



Universidade Federal de Goiás
Instituto de Física

Pós-graduação em Física

**Traço parcial em sistemas
relativísticos: uma nova visão**

Emile Raymond Ferreira Taillebois

Dissertação de Mestrado

Goiânia
8 de outubro de 2013

Universidade Federal de Goiás
Instituto de Física

Emile Raymond Ferreira Taillebois

**Traço parcial em sistemas
relativísticos: uma nova visão**

Trabalho apresentado ao Programa de Pós-graduação em Física do Instituto de Física da Universidade Federal de Goiás como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre em Física.

Orientador: *Prof. Dr. Ardiley Torres Avelar*

Goiânia
8 de outubro de 2013

Agradecimentos

Agora que mais uma etapa da minha vida acadêmica chega ao fim, venho mais uma vez agradecer a todas as pessoas que de alguma forma participaram na minha formação em física. Nada mais justo do que agradecer, em primeiro lugar, ao meu orientador, Dr. Ardiley Torres Avelar, pela sua amizade e pelo seu empenho e motivação ao longo desses últimos anos de orientação.

Agradeço também aos professores Dr. Wesley Bueno Cardoso e Dr. Norton Gomes de Almeida, com quem compartilhei muitos cafés e discussões sobre física nos últimos anos. Deixo um agradecimento especial aos professores Dr. Álvaro de Almeida Caparica e Dr. Salviano de Araújo Leão, com quem tive diversas discussões agradáveis ao longo dos anos sobre física e a vida acadêmica, e com quem desenvolvi uma amizade que foi fundamental ao longo desses últimos anos de mestrado e graduação.

Nesta lista de agradecimentos não poderiam faltar os colegas do Instituto de Física. Deixo um agradecimento especial a Lorraine Malaspina, Frederico Pfrimer, Stefano Tognini e Nicholas Zufelato, pela amizade e estímulo ao longo de todos esses anos de formação. Agradeço também à minha namorada, Vanessa, pelo apoio e compreensão ao longo desses últimos cinco anos.

Agradeço ao Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq) pelo apoio financeiro recebido ao longo deste trabalho.

Por último, mas não menos importante, agradeço aos meus pais e meu irmão pelo grande apoio ao longo de toda a minha vida.

*Douter de tout ou tout croire, ce sont deux solutions également
commodes, qui l'une et l'autre nous dispensent de réfléchir.*

—HENRI POINCARÉ (La Science et L'Hypothèse - 1902)

Resumo

Nesta dissertação, a utilização do traço parcial dos momentos na construção de matrizes densidade reduzidas de spin para partículas massivas relativísticas é analisada. No regime considerado, as partículas massivas podem ser descritas por representações unitárias do grupo de Poincaré, e os estados de base são rotulados pelas variáveis dinâmicas de momento e spin. As matrizes reduzidas obtidas por meio do traço parcial dos momentos possuem propriedades inusitadas, pois não são covariantes sob a ação de transformações de Lorentz restritas. Essa característica traz consequências importantes para o estudo da teoria da informação quântica em sistemas relativísticos. No entanto, argumentos recentes têm sido apresentados contra o uso dessas matrizes nos processos de transmissão de informação envolvendo os graus de spin de partículas massivas. Essas críticas são discutidas neste trabalho e uma conexão com a estrutura do espaço de estados associado à representação unitária em questão é estabelecida por meio de um estudo detalhado do método das representações induzidas aplicado ao grupo de Poincaré. Isso permite reescrever as críticas presentes na literatura sem a necessidade de se introduzir um modelo específico de interação associado à medida do spin das partículas. Além disso, a análise realizada nesta dissertação permite estabelecer um novo método para a construção de matrizes densidade reduzidas efetivas de spin. A proposta apresentada permite recuperar os resultados presentes na literatura e, ao mesmo tempo, incorporar as críticas de maneira consistente. No entanto, para isso é necessário abandonar o traço parcial usual dos graus de liberdade de momento e a interpretação dada na literatura para as matrizes densidade reduzidas de spin. Os exemplos apresentados nas argumentações contra as matrizes densidade reduzidas de spin usuais são estudados utilizando o método proposto neste trabalho.

Palavras-chave: Teoria da informação quântica relativística, Representações unitárias irredutíveis do grupo de Poincaré, Matrizes densidade reduzidas de spin

Abstract

In this dissertation, the use of the partial trace of momentum degrees of freedom in the construction of spin reduced density matrices for relativistic massive systems is analyzed. In the regime considered here, massive particles can be described by irreducible unitary representations of the Poincaré group, and the base states are labeled by the dynamical variables of momentum and spin. The reduced density matrices obtained by the partial trace of momenta have unusual properties, since they are not covariant under the action of restricted Lorentz transformations. That behavior produces some important consequences in the study of quantum information in relativistic systems. However, recent arguments have been presented against the use of those matrices in the description of processes involving the transfer of information stored in spin degrees of freedom of relativistic massive particles. Those criticisms are discussed in this dissertation and a connection with the structure of the space of states associated with a given unitary representation is established through a detailed study of the induced representation method applied to the Poincaré group. This allows rewriting the criticisms in literature without the need of a specific model of interaction for the spin measurement. Besides that, the analysis performed here allows to establish a new method to construct effective spin reduced density matrices. The presented approach allows recovering the results in the literature and, at the same time, to incorporate the criticisms in a consistent way. However, it is necessary to abandon the usual partial trace of the momentum degrees of freedom and the interpretation in the literature for the spin reduced density matrices. The examples presented in the arguments against the usual spin reduced density matrices are studied using the approach proposed in this dissertation.

Keywords: Relativistic quantum information theory, irreducible unitary representations of the Poincaré group, Spin reduced density matrices

Sumário

1	Introdução	1
2	Introdução à Teoria de Grupos e Representações	5
2.1	Grupos	5
2.2	Homomorfismos e Representações	6
2.3	Grupos Contínuos	7
2.4	Constantes de Estrutura de um Grupo de Lie	9
2.5	Produto Direto e Semi-Direto	11
3	Teoria da Relatividade Especial	13
3.1	O Espaço-Tempo Plano e a Relatividade Especial	14
3.2	Grupo de Poincaré	21
3.2.1	O Grupo de Lorentz	22
3.3	Propriedades do Grupo de Poincaré	25
3.4	Conexidade e Recobrimento Universal de \mathcal{P}_+^\uparrow	27
4	A Simetria Relativística em Mecânica Quântica	31
4.1	Representações Irredutíveis de $\tilde{\mathcal{P}}_+^\uparrow$	34
4.2	Partículas Massivas	44
4.2.1	Base de Helicidade	46
4.2.2	Base de Spin	47
4.3	Partículas Sem Massa	50
5	Teoria da Informação Quântica Relativística	55
5.1	Medida Stern-Gerlach de Partículas Relativísticas	62
5.2	MDRs Efetivas como Solução para as Críticas ao Modelo Usual de MDRs de Spin	67
6	Conclusões	79

Lista de Figuras

3.1	Corte transversal da esfera de parâmetros para $SO(3)$.	28
3.2	Corte transversal da esfera de parâmetros para $SU(2)$.	30
5.1	Entropia de von Neumann em função da velocidade de Bob para diferentes velocidades da partícula.	58
5.2	Probabilidade de erro em função da velocidade de Bob para diferentes valores de velocidade da partícula.	59
5.3	Valor esperado da medida de spin efetuada pelo equipamento SG em função do módulo da velocidade da partícula para diferentes valores de θ .	64
5.4	Violação da desigualdade CHSH em função das coordenadas polares do momento da partícula de Bob para $v_b = 0.99$.	66
5.5	Esquema do espaço de Hilbert associado a uma dada RUI do grupo de Poincaré	69
5.6	Esquema do mapa f^C para a construção de MDRs efetivas associadas a um dado conjunto complementar $\{C(p, k)\}$.	70

Introdução

Apesar de ter revolucionado a física do século XX, a teoria quântica também desencadeou, devido a questões relacionadas a sua interpretação, um dos maiores debates científicos e epistemológicos desse século. Esse debate atingiu seu ápice em 1935 com o artigo seminal de Einstein, Podolsky e Rosen [1] sobre o que ficou conhecido como paradoxo EPR. Esse paradoxo está intimamente conectado com o comportamento quântico das correlações, o que ficou evidenciado a partir da década de 60 graças a trabalhos como o de J. S. Bell [2] e Clauser *et al.* [3] que mostraram que as correlações quânticas poderiam ser mais fortes do que as correlações clássicas, permitindo deslocar o debate para o plano da verificação experimental.

A busca por um maior entendimento acerca das correlações quânticas deu origem a diversos conceitos tais como o emaranhamento, a contextualidade, a decoerência e a discórdia, além de ter desencadeado o que pode ser considerado a segunda revolução quântica, caracterizada pelo desejo de se organizar e controlar os sistemas com intuito de aproveitar as propriedades não clássicas das correlações no desenvolvimento de novas tecnologias, como por exemplo a computação e a comunicação quântica [4]. Essa segunda revolução foi acompanhada pelo desenvolvimento de uma importante teoria, a teoria da informação quântica (TIQ), que mapeou a mecânica quântica (MQ) nos processos de armazenamento e transmissão de informação, descrevendo de maneira operacional diversos conceitos e fenômenos, como por exemplo o teletransporte quântico [5], a destilação de emaranhamento [6] e a codificação superdensa [7].

