\{0\} \times (0, \pi) \times \Sigma)$ temos o campo de vetores

$$\begin{cases} \theta' = -\sin \theta \left[\frac{h_1 + h_2}{2} + \psi(\theta) \left(\frac{h_1 - h_2}{2} \right) \right] \\ x' = y' = r' = 0. \end{cases} \quad (4-5)$$

O conjunto de descontinuidade de Σ é, agora, representado por $S_+^1 \times \Sigma = \{(\cos \theta, \sin \theta, x, y); \theta \in [0, \pi], (x, y) \in \Sigma\}$. As variedades, na região $(r, \theta, x, y) \in \{\{0\} \times \{0, \pi\} \times \Sigma; \theta = 0 \text{ e } \theta = \pi\}$, são compostas por pontos singulares.

O fluxo rápido em $S_+^1 \times \Sigma$ é dado pela solução do sistema (4-5) e o fluxo lento é dado pela solução problema reduzido

$$\begin{cases} \dot{x} = \frac{f_1 + f_2}{2} + \psi(\theta) \left(\frac{f_1 - f_2}{2} \right) \\ \dot{y} = \frac{g_1 + g_2}{2} + \psi(\theta) \left(\frac{g_1 - g_2}{2} \right) \\ 0 = -\sin \theta \left[\frac{h_1 + h_2}{2} + \psi(\theta) \left(\frac{h_1 - h_2}{2} \right) \right]. \end{cases} \quad (4-6)$$

A variedade lenta, para $\theta \in (0, \pi)$ é determinada implicitamente pela equação

$$h_1(x, y, 0) + h_2(x, y, 0) + \psi(\theta)[h_1(x, y, 0) - h_2(x, y, 0)] = 0.$$

Observe que

$$h_1(x, y, 0) - h_2(x, y, 0) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad h_1(x, y, 0) = h_2(x, y, 0),$$

mas

$$\begin{cases} X_+ \mathcal{F}(x, y, 0) = \langle (f_1, g_1, h_1), \nabla \mathcal{F}(x, y, 0) \rangle = h_1(x, y, 0), \\ X_- \mathcal{F}(x, y, 0) = \langle (f_2, g_2, h_2), \nabla \mathcal{F}(x, y, 0) \rangle = h_2(x, y, 0). \end{cases}$$

Como estamos na região de deslize, temos que

$$X_+ \mathcal{F}(x, y, 0) X_- \mathcal{F}(x, y, 0) < 0 \quad \Rightarrow \quad h_1(x, y, 0) h_2(x, y, 0) < 0,$$

para todo $(x, y, 0) \in \Sigma^s \cup \Sigma^e$. Assim $h_1(x, y, 0) - h_2(x, y, 0) \neq 0$ para todo $\theta \in (0, \pi)$. Além disso, para $\theta \in (0, \pi)$ temos que $\sin \theta \neq 0$, logo

$$0 = -\sin \theta [h_1(x, y, 0) + h_2(x, y, 0) + \psi(\theta)[h_1(x, y, 0) - h_2(x, y, 0)]],$$

implicando em

$$\psi(\theta) = \frac{h_1(x, y, 0) + h_2(x, y, 0)}{h_2(x, y, 0) - h_1(x, y, 0)}.$$

como $-1 \leq \psi \leq 1$ para $\theta(0, \pi)$, temos

$$-1 \leq \frac{h_1(x, y, 0) + h_2(x, y, 0)}{h_2(x, y, 0) - h_1(x, y, 0)} \leq 1,$$

para todo $(x, y, 0) \in \Sigma^s \cup \Sigma^e$.

Como ψ^{-1} é decrescente em $(-1, 1)$, a equação $h_1(x, y, 0) + h_2(x, y, 0) + \psi(\theta)[h_1(x, y, 0) - h_2(x, y, 0)] = 0$ defini um gráfico contínuo, com isto, fica provado o item (i).

Continuando a demonstração, temos que o campo deslizante é dado por

$$X^s = \lambda X_+ + (1 - \lambda) X_-,$$

juntamente com a hipótese

$$X^s \mathcal{F} = \langle X^s, \nabla \mathcal{F} \rangle = 0,$$

assim

$$X^s = \frac{1}{X_- \nabla \mathcal{F} - X_+ \nabla \mathcal{F}} (X_- \nabla \mathcal{F} X_+ - X_+ \nabla \mathcal{F} X_-).$$

Como $\nabla \mathcal{F} = (0, 0, 1)$, obtemos

$$X^s = \frac{1}{h_2 - h_1} (h_2 f_1 - h_1 f_2, h_2 g_1 - h_1 g_2, 0). \quad (4-7)$$

Do problema reduzido, (4-6) temos que

$$\begin{cases} \dot{x} = \frac{f_1 + f_2}{2} + \psi(\theta) \left(\frac{f_1 - f_2}{2} \right), \\ \dot{y} = \frac{g_1 + g_2}{2} + \psi(\theta) \left(\frac{g_1 - g_2}{2} \right), \end{cases}$$

onde $\psi(\theta) = \frac{h_1 + h_2}{h_1 - h_2}$. Substituindo a expressão de $\psi(\theta)$ no campo, obtemos

$$\begin{cases} \dot{x} = \frac{f_1 + f_2}{2} + \psi(\theta) \left(\frac{f_1 - f_2}{2} \right), \\ \dot{y} = \frac{g_1 h_2 - g_2 h_1}{h_2 - h_1}, \end{cases}$$

assim

$$(\dot{x}, \dot{y}, \dot{\theta}) = \frac{1}{h_2 - h_1} (f_1 h_2 - f_2 h_1, g_1 h_2 - g_2 h_1, 0). \quad (4-8)$$

Logo de (4-7) e (4-8) temos

$$(\dot{x}, \dot{y}, \dot{\theta}) \cong X^S.$$

□

Note que, com este método, produzimos um sistema diferencial, que é equivalente ao campo de vetores deslizando para o caso regular.

Sejam $U, \tilde{U}$ vizinhanças abertas de $0 \in \mathbb{R}^3$ e $\varphi : \tilde{U} \rightarrow U$ um difeomorfismo de classe C^∞ . Observe que φ induz um campo de vetores suaves por partes em $\tilde{U}$, denotado por $\tilde{X} = (\tilde{X}_+, \tilde{X}_-)$ e dado por $\tilde{X}_i(\tilde{p}) = d\varphi^{-1}X_i(p), i = \pm$. Os campos de vetores induzidos por φ são denotados por $\tilde{X}_+$ e $\tilde{X}_-$ em $\varphi^{-1}(\Sigma_+)$ e $\varphi^{-1}(\Sigma_-)$, respectivamente. Em suma, a variedade de descontinuidade é $\tilde{\Sigma} = \varphi^{-1}(\Sigma)$.

Consideremos $X = (X_+, X_-)$, onde $X_+ = (f_1, g_1, h_1)$ e $X_- = (f_2, g_2, h_2)$ com $f_i, g_i, h_i, i = 1, 2$ funções de classe $C^r, r \geq 1$. Assumiremos que

$$f_i(p) = g_i(p) = h_i(p) = 0, i = 1, 2, \quad (4-9)$$

para todo $p \in \Sigma$. Caso isso não ocorra, então poderemos considerar o campo de vetores

$$Y(x, y) = \rho(x, y)X(x, y)$$

induzido, onde ρ é uma função não negativa que se anula em Σ .

Teorema 4.3 *Suponha que $\Sigma = \mathcal{D} = \{p \in \mathbb{R}^3 : xy = 0\}$. A aplicação $\phi : (0, 2\pi) \times [0, +\infty) \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ dada por*

$$\phi(\theta, r, z) = (r \cos \theta, r \sin \theta, z)$$

induz um campo de vetores $\tilde{X}$ satisfazendo que todo ponto de descontinuidade $q \in \tilde{\Sigma}$ é regular.

Demonstração. Considere a aplicação $\phi : (0, 2\pi) \times [0, +\infty) \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ dada por

$$\phi(\theta, r, z) = (r \cos \theta, r \sin \theta, z)$$

Seja $\tilde{X}$ o campo de vetores determinado por $\tilde{X}_+$ e $\tilde{X}_-$ em $\phi^{-1}(\Sigma_+)$ e em $\phi^{-1}(\Sigma_-)$ respectivamente, isto é,

$$\tilde{X}_+ = \begin{cases} \dot{r} = f_1 \cos \theta + g_1 \sin \theta \\ r\dot{\theta} = g_1 \cos \theta - f_1 \sin \theta \\ \dot{z} = h_1 \end{cases}, \quad \tilde{X}_- = \begin{cases} \dot{r} = f_2 \cos \theta + g_2 \sin \theta \\ r\dot{\theta} = g_2 \cos \theta - f_2 \sin \theta \\ \dot{z} = h_2 \end{cases}, \quad (4-10)$$

cuja variedade de descontinuidade é $\tilde{\Sigma} = \partial\phi^{-1}(\Sigma_+) \cup \partial\phi^{-1}(\Sigma_-)$.

Por hipótese, temos que $\Sigma = \mathcal{D}$, ou seja, $H : U \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ com $H(x, y, z) = xy$. Note que $\nabla H = (y, x, 0)$ e $\nabla H = 0$ se, e somente se, $x = y = 0$, daí $H(0, 0, 0) = 0$, implicando que 0 não é regular. Tomando $F = H \circ \phi$ temos

$$F(\theta, r, z) = r^2 \cos \theta \sin \theta,$$

segue que

$$\nabla F(\theta, r, z) = (r^2 \cos 2\theta, r \sin 2\theta, 0)$$

1. Se $r > 0$ e $q = (\theta, r, z) \in \tilde{\Sigma}$, então, pelo Teorema da Função Inversa, existe uma vizinhança $U_q \subset S^1 \times [0, +\infty) \times \mathbb{R}$ tal que $\tilde{X}|_{U_q}$ tem, somente, descontinuidades regulares, pois, $\nabla F(\theta, r, z) \neq 0$ para todo $\theta \in (0, \pi)$.
2. Se $q = (\theta, r, z) \in \tilde{\Sigma}$, então existe uma vizinhança $U_q \subset S^1 \times \mathbb{R}$ tal que $\tilde{X}|_{U_q}$ tem, somente, descontinuidades regulares. Para $r = 0$ temos que analisar o campo desingularizado e analisar o fluxo reduzido, pois pelo Teorema 4-1, temos que o problema reduzido é topologicamente equivalente ao campo deslizante. Assim de (4-10), existe uma curva de deslize no cilindro $S^1 \times \mathbb{R}$ definida implicitamente pelas equações

$$\begin{cases} 0 = g_1 \cos \theta - f_1 \sin \theta, & \theta \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right) \cup \left(\pi, \frac{3\pi}{2}\right), \\ 0 = g_2 \cos \theta - f_2 \sin \theta, & \theta \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right) \cup \left(\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right). \end{cases}$$

Com isso, com as hipóteses dada em (4-9), temos que o conjunto de descontinuidade, para o campo desingularizado, é dado por $G^{-1}(0)$, com $G(\theta, r, z) = \theta(\theta - \pi/2)(\theta - \pi)(\theta - 3\pi/2)$, onde temos que $\nabla G(\theta, 0, z) \neq 0$ em $G^{-1}(0)$. $\square$

Para o próximo teorema denotaremos que $L_x = \{y = z = 0\}$, $L_y = \{x = z = 0\}$ e $L_z = \{x = y = 0\}$. Para $p = (x, y, z) \in \Sigma$ teremos o seguinte

- Se $p \in \Sigma \setminus (L_x \cup L_y \cup L_z)$, então existe uma vizinhança aberta $U_p \subset \mathbb{R}^3$ de p tal que $X|_{U_p}$ tem descontinuidades regulares.
- Se $p \in (L_x \cup L_y \cup L_z)$ e $p \neq 0$ então teremos descontinuidade dupla.

Teorema 4.4 *Suponha que $\Sigma = \mathcal{T}$. Então a aplicação $\phi : (0, \pi) \times (0, 2\pi \times [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}^3$ dada por*

$$\phi(q) = \phi(\omega, \theta, r) = (r \sin \omega \cos \theta, r \sin \omega \sin \theta, r \cos \omega)$$

induz um campo de vetores suaves por partes $\tilde{X}$ satisfazendo que todas descontinuidades $q \in \tilde{\Sigma}$ são regulares ou uma descontinuidade dupla.

Demonstração. Considere a aplicação $\phi : (0, \pi) \times (0, 2\pi) \times [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}^3$ dada por

$$\phi(q) = \phi(\omega, \theta, r) = (r \sin \omega \cos \theta, r \sin \omega \sin \theta, r \cos \omega).$$

A aplicação ϕ pode ser vista como um “blow-up”, da seguinte maneira, fazendo $x = \bar{r} \cos \theta$, $y = \bar{r} \sin \theta$, com isto, obtemos o campo $\bar{X} = (\bar{X}_+, \bar{X}_-)$ dado por

$$\bar{X}_+ = \begin{cases} \bar{r}' = f_1 \cos \theta + g_1 \sin \theta, \\ \bar{r}\theta' = g_1 \cos \theta - f_1 \sin \theta \\ z' = h_1 \end{cases} \quad \bar{X}_- = \begin{cases} \bar{r}' = f_2 \cos \theta + g_2 \sin \theta. \\ \bar{r}\theta' = g_2 \cos \theta - f_2 \sin \theta \\ z' = h_2. \end{cases} \quad (4-11)$$

Agora, fazendo $z = r \cos \omega$, $\bar{r} = r \sin \omega$, juntamente com o sistema (4-11), obtemos o campo de vetores $\tilde{X}$ com $\tilde{X}_+$ e $\tilde{X}_-$ em $\phi^{-1}(\Sigma_+)$ e em $\phi^{-1}(\Sigma_-)$ respectivamente, dado por

$$\tilde{X}_+ = \begin{cases} \omega' = f_1 \left[\frac{\cos \omega \cos \theta}{r} \right] + g_1 \left[\frac{\cos \omega \sin \theta}{r} \right] + h_1 \left[\frac{-\sin \omega}{r} \right], \\ \theta' = f_1 \left[\frac{-\sin \theta}{r \sin \omega} \right] + g_1 \left[\frac{\cos \theta}{r \sin \omega} \right], \\ r' = f_1 [\sin \omega \cos \theta] + g_1 [r \sin \omega \sin \theta] + h_1 [\cos \omega], \end{cases} \quad (4-12)$$

$$\tilde{X}_- = \begin{cases} \omega' = f_2 \left[\frac{\cos \omega \cos \theta}{r} \right] + g_2 \left[\frac{\cos \omega \sin \theta}{r} \right] + h_2 \left[\frac{-\sin \omega}{r} \right], \\ \theta' = f_2 \left[\frac{-\sin \theta}{r \sin \omega} \right] + g_2 \left[\frac{\cos \theta}{r \sin \omega} \right], \\ r' = f_2 [\sin \omega \cos \theta] + g_2 [r \sin \omega \sin \theta] + h_2 [\cos \omega]. \end{cases}$$

Por hipótese temos que $X_+(p) = X_-(p) = 0$, para todo $p \in \Sigma$. Temos que (4-12)

pode ser reescrita como

$$\begin{aligned} \tilde{X}_+ &= \begin{cases} \omega' = \hat{f}_1 [\sin \omega \cos \omega \cos \theta] + \hat{g}_1 [\sin \omega \cos \omega \sin \theta] + \hat{h}_1 [-\sin \omega], \\ \theta' = \hat{f}_1 [-\sin \theta] + \hat{g}_1 [\cos \theta], \\ r' = \hat{f}_1 [\sin^2 \omega \cos \theta] + \hat{g}_1 [r \sin^2 \omega \sin \theta] + \hat{h}_1 [r \cos \omega], \end{cases} \\ \tilde{X}_- &= \begin{cases} \omega' = \hat{f}_2 [\sin \omega \cos \omega \cos \theta] + \hat{g}_2 [\sin \omega \cos \omega \sin \theta] + \hat{h}_1 [-\sin \omega], \\ \theta' = \hat{f}_2 [-\sin \theta] + \hat{g}_2 [\cos \theta], \\ r' = \hat{f}_2 [\sin^2 \omega \cos \theta] + \hat{g}_2 [r \sin^2 \omega \sin \theta] + \hat{h}_2 [r \cos \omega]. \end{cases} \end{aligned} \quad (4-13)$$

onde, $\hat{f}_1 = \lim_{(r,\omega) \rightarrow (0,0)} \frac{f_1}{r \sin \omega}$, $\hat{f}_2 = \lim_{(r,\omega) \rightarrow (0,0)} \frac{f_2}{r \sin \omega}$, $\hat{g}_1 = \lim_{(r,\omega) \rightarrow (0,0)} \frac{g_1}{r \sin \omega}$, $\hat{g}_2 = \lim_{(r,\omega) \rightarrow (0,0)} \frac{g_2}{r \sin \omega}$, $\hat{h}_1 = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{h_1}{r}$ e $\hat{h}_2 = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{h_2}{r}$.

Por hipótese, temos que $\Sigma = \mathcal{T}$, ou seja, $H : U \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$, onde U é um aberto e $H(x, y, z) = xyz$. Note que $\nabla H = (yz, xz, xy)$ e $\nabla H = 0$ se, e somente se, $xy = xz = yz = 0$. Daí temos que $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; (x, 0, 0), (0, y, 0), (0, 0, z)\}$ serão descontinuidades não regulares.

Tomando $F = H \circ \phi$ temos

$$F(\omega, \theta, r) = r^3 \sin^2 \omega \cos \omega \sin \theta \cos \theta.$$

Segue que

$$\nabla F(\omega, \theta, r) = (F_\omega(\omega, \theta, r), F_\theta(\omega, \theta, r), F_r(\omega, \theta, r)), \quad (4-14)$$

onde

$$\begin{aligned} F_\omega(\omega, \theta, r) &= r^3 \sin \theta \cos \theta (\sin 2\omega \cos \omega - \sin^3 \omega), \\ F_\theta(\omega, \theta, r) &= r^3 \sin^2 \omega \cos \omega \cos 2\theta, \\ F_r(\omega, \theta, r) &= 3r^2 \sin^2 \omega \cos \omega \sin \theta \cos \theta. \end{aligned}$$

1. se $r > 0$ e $\phi(q) \in (\Sigma \setminus (L_x \cup L_y \cup L_z))$, então temos descontinuidades regulares;
2. se $r > 0$ e $\phi(q) \in (\Sigma \cap (L_x \cup L_y \cup L_z))$, então temos seis subconjuntos de descontinuidade dupla de $\tilde{X}$, pois anulam a equação (4-14), a saber:

$$\begin{aligned} C_1 &= \{(0, \theta, r) ; \theta \in (0, 2\pi) \text{ e } r \geq 0\}; \\ C_2 &= \{(\pi, \theta, r) ; \theta \in (0, 2\pi) \text{ e } r \geq 0\}; \\ C_3 &= \{(\pi/2, \pi/2, r) ; r \geq 0\}; \\ C_4 &= \{(\pi/2, 3\pi/2, r) ; r \geq 0\}; \end{aligned}$$

$$C_5 = \{(\pi/2, 0, r) ; r \geq 0\};$$

$$C_6 = \{(\pi/2, \pi, r) ; r \geq 0\}.$$

3. se $r = 0$ temos que analisar o campo desingularizado, (4-13), onde concluímos

- se $q \in S^2 \times \{0\}$ e $(\omega, \theta) \in T_1 \cup T_2 \cup T_3$, onde

$$T_1 = \{\sin \theta = 0\} \cap \{\sin \omega \cos \omega \neq 0\},$$

$$T_2 = \{\cos \omega = 0\} \cap \{\sin \theta \cos \theta \neq 0\},$$

$$T_3 = \{\cos \theta = 0\} \cap \{\sin \omega \cos \omega \neq 0\},$$

então existe uma vizinhança $\mathcal{U}_q \subset S^2 \times \{0\}$ tal que $\tilde{X}|_{\mathcal{U}_q}$ tem descontinuidades regulares.

- se $q \in S^2 \times \{0\}$ é tal que

$$(\omega, \theta) \in \{(0, 0), (\pi, 0), (\pi/2, \pm\pi/2), (\pi/2, \pm\pi)\}$$

então existe uma vizinhança $\mathcal{U}_q \subset S^2 \times \{0\}$ tal que $\tilde{X}|_{\mathcal{U}_q}$ tem descontinuidade dupla.

□

Teorema 4.5 *Suponha que $\Sigma = C$. Então a aplicação $\phi : (0, \pi) \times (0, 2\pi) \times [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}^3$ dada por*

$$\phi(q) = \phi(\omega, \theta, r) = (r \sin \omega \cos \theta, r \sin \omega \sin \theta, r \cos \omega)$$

induz um campo de vetores não suaves $\tilde{X}$ satisfazendo que todas descontinuidades $q \in \tilde{\Sigma}$ com $\phi(q) \neq 0$ é regular. Além disso, a variedade de descontinuidade em $(0, \pi) \times (0, 2\pi) \times \{0\}$ é homeomorfa a dois círculos que não se intersectam.

Demonstração. Considere a aplicação $\phi : (0, \pi) \times (0, 2\pi) \times [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}^3$ dada por

$$\phi(q) = \phi(\omega, \theta, r) = (r \sin \omega \cos \theta, r \sin \omega \sin \theta, r \cos \omega).$$

De maneira análoga, a demonstração do Teorema 4.4, obtemos que as trajetórias do campo de vetor induzido por ϕ $\bar{X} = (\bar{X}_+, \bar{X}_-)$ são dadas por (4-12). Como podemos assumir que $X(p) = (X_+(p), X_-(p)) = 0$ para todo $p \in \Sigma$ o sistema (4-12) em $S^2 \times [0, +\infty)$ torna-se

$$\tilde{X}_+ = \begin{cases} \omega' = \hat{f}_1 [\sin \omega \cos \omega \cos \theta] + \hat{g}_1 [\sin \omega \cos \omega \sin \theta] + \hat{h}_1 [-\sin \omega], \\ \theta' = \hat{f}_1 [-\sin \theta] + \hat{g}_1 [\cos \theta], \\ r' = \hat{f}_1 [\sin^2 \omega \cos \theta] + \hat{g}_1 [r \sin^2 \omega \sin \theta] + \hat{h}_1 [r \cos \omega], \end{cases} \quad (4-15)$$

$$\tilde{X}_- = \begin{cases} \omega' = \hat{f}_2 [\sin \omega \cos \omega \cos \theta] + \hat{g}_2 [\sin \omega \cos \omega \sin \theta] + \hat{h}_1 [-\sin \omega], \\ \theta' = \hat{f}_2 [-\sin \theta] + \hat{g}_2 [\cos \theta], \\ r' = \hat{f}_2 [\sin^2 \omega \cos \theta] + \hat{g}_2 [r \sin^2 \omega \sin \theta] + \hat{h}_2 [r \cos \omega], \end{cases}$$

onde, $\hat{f}_1 = \lim_{(r,\omega) \rightarrow (0,0)} \frac{f_1}{r \sin \omega}$, $\hat{f}_2 = \lim_{(r,\omega) \rightarrow (0,0)} \frac{f_2}{r \sin \omega}$, $\hat{g}_1 = \lim_{(r,\omega) \rightarrow (0,0)} \frac{g_1}{r \sin \omega}$, $\hat{g}_2 = \lim_{(r,\omega) \rightarrow (0,0)} \frac{g_2}{r \sin \omega}$, $\hat{h}_1 = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{h_1}{r}$ e $\hat{h}_2 = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{h_2}{r}$.

Por hipótese, temos que $\Sigma = \mathcal{C}$, ou seja, $H : U \in \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, com U aberto e $H(x, y, z) = z^2 - x^2 - y^2$. Note que $\nabla H = (-2x, -2y, 2z)$ e $\nabla H = 0$ se, e somente se, $x = y = z = 0$, daí $H(0, 0, 0) = 0$, implicando que 0 não é regular.