Apesar da teoria da relatividade também tratar de fenômenos que envolvem a transferência de informação, as consequências da mesma para a TIQ não foram consideradas de imediato. Contudo esse cenário sofreu uma mudança importante graças aos artigos seminais de Czachor [8] e Peres *et al.* [9] que apontaram as primeiras consequências relevantes associadas à introdução da simetria relativística na TIQ. Esses trabalhos deram origem a uma nova área de pesquisa, conhecida como teoria da informação quântica relativística (TIQR), que tem tido um grande avanço nos últimos anos e que promete ter grande importância no desenvolvimento de novas tecnologias quânticas em escala global [10], assim como no entendimento dos fundamentos da região de fronteira entre MQ e relatividade [11].

Na última década, diversos trabalhos analisaram diferentes cenários em que a introdução dos efeitos relativísticos na TIQ é necessária. Entre eles encontram-se estudos em que sistemas quânticos são analisados por diferentes observadores inerciais [12–38] e não

inerciais [39–46], assim como propostas envolvendo a TIQ em espaços curvos [47–50]. Neste trabalho será discutido o caso em que diferentes observadores inerciais, definidos no contexto da relatividade especial, analisam as propriedades quânticas de partículas massivas relativísticas. No regime estudado, a natureza e o número de partículas dos sistemas não mudam durante os processos. Dessa forma, uma descrição das partículas em termos das representações unitárias irredutíveis (RUIs) do grupo de Poincaré [51–55] é possível, os estados quânticos sendo descritos pelas variáveis dinâmicas de momento e spin.

Em [9], Peres *et al.* introduziram o conceito de matriz densidade reduzida (MDR) de spin para partículas massivas relativísticas. Tais matrizes são obtidas por meio do traço parcial dos momentos e são interpretadas como estando associadas à estatística de medidas de spin realizadas por aparatos ideais que não sofrem influência dos graus de liberdade de momento [9, 11]. No entanto, da teoria de RUIs do grupo de Poincaré obtém-se que, quando realizada uma mudança de referencial inercial, a transformação dos graus de spin de um estado depende explicitamente dos graus de liberdade de momento. Isso implica que as MDRs de spin não são covariantes, ou seja, as MDRs de um mesmo sistema obtidas por diferentes observadores inerciais não podem ser conectadas por uma transformação bem definida dependente apenas da transformação de Lorentz Λ que conecta os observadores. Essa não covariância das MDRs de spin está associada a diversos fenômenos interessantes em TIQR e, nos últimos anos, serviu de base para vários trabalhos na área, as suas consequências para diversas propriedades e protocolos quânticos tendo sido extensivamente estudadas [11–23].

Apesar das MDRs de spin para partículas massivas terem sido utilizadas em diversos trabalhos, artigos recentes [35–38] têm apontado problemas associados à utilização das mesmas. Em [35] argumenta-se que as MDRs obtidas por meio do traço parcial dos momentos são incapazes de descrever todo tipo de medida de spin, mesmo que o aparato experimental seja cego com relação aos graus de liberdade de momento. Já em [36, 37], os autores defendem que é impossível construir um aparato capaz de medir o spin de uma partícula independentemente dos momentos e, portanto, não seria possível definir uma MDR de spin traçando os momentos. Para expor seu argumento, os autores de [36, 37] introduzem um modelo de medida Stern-Gerlach (SG) para partículas relativísticas e mostram que as previsões obtidas utilizando tal proposta não podem ser explicadas a partir das MDRs de spin. Apesar do modelo de medida apresentado ser simplificado, resultados recentes [38], em que a interação do aparato SG com a partícula é tratada de maneira mais formal, confirmam a proposta feita nesses trabalhos.

Os argumentos apresentados em [35–38] levantaram dúvidas quanto à utilidade dos resultados obtidos na literatura por meio das MDRs de spin. Neste trabalho pretende-se mostrar que o problema associado ao uso dessas matrizes está diretamente conectado à estrutura do espaço dos estados que formam as representações unitárias irredutíveis do grupo de Poincaré. Uma vez feito isso, uma nova abordagem baseada na construção de

MDRs efetivas de spin será apresentada. Essa proposta permite recuperar os resultados presentes na literatura e incorporar as recentes críticas de maneira consistente. No entanto, para isso será necessário abandonar o traço parcial usual dos graus de liberdade de momento, assim como a interpretação adotada na literatura para as MDRs de spin.

Este trabalho está estruturado da seguinte forma. No Capítulo 2 é feita uma revisão sucinta de alguns conceitos da teoria de grupos e representações que serão úteis ao longo do trabalho. Uma abordagem mais detalhada do assunto pode ser encontrada em [54–57]. No Capítulo 3 é apresentada uma introdução à teoria da relatividade especial. Essa exposição segue os livros textos de Ludvigsen [58] e Lawden [59]. Ainda no Capítulo 3, o grupo de simetria da relatividade especial é estudado. No Capítulo 4 analisa-se detalhadamente a teoria de RUIs do grupo de Poincaré. Essa análise é baseada nos procedimentos expostos em [51–55]. No Capítulo 5 são apresentados alguns resultados associados ao uso das MDRs de spin em TIQR, assim como os argumentos presentes nas críticas feitas em [35–37]. Além disso, é feita uma análise da estrutura do espaço dos estados associados às RUIs do grupo de Poincaré e mostra-se que existe uma conexão entre essa estrutura e a impossibilidade de se utilizar o traço parcial dos momentos para definir MDRs de spin. Por fim, a nova proposta baseada na utilização de MDRs efetivas é introduzida e seu significado é discutido. No Capítulo 6 são apresentadas as conclusões do trabalho desenvolvido nesta dissertação. Ao longo de todo o trabalho, a notação de soma de Einstein para índices gregos repetidos em posições alternadas é utilizada, sendo que os índices gregos nessas somas adotam valores inteiros de 0 até 3.

Introdução à Teoria de Grupos e Representações

A teoria de grupos é a linguagem subjacente às teorias quântica e relativística. É portanto natural que o caminho imediato para a unificação dessas teorias seja desenvolver uma estrutura de grupos capaz de acomodar ambas. Um dos pioneiros nessa direção foi Eugene P. Wigner que, em seu trabalho seminal de 1939 [51] sobre as RUIs do grupo de Poincaré, estabeleceu as bases dessa linha de investigação. Neste capítulo serão apresentados alguns conceitos sobre teoria de grupos essenciais para a construção das RUIs do grupo de Poincaré. Os resultados matemáticos aqui apresentados não serão formalmente demonstrados. O leitor interessado em uma abordagem rigorosa poderá recorrer à vasta literatura sobre o assunto [54–57].

2.1 Grupos

Um conjunto de elementos g forma um grupo G se existir um mapa

$$\begin{aligned} G \times G &\longrightarrow G \\ (g_1, g_2) &\longmapsto g_1 g_2, \end{aligned}$$

chamado de regra de composição do grupo, tal que as seguintes propriedades sejam válidas:

- Associatividade: $g_1(g_2 g_3) = (g_1 g_2)g_3 \quad \forall g_1, g_2, g_3 \in G$.
- Identidade: $\exists e \in G$ tal que $eg = ge = g \quad \forall g \in G$.
- Inversa: $\exists g^{-1} \in G$ tal que $g^{-1}g = gg^{-1} = e \quad \forall g \in G$.

Grupos para os quais a regra de composição é comutativa, i.e. $g_1 g_2 = g_2 g_1 \quad \forall g_1, g_2 \in G$, são chamados de grupos abelianos.

Um subconjunto H de um grupo G é chamado de subgrupo de G se seus elementos formarem um grupo com a mesma regra de composição de G . Se H não for constituído apenas pela identidade e também não coincidir com G ele é dito um subgrupo próprio. Caso H seja um subgrupo próprio de G , os conjuntos gH e Hg , com $g \in G$, são chamados de *coset* esquerdo e *coset* direito de H em G , respectivamente. O número de *cosets* esquerdos

(que é igual ao número de *cosets* direitos) pode ser finito ou infinito. O conjunto de todos os *cosets* esquerdos (direitos) é denotado por G/H ($G\backslash H$).

Em geral um *coset* direito de G não precisa ser idêntico a um *coset* esquerdo, no entanto existem certos subgrupos N para os quais todo *coset* direito é um *coset* esquerdo, ou seja, $gN = Ng$ ou, de maneira equivalente, $gNg^{-1} = N \forall g \in G$. Tais subgrupos são chamados de normais ou invariantes. O produto de dois *cosets* de um subgrupo normal N resulta em um *coset* de N , portanto G/N ($G\backslash N$) forma um grupo sendo $eN = N$ a identidade. Esse grupo é chamado de grupo quociente de G com relação a N . Um grupo é dito simples se não possuir subgrupos invariantes. Se possuir subgrupos invariantes porém não abelianos o grupo é dito semissimples. Dois subgrupos H e K de G são ditos conjugados se existir um elemento g tal que $K = gHg^{-1}$, portanto se H for um subgrupo normal ele é conjugado a si mesmo.

2.2 Homomorfismos e Representações

Um homomorfismo de um grupo G em um grupo H é um mapa $\phi : G \rightarrow H$ que respeita a estrutura do grupo, i.e. $\phi(g_1g_2) = \phi(g_1)\phi(g_2) \forall g_1, g_2 \in G$. Se for bijetivo, o mapa ϕ é um isomorfismo.