Tomando $F = H \circ \phi$ temos

$$F(\omega, \theta, r) = r^2 \cos 2\omega.$$

Segue que:

1. se $r > 0$ e $\phi(q) \in (\Sigma \setminus (0, 0, 0))$ então existe uma vizinhança $\mathcal{U}_q \subset S^2 \times (0, \infty)$ tal que $\tilde{X}|_{\mathcal{U}_q}$ tem descontinuidades regulares.
2. se $r = 0$ temos que analisar o campo dessingularizado (4-15), do qual obtemos dois círculos $w = \frac{\pi}{4}$ e $w = \frac{3\pi}{4}$, que são descontinuidades regulares de $\tilde{X}$, pois se considerarmos, de (4-15), temos

$$\tilde{X}_+ = \begin{cases} \omega' = P_1(\omega, \theta) \\ \theta' = Q_1(\omega, \theta) \end{cases} \quad \tilde{X}_- = \begin{cases} \omega' = P_2(\omega, \theta) \\ \theta' = Q_2(\omega, \theta). \end{cases} \quad (4-16)$$

Agora consideremos $\tilde{X}^0 = (\tilde{X}_+^0, \tilde{X}_-^0)$ o campo de vetores em $S^2 \times \{0\}$ induzido por ϕ com descontinuidades ocorrendo nos círculos $w = \frac{\pi}{4}$ e $w = \frac{3\pi}{4}$. Denotemos

$$\Sigma_0^+ = \left\{ (\omega, \theta); 0 < \omega < \frac{\pi}{4} \text{ ou } \frac{3\pi}{4} < \omega < \pi \right\}$$

e

$$\Sigma_0^- = \left\{ (\omega, \theta); \frac{\pi}{4} < \omega < \frac{3\pi}{4} \right\}.$$

A φ -regularização de $\tilde{X}^0 = (\tilde{X}_+^0, \tilde{X}_-^0)$ é a família a 1-parâmetro X_ε^0 dada por

$$X_\varepsilon^0 = \left(\frac{1}{2} + \frac{\varphi\left(\frac{\omega - \frac{\pi}{4}}{\varepsilon}\right)}{2} \right) X_+^0 + \left(\frac{1}{2} - \frac{\varphi\left(\frac{\omega - \frac{\pi}{4}}{\varepsilon}\right)}{2} \right) X_-^0, \quad (4-17)$$

onde φ é uma função de transição e $\varepsilon > 0$. As trajetórias do campo regularizado X_ε^0 são soluções de

$$\begin{cases} \dot{\omega} = \frac{P_1 + P_2}{2} + \varphi\left(\frac{\omega - \frac{\pi}{4}}{\varepsilon}\right) \frac{P_1 - P_2}{2}, \\ \dot{\theta} = \frac{Q_1 + Q_2}{2} + \varphi\left(\frac{\omega - \frac{\pi}{4}}{\varepsilon}\right) \frac{Q_1 - Q_2}{2}. \end{cases}$$

Agora consideremos o “blow-up” polar com coordenadas dado por $\omega - \frac{\pi}{4} = \rho \cos \sigma$ e $\varepsilon = \rho \sin \sigma$, onde $\rho > 0$ e $\sigma \in [0, \pi]$. Usando estas coordenadas o valor do parâmetro $\varepsilon = 0$ é representado por $\rho = 0$ e o induz o sistema diferencial dado por

$$\begin{cases} \dot{\theta} = \beta(\theta, \sigma, \rho) = \frac{Q_1 + Q_2}{2} + \varphi(\cotg \sigma) \frac{Q_1 - Q_2}{2}, \\ \rho \dot{\sigma} = \gamma(\theta, \sigma, \rho) = -\sin \sigma \frac{P_1 + P_2}{2} + \varphi(\cotg \sigma) \frac{P_1 - P_2}{2}. \end{cases} \quad (4-18)$$

Temos que a região de deslize, pelo Teorema 4.1, é homeomorfa a variedade lenta

$$\frac{P_1 + P_2}{2} + \varphi(\cotg \sigma) \frac{P_1 - P_2}{2} = 0$$

e o campo de vetores deslizante é topologicamente equivalente ao fluxo lento

$$\begin{aligned} \dot{\theta} = \beta(\theta, \sigma, \rho) &= \frac{Q_1 + Q_2}{2} + \varphi(\cotg \sigma) \frac{Q_1 - Q_2}{2}, \\ 0 = \gamma(\theta, \sigma, \rho) &= -\sin \sigma \frac{P_1 + P_2}{2} + \varphi(\cotg \sigma) \frac{P_1 - P_2}{2}. \end{aligned}$$

Portanto, vemos que $\tilde{X}$ é regular.

□

Para provar o próximo teorema, assumiremos que $f_i(0, y, z) = g_i(0, y, z)$, para $i = 1, 2$.

Se $p \in \Sigma$ com $x^2 + y^2 \neq 0$, então existe uma vizinhança aberta $\mathcal{U}_p \subset \mathbb{R}^3$ tal que $X|_{\mathcal{U}_p}$ tem descontinuidades regulares.

Se $p \in \Sigma$ com $x^2 + y^2 \neq 0$ e $z < 0$, então estendemos X suavemente assumindo que $X(p) = X^+(p)$.

Teorema 4.6 *Suponha que $\Sigma = \mathcal{W}$. A aplicação $\phi : \mathbb{R} \setminus 0 \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ dada por*

$$\phi(u, v, w) = (u, uv, w)$$

induz um campo de vetores não suaves $\tilde{X}$ satisfazendo que toda descontinuidade $q \in \tilde{\Sigma}$, com $u \neq 0$, é regular. Além disso, se $q \in \tilde{\Sigma}$ é uma descontinuidade com $u^2 + w^2 = 0$, então q é uma descontinuidade dupla.

Demonstração. Consideremos a aplicação $\phi : \mathbb{R} \setminus \{0\} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ dada por $\phi(u, v, w) = (u, uv, w)$. Então o campo de vetores $\tilde{X}$ determinado por $\bar{X}_+$ e $\bar{X}_-$ em $\phi^{-1}(\Sigma_+)$ e em $\phi^{-1}(\Sigma_-)$, respectivamente, e induzido por ϕ satisfaz o seguinte.

- (i) O conjunto de descontinuidade é $\Sigma = \{(u, v, w); u = 0 \text{ ou } w = v^2\}$.
- (ii) Se $q \in \Sigma$ com $u \neq 0$, então q é regular.
- (iii) Se $q \in \Sigma$ com $u = 0$ e $w = v^2$, então q é uma singularidade dupla. De fato, pois as superfícies $u = 0$ e $w = v^2$ tem seus espaços tangentes transversais. Dessa forma, estamos nas hipóteses do Teorema 4.3 e daí segue o resultado.

□

A seguir apresentaremos na Tabela 4.1 o número de “blow-ups” necessários para transformar uma singularidade cada, das subvariedades estudadas acima em uma singularidade de codimensão 0.

Tabela 4.1: Número de blow-up

	# Blow-ups
$\Omega(\mathcal{U}, \mathcal{F})$	0
$\Omega(\mathcal{U}, \mathcal{D})$	1
$\Omega(\mathcal{U}, \mathcal{C})$	1
$\Omega(\mathcal{U}, \mathcal{T})$	2
$\Omega(\mathcal{U}, \mathcal{W})$	2

onde $\mathcal{U} \in \mathbb{R}^3$ é um conjunto aberto.

Aplicações

Neste capítulo, assumiremos que as trajetórias do campo de vetores suaves X_+ são transversais à Σ e que, X_- tem uma sela hiperbólica, um foco hiperbólico, um ponto de dobra ou um ponto de cúspide em Σ .

5.1 Teoria Geométrica de Perturbação Singular em Campos de Vetores Suaves por Partes de Codimensão Zero

A dinâmica de um campo de vetores suaves por partes X em uma vizinhança de um ponto $p \in \Sigma$ pode ser analisada por meio do método de regularização. Nosso objetivo nessa seção é aplicar a teoria geométrica de perturbação singular.

Primeiramente analisaremos os pontos regulares para entender a dinâmica de um campo de vetores suaves por partes.

Discutiremos algumas formas normais (presente em [19]) representando as singularidades de codimensão 0. Teremos que $X_N = (X_+, X_-) \in (\Omega_d)^*$ e assim as equações de (3-13) tornam-se

$$\begin{aligned} r\dot{\theta} &= -\sin\theta[(f_1 - f_2)/2 + \varphi(\cotg\theta)(f_1 - f_2)/2], \\ \dot{y} &= g. \end{aligned} \tag{5-1}$$

5.1.1 Caso Regular-Regular do Tipo Costura

Assumimos que $p = (0, 0) \in \Sigma^c$, $X_+(x, y) = (1, 1)$ e $X_-(x, y) = (2, 1)$. O problema de perturbação singular no blow-up local, (5-1), é

$$\begin{aligned} r\dot{\theta} &= -\operatorname{sen} \theta \left(\frac{3}{2} - \frac{\varphi(\cotg \theta)}{2} \right), \\ \dot{y} &= 1. \end{aligned}$$

A função composta $\varphi(\cotg \theta)$ é uma função decrescente com $\lim_{\theta \rightarrow 0^+} \varphi(\theta) = 1$ e $\lim_{\theta \rightarrow \pi^-} \varphi(\theta) = -1$. Assim a função $-\operatorname{sen} \theta \left(\frac{3}{2} - \frac{\varphi(\cotg \theta)}{2} \right) < 0$ para algum $0 < \theta < \pi$. O fluxo rápido, no blow-up local, é invariante em cada seção $y = \text{constante}$. O retrato de fase da dinâmica rápida e lenta do problema singular, para $\varepsilon = 0$, e o retrato de fase do campo de vetores regularizado, para $\varepsilon > 0$ pequeno, são ilustrados na Figura 5.1.

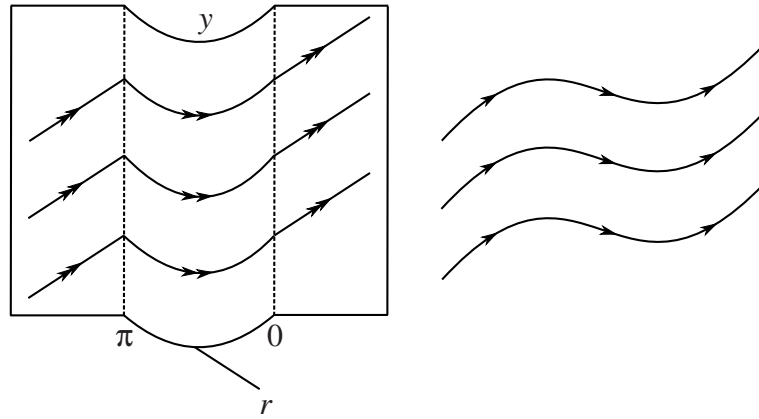


Figura 5.1: Dinâmica rápida e lenta do problema de perturbação singular correspondendo ao caso de costura e seu regularizado.

5.1.2 Caso Regular-Regular do Tipo Escape

Assumimos que $p = (0, 0) \in \Sigma^e$, $X_+(x, y) = (1, 1)$ e $X_-(x, y) = (-1, 1)$. O problema de perturbação singular no blow-up local, (5-1), é

$$\begin{aligned} r\dot{\theta} &= -\operatorname{sen} \theta \varphi(\cotg \theta), \\ \dot{y} &= 1. \end{aligned}$$

A variedade lenta é $\mathcal{S} = \{(\theta, y) \in (\theta, \pi) \times \mathbb{R}; -\operatorname{sen} \theta \varphi(\cotg \theta) = 0\} = \{(\theta, y) \in (\theta, \pi) \times \mathbb{R}; \theta = \theta_0, \varphi(\cotg \theta_0) = 0\}$ e o campo reduzido segue no sentido positivo do eixo, pois $\dot{y} > 0$. Sem perda de generalidade, suponhamos $\theta_0 = \pi/2$. Para o fluxo rápido, que é dado

por

$$\begin{aligned}\theta' &= -\operatorname{sen} \theta \varphi(\cotg \theta), \\ y' &= r,\end{aligned}$$

observamos que todo ponto na variedade lenta é um ponto singular repulsor, pois o autovalor angular é

$$\left. \frac{d(-\operatorname{sen} \theta \varphi(\cotg \theta))}{d\theta} \right|_{\theta=\frac{\pi}{2}} = \left(-\cos \theta \varphi(\cotg \theta) + \frac{\varphi'(\cotg \theta)}{\operatorname{sen} \theta} \right) \Big|_{\theta=\frac{\pi}{2}} = \varphi'(0) > 0,$$

pois φ é uma função de transição. O retrato de fase das dinâmicas rápida e lenta, para $\varepsilon = 0$, e o retrato de fase para o campo de vetores regularizado, para $\varepsilon > 0$ pequeno, são ilustrados na Figura 5.2.

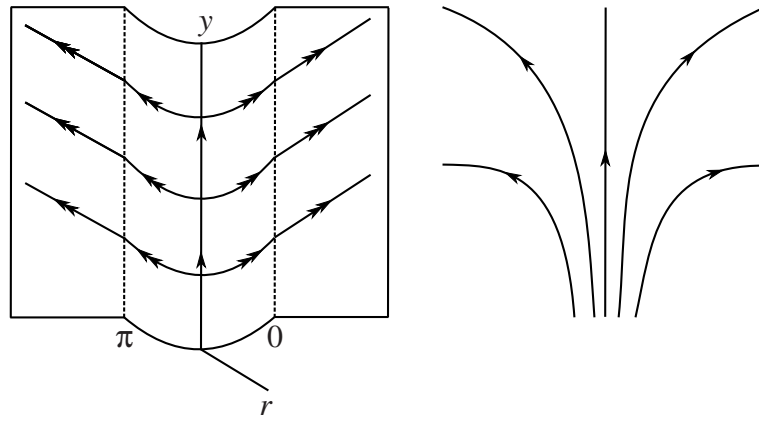


Figura 5.2: Dinâmica rápida e lenta do problema de perturbação singular correspondendo ao caso de escape e seu regularizado.

5.1.3 Caso Regular-Regular do Tipo Deslize

Assuma que $p = (0, 0) \in \Sigma^s$, $X_+(x, y) = (-1, -1)$ e $X_-(x, y) = (1, -1)$. O estudo deste caso é análogo ao caso escape, assim, o retrato de fase das dinâmicas rápida e lenta, para $\varepsilon = 0$, e o retrato de fase do campo de vetores regularizado, para $\varepsilon > 0$ pequeno, são ilustrados na Figura 5.3.

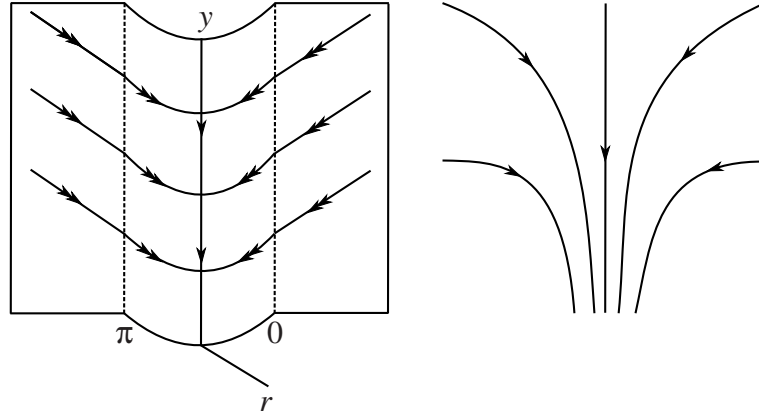


Figura 5.3: Dinâmica rápida e lenta do problema de perturbação singular correspondendo ao caso de deslize e seu regularizado.

5.1.4 Caso Regular-Regular do Tipo Sela

Assuma que $p = (0, 0) \in \mathbb{R}$, $X_+(x, y) = (x + 1, -y)$ e $X_-(x, y) = (x - 1, -y)$. O problema de perturbação singular no “blow-up” local (5-1) é

$$\begin{aligned} r\dot{\theta} &= -r \sin \theta \cos \theta - \sin \theta \varphi(\cotg \theta), \\ \dot{y} &= -y. \end{aligned}$$

A variedade lenta é $\mathcal{S} = \{(\theta, y) \in (\theta, \pi) \times \mathbb{R}; -\sin \theta \varphi(\cotg \theta) = 0\} = \{(\theta, y) \in (\theta, \pi) \times \mathbb{R}; \theta = \theta_0, \varphi(\cotg \theta_0) = 0\}$. Sem perda de generalidade, suponhamos $\theta_0 = \pi/2$, com isto, o problema reduzido é

$$\theta = \pi/2, \quad \dot{y} = -y,$$

onde vemos que o fluxo reduzido segue a direção positiva do eixo y , se $y < 0$, e a direção negativa se $y > 0$. Para o fluxo rápido, que é dado por

$$\begin{aligned} \theta' &= -r \sin \theta \cos \theta - \sin \theta \varphi(\cotg \theta), \\ y' &= -ry, \end{aligned}$$

temos que todo ponto na variedade lenta é um ponto singular repulsor, pois o autovalor angular, para $\theta = \pi/2$, é $\varphi'(0) > 0$. O retrato de fase das dinâmicas rápida e lenta, para $\varepsilon = 0$, e o retrato de fase para ao campo de vetores regularizado, para $\varepsilon > 0$, são ilustrados na Figura 5.4.

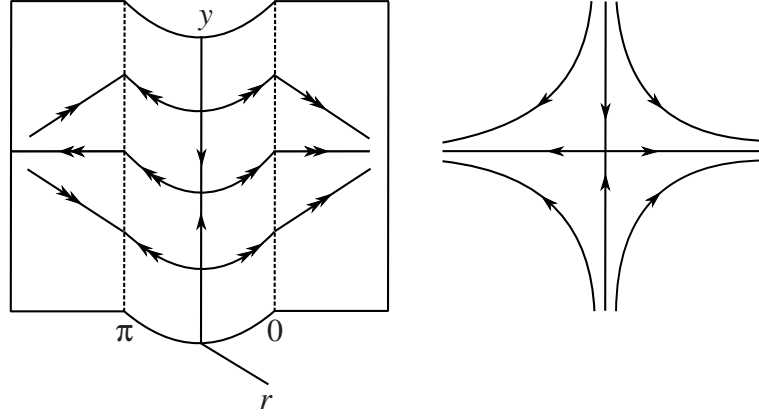


Figura 5.4: Dinâmica rápida e lenta do problema de perturbação singular correspondendo ao caso de sela, com $p \in \Sigma^e$, e seu regularizado.

5.1.5 Caso Dobra-Regular

Assuma que $p = (0,0)$, $X_+(x,y) = (y,1)$ e $X_-(x,y) = (1,1)$ o problema de perturbação singular no blow-up local (5-1) é

$$\begin{aligned} r\dot{\theta} &= -\sin\theta \left(\frac{y+1}{2} + \varphi(\cotg\theta)\frac{y-1}{2} \right), \\ \dot{y} &= 1, \end{aligned}$$

A variedade lenta é dada por

$$\begin{aligned} \mathcal{S} &= \left\{ (\theta, y) \in (\theta, \pi) \times \mathbb{R}; -\sin\theta \left(\frac{y+1}{2} + \varphi(\cotg\theta)\frac{y-1}{2} \right) = 0 \right\}, \\ &= \{ (\theta, y) \in (\theta, \pi) \times \mathbb{R}; y(\varphi(\cotg\theta) + 1) = \varphi(\cotg\theta) - 1 \}. \end{aligned}$$

Logo, $\mathcal{S}$ é gráfico da função

$$y(\theta) = \frac{\varphi(\cotg\theta) - 1}{\varphi(\cotg\theta) + 1},$$

que é decrescente, pois

$$\frac{dy}{d\theta} = -\frac{2\varphi'(\cotg\theta)}{\sin^2\theta(\varphi(\cotg\theta) + 1)^2} < 0,$$

além disso, $\lim_{\theta \rightarrow 0} y(\theta) = 0$ e $\lim_{\theta \rightarrow \pi} y(\theta) = -\infty$. O fluxo reduzido segue na direção do positiva do eixo y , pois $\dot{y} = 1$. Para o fluxo rápido, que é dado por

$$\begin{aligned} \theta' &= -\sin\theta \left(\frac{y+1}{2} + \varphi(\cotg\theta)\frac{y-1}{2} \right), \\ y' &= r, \end{aligned}$$

temos que $\theta' > 0$ para $0 < \theta < \theta(y)$ e $\theta' < 0$ para $\theta(y) < \theta < \pi$, com $\theta(y)$ dado implicitamente por $y(\varphi(\cotg \theta) + 1) - (\varphi(\cotg \theta) - 1) = 0$. Observe que o ponto $(\theta, y) = (0, 0)$ não é um ponto singular normalmente hiperbólico, pois

$$\frac{\partial}{\partial \theta} \left(-\sin \theta \left(\frac{y+1}{2} + \varphi(\cotg \theta) \frac{y-1}{2} \right) \right) \Big|_{(0,0)} = 0.$$

Então, tomemos um novo “blow-up” em $(\theta, y, r) = (0, 0, 0)$ dado por $\theta = s \cos \sigma$ e $y = \sin \sigma$, com $s \geq 0$ e $-\pi/2 \leq \sigma \leq \pi/2$. Nessas coordenadas, temos

$$\begin{cases} s' &= -\cos \sigma \sin(s \cos \sigma) G(s, \sigma), \\ \sigma' &= \frac{\sin \sigma}{s} \sin(s \cos \sigma) G(s, \sigma), \end{cases} \quad (5-2)$$

com $G(s, \sigma) = (s \sin \sigma + 1)/2 + \varphi(\cotg(s \cos \sigma))(s \sin \sigma - 1)/2$. Agora, vamos determinar o fluxo nesse novo “blow-up”. Observe que $G(0, \sigma) = 1/2 - \varphi(\cotg 0)/2 = 0$, $\varphi(\cotg 0) = 1$. Além disso,

$$\frac{\partial G}{\partial s} \Big|_{s=0} = \sin \sigma + \frac{\varphi'(\cotg 0)}{2} = \sin \sigma,$$

pois $\varphi'(\cotg 0) = 0$. Como $s > 0$, podemos dividir σ' por s e mantemos a estrutura qualitativa do problema. Assim

$$\lim_{s \rightarrow 0} \sigma' = \lim_{s \rightarrow 0} \left(\sin \sigma \frac{\sin(s \cos \sigma)}{s} \frac{G(s, \sigma)}{s} \right) = \sin^2 \sigma \cos \sigma.$$

Isso significa que a componente angular é crescente para $\sigma \in (-\pi/2, \pi/2)$ com um ponto singular em $\sigma = 0$. Note que, $-\pi/2$ e $\pi/2$ são pontos singulares do sistema (5-2). Como

$$\left(\frac{\partial \sigma'}{\partial \sigma} \right) \Big|_{\sigma=\frac{\pi}{2}} < 0 \quad \text{e} \quad \left(\frac{\partial \sigma'}{\partial \sigma} \right) \Big|_{\sigma=-\frac{\pi}{2}} > 0,$$

temos que $\pi/2$ é um ponto singular atrator e $-\pi/2$ é um ponto singular repulsor. Portanto o retrato de fase das dinâmicas rápida e lenta, para $\varepsilon = 0$, e o retrato de fase para o campo de vetores regularizado, para ε pequeno, são ilustrados na Figura 5.5.

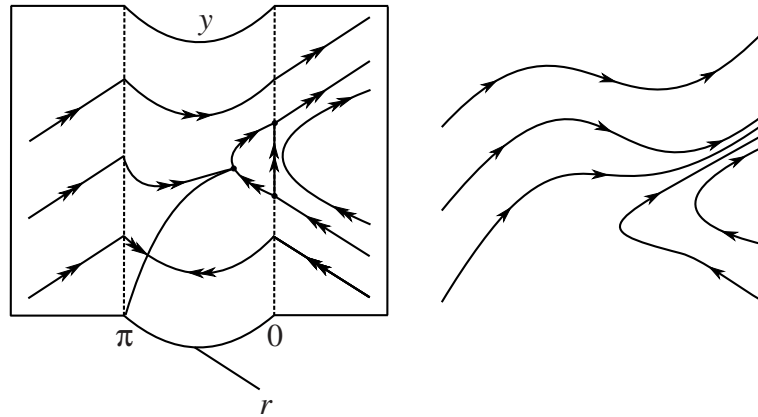


Figura 5.5: *Dinâmica rápida e lenta do problema de perturbação singular correspondendo ao caso de dobra e seu regularizado.*

5.2 Teoria Geométrica de Perturbação Singular em Campos de Vetores suaves por Partes de Codimensão Um

5.2.1 Bifurcação Sela-Regular

Considere a forma normal da sela-regular dada na Seção 2.4.2. A regularização do campo de vetores é

$$\begin{cases} \dot{x} = \frac{1-y}{2} + \varphi\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \frac{1+y}{2}, \\ \dot{y} = \frac{1-x-\lambda}{2} + \varphi\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \frac{1+x+\lambda}{2}, \end{cases}$$

onde $\varphi\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)$ é a função de transição. Fazendo o “blow-up” polar

$$x = r \cos \theta \quad \text{e} \quad \varepsilon = r \sin \theta, \quad (5-3)$$

obtemos

$$\begin{cases} r\dot{\theta} = -\sin \theta \left(\frac{1-y}{2} + \varphi(\cotg \theta) \frac{1+y}{2} \right), \\ \dot{y} = \frac{1-r \cos \theta - \lambda}{2} + \varphi(\cotg \theta) \frac{1+r \cos \theta + \lambda}{2}. \end{cases}$$

No blow-up local, a dinâmica rápida, dada por $r = 0$, é determinada pelo sistema

$$\begin{cases} \theta' = -\sin \theta \left(\frac{1-y}{2} + \varphi(\cotg \theta) \frac{1+y}{2} \right), \\ y' = 0, \end{cases}$$

e a dinâmica lenta, na variedade lenta, é determinada pelo sistema reduzido

$$\begin{cases} 0 = \frac{1-y}{2} + \varphi(\cotg \theta) \frac{1+y}{2}, \\ \dot{y} = \frac{1-\lambda}{2} + \varphi(\cotg \theta) \frac{1+\lambda}{2}. \end{cases}$$

Observe que a variedade lenta é dada pela fórmula

$$y(\theta) = \frac{1 + \varphi(\cotg \theta)}{1 - \varphi(\cotg \theta)},$$

que não depende do parâmetro λ (veja a Figura 5.6). Além disso, a variedade lenta $y(\theta)$ é tal que

$$\lim_{\theta \rightarrow \frac{\pi}{4}} y(\theta) = +\infty \quad \text{e} \quad \lim_{\theta \rightarrow \frac{3\pi}{4}} y(\theta) = 0.$$

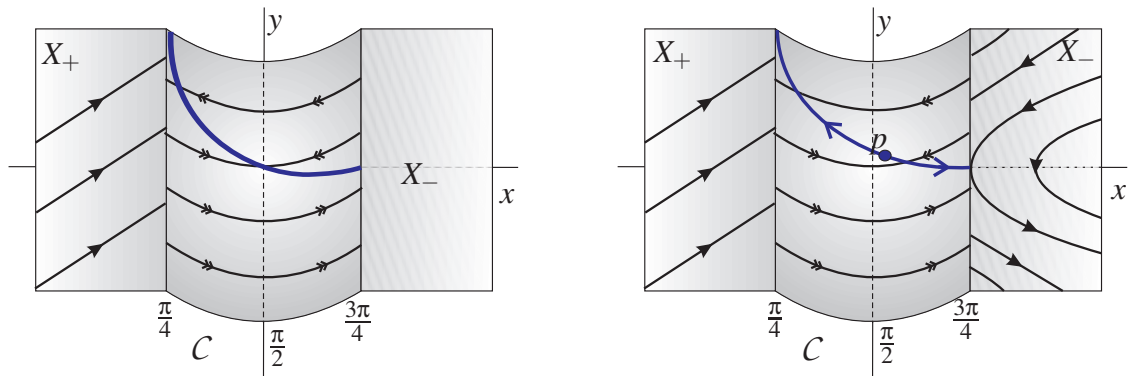


Figura 5.6: Aqui o retrato de fase mostra a variedade lenta no lado esquerdo e o caso $\lambda < 0$ no direito. Em ambos consideramos $\theta \in (\pi/4, 3\pi/4)$.