Dado um homomorfismo $\phi : G \rightarrow H$, o conjunto de todos os elementos de G que são mapeados no elemento identidade de H é chamado de núcleo (*kernel*) do homomorfismo:

$$\text{Ker}(\phi) = \{g \in G : \phi(g) = e_H \in H\}$$

O núcleo de um homomorfismo ϕ é um subgrupo normal de G , i.e. $g\text{Ker}(\phi)g^{-1} = \text{Ker}(\phi) \forall g \in G$, portanto $G/\text{Ker}(\phi)$ é um grupo. Se o homomorfismo $\phi : G \rightarrow H$ for um mapa sobrejetivo, ou seja, $\forall h \in H \exists g \in G$ tal que $\phi(g) = h$, então H é isomórfico a $G/\text{Ker}(\phi)$ e o grupo G é chamado de recobrimento de H .

Um automorfismo é um isomorfismo de um objeto matemático em si mesmo. O conjunto $\text{Aut}(X)$ de todos os automorfismos de um objeto matemático X forma um grupo. Uma representação de um grupo G sobre um espaço vetorial V é um homomorfismo $\chi : G \rightarrow \text{Aut}(V)$ de G para o grupo de automorfismos de V . Uma representação unitária é um homomorfismo $\chi : G \rightarrow U(V) \subset \text{Aut}(V)$ de G para o grupo de operadores unitários $U^\dagger = U^{-1}$ que atuam sobre o espaço vetorial V .

Dada uma representação χ de G sobre V , um subespaço W de V é dito invariante sobre a ação de χ se $\chi(g)w \in W \forall w \in W$ e $\forall g \in G$. Uma representação é chamada de irreduzível se ela não possuir subespaços invariantes não triviais, i.e. se apenas o conjunto vazio e o próprio espaço vetorial V forem subespaços invariantes. Caso contrário a representação é dita redutível e o espaço vetorial V é a soma direta de subespaços invariantes irreduzíveis.

Toda representação irredutível de um grupo abeliano é unidimensional.

Seja p um elemento de um conjunto X para o qual o grupo G forma um conjunto de automorfismos, ou seja, $G \subset \text{Aut}(X) : X \rightarrow X$, o maior subgrupo G_p de G que deixa p invariante, i.e. $G_p(p) = p$, é chamado de grupo estabilizador de G em p . O conjunto $\mathcal{O}(p)$ de todos os elementos que podem ser obtidos através da aplicação de G em um único ponto p de X é chamado de órbita de G em p , i.e. $\mathcal{O}(p) = \{g(p) | g \in G\}$, e elementos em uma mesma órbita são ditos equivalentes. Duas órbitas são ou idênticas ou desconexas. Dois grupos estabilizadores G_p e G_q de dois pontos p e q pertencentes à mesma órbita $\mathcal{O}(p)$ são conjugados e, portanto, isomórficos. O espaço G/G_p é idêntico à órbita $\mathcal{O}(p)$ de G em p .

2.3 Grupos Contínuos

O número de elementos em um grupo G é chamado de ordem do grupo, podendo ser finito ou infinito. Se os elementos g de um grupo infinito G puderem ser enumerados através de índices discretos o grupo é discreto, caso contrário o grupo infinito é contínuo. Nesta seção serão apresentadas certas propriedades de grupos infinitos contínuos. Os elementos de um grupo contínuo podem ser parametrizados por um conjunto de variáveis reais contínuas

$$g = g(\lambda), \quad (\lambda = (\lambda^a), a = 1, 2, \dots).$$

Se esse conjunto for finito, i.e. $a = 1, 2, \dots, p$, o grupo é dito de dimensão finita, o número de parâmetros sendo a dimensão do grupo. Caso contrário, o grupo é dito de dimensão infinita.

Um grupo de Lie é uma variedade diferenciável dotada de uma estrutura de grupo tal que as operações de composição e inversão sejam diferenciáveis, isto é, dado um grupo contínuo G , se os parâmetros $f^a(\lambda, \mu)$ do produto de dois elementos

$$g(\lambda)g(\mu) = g(f(\lambda, \mu))$$

forem funções analíticas dos parâmetros dos fatores e, similarmente, os parâmetros $\bar{\lambda}^a(\lambda)$ do elemento inverso $g(\bar{\lambda}) = g^{-1}(\lambda)$ forem funções analíticas dos parâmetros λ , então o grupo contínuo é chamado de grupo de Lie. Os parâmetros contínuos λ^a são chamados de coordenadas do grupo de Lie. Para um grupo de Lie de dimensão finita G as coordenadas λ^a variam em uma região de \mathbb{R}^p , sendo p a dimensão do grupo. Se todos os elementos de um grupo poderem ser especificados por coordenadas confinadas em uma região finita de \mathbb{R}^p , esse grupo é dito compacto. Caso contrário ele é não compacto.

Uma curva contínua $g = g(\tau)$, com $0 \leq \tau \leq 1$, em um grupo de Lie G é um mapa

$$\tau \in [0, 1] \rightarrow g(\tau) \in G$$

tal que as coordenadas $\lambda^a(\tau)$ do elemento $g(\tau)$ sejam funções contínuas do parâmetro τ . Dois elementos g_0 e g_1 estão conectados por uma curva $g(\tau)$ se $g(0) = g_0$ e $g(1) = g_1$. Caso $g(0) = g(1) = g$ a curva é chamada de curva fechada, ou *loop*, através de g . A curva fechada formada apenas por um elemento g é chamada de *loop* nulo em g .

Um subconjunto H do grupo G é chamado de conexo se todo par de elementos de H poder ser conectado por uma curva contínua. A componente de um elemento g de um grupo de Lie G é a união de todos os subconjuntos conexos de G que contém o elemento g . A componente G_1 do elemento identidade do grupo G , chamada de componente conexa própria, é um subgrupo fechado¹ invariante de G . Um grupo de Lie geral G consiste de várias componentes conexas G_i que são desconexas entre si, sendo que cada componente conexa G_i é obtida do subgrupo próprio G_1 aplicando-se alguma transformação discreta γ_i de um grupo discreto Γ . Portanto um grupo de Lie geral é um produto direto entre a componente conexa própria e um subgrupo discreto:

$$G = G_1 \times \Gamma.$$

Duas curvas $g(\tau)$ e $g'(\tau)$ que conectam os elementos g_0 e g_1 são ditas homotópicas se existir uma deformação contínua de uma curva na outra que deixa os pontos extremos g_0 e g_1 inalterados. Todos os *loops* através de um elemento g são classificados de acordo com classes de homotopia e um grupo de Lie é dito ser n -conexo se possuir n classes de homotopia em cada elemento. Se toda curva fechada for homotópica a um *loop* nulo, i.e. toda curva fechada poder ser continuamente contraída em um ponto, o grupo de Lie é dito simplesmente conexo.

Se $\chi(g)$ for uma função contínua sobre o grupo G , e $g(\tau)$ uma curva contínua fechada em G , tal que $g(0) = g(1) = g$, pode acontecer que $\chi(g(0)) \neq \chi(g(1))$. Fixando-se um valor inicial $\chi_0 = \chi(g(0))$ e tomando todos os caminhos fechados possíveis em G começando em g , se o número máximo de valores diferentes assumidos por $\chi(g(1))$ for m então a função $\chi(g)$ é m -valorada. Esse número é uma propriedade do grupo e está associada ao número de classes de homotopia do mesmo ($m \leq n$ para um grupo de Lie n -conexo). Os elementos $\chi(g)$ de uma representação χ de um grupo de Lie G são funções contínuas do grupo G , portanto uma representação χ de G é m -valorada se a cada elemento g do grupo G estiverem associados m operadores diferentes $\chi_1(g), \dots, \chi_m(g)$. Em grupos simplesmente conexos todo caminho fechado é homotópico ao *loop* nulo e qualquer função contínua $\chi(g)$ no grupo deve assumir um único valor para cada g , suas representações sendo designadas de vetoriais.

É possível mostrar que, para qualquer grupo G n -conexo, existe um recobrimento simplesmente conexo \tilde{G} chamado de recobrimento universal e, portanto, G é isomórfico a $\tilde{G}/\ker(\phi)$, sendo ϕ o homomorfismo de \tilde{G} em G . Toda representação do grupo G é uma

¹Por fechado entende-se que todo ponto fora de G_1 possui uma vizinhança desconexa de G_1 .

representação vetorial de \tilde{G} , portanto estudar as representações multivaloradas de G equivale a estudar as representações de seu recobrimento universal \tilde{G} .

2.4 Constantes de Estrutura de um Grupo de Lie

Se G for um grupo de Lie de dimensão finita, então sempre poderão ser escolhidas coordenadas λ^a tal que o elemento identidade esteja na origem, i.e. $e = g(0)$. Seja $f^a(\lambda, \mu)$, com $a = 1, 2, \dots, p$, as coordenadas do produto $g(\lambda)g(\mu)$ entre dois elementos de um grupo de Lie, então

$$\begin{aligned} f(\lambda, 0) &= f(0, \lambda) = \lambda, \\ f(\lambda, f(\mu, \nu)) &= f(f(\lambda, \mu), \nu). \end{aligned}$$

Considerando a vizinhança do elemento identidade, as funções $f(\lambda, \mu)$ podem ser expressadas em uma série de Taylor em λ e μ , o que, levando em conta as identidades anteriores, resulta em

$$f^a(\lambda, \mu) = \lambda^a + \mu^a + B^a_{bc} \lambda^b \mu^c + O_3(\lambda, \mu),$$

em que

$$B^a_{bc} = \left. \frac{\partial^2 f^a(\lambda, \mu)}{\partial \lambda^b \partial \mu^c} \right|_{\lambda=\mu=0}$$

e $O_3(\lambda, \mu)$ denota termos de ordem maior que 3 em λ e μ . Os números

$$C^a_{bc} = B^a_{cb} - B^a_{bc}$$

são chamados de constantes de estrutura do grupo de Lie e, além de serem antissimétricos, satisfazem a identidade de Jacobi

$$C^d_{e[a} C^e_{bc]} = 0.$$

Dada uma curva contínua $g(\tau) = g(\lambda(\tau))$ passando através do elemento identidade, tal que $g(0) = e$, o objeto

$$X = \left. \frac{dg(\tau)}{d\tau} \right|_{\tau=0}$$

define um vetor X chamado de vetor tangente à curva $g(\tau)$ em e . O conjunto de vetores tangentes a todas as curvas através do elemento identidade forma um espaço vetorial chamado de espaço tangente em e , denotado por $T_e G$. Os vetores de base no espaço tangente $T_e G$ são chamados de geradores e sempre podem ser definidos por

$$X_a = \left. \frac{\partial g}{\partial \lambda^a} \right|_{\lambda=0},$$

tal que

$$g(\lambda) = e + \lambda^a X_a + O(\lambda^2).$$

Se $g(\lambda)$ for unitário, então X_a é anti-hermitiano: $X_a^\dagger = -X_a$.