A dinâmica na variedade lenta depende de λ . De fato, se $\lambda > 0$ ou se $\lambda = 0$ então $\dot{y} \neq 0$ (veja Figura 5.7) e se $\lambda > 0$, $\dot{y}$ tem um único ponto singular repulsor p (veja Figura 5.6) dada implicitamente pela equação $\varphi(\cotg \theta) = \frac{-1 + \lambda}{1 + \lambda}$.

5.2.2 Bifurcação Foco-Regular

Considere a forma normal do foco – regular dada na Seção 2.4.2. A regularização do campo de vetores é

$$\begin{cases} \dot{x} = \frac{1 + \lambda + x + y}{2} + \varphi\left(\frac{x}{\epsilon}\right) \frac{1 - \lambda - x - y}{2}, \\ \dot{y} = \frac{1 - \lambda - x + y}{2} + \varphi\left(\frac{x}{\epsilon}\right) \frac{1 + \lambda + x - y}{2}. \end{cases}$$

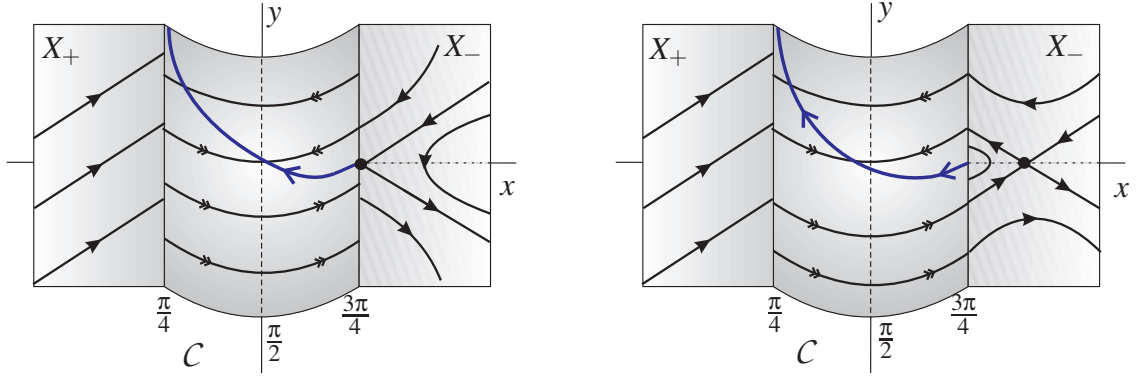


Figura 5.7: Aqui, o retrato de fase para $\lambda = 0$ no lado esquerdo e o caso $\lambda > 0$ no direito. Em ambos consideramos $\theta \in (\pi/4, 3\pi/4)$.

Similarmente ao caso anterior, considerando o “blow-up” polar dado em (5-3), obtemos

$$\begin{cases} r\dot{\theta} = \sin \theta \left(\frac{1 + \lambda + r \cos \theta + y}{2} + \varphi(\cotg \theta) \frac{1 - \lambda - r \cos \theta - y}{2} \right), \\ \dot{y} = \frac{1 - \lambda - r \cos \theta + y}{2} + \varphi(\cos \theta) \frac{1 + \lambda + r \cos \theta - y}{2}. \end{cases}$$

A dinâmica rápida, dada por $r = 0$, é determinada pelo sistema

$$\begin{cases} \theta' = \sin \theta \left(\frac{-1 - \lambda - y}{2} + \varphi(\cotg \theta) \frac{-1 + \lambda + y}{2} \right), \\ y' = 0, \end{cases}$$

e a dinâmica lenta, na variedade lenta, é determinada pelo sistema reduzido

$$\begin{cases} 0 = \frac{-1 - \lambda - y}{2} + \varphi(\cotg \theta) \frac{-1 + \lambda + y}{2}, \\ \dot{y} = \frac{1 - \lambda + y}{2} + \varphi(\cotg \theta) \frac{1 + \lambda - y}{2}. \end{cases}$$

Nesse caso, a variedade lenta (veja Figura 5.8) depende do parâmetro λ . De fato, a expressão explícita da variedade lenta é dada por

$$y(\theta) = 1 - \lambda + \frac{2}{-1 + \varphi(\cotg \theta)}.$$

A variedade lenta $y(\theta)$, dada na equação acima, satisfaz

$$\lim_{\theta \rightarrow \frac{\pi}{4}} y(\theta) = -\infty \quad \text{e} \quad \lim_{\theta \rightarrow \frac{3\pi}{4}} y(\theta) = -\lambda.$$

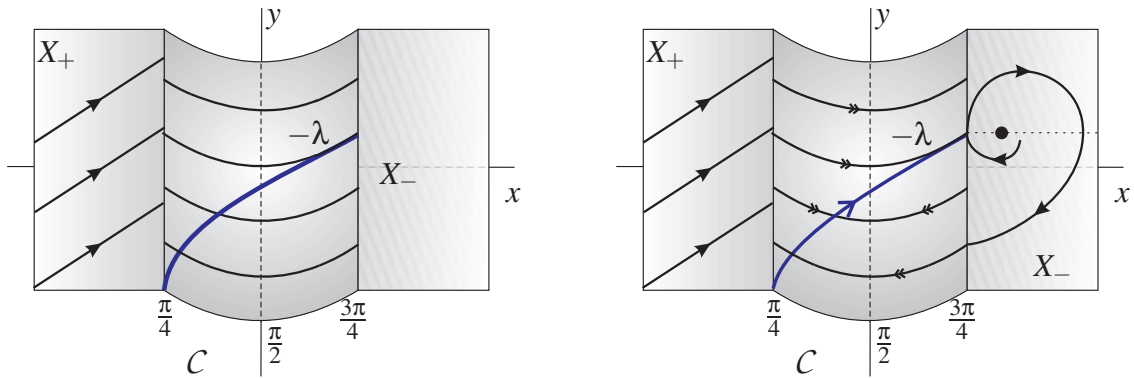


Figura 5.8: Aqui o retrato de fase está mostrando a variedade lenta no lado esquerdo e o caso $\lambda < 0$ no direito. Em ambos, consideramos $\theta \in (\pi/4, 3\pi/4)$.

Exibiremos agora a dinâmica na variedade lenta. Se $\lambda < 0$, $\dot{y} \neq 0$ (veja Figura 5.8), se $\lambda > 0$, $\dot{y}$ tem um único ponto crítico p , dado implicitamente como a solução da equação

$$\varphi(\cotg \theta) = \frac{-1 + \lambda + y}{1 + \lambda - y},$$

que é um foco atrator (veja Figura 5.9) e, se $\lambda = 0$, $\dot{y} \neq 0$.

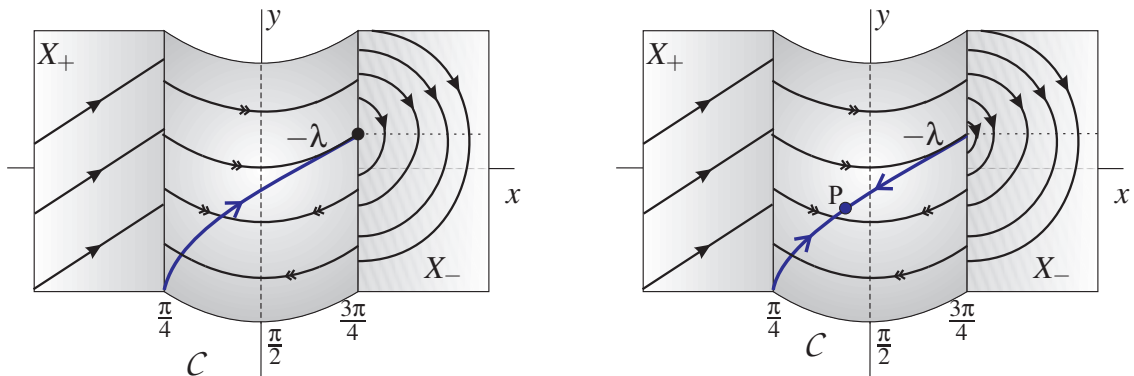


Figura 5.9: Aqui o retrato de fase para o caso $\lambda = 0$ à esquerda e o caso $\lambda > 0$ à direita. Em ambos, consideramos $\theta \in (\pi/4, 3\pi/4)$.

5.2.3 Bifurcação Cúspide-Regular

Considere a forma normal da cúspide-regular dada na seção 2.4.2. A regularização do campo de vetores torna-se

$$\begin{cases} \dot{x} = \frac{1 + \lambda - y^2}{2} + \varphi\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \frac{1 - \lambda - y^2}{2}, \\ \dot{y} = \varphi\left(\frac{x}{\varepsilon}\right). \end{cases}$$

Fazendo o “blow-up” polar, dado em 5-3, obtemos

$$\begin{cases} r\dot{\theta} = \frac{\sin \theta}{2} (\varphi(\cotg \theta)(-1 + \lambda - y^2) - 1 - \lambda + y^2), \\ \dot{y} = \varphi(\cotg \theta). \end{cases}$$

A dinâmica rápida, dada por $r = 0$, é determinada pelo sistema

$$\begin{cases} \theta' = \frac{\sin \theta}{2} (\varphi(\cotg \theta)(-1 + \lambda - y^2) - 1 - \lambda + y^2), \\ y' = 0 \end{cases}$$

e a dinâmica lenta, na variedade lenta, é determinada pelo sistema reduzido

$$\begin{cases} 0 = \varphi(\cotg \theta)(-1 + \lambda - y^2) - 1 - \lambda + y^2, \\ \dot{y} = \varphi(\cotg \theta). \end{cases}$$

Observe que a variedade lenta depende do parâmetro λ . Podemos obter a fórmula explícita. De fato, a variedade lenta é composta por dois ramos (veja figura 5.10):

$$y_{\pm}^{\lambda}(\theta) = \pm \sqrt{\frac{\lambda(1 - \varphi(\cotg \theta)) + 1 + \varphi(\cotg \theta)}{1 - \varphi(\cotg \theta)}}. \quad (5-4)$$

A variedade lenta satisfaz as propriedades:

- (i) $\lim_{\theta \rightarrow \frac{\pi}{4}} y_{\pm}^{\lambda}(\theta) = \pm \infty$;
- (ii) Se $\lambda < 0$, existe $\theta^* \in (\pi/4, 3\pi/4)$ tal que $y_{\pm}^{\lambda}(\theta^*) = 0$ e a variedade lenta não é definida para $\theta \in (\theta^*, 3\pi/4)$. Para $\theta \in (\pi/4, \theta^*)$, existe um homeomorfismo $\zeta_{\pm}$ entre cada ramo da variedade lenta e $\mathbb{R} \setminus \{0\}$. Isto é, para cada $z \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, existe $\theta(z) \in (\pi/4, \theta^*)$ tal que $y_{\pm}^{\lambda}(\theta(z)) = z$;
- (iii) Se $\lambda \geq 0$, existe um homeomorfismo $\zeta_{\pm}$ entre cada ramo da variedade lenta e $\mathbb{R} \setminus \{0\}$. Isto é, para cada $z \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ existe $\theta(z) \in (\pi/4, 3\pi/4)$ tal que $y_{\pm}^{\lambda}(\theta(z)) = z$. Além disso, $\lim_{\theta \rightarrow \frac{3\pi}{4}} y_{\pm}^{\lambda}(\theta) = \pm \sqrt{\lambda}$ e os dois ramos da variedade lenta não estão ligados quando $\lambda \neq 0$. Este fato peculiar decorre dos dois pontos de dobra de X_- .

Para provar o item (i), basta observar que $\cotg(\pi/4) = 1$. Assim segue facilmente o cálculo. Em ordem, para provar o item (ii), observe a expressão (5-4). Seja θ^* tal que $\varphi(\cotg \theta^*) = (1 + \lambda)(\lambda - 1)$. Temos que $y_{\pm}^{\lambda}(\theta^*) = 0$ e a raiz em (5-4) é negativa se $\theta \in (\theta^*, \pi)$.

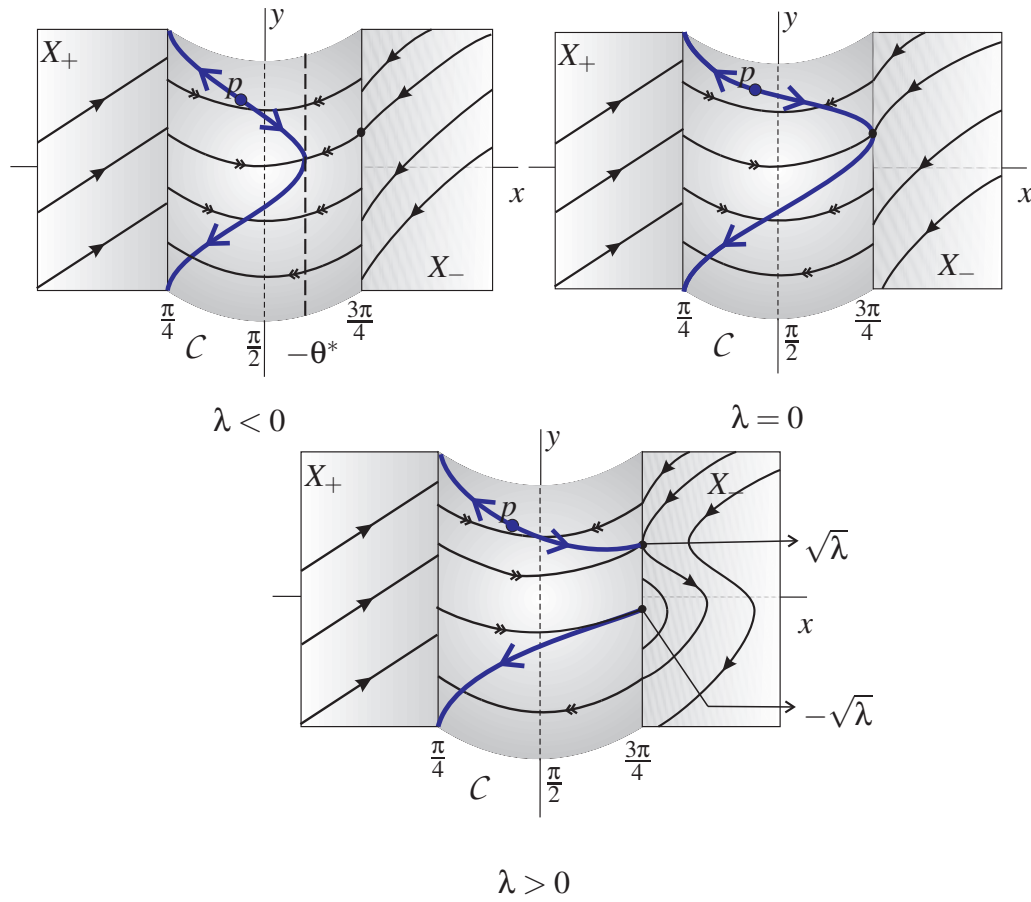


Figura 5.10: Esta figura está relacionada a seção 5.2.3. Aqui aparece o diagrama de bifurcação da cúspide-regular.

Definimos a aplicação:

$$\begin{aligned} \zeta_{\pm}: \mathbb{R} \setminus \{0\} &\rightarrow (\pi/4, \theta^*) \\ z &\mapsto \theta(z) = \cotg^{-1} \left(\varphi^{-1} \left(\frac{z^2 - \lambda - 1}{z^2 - \lambda + 1} \right) \right). \end{aligned} \quad (5-5)$$

Dado $z \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, se fizermos $\zeta(z) = \theta(z)$, em (5-5), obtemos $y_{\pm}^{\lambda}(\theta(z)) = z$. Note que $\zeta_{\pm}$ são homeomorfismos. O item (iii) é provando analogamente. A dinâmica na variedade lenta é dada por $\dot{y} = \varphi(\cotg \theta)$. Existe um único ponto crítico p dado implicitamente como solução de $\varphi(\cotg \theta_p) = 0$. Note que esse ponto crítico é um repulsor porque $\varphi(\cotg \theta) < 0$ para $\theta < \theta_p$ e $\varphi(\cotg \theta) > 0$ para $\theta > \theta_p$. Veja Figura 5.10.

5.3 Bifurcações Dobra-Dobra

Nesta seção, analisaremos a dinâmica de sistemas não-suaves em torno de um ponto q que é ponto de dobra de X_+ e X_- .

Dividimos o estudo da singularidade dobra-dobra de acordo com o sinal de

$X_+^2 \nabla f(q)$ e $X_-^2 \nabla f(q)$:

- (a) **Caso Elíptico:** $X_+^2 f(q) > 0$ e $X_-^2 f(q) < 0$. Veja Figura 5.11 (a).
- (b) **Caso Hiperbólico:** $X_+^2 f(q) < 0$ e $X_-^2 f(q) > 0$. Veja Figura 5.11 (b).
- (c.1) **Caso Elíptico-Tipo 1:** $X_+^2 f(q) > 0$ e $X_-^2 f(q) > 0$. Veja Figura 5.11 (c.1).
- (c.2) **Caso Elíptico-Tipo 2:** $X_+^2 f(q) < 0$ e $X_-^2 f(q) < 0$. Veja Figura 5.11 (c.2).

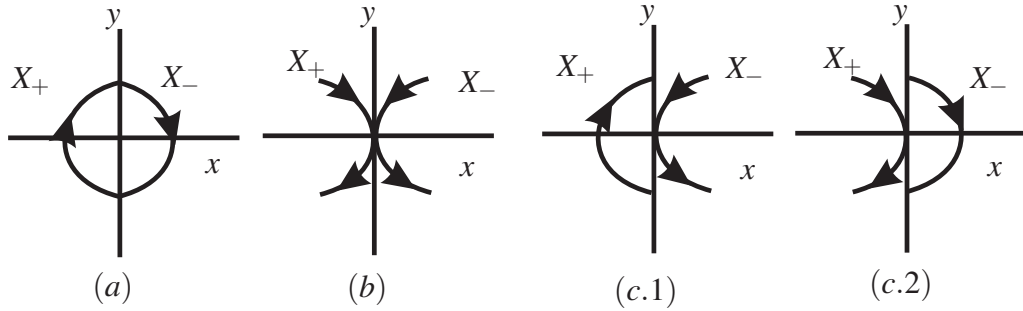


Figura 5.11: Singularidades Dobra-Dobra.

Tomando Σ como o eixo y , isto é, $F(x, y) = x$ e considerando o parâmetro $\lambda \in (-1, 1)$, as formas normais das singularidades dobra-dobra hiperbólica e parabólica são dadas na Tabela 1. A específica forma normal da singularidade dobra-dobra elíptica está dada na subseção 2.4.2. Em ambos os casos, as formas normais relatadas podem ser encontradas em [8] e [11]. Nesta seção consideramos justamente os casos acima, com a escolha particular da orientação das trajetórias de X_+ e X_- .

Hiperbólico	Parabólico Tipo 1	Parabólico Tipo 2
$X_{+\lambda}(x, y) = (y - \lambda, -1)$	$X_{+\lambda}(x, y) = (y - \lambda, 2)$	$X_{+\lambda}(x, y) = (y - \lambda, -2)$
$X_-(x, y) = (-y, -1)$	$X_-(x, y) = (-y, -1)$	$X_-(x, y) = (-y, -1)$

Tabela 1: Formas Normais Para o Caso Dobra-Dobra.

Nas próximas três Subseções estudaremos a dinâmica das singularidades dobra-dobra, hiperbólica, parabólica e elíptica.

5.3.1 Caso Dobra-Dobra Hiperbólico

Considere a forma normal da singularidade dobra-dobra hiperbólica dada na Tabela 1. O campo regularizado é dado por

$$\begin{cases} \dot{x} = -\frac{\lambda}{2} + \varphi\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \left(\frac{-\lambda + 2y}{2}\right), \\ \dot{y} = -1. \end{cases}$$

Aplicando o “blow-up” polar, obtemos

$$\begin{cases} r \dot{\theta} = \sin \theta \left(\frac{\lambda}{2} + \varphi(\cotg \theta) \frac{\lambda - 2y}{2} \right), \\ \dot{y} = -1. \end{cases}$$

A dinâmica rápida, dada por $r = 0$, é determinada pelo sistema

$$\begin{cases} \theta' = \sin \theta \left(\frac{\lambda}{2} + \varphi(\cotg \theta) \frac{\lambda - 2y}{2} \right), \\ y' = 0, \end{cases}$$

e a dinâmica, da variedade lenta, é determinada pelo sistema reduzido

$$\begin{cases} 0 = \frac{\lambda}{2} + \varphi(\cotg \theta) \frac{\lambda - 2y}{2}, \\ \dot{y} = -1. \end{cases}$$

Nesse caso, obtemos a expressão explícita para variedade lenta, que é dada por

$$y(\theta) = \frac{\lambda(1 + \varphi(\cotg \theta))}{2\varphi(\cotg \theta)}.$$

Observe que, a variedade lenta $y(\theta)$ não está definida para θ_0 tal que $\varphi(\cotg \theta_0) = 0$. Para $\lambda \neq 0$, $y(\theta)$ tem dois ramos que satisfazem:

- (i) $\lim_{\theta \rightarrow \theta_0^-} y(\theta) = -\infty$ para $\lambda < 0$ e $\lim_{\theta \rightarrow \theta_0^-} y(\theta) = +\infty$ para $\lambda > 0$;
- (ii) $\lim_{\theta \rightarrow \theta_0^+} y(\theta) = +\infty$ para $\lambda < 0$ e $\lim_{\theta \rightarrow \theta_0^+} y(\theta) = -\infty$ para $\lambda > 0$;
- (iii) Para $\lambda = 0$, a variedade lenta é dada implicitamente por $y\varphi(\cotg \theta) = 0$, isto é, $\{(\theta, y); \theta = \theta_0\} \cup \{(\theta, y); y = 0\}$.

A dinâmica da variedade lenta é dada por $\dot{y} = -1$. Portanto, não existem pontos críticos, veja Figura 5.12.

5.3.2 Caso Dobra-Dobra Parabólico do Tipo 1

Considere a forma normal da singularidade dobra-dobra parabólica-tipo 1 dada na Tabela 1. O campo de vetores regularizado é

$$\begin{cases} \dot{x} = -\frac{\lambda}{2} + \varphi\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \left(\frac{-\lambda + 2y}{2} \right), \\ \dot{y} = \frac{1}{2} + \frac{3}{2}\varphi\left(\frac{x}{\varepsilon}\right). \end{cases}$$

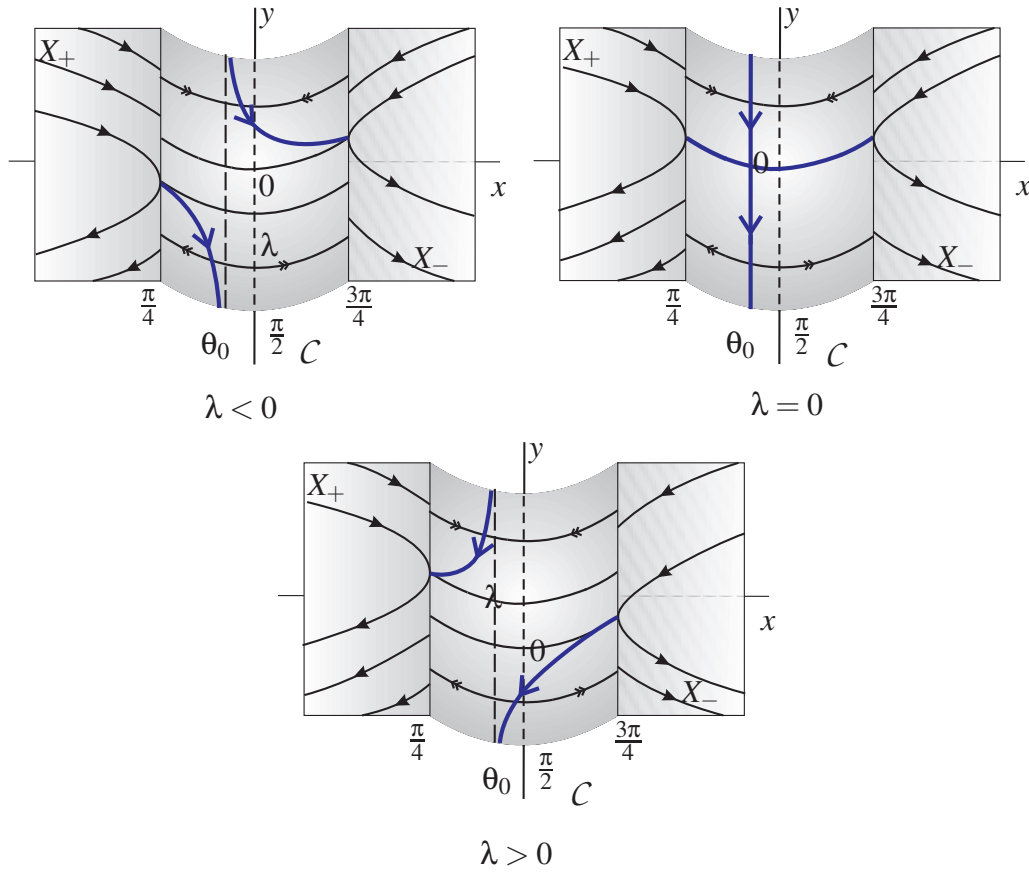


Figura 5.12: Variedade lenta dependendo do parâmetro λ .