A estrutura de uma álgebra de Lie é introduzida definindo para cada par ordenado (X_a, X_b) de vetores tangentes X_a e X_b uma regra de composição, chamada de multiplicação de Lie,

$$(X_a, X_b) \in T_e G \times T_e G \rightarrow [X_a, X_b] \in T_e G,$$

tal que

$$[X_a, X_b] = C^c{}_{ab} X_c.$$

Essa relação define a álgebra de Lie \mathfrak{g} do grupo de Lie G . Para grupos abelianos todas as constantes de estrutura se anulam e a álgebra de Lie é Abelianiana:

$$[X_a, X_b] = 0.$$

Para os casos de interesse, a multiplicação de Lie é definida como o comutador dos geradores, isto é,

$$[X_a, X_b] = X_a X_b - X_b X_a = C^c{}_{ab} X_c.$$

Na classe Σ de todos os grupos de Lie que possuem álgebras de Lie isomórficas, existe um e apenas um grupo simplesmente conexo \tilde{G} . Esse grupo é o recobrimento universal de todos os outros grupos em Σ e, por isso, é chamado de recobrimento universal da classe Σ . Qualquer grupo da classe Σ é isomórfico a \tilde{G}/N , sendo N um subgrupo invariante discreto. Os membros da classe Σ , apesar de localmente isomórficos, podem ser totalmente diferentes globalmente.

Um subespaço $\mathfrak{h} \subseteq \mathfrak{g}$ fechado em relação a operação de multiplicação de Lie é uma subálgebra da álgebra de Lie \mathfrak{g} . Se, além de ser uma subálgebra, \mathfrak{h} satisfizer a condição mais forte $[\mathfrak{g}, \mathfrak{h}] \subseteq \mathfrak{h}$, então \mathfrak{h} é dito ser um ideal da álgebra de Lie \mathfrak{g} . Isso está diretamente conectado à definição de subgrupos normais, portanto uma álgebra de Lie é dita simples se não possuir ideais não triviais e não for abelianiana. Caso a álgebra de Lie possua ideais, porém somente ideais não abelianos (excluído o ideal trivial $\{0\}$), ela é dita semissimples. Toda álgebra semissimples é isomórfica a soma direta de álgebras simples.

Seja G um grupo de Lie e \mathfrak{g} sua álgebra de Lie, então para todo vetor tangente $X \in \mathfrak{g}$ existe um subgrupo de G de um único parâmetro, i.e. um único homomorfismo

analítico $g(\tau) = \exp(\tau X)$ de \mathbb{R} em G , tal que

$$\begin{aligned} g(\tau_1)g(\tau_2) &= g(\tau_1 + \tau_2), \\ \left. \frac{dg(\tau)}{d\tau} \right|_{\tau=0} &= X, \\ g(0) &= e. \end{aligned}$$

Esse homomorfismo é chamado de mapa exponencial da álgebra de Lie \mathfrak{g} no grupo de Lie G .

2.5 Produto Direto e Semi-Direto

O conjunto de todos os pares ordenados (g, g') , em que g é um elemento de um grupo G e g' um elemento de outro grupo G' , com a regra de composição

$$(g_1, g'_1)(g_2, g'_2) = (g_1g_2, g'_1g'_2)$$

é chamado de produto direto $G \times G'$ dos grupos G e G' . A identidade de $G \times G'$ é (e, e') e a inversa de (g, g') é $(g, g')^{-1} = (g^{-1}, g'^{-1})$.

Seja $G = \{g\}$ um subgrupo do grupo de automorfismos $\text{Aut}(H)$ de outro grupo $H = \{h\}$, i.e. o grupo G atua isomorficamente no grupo H

$$\begin{aligned} g : H &\rightarrow H \\ h &\mapsto g(h). \end{aligned}$$

O conjunto de todos os pares ordenados (h, g) com a regra de composição

$$(h_1, g_1)(h_2, g_2) = (h_1g_1(h_2), g_1g_2)$$

define o produto semi-direto $H \rtimes G$ entre os grupos G e H . O elemento identidade de $H \rtimes G$ é (e_H, e_G) , sendo que $e_G(h) = h \ \forall h \in H$, e a inversa de (h, g) é dada por

$$(h, g)^{-1} = (g^{-1}(h^{-1}), g^{-1}).$$

Dado o produto semi-direto $H \rtimes G$, H é um subgrupo normal de $H \rtimes G$ e $H \rtimes G/H$ é isomórfico a G . Para se chegar a essa conclusão basta observar que, dado o homomorfismo sobrejetivo $\phi : H \rtimes G \rightarrow G$, H é o núcleo de ϕ e, portanto, G é isomórfico a $H \rtimes G/\text{Ker}(\phi) = H \rtimes G/H$.

Se $H = \{a\}$ for abeliano com a regra de composição dada pela adição e $G = \{\Lambda\}$

atuar linearmente em H , então o produto semi-direto $H \rtimes G$ possuirá a regra de composição

$$(a_1, \Lambda_1)(a_2, \Lambda_2) = (a_1 + \Lambda_1 a_2, \Lambda_1 \Lambda_2)$$

e inversa

$$(a, \Lambda)^{-1} = (-\Lambda^{-1}a, \Lambda^{-1}).$$

Teoria da Relatividade Especial

O início do século XX foi marcado por importantes realizações científicas, entre elas a descoberta de que espaço e tempo devem ser reunidos em uma única variedade diferenciável quadridimensional M chamada de espaço-tempo. Um ponto de M representa um evento, i.e. uma ocorrência instantânea e pontual, enquanto um ponto do espaço representa a posição de uma partícula pontual relativa a um observador. Uma partícula no espaço-tempo é representada por uma curva, chamada de linha de universo, que está associada à sequência de eventos que ela ocupa durante sua vida.

Se nenhuma força além da gravitacional agir sobre uma partícula pontual, a mesma é qualificada de inercial, assim como seu movimento. Um observador é dito em movimento inercial se uma partícula inercial inicialmente em repouso com relação a ele, assim o permanecer pelo menos localmente. Essa restrição equivale a afirmar que a aceleração inicial da partícula em relação ao observador é nula em primeira ordem de distância, termos de ordem mais elevada sendo responsáveis pelos chamados efeitos de maré que apontam a presença da gravidade.

As linhas de universo de partículas inerciais, chamadas de linhas de universo inerciais, formam um conjunto particular de curvas em M . O princípio de relatividade, um dos alicerces da teoria da relatividade, introduz uma relação de equivalência local entre essas curvas. Esse princípio enuncia que se Alice e Bob são dois observadores inerciais que realizam experiências idênticas, em regiões suficientemente pequenas de espaço-tempo para que efeitos de maré sejam negligenciáveis, então eles obterão os mesmos resultados. Aceitar o princípio de relatividade implica que um observador inercial é incapaz de obter qualquer informação sobre sua posição, sua orientação ou seu movimento no espaço-tempo através de experiências que durem suficientemente pouco tempo e que ocupem regiões do espaço suficientemente pequenas. Nesse sentido, todos os pontos de M são equivalentes, assim como todas as linhas de universo inerciais e direções que passam por um dado ponto de M . Isso corresponde a uma definição fisicamente motivada da homogeneidade e isotropia do espaço-tempo.

Existe um conjunto ainda mais especial de curvas no espaço-tempo, formado por curvas chamadas de raios nulos, correspondente às linhas de universo de partículas sem massa, ou seja, curvas que descrevem o comportamento da radiação eletromagnética no espaço-tempo. A radiação eletromagnética possui propriedades bem diferentes daquelas das partículas massivas e seu comportamento pode ser descrito no espaço-tempo dado que suas

linhas de universo obedecem as seguintes propriedades:

- O conjunto de todos os raios nulos que passam por um dado ponto $P \in M$ dá origem a um único cone tridimensional $N(P)$ de vértice P em M , sendo que suas partes futura e passada são denotadas por $N^+(P)$ e $N^-(P)$, respectivamente. $N(P)$ é uma estrutura absoluta, independente da escolha de um observador.
- A linha de universo de **todo** observador que ocupa instantaneamente P está contida no interior de $N(P)$, e cada raio nulo de $N(P)$ define um único ponto em sua esfera celeste. Isso significa que o conjunto de todos os raios nulos que passam por P possui simetria esférica do ponto de vista de qualquer observador que ocupe instantaneamente P .

Essas propriedades implicam que a velocidade da radiação eletromagnética seja localmente constante para observadores inerciais.

3.1 O Espaço-Tempo Plano e a Relatividade Especial

Nesta seção será feita a análise do caso particular em que as definições e propriedades descritas anteriormente não são válidas apenas localmente, mas sim globalmente. Como será visto adiante, esse regime leva a uma descrição da natureza em termos de um espaço-tempo plano, chamado de espaço de Minkowski, e, portanto, corresponde a uma situação em que a gravidade pode ser negligenciada.

Apesar de introduzido o conceito do que vem a ser um observador inercial, ainda é necessário definir como um sistema de coordenadas é introduzido para descrever o espaço-tempo. Para isso, supõe-se que todo observador dispõe de um relógio, de uma fonte de luz capaz de emitir frequências variadas e de um detector capaz de identificar a frequência de um sinal luminoso detectado. Cada observador, utilizando-se de seu próprio relógio, pode associar um número $t(P)$, chamado de tempo próprio, a cada ponto P de sua linha de universo.

Sejam Alice e Bob dois observadores inerciais, suas linhas de universo serão ditas paralelas se Alice emitir um feixe luminoso de uma dada frequência e Bob medir exatamente a mesma frequência emitida. Obviamente, se realizado ao contrário o experimento dará o mesmo resultado. Nesse caso Alice (Bob) conclui que Bob (Alice) possui velocidade relativa nula. Esse paralelismo entre linhas de universo define uma relação de equivalência, já que se Cássia for um terceiro observador inercial de linha de universo paralela a de Bob, a mesma também será paralela a linha de universo de Alice.

A distância espacial entre dois observadores inerciais paralelos pode ser obtida através do procedimento a seguir. Alice emite um feixe no instante t_1 de seu tempo próprio, o mesmo é refletido por Bob, e Alice volta a detectá-lo mais tarde no instante t_2 . Dessa

forma Alice conclui que Bob está a uma distância $d = c(t_2 - t_1)/2$ dela, sendo c o módulo da velocidade da luz no vácuo. O mesmo tipo de experiência permite que Bob sincronize seu relógio com o de Alice: quando o feixe de Alice chega, Bob coloca seu relógio no tempo $t_1 + \frac{d}{c} = (t_2 + t_1)/2$. Bob conhece o valor de d através de uma experiência como a precedente e o valor de t_1 pode estar codificado no feixe ou ter sido acordado por meio de uma comunicação prévia. O princípio de relatividade garante que esses experimentos darão o mesmo resultado qualquer que seja o instante e o sentido em que forem efetuados e relógios sincronizados dessa maneira permanecerão sincronizados durante o restante do movimento. Se Cássia sincronizar seu relógio com o de Bob, então seu relógio também estará sincronizado com o de Alice e, portanto, é possível definir uma função tempo universal aplicável a toda uma classe de equivalência de linhas de universo paralelas. Dessa forma, dado um ponto P sobre uma linha de universo, existe uma classe de equivalência de pontos sincronizados com P , i.e. pontos Q tal que $t(Q) = t(P)$, em que t é a função tempo universal associada a linha de universo considerada. Essa classe de equivalência de pontos forma um plano tridimensional passando por P .

Se Alice emite um feixe no instante t_1 que reflete em qualquer outro observador, inercial ou não, que ocupe Q , voltando para Alice no instante posterior t_2 , ela dirá que o evento Q ocorreu no instante $(t_2 + t_1)/2$ a uma distância $c(t_2 - t_1)/2$. Adiante ficará claro que o conceito de sistema de coordenadas inercial está diretamente conectado às classes de equivalência de linhas de universo paralelas. Um sistema de coordenadas inercial corresponde a uma classe de equivalência de observadores inerciais com linhas de universo paralelas em que um dos observadores da classe é escolhido para definir a origem do sistema de coordenadas espaciais e uma função tempo universal é definida. As coordenadas espaciais de um evento no respectivo sistema de coordenadas estarão associadas à distância da linha de universo escolhida como origem até a linha de universo paralela que contém o evento, e o instante será dado pela função tempo universal associada à classe de equivalência.

Um deslocamento consiste em um par ordenado de pontos de M com $OP = -PO$ e $OP + PQ = OQ$. Sempre que P estiver no interior de $N(O)$, OP é dito do tipo tempo; caso P se situe sobre $N(O)$, OP é dito nulo; e se OP não for do tipo nulo nem do tipo tempo, então P está fora de $N(O)$ e OP é do tipo espaço. Se OP e $O'P'$ estiverem situados em linhas de universo paralelas l e l' e $t(P) - t(O) = t'(P') - t'(O')$, os deslocamentos são ditos equivalentes. Essa noção de equivalência é facilmente estendida para deslocamentos do tipo espaço, que não correspondem a linhas de universo de partículas inerciais, de tal forma que todos os deslocamentos podem ser classificados segundo classes de equivalência, a classe contendo todos os deslocamentos equivalentes a OP sendo designada por $\{OP\}$. Essas classes de equivalência são chamadas de vetores de espaço-tempo, a adição e multiplicação por um escalar sendo definidas por $x + w = \{OP + PQ\}$ e $\alpha x = \{\alpha OP\}$, em que $x = \{OP\}$ e $w = \{PQ\}$. O conjunto de todos os vetores de espaço-tempo forma um espaço vetorial V de quatro dimensões. Escolhido um ponto de origem O , V pode ser identificado com o espaço

dos deslocamentos que começam em O e pode-se escrever simplesmente $x = OP$. Com isso, conclui-se que a noção de paralelismo entre linhas de universo inerciais implica na existência de uma estrutura afim natural no espaço-tempo considerado.

Se OP é do tipo tempo e $t(P) - t(O) = 1$, $v = \{OP\}$ é chamado de quadrivetor velocidade ou quadrivelocidade. Portanto, um quadrivetor velocidade conecta dois pontos O e P ($P \in N^+(O)$) separados por uma unidade de tempo próprio. Se a linha de universo de um observador inercial passar por O e P , ele possuirá uma quadrivelocidade v . Escolhido um ponto de origem O e uma quadrivelocidade $v = OP$, o conjunto de todos os vetores $x = OQ$, em que Q é síncrono a O do ponto de vista de um observador de quadrivelocidade v , forma um subespaço de V de dimensão três denotado por v^\perp . Esse subespaço descreve a classe de equivalência dos pontos sincronizados com O do ponto de vista de um observador inercial de quadrivelocidade v , i.e. v^\perp representa o espaço num instante fixo de tempo para esse observador.

Para um dado observador inercial Bob de quadrivelocidade v , o conceito de ângulo entre deslocamentos pode ser introduzido em v^\perp utilizando o paralelismo entre linhas de universo inerciais. Se Alice e Cássia forem observadores inerciais paralelos a Bob que emitem constantemente sinais luminosos, Bob observará dois pontos luminosos estacionários. Dessa forma, Bob pode medir o ângulo θ entre esses dois pontos e assim definir o ângulo entre OP e OQ , sendo P e Q os pontos das linhas de universo de Alice e Cássia que cruzam o plano v^\perp que define os pontos síncronos ao ponto O da linha de universo de Bob. Se o ângulo entre $e = OQ$ e $e' = OQ'$ for de 90° , então e e e' são ditos ortogonais.

Se O e Q forem dois pontos em um plano v^\perp e a distância entre eles for igual a um, então o vetor $e = OQ$ é chamado de unitário. Nesse caso, os vetores $v + ce$ e $v - ce$, em que c é o módulo da velocidade da luz, são nulos e correspondem a direções antipodais do ponto de vista de um observador de quadrivelocidade v . Se $(e_{(1)}, e_{(2)}, e_{(3)})$ constituir uma base ortogonal destrógera de vetores unitários em v^\perp (as definições de ortogonalidade e unitariedade tendo sido fisicamente definidas em v^\perp), o conjunto $(e_{(0)}, e_{(1)}, e_{(2)}, e_{(3)})$, em que $e_{(0)} = v/c$, define, do ponto de vista físico, uma base ortonormal (ON) de espaço-tempo. As componentes w^μ de um vetor w com relação a $(e_{(\mu)})$ são dadas por

$$w = w^0 e_{(0)} + w^1 e_{(1)} + w^2 e_{(2)} + w^3 e_{(3)} = w^\mu e_{(\mu)}. \quad (3.1)$$

Essa definição fisicamente motivada de base ON está de fato associada à definição de um produto interno em V .

Dado o sentido físico de v^\perp , é possível definir uma forma quadrática¹ natural nesse hiperplano, tal que $g(e_{(i)}, e_{(j)}) = \delta_{ij}$. Para estender essa forma quadrática para vetores que não sejam do tipo espaço é preciso analisar que propriedades deseja-se que ela descreva. As propriedades de interesse são apresentadas a seguir.

¹Uma forma quadrática é uma forma bilinear simétrica.

- Primeiramente, é interessante que essa forma quadrática descreva matematicamente a noção física de perpendicularidade entre v e v^\perp , portanto $g(e, v) = 0 \forall e \in v^\perp$.
- Em segundo lugar, a forma quadrática deve descrever o comportamento particular dos raios nulos. As componentes de um vetor nulo arbitrário n em qualquer base ON respeitam a seguinte relação: $(n^1)^2 + (n^2)^2 + (n^3)^2 - (n^0)^2 = 0$. Com isso é natural impor que $g(n, n) = 0$ para qualquer vetor nulo n .

Essas propriedades fisicamente motivadas implicam que

$$\begin{aligned} g(v, v) &= g(n - ce, n - ce) = g(n, n) - 2g(ce, n) + g(ce, ce) \\ &= -2g(ce, v + ce) + c^2 = -2g(ce, v) - 2g(ce, ce) + c^2 \\ &= -2c^2 + c^2 = -c^2 \end{aligned} \tag{3.2}$$

para qualquer quadrivelocidade v . Portanto, para uma base ON $(e_{(\mu)})$ qualquer, $g(e_{(\mu)}, e_{(\nu)}) = \eta_{\mu\nu}$, em que $\eta_{\mu\nu}$ é dado, em forma matricial, por

$$\{\eta_{\mu\nu}\} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{3.3}$$

A forma quadrática g é chamada de métrica do espaço-tempo e codifica leis fundamentais da natureza. O fato de existirem sistemas de coordenadas para os quais a métrica possa ser escrita na sua forma canônica para qualquer ponto do espaço-tempo é reflexo da estrutura plana do espaço considerado.

Seja Alice um observador inercial associado a uma base ON $(e_{(\mu)})$. Dado um ponto P do espaço-tempo, suas coordenadas nessa base serão dadas por $(ct, x, y, z) \equiv (x^\mu)$. Para Bob, um outro observador inercial com uma base ON $(e'_{(\mu)})$ associada, as coordenadas de P serão dadas por $(ct', x', y', z') \equiv (x'^\mu)$. O primeiro passo para encontrar a transformação $x'^\mu = x'^\mu(x^\nu)$ que conecta esses dois sistemas de coordenadas é demonstrar que ela deve ser linear para que o princípio de relatividade seja válido. Para isso considere um terceiro observador inercial Cássia de tempo próprio t'' . Sua posição vista por Alice é descrita pelas coordenadas $(x^\mu) = (ct, x^i(t))$. Como todos os observadores considerados são inerciais, $\frac{dx^\mu}{dt}$ é constante. Como visto anteriormente, o princípio de relatividade implica em uma definição física da homogeneidade para observadores inerciais (global no caso do espaço-tempo plano) e, portanto, $\frac{dt''}{dt}$ também deve ser constante. Combinados esses resultados implicam que $\frac{dx^\mu}{dt''} = \frac{dx^\mu}{dt} \frac{dt}{dt''} = \text{cte}$ e, portanto, $\frac{d^2x^\mu}{dt''^2} = 0$. Caso Bob descreva o movimento de Cássia, ele

também irá obter que $\frac{d^2 x'^\mu}{dt''^2} = 0$ devido ao princípio de relatividade. No entanto, como

$$\frac{dx'^\mu}{dt''} = \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\nu} \frac{dx^\nu}{dt''} \quad \frac{d^2 x'^\mu}{dt''^2} = \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\nu} \frac{d^2 x^\nu}{dt''^2} + \frac{\partial^2 x'^\mu}{\partial x^\nu \partial x^\sigma} \frac{dx^\nu}{dt''} \frac{dx^\sigma}{dt''} \quad (3.4)$$

é necessário que

$$\frac{\partial^2 x'^\mu}{\partial x^\nu \partial x^\sigma} = 0, \quad (3.5)$$

ou seja, as transformações $x'^\mu = x'^\mu(x)$ devem ser lineares:

$$x'^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu x^\nu + b^\mu. \quad (3.6)$$

Observe que esse resultado só é válido para transformações entre sistemas de coordenadas associados a diferentes bases ON. Em (3.6) os $\Lambda^\mu{}_\nu$ são interpretados como elementos de uma matriz Λ que caracteriza uma transformação entre dois sistemas de coordenadas que possuem a mesma origem espaço-temporal, enquanto que b^μ representa uma possível translação da origem dessas coordenadas.

Da transformação de coordenadas obtém-se facilmente a relação entre os novos vetores de base e os originais:

$$e_{(\mu)} = \Lambda^\nu{}_\mu e'_{(\nu)}, \quad e'_{(\nu)} = (\Lambda^{-1})^\mu{}_\nu e_{(\mu)}. \quad (3.7)$$

Resulta então que

$$\begin{aligned} \eta_{\mu\nu} &= g(e_{(\mu)}, e_{(\nu)}) = g(\Lambda^\alpha{}_\mu e'_{(\alpha)}, \Lambda^\beta{}_\nu e'_{(\beta)}) = \Lambda^\alpha{}_\mu \Lambda^\beta{}_\nu g(e'_{(\alpha)}, e'_{(\beta)}) \\ &= \Lambda^\alpha{}_\mu \Lambda^\beta{}_\nu \eta_{\alpha\beta}, \end{aligned} \quad (3.8)$$

portanto

$$\eta = \Lambda^T \eta \Lambda. \quad (3.9)$$

A relação (3.9) define quais são as transformações lineares Λ permitidas em (3.6). Da relação (3.9) obtém-se que o conjunto dessas transformações lineares, chamadas de transformações de Lorentz, junto com a regra usual de multiplicação de matrizes formam um grupo não abeliano chamado de grupo de Lorentz (\mathcal{L}). O elemento inverso de Λ é obtido multiplicando (3.9) por $\eta^{-1} = \eta$,

$$\begin{aligned} \Lambda^T \eta \Lambda &= \eta \\ \eta \Lambda^T \eta \Lambda &= I \\ (\eta \Lambda^T \eta) \Lambda &= \Lambda^{-1} \Lambda \\ \eta \Lambda^T \eta &= \Lambda^{-1}. \end{aligned} \quad (3.10)$$

Os elementos da inversa de Λ são denotados por $(\Lambda^{-1})^\mu{}_\nu \equiv \Lambda_\nu{}^\mu$ e os elementos da inversa de η por $\eta^{\mu\nu}$.

As translações da origem do sistema de coordenadas, $x'^\mu = (T_{(b)}(x))^\mu = x^\mu + b^\mu$, associadas ao termo $+b^\mu$ em (3.6), também formam um grupo, chamado de grupo das translações (\mathcal{T}). Ao contrário do grupo de Lorentz o grupo das translações é abeliano já que a regra de composição associada é aditiva, isto é,

$$[T_{(a)}(T_{(b)}(x))]^\mu = (T_{(b)}(x))^\mu + a^\mu = x^\mu + b^\mu + a^\mu = (T_{(a+b)}(x))^\mu. \quad (3.11)$$

As transformações gerais dadas pela equação (3.6), constituídas por transformações de Lorentz e translações, são chamadas de transformações de Poincaré.

Todo objeto q de quatro componentes q^μ que, sob a ação de uma mudança de coordenadas, se transformam como

$$q'^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu q^\nu, \quad (3.12)$$

i.e. as componentes numa dada base ON se transformam de maneira contrária aos vetores de base, é chamado de vetor contravariante. Por ser uma forma quadrática, a métrica transforma um par de vetores em um escalar, ou seja, dado dois vetores contravariantes q e w , $g(q, w) = \eta_{\mu\nu} q^\mu w^\nu$ não muda sob a ação de uma transformação de Lorentz. Além das propriedades apresentadas anteriormente, a métrica de Minkowski é não degenerada, ou seja, para todo vetor $q \neq 0$ existe um w tal que $g(q, w) \neq 0$. Portanto a métrica define um produto interno entre vetores

$$\langle q, w \rangle = g(q, w) = q^T g w = \eta_{\mu\nu} q^\mu w^\nu \quad (3.13)$$

que, por sua vez, induz uma norma

$$\|q\|^2 = \langle q, q \rangle = \eta_{\mu\nu} q^\mu q^\nu. \quad (3.14)$$

Os tipos de classes de equivalência entre deslocamentos (vetores) podem ser divididos de acordo com o sinal da norma, i.e. sempre que $\|q\|^2 > 0$ o vetor é do tipo espaço, se $\|q\|^2 < 0$ é do tipo tempo e caso $\|q\|^2 = 0$ e $q \neq 0$ é do tipo nulo. Essa definição é obviamente invariante por transformações de Lorentz, já que a norma é um escalar.

A métrica define uma operação de abaixamento de índice dada por $q_\mu = \eta_{\mu\nu} q^\nu$, permitindo escrever o produto interno como $\langle q, w \rangle = q^\mu w_\mu$. Vetores que possuem componentes formadas pela operação de abaixamento se transformam diferentemente dos vetores contravariantes. As componentes q_μ desses vetores obedecem à lei de transformação dada por

$$q'_\mu = \Lambda_\mu{}^\nu q_\nu \quad (3.15)$$

e os vetores correspondentes são chamados de covariantes, pois suas componentes se transformam como os vetores de base. Escalares e vetores contravariantes e covariantes são casos particulares de outros objetos geométricos chamados de tensores. Um tensor misto T de ordem (r, n) é um objeto com $4(r + n)$ componentes $T^{\mu_1 \dots \mu_r}_{\alpha_1 \dots \alpha_n}$ que, sob uma mudança de sistema de coordenadas ON, transformam-se segundo a regra

$$T^{\mu_1 \dots \mu_r}_{\alpha_1 \dots \alpha_n} = \Lambda^{\mu_1}_{\nu_1} \dots \Lambda^{\mu_r}_{\nu_r} \Lambda^{\beta_1}_{\alpha_1} \dots \Lambda^{\beta_n}_{\alpha_n} T^{\nu_1 \dots \nu_r}_{\beta_1 \dots \beta_n}. \quad (3.16)$$

Dado dois observadores Alice e Bob de quadriveloctades v e w , respectivamente, a relação entre suas quadriveloctades é dada por

$$\gamma^{-1}w = v + W \quad (3.17)$$

em que γ deve ser definido e $\|W\|$ é a distância que Alice declara que Bob viajou em uma unidade de seu tempo próprio, i.e. W é um vetor em v^\perp que representa a velocidade relativa de Bob com relação à Alice. Dessa relação e das propriedades das quadriveloctades obtém-se que

$$\gamma = \left(1 - \frac{\|W\|^2}{c^2}\right)^{-\frac{1}{2}} \quad (3.18)$$

Na base ON associada a Alice a componente W^0 é nula e as outras três componentes formam um trivetor denotado por \mathbf{w} . Então, nessa mesma base ON, $w = \gamma(c, \mathbf{w})$.

Existe um vetor contravariante, chamado de quadrimomento, que terá uma importância especial na análise do caso quântico. Em uma dada base ON $(e_{(\mu)})$, o quadrimomento é dado por

$$p = (p^0, \mathbf{p}) = \left(\frac{E}{c}, \mathbf{p}\right), \quad (3.19)$$

em que E e \mathbf{p} são respectivamente a energia e o momento linear relativísticos de uma partícula com relação a um observador de quadriveloctade $v = ce_{(0)}$. Para uma partícula de massa $m \neq 0$ e quadriveloctade w ele pode ser reescrito como

$$p = mw = \gamma m(c, \mathbf{w}), \quad (3.20)$$

e $\|p\|^2 = g(p, p) = -m^2c^2$. No caso de partículas sem massa $E = \|\mathbf{p}\|c$ e, portanto, o quadrimomento é dado por

$$p = (\|\mathbf{p}\|, \mathbf{p}), \quad (3.21)$$

o que implica em $\|p\| = 0$.

3.2 Grupo de Poincaré

As transformações de Poincaré (3.6), formadas pela composição de translações e transformações de Lorentz, são denotadas por (a, Λ) sendo $a = (a^\mu)$ os parâmetros da translação $T_{(a)}$ e Λ a matriz associada à transformação de Lorentz. Portanto,

$$x'^\mu = ((a, \Lambda)x)^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu x^\nu + a^\mu. \quad (3.22)$$

A composição de duas transformações de Poincaré (b, L) e (a, Λ) é dada por

$$\begin{aligned} ((b, L)(a, \Lambda)x)^\mu &= L^\mu{}_\alpha ((a, \Lambda)x)^\alpha + b^\mu \\ &= L^\mu{}_\alpha (\Lambda^\alpha{}_\nu x^\nu + a^\alpha) + b^\mu \\ &= L^\mu{}_\alpha \Lambda^\alpha{}_\nu x^\nu + L^\mu{}_\alpha a^\alpha + b^\mu \\ &= ((b + La, L\Lambda)x)^\mu, \end{aligned} \quad (3.23)$$

ou seja,

$$(b, L)(a, \Lambda) = (b + La, L\Lambda). \quad (3.24)$$

Portanto as transformações de Poincaré também formam um grupo, chamado de grupo de Poincaré, dado pelo produto semidireto entre os grupos de translação e de Lorentz

$$\mathcal{P} : \mathcal{T} \rtimes \mathcal{L}. \quad (3.25)$$

A regra de composição é dada por (3.24), enquanto que a identidade e a inversa são dadas por $(0, I)$ e $(a, \Lambda)^{-1} = (-\Lambda^{-1}a, \Lambda^{-1})$, respectivamente. Os grupos \mathcal{T} e \mathcal{L} aparecem como subgrupos de \mathcal{P} formados por elementos (a, I) e $(0, \Lambda)$, respectivamente, e as propriedades do grupo de Poincaré estão diretamente ligadas às propriedades desses grupos.

Como observado anteriormente, \mathcal{T} é abeliano. Além disso, seus elementos são descritos por quatro parâmetros contínuos a^μ e as funções que caracterizam os parâmetros de uma composição ou da inversa são analíticas. Portanto \mathcal{T} é um grupo de Lie abeliano de dimensão 4 e possui quatro geradores que comutam entre si. Os geradores do grupo de translações são dados por

$$\left. \frac{\partial T_{(a)}}{\partial a^\mu} \right|_{a=0} \equiv -iP_\mu, \quad (3.26)$$

a notação P_μ tendo sido introduzida por motivos que ficarão claros no próximo capítulo. Definindo $P^\mu = \eta^{\mu\nu} P_\nu$, as relações de comutação para os P^μ 's são dadas por

$$[P^\mu, P^\nu] = 0, \quad \mu, \nu = 0, 1, 2, 3 \quad (3.27)$$

e uma translação infinitesimal é escrita como

$$T_\varepsilon = (1 - i\varepsilon_\mu P^\mu). \quad (3.28)$$

As coordenadas a^μ de \mathcal{T} assumem valores de $-\infty$ até ∞ e, portanto, \mathcal{T} é não compacto.

3.2.1 O Grupo de Lorentz

Matematicamente o grupo de Lorentz é descrito pelo grupo ortogonal indefinido $O(3, 1)$: o grupo de Lie de dimensão 6 formado pelas matrizes 4×4 que satisfazem (3.9). Partindo de (3.9) tem-se que $\det(\Lambda) = \pm 1$. Uma transformação de Lorentz com determinante $+1$ é dita própria, e é dita imprópria se o determinante é -1 . Além disso, tomando $\alpha = \beta = 0$ em $(\Lambda^T)^\alpha{}_\mu \eta_{\mu\nu} \Lambda^\nu{}_\beta = \eta_{\alpha\beta}$, obtém-se que

$$\begin{aligned} \eta_{00} = -1 &= (\Lambda^T)^0{}_\mu \eta_{\mu\nu} \Lambda^\nu{}_\beta = \Lambda^\mu{}_0 \eta_{\mu\nu} \Lambda^\nu{}_0 \\ -1 &= -(\Lambda^0{}_0)^2 + (\Lambda^1{}_0)^2 + (\Lambda^2{}_0)^2 + (\Lambda^3{}_0)^2 \\ (\Lambda^0{}_0)^2 &= 1 + (\Lambda^1{}_0)^2 + (\Lambda^2{}_0)^2 + (\Lambda^3{}_0)^2 \geq 1, \end{aligned} \quad (3.29)$$

isto é, $\Lambda^0{}_0 \geq +1$ ou $\Lambda^0{}_0 \leq -1$. Portanto, de acordo com o sinal do determinante e do elemento $\Lambda^0{}_0$, o grupo de Lorentz pode ser separado em quatro componentes claramente desconexas:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_+^\uparrow &= \{\Lambda, \Lambda \in O(3, 1), \det\Lambda = +1, \Lambda^0{}_0 \geq +1\} \\ \mathcal{L}_+^\downarrow &= \{\Lambda, \Lambda \in O(3, 1), \det\Lambda = +1, \Lambda^0{}_0 \leq -1\} \\ \mathcal{L}_-^\uparrow &= \{\Lambda, \Lambda \in O(3, 1), \det\Lambda = -1, \Lambda^0{}_0 \geq +1\} \\ \mathcal{L}_-^\downarrow &= \{\Lambda, \Lambda \in O(3, 1), \det\Lambda = -1, \Lambda^0{}_0 \leq -1\}. \end{aligned} \quad (3.30)$$

O subconjunto \mathcal{L}_+^\uparrow é a componente conexa própria e, portanto, constitui um subgrupo do grupo de Lorentz, chamado de grupo de Lorentz restrito. O subgrupo discreto que gera os outros subconjunto a partir de \mathcal{L}_+^\uparrow é dado por $\Gamma = \{I, -I, -\eta, \eta\}$, tal que

$$\mathcal{L}_+^\downarrow = -I\mathcal{L}_+^\uparrow \quad \mathcal{L}_-^\uparrow = -\eta\mathcal{L}_+^\uparrow \quad \mathcal{L}_-^\downarrow = +\eta\mathcal{L}_+^\uparrow. \quad (3.31)$$

Daqui em diante apenas o grupo de Lorentz restrito será considerado.

Os geradores das transformações de Lorentz restritas, assim como suas relações de comutação, serão importantes na extensão para o caso quântico. Para encontrá-los considere-se uma transformação de Lorentz infinitesimal $(I + w)$, em que w é uma matriz infinitesimal. Partindo da equação (3.6) e conservando apenas os termos até primeira ordem em w , a relação $(\delta^\alpha{}_\mu + w^\alpha{}_\mu)\eta_{\alpha\beta}(\delta^\beta{}_\nu + w^\beta{}_\nu) = \eta_{\mu\nu}$ resulta em $w_{\mu\nu} = -w_{\nu\mu}$, sendo $w_{\mu\nu} \equiv \eta_{\mu\alpha}w^\alpha{}_\nu$, ou seja, os $w_{\alpha\beta}$ são antissimétricos e a matriz $\{w_{\alpha\beta}\}$ formada por eles possui seis parâmetros

independentes:

$$\{w_{\alpha\beta}\} = \begin{pmatrix} 0 & w_{01} & w_{02} & w_{03} \\ -w_{01} & 0 & w_{12} & w_{13} \\ -w_{02} & -w_{12} & 0 & w_{23} \\ -w_{03} & -w_{13} & -w_{23} & 0 \end{pmatrix}. \quad (3.32)$$

A matriz $\{w_{\alpha\beta}\}$ pode ser parametrizada usando seis matrizes antissimétricas.

$$\begin{aligned} \{w_{\alpha\beta}\} &= w_{01}\{(M^{01})_{\alpha\beta}\} + w_{02}\{(M^{02})_{\alpha\beta}\} + w_{03}\{(M^{03})_{\alpha\beta}\} \\ &\quad + w_{23}\{(M^{23})_{\alpha\beta}\} + w_{13}\{(M^{13})_{\alpha\beta}\} + w_{12}\{(M^{12})_{\alpha\beta}\} \\ &= \sum_{\mu < \nu} w_{\mu\nu}\{(M^{\mu\nu})_{\alpha\beta}\}, \end{aligned} \quad (3.33)$$

sendo que

$$\begin{aligned} \{(M^{01})_{\alpha\beta}\} &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} & ; & \{(M^{23})_{\alpha\beta}\} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \\ \{(M^{02})_{\alpha\beta}\} &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} & ; & \{(M^{13})_{\alpha\beta}\} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ \{(M^{03})_{\alpha\beta}\} &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} & ; & \{(M^{12})_{\alpha\beta}\} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

As matrizes $\{(M^{\mu\nu})_{\alpha\beta}\}$ só estão definidas para $\mu < \nu$, no entanto elas também podem ser definidas para $\mu \geq \nu$ impondo-se que elas sejam antissimétricas com relação a $\mu \leftrightarrow \nu$, i.e.

$$\{(M^{\mu\nu})_{\alpha\beta}\} = -\{(M^{\nu\mu})_{\alpha\beta}\}, \quad (3.34)$$

o que implica em $\{(M^{\mu\nu})_{\alpha\beta}\} = 0$ para $\mu = \nu$. Essa definição permite escrever

$$\{w_{\alpha\beta}\} = \sum_{\mu < \nu} w_{\mu\nu}\{(M^{\mu\nu})_{\alpha\beta}\} = \sum_{\mu > \nu} w_{\mu\nu}\{(M^{\mu\nu})_{\alpha\beta}\} = \frac{1}{2}w_{\mu\nu}\{(M^{\mu\nu})_{\alpha\beta}\}, \quad (3.35)$$

e

$$\Lambda = I + \frac{1}{2}w_{\mu\nu}\{(M^{\mu\nu})^\alpha_\beta\}. \quad (3.36)$$

Portanto as matrizes $M^{\mu\nu} = \{(M^{\mu\nu})^\alpha_\beta\}$ são os geradores das transformações de Lorentz.

Definindo $J^{\mu\nu} = -iM^{\mu\nu}$, as transformações infinitesimais podem ser reescritas como

$$\Lambda = I + \frac{i}{2}w_{\mu\nu}J^{\mu\nu}, \quad (3.37)$$

em que está subentendido que $J^{\mu\nu} = \{(J^{\mu\nu})^\alpha_\beta\}$. É útil definir as seguintes grandezas

$$K_\alpha = \frac{1}{c}J_{\alpha\beta}v^\beta \quad e \quad J_\alpha = \frac{1}{2c}\varepsilon_{\beta\gamma\lambda\alpha}J^{\gamma\lambda}v^\beta, \quad (3.38)$$

em que v é a quadrivelocidade de um observador. Essas duas grandezas juntas são equivalentes a $J^{\mu\nu}$. Utilizando uma base ON $(e_{(\mu)})$ tal que $v = ce_{(0)}$, as grandezas anteriores são escritas como $(J_\alpha) = (0, \mathbf{J})$ e $(K_\alpha) = (0, \mathbf{K})$, com $K_i = K^i \equiv J_{i0} = J^{0i}$ e $J_i = J^i \equiv J_{jk} = J^{jk}$ (i, j, k cíclicos). A álgebra de Lie associada ao grupo de Lorentz restrito pode então ser escrita como:

$$[J_i, J_j] = i\epsilon_{ijk}J^k \quad (3.39)$$

$$[J_i, K_j] = i\epsilon_{ijk}K^k \quad (3.40)$$

$$[K_i, K_j] = -i\epsilon_{ijk}J^k. \quad (3.41)$$

A relação (3.39) forma uma subálgebra da álgebra de Lie do grupo de Lorentz restrito. Essa subálgebra é idêntica a álgebra das rotações espaciais e, de fato, os geradores \mathbf{J} estão associados com as rotações espaciais tridimensionais dadas pelo grupo $SO(3)$ que é subgrupo de \mathcal{L}_+^\uparrow .

Os seis parâmetros reais $w_{\mu\nu}$ são as coordenadas do grupo de Lorentz. Por estarem associados às rotações espaciais, os parâmetros associados aos geradores \mathbf{J} são denotados por

$$w_{23} = \theta_1, \quad w_{31} = \theta_2, \quad w_{12} = \theta_3, \quad (3.42)$$

sendo que $0 \leq \theta_i \leq 2\pi$. Os parâmetros associados aos outros três geradores são denotados por

$$w_{01} = \xi_1, \quad w_{02} = \xi_2, \quad w_{03} = \xi_3, \quad (3.43)$$

seu significado podendo ser obtido através do mapa exponencial de um subgrupo de um

único parâmetro associado a K_i . Para K_1 , por exemplo,

$$\Lambda = e^{i\xi_1 K_1} = \exp \left[\xi_1 \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right] = \begin{pmatrix} \cosh(\xi_1) & -\sinh(\xi_1) & 0 & 0 \\ -\sinh(\xi_1) & \cosh(\xi_1) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (3.44)$$

o que, realizando uma mudança de parâmetro dada por

$$\beta = \frac{\sinh(\xi_1)}{\cosh(\xi_1)}, \quad (3.45)$$

devolve a forma usual de uma transformação de Lorentz pura na direção $\hat{\mathbf{x}}$:

$$\Lambda = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{1-\beta^2} & -\beta/\sqrt{1-\beta^2} & 0 & 0 \\ -\beta/\sqrt{1-\beta^2} & 1/\sqrt{1-\beta^2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (3.46)$$

O parâmetro β está então associado a $\frac{\|\mathbf{v}\|}{c}$, em que $\|\mathbf{v}\|$ é o módulo da velocidade relativa entre dois observadores inerciais. Os parâmetros ξ_i formam um vetor $\boldsymbol{\xi} = (\xi_i)$ chamado de rapidez, sendo que $-\infty < \xi_i < \infty$, revelando o caráter não compacto do grupo de Lorentz.

3.3 Propriedades do Grupo de Poincaré

O grupo de Poincaré restrito, dado por

$$\mathcal{P}_+^\uparrow : \mathcal{T} \rtimes \mathcal{L}_+^\uparrow, \quad (3.47)$$

é um grupo de Lie de dimensão 10 não-compacto. Os geradores de \mathcal{P}_+^\uparrow são os mesmos do grupo de Lorentz restrito e do grupo de translações, já que os elementos do grupo de Poincaré são formados por pares ordenados dos elementos desses grupos.

Para completar a álgebra do grupo de Poincaré é preciso encontrar as relações de comutação entre os geradores de \mathcal{T} e \mathcal{L}_+^\uparrow , que dependem da regra de composição definida pelo produto semidireto. Para isso desenvolve-se de duas maneiras diferentes o produto $(a, \Lambda)(I + w, \varepsilon)(a, \Lambda)^{-1}$, em que $(I + w, \varepsilon)$ corresponde a uma transformação de Poincaré

infinitesimal [53]. Primeiramente,

$$(a, \Lambda)(I + w, \varepsilon)(a, \Lambda)^{-1} = (a, \Lambda) \left(I + \frac{1}{2} w_{\mu\nu} M^{\mu\nu} - i\varepsilon_{\mu} P^{\mu} \right) (-\Lambda^{-1}a, \Lambda^{-1}) \quad (3.48)$$

$$= I + \frac{1}{2} w_{\mu\nu}(a, \Lambda) M^{\mu\nu}(-\Lambda^{-1}a, \Lambda^{-1}) - i\varepsilon_{\mu}(a, \Lambda) P^{\mu}(-\Lambda^{-1}a, \Lambda^{-1}). \quad (3.49)$$

No entanto,

$$(a, \Lambda)(I + w, \varepsilon)(a, \Lambda)^{-1} = (\Lambda\varepsilon - \Lambda w \Lambda^{-1}a, I + \Lambda w \Lambda^{-1}) \quad (3.50)$$

$$= I + \frac{1}{2} (\Lambda w \Lambda^{-1})_{\mu\nu} M^{\mu\nu} + i(\Lambda w \Lambda^{-1}a)_{\mu} P^{\mu} - i(\Lambda\varepsilon)_{\mu} P^{\mu}, \quad (3.51)$$

portanto,

$$\frac{1}{2} w_{\mu\nu}(a, \Lambda) M^{\mu\nu}(-\Lambda^{-1}a, \Lambda^{-1}) - i\varepsilon_{\mu}(a, \Lambda) P^{\mu}(-\Lambda^{-1}a, \Lambda^{-1}) = \quad (3.52)$$

$$\frac{1}{2} (\Lambda w \Lambda^{-1})_{\mu\nu} M^{\mu\nu} + i(\Lambda w \Lambda^{-1}a)_{\mu} P^{\mu} - i(\Lambda\varepsilon)_{\mu} P^{\mu}. \quad (3.53)$$

Separando as partes que dependem de w e de ε , obtém-se que

$$\frac{1}{2} w_{\mu\nu}(a, \Lambda) M^{\mu\nu}(-\Lambda^{-1}a, \Lambda^{-1}) = \frac{1}{2} (\Lambda w \Lambda^{-1})_{\mu\nu} M^{\mu\nu} + i(\Lambda w \Lambda^{-1}a)_{\mu} P^{\mu} \quad (3.54)$$

$$\varepsilon_{\mu}(a, \Lambda) P^{\mu