Aplicando o “blow-up” polar obtemos

$$\begin{cases} r\dot{\theta} = \sin \theta \left(\frac{\lambda}{2} + \varphi(\cotg \theta) \left(\frac{-\lambda + 2y}{2} \right) \right), \\ \dot{y} = \frac{1}{2} + \frac{3}{2}\varphi(\cotg \theta). \end{cases}$$

A dinâmica rápida, dada por $r = 0$, é determinada pelo sistema

$$\begin{cases} \theta' = \sin \theta \left(\frac{\lambda}{2} + \varphi(\cotg \theta) \left(\frac{-\lambda + 2y}{2} \right) \right), \\ y' = 0, \end{cases}$$

e a dinâmica lenta, na variedade lenta, é determinada pelo sistema reduzido

$$\begin{cases} 0 = \lambda + \varphi(\cotg \theta)(\lambda - 2y), \\ \dot{y} = \frac{1}{2} + \frac{3}{2}\varphi(\cotg \theta). \end{cases}$$

A análise é similar ao caso hiperbólico. Nesse caso, a dinâmica da variedade lenta é dada por $\dot{y} = \frac{1}{2} + \frac{3}{2}\varphi(\cot\theta)$. Para $\lambda < 0$ (respectivamente $\lambda > 0$) a variedade lenta apresenta um ponto crítico repulsor (respectivamente atrator). Para $\lambda = 0$, a variedade lenta é composta por dois ramos, veja a Figura 5.13

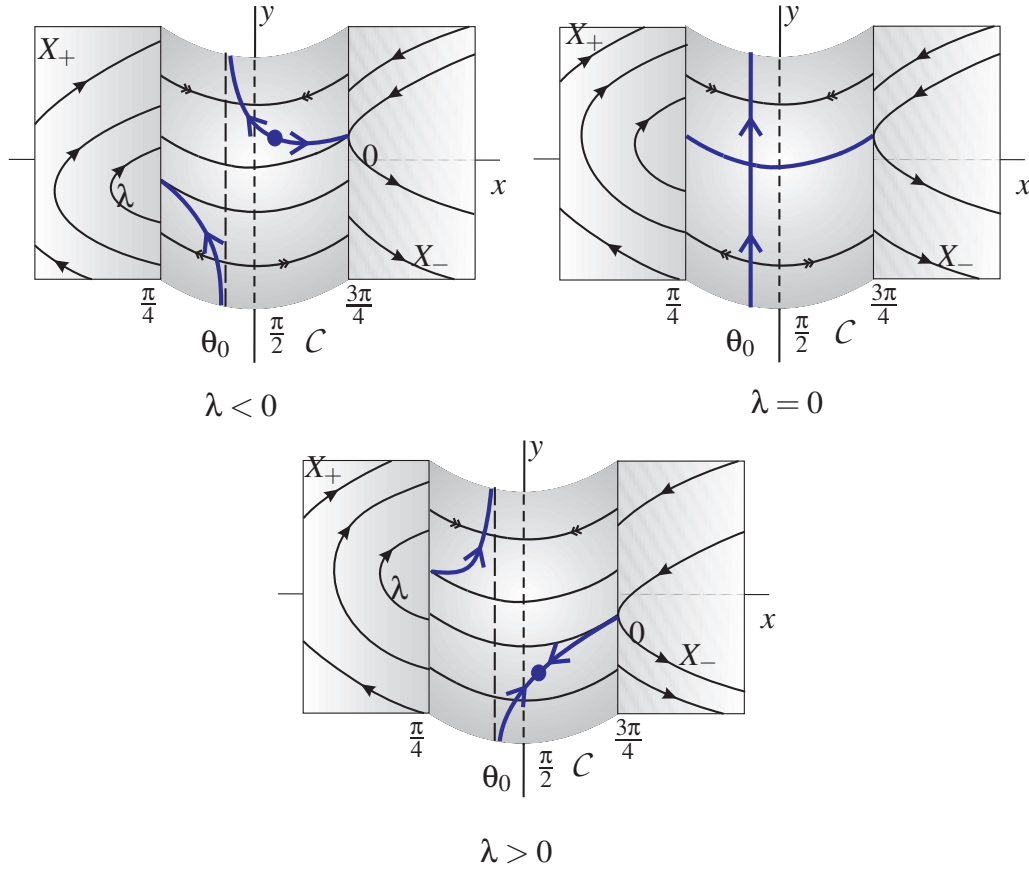


Figura 5.13: Diagrama de bifurcação das singularidades dobra-dobra parabólico-tipo 1.

5.3.3 Caso Dobra-Dobra Parabólico do Tipo 2

Para este caso, obtemos um tipo distinto de bifurcação. Considere a forma normal da singularidade dobra-dobra parabólica-tipo 2 dada na Tabela 1. O campo de vetores regularizado é

$$\begin{cases} \dot{x} = \frac{-\lambda + 2y}{2} - \frac{\lambda}{2}\varphi\left(\frac{x}{\varepsilon}\right), \\ \dot{y} = -\frac{1}{2}\left(3 + \varphi\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)\right). \end{cases}$$

Aplicando o “blow-up” polar obtemos

$$\begin{cases} r\dot{\theta} = \frac{\sin \theta}{2}(\lambda - 2y + \lambda\varphi(\cotg \theta)), \\ \dot{y} = -\frac{1}{2}(3 + \varphi(\cotg \theta)). \end{cases}$$

A dinâmica rápida, dada por $r = 0$ é determinada pelo sistema

$$\begin{cases} \theta' = \frac{\sin \theta}{2}(\lambda - 2y + \lambda\varphi(\cotg \theta)), \\ y' = 0, \end{cases}$$

e a dinâmica lenta, da variedade lenta, é determinada pelo sistema reduzido

$$\begin{cases} 0 = \sin \theta(\lambda - 2y + \lambda\varphi(\cotg \theta)), \\ \dot{y} = -\frac{1}{2}(3 + \varphi(\cotg \theta)). \end{cases}$$

Temos a expressão explícita para a variedade lenta que, nesse caso, é:

$$y(\theta) = \frac{\lambda}{2}(1 + \varphi(\cotg \theta)).$$

A análise é similar ao caso anterior e o diagrama de bifurcação é dado na Figura 5.14

5.3.4 Caso Dobra-Dobra Elíptico

Neste caso, associando ao campo de vetores não suaves, existe a aplicação de primeiro retorno $\xi_X(p)$.

Considere $X = (X_+, X_-) \in \Omega(2)$ contendo uma singularidade elíptica dobra-dobra, $f(x, y) = x$ e

$$X_+ = (y - \lambda, 1), \quad X_- = (y, -1). \quad (5-6)$$

O campo de vetores regularizado é

$$\begin{cases} \dot{x} = -\varphi\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \frac{\lambda}{2} + \frac{2y - \lambda}{2}, \\ \dot{y} = \varphi\left(\frac{x}{\varepsilon}\right). \end{cases}$$

Aplicando o “blow-up” polar obtemos

$$\begin{cases} r\dot{\theta} = \sin \theta \left(\frac{\lambda\varphi(\cotg \theta)}{2} + \left(\frac{\lambda - 2y}{2} \right) \right), \\ \dot{y} = \varphi(\cotg \theta). \end{cases}$$

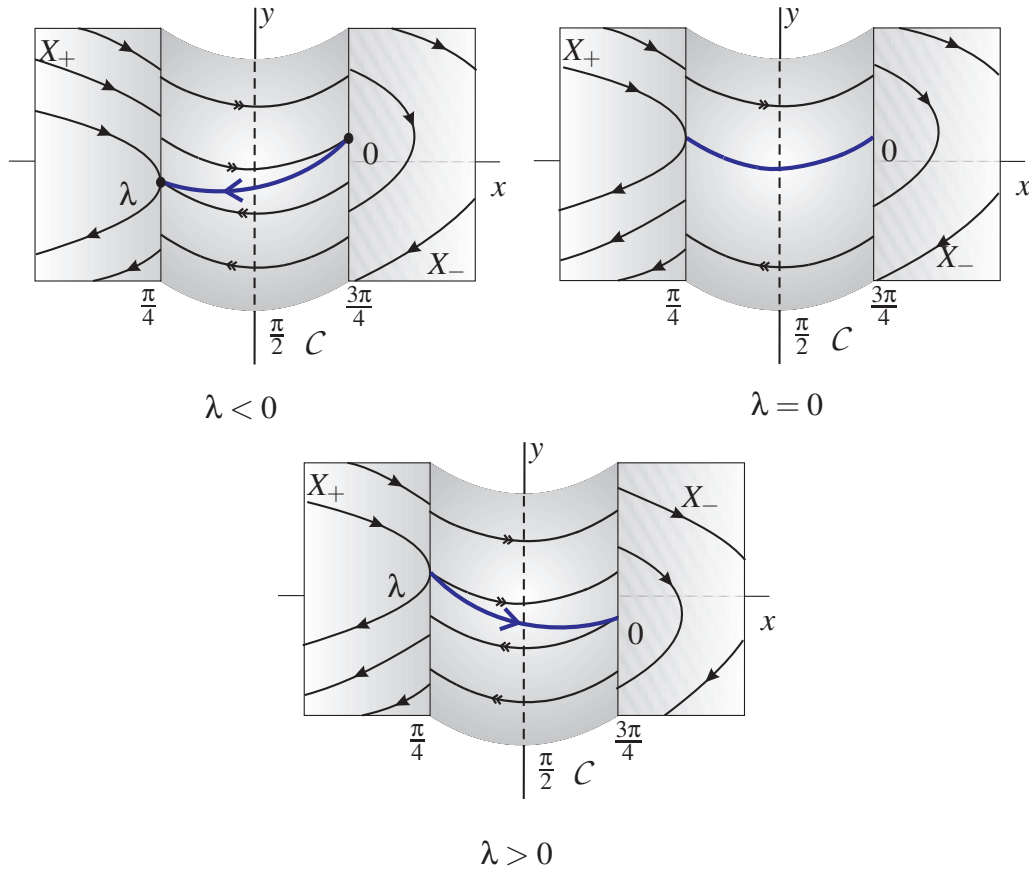


Figura 5.14: Diagrama de bifurcação das singularidades dobra-dobra parabólico-tipo 2.

A dinâmica rápida, dada por $r = 0$, é determinada pelo sistema

$$\begin{cases} \theta' = \sin \theta \left(\frac{\lambda \varphi(\cotg \theta)}{2} + \left(\frac{\lambda - 2y}{2} \right) \right), \\ y' = 0. \end{cases}$$

A dinâmica lenta, na variedade lenta, é determinada pelo sistema reduzido

$$\begin{cases} 0 = \sin \theta \left(\frac{\lambda \varphi(\cotg \theta)}{2} + \left(\frac{\lambda - 2y}{2} \right) \right), \\ \dot{y} = \varphi(\cotg \theta). \end{cases}$$

Neste caso, para $\lambda = 0$, temos que $\Sigma^e \cup \Sigma^s = \emptyset$. Temos que a variedade lenta é dada por

$$y(\theta) = \frac{\lambda(1 + \varphi(\cotg \theta))}{2},$$

existe um ponto crítico atrator se $\lambda < 0$ e um repulsor se $\lambda > 0$, como pode ser visto na Figura 5.15. Diferentemente dos casos hiperbólico e parabólico, o desdobramento (5-6), não dá um desdobramento genérico de um campo de vetores não suaves contendo uma

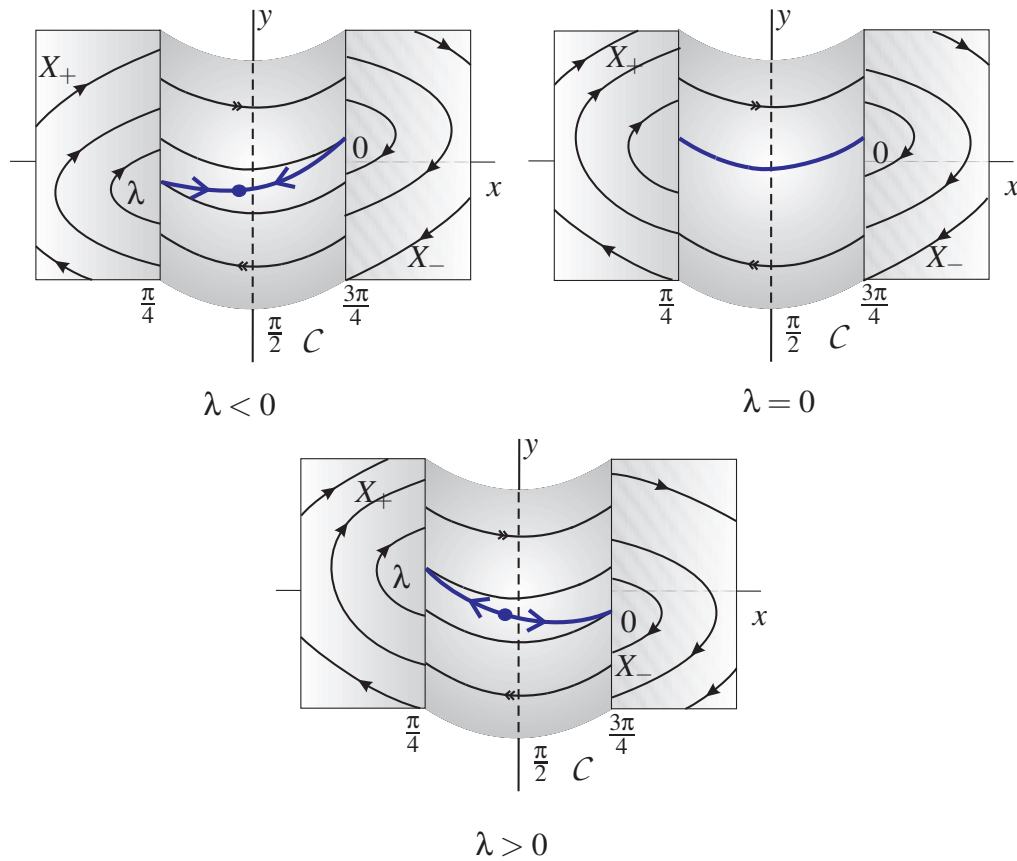


Figura 5.15: Diagrama de bifurcação das singularidades dobra-dobra parabólico-tipo 2.

singularidade elíptica dobra-dobra.

A expressão da aplicação de primeiro retorno de (5-6) é dada por

$$\gamma_X(y) = \gamma_{X_-} \circ \gamma_{X_+}(y) = y - 2\lambda, \quad (5-7)$$

onde $\gamma_{X_+}(p)$ (respectivamente $\gamma_{X_-}(p)$) é a aplicação de primeiro retorno para Σ da trajetória de X_+ (respectivamente X_-) que passa por p . Observe que podemos mudar a ordem de γ_{X_-} e γ_{X_+} e consequentemente obtemos outra expressão para γ_X . Contudo, ambas as expressões determinam o mesmo resultado se fixado o ponto inicial.

Portanto, concluímos que todo ponto em Σ são pontos fixos de γ_X . Esta configuração é claramente estruturalmente instável. Segue que, para obtermos o desdobramento, deste caso, necessitamos estudar a aplicação de primeiro retorno. Então, o desdobramento da singularidade elíptica, dobra-dobra, depende de dois parâmetros. O primeiro, λ , é responsável pelo deslocamento de uma dobra ao longo do eixo y e o outro, ϵ , pelo desdobramento de γ_X .

Logo, o fluxo de X_+ e X_- são:

$$\begin{aligned}\phi_{X_+}^t(x_0, y_0) &= (x_0 + (y_0 - \lambda)t + t^2/2, y_0 + t), \\ \phi_{X_-}^t(x_0, y_0) &= (x_0 + \int_0^t f_2^\varepsilon(s)ds, y_0 + \int_0^t g_2^\varepsilon(s)ds),\end{aligned}$$

onde

$$X_-(x(t), y(t)) = (f_2^\varepsilon(t), g_2^\varepsilon(t)). \quad (5-8)$$

Sejam $t^* \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ e $t_1 = 2(\lambda - y_0)$ tal que

$$\int_0^{t^*} f_2^\varepsilon(s)ds = 0 \quad (5-9)$$

e $\phi_{X_+}^{t_1}(0, y_0) = (0, -y_0 + 2\lambda) \in \Sigma$.

Observe que existe t^* que satisfaz a equação (5-9), porque 0 é uma dobra invisível de X_- . Suponhamos que $f_2^\varepsilon(\cdot)$ e $g_2^\varepsilon(\cdot)$ satisfazem:

- (a) f_2, g_2 são funções de classe C^r ;
- (b) $X_- \nabla f(0, 0) = f_2^\varepsilon(0) = 0$;
- (c) $X_-^2 \nabla f(0, 0) = f_2^\varepsilon(0) \frac{d}{dx} f_2^\varepsilon(0) + g_2^\varepsilon(0) \frac{d}{dy} f_2^\varepsilon(0) \neq 0$;
- (d) $\int_0^{t^*} g_2^\varepsilon(s)ds = (2 + \varepsilon)y + O(y^2)$.

As hipóteses da equação (5-9) e no item (d), acima, determinam condições suficientes para o desdobramento da aplicação de primeiro retorno γ_X . De fato, como dissemos acima, todo ponto de Σ são pontos fixos pela aplicação de primeiro retorno (5-7), pois a derivada de $\gamma_X(y)$ em (5-7) é igual a 1. Além disso, com as hipóteses dos campos de vetores suaves X_+ e X_- , exibidas em (5-6) e (5-8), respectivamente, implicam que o desdobramento de γ_x é dado por

$$\gamma_x(y) = \phi_{X_-}^{t^*} \circ \phi_{X_+}^{t_1}(0, y) = (1 + \varepsilon)y + 2\lambda + O(y^2),$$

onde a derivada é igual a $(1 + \varepsilon)$.

Portanto, o desdobramento genérico do campo de vetores suaves por partes X contendo uma singularidade elíptica, dobra-dobra, na origem é $X = (X_+, X_-)$, onde

$$X_+ = (y - \lambda, 1), \quad X_- = (f_2^\varepsilon(x, y), g_2^\varepsilon(x, y)),$$

e as funções suaves f_2^ε e g_2^ε satisfazem as condições (a), (b), (c) e (d) dadas previamente.

Conclusão

Como vimos, a partir de um problema regularizado, podemos aplicar blow-ups e obtermos um problema de perturbação singular e assim, possibilitando a utilização da teoria geométrica de perturbação singular, que possui uma gama de ferramentas para facilitar o estudo qualitativo de campos de vetores suaves por partes, como as que apresentamos no Capítulo 5. Além disso, quando a variedade de descontinuidade coincide com a região de deslize, um estudo direto do comportamento qualitativo de um campo de vetores suaves por partes é muito difícil, mas com a utilização dos teoremas apresentados no Capítulo 3, vemos que o estudo do mesmo fica mais fácil, pois como vimos, a variedade lenta e a região de deslize são homeomorfas, e assim o problema reduzido e o campo deslizante são topologicamente equivalente, onde novamente tiramos proveito da conexão entre campo de vetores suaves por partes e a teoria geométrica do problema de perturbação singular. Vimos também que, mesmo em variedades de descontinuidade onde não vale a convenção de Filippov, podemos obter uma generalização, onde a variedade de descontinuidade é imagem inversa de um ponto que não é regular e assim abrindo o leque para uma classe mais geral de problemas.

Referências Bibliográficas

- [1] ALEXANDER, J. C; SEIDMAN, T. I. **Sliding modes in intersecting switching surfaces. I. Blending.** Houston J. Math., 24(3):545–569, 1998.
- [2] BUZZI, C. A; DA SILVA, P. R; TEIXEIRA, M. A. **A singular approach to discontinuous vector fields on the plane.** J. Differential Equations, 231(2):633–655, 2006.
- [3] DE CARVALHO, T; TONON, D. J. **Generic bifurcations of planar Filippov systems via geometric singular perturbations.** Bull. Belg. Math. Soc. Simon Stevin, 18(5, [Supplement 2010 on cover]):861–881, 2011.
- [4] DE CARVALHO, T; TONON, D. J. **Normal forms for codimension one planar piecewise smooth vector fields.** Internat. J. Bifur. Chaos Appl. Sci. Engrg., 24(7):1450090, 11, 2014.
- [5] DIECI, L; LOPEZ, L. **Sliding motion on discontinuity surfaces of high codimension. A construction for selecting a Filippov vector field.** Numer. Math., 117(4):779–811, 2011.
- [6] FENICHEL, N. **Geometric singular perturbation theory for ordinary differential equations.** J. Differential Equations, 31:53–98, 1979.
- [7] FILIPPOV, A. F. **Differential equations with discontinuous righthand sides,** volume 18 de **Mathematics and its Applications (Soviet Series).** Kluwer Academic Publishers Group, Dordrecht, 1988. Translated from the Russian.
- [8] GUARDIA, M; SEARA, T. M; TEIXEIRA, M. A. **Generic bifurcations of low codimension of planar Filippov systems.** J. Differential Equations, 250(4):1967–2023, 2011.
- [9] GUTIÉRREZ, C; SOTOMAYOR, J. **Stable vector fields on manifolds with simple singularities.** Proc. London Math. Soc. (3), 45(1):97–112, 1982.
- [10] KOSLOVA, V. S. **Roughness of a discontinuous system.** Vestnik Moskovskogo Univiversiteta Seriya 1 Matematika Mekhanika, 5:16–20, 1984.

- [11] KUZNETSOV, Y. A; RINALDI, S; GRAGNANI, A. **One-parameter bifurcations in planar Filippov systems**. Internat. J. Bifur. Chaos Appl. Sci. Engrg., 13(8):2157–2188, 2003.
- [12] LARROSA, J. F. **Sistemas planares de filippov e bifurcações genéricas de baixa codimensão**. Monografia Unicamp, 2012.
- [13] LLIBRE, J; DA SILVA, P. R; TEIXEIRA, M. A. **Sliding vector fields for non-smooth dynamical systems having intersecting switching manifolds**. Nonlinearity, 28(2):493–507, 2015.
- [14] PEIXOTO, M. M. **On structural stability**. Ann. of Math. (2), 69:199–222, 1959.
- [15] PEIXOTO, M. M. **Structural stability on two-dimensional manifolds**. Topology, 1:101–120, 1962.
- [16] PEIXOTO, M. C; PEIXOTO, M. M. **Structural stability in the plane with enlarged boundary conditions**. An. Acad. Brasil. Ci., 31:135–160, 1959.
- [17] PERKO, L. **Differential equations and dynamical systems**, volume 7 de **Texts in Applied Mathematics**. Springer-Verlag, New York, third edition, 2001.
- [18] SOTOMAYOR, J; TEIXEIRA, M. A. **Vector fields near the boundary of a 3-manifold**. In: DYNAMICAL SYSTEMS, VALPARAISO 1986, volume 1331 de **Lecture Notes in Math.**, p. 169–195. Springer, Berlin, 1988.
- [19] SOTOMAYOR, J; TEIXEIRA, M. A. **Regularization of discontinuous vector fields**. In: INTERNATIONAL CONFERENCE ON DIFFERENTIAL EQUATIONS (LISBOA, 1995), p. 207–223. World Sci. Publ., River Edge, NJ, 1998.
- [20] SOTOMAYOR TELLO, J. **Structural stability in manifolds with boundary**. In: GLOBAL ANALYSIS AND ITS APPLICATIONS, VOL. III (LECTURES, INTERNAT. SEM. COURSE, INTERNAT. CENTRE THEORET. PHYS., TRIESTE, 1972), p. 167–176. Internat. Atomic Energy Agency, Vienna, 1974.
- [21] TEIXEIRA, M. A. **Codimension two singularities of sliding vector fields**. Bull. Belg. Math. Soc. Simon Stevin, 6(3):369–381, 1999.
- [22] VISHIK, S. M. **Vector fields near the boundary of a manifold**. Vestnik Moskov Univ. Ser. I Mat. Meh, 27:21–28, 1972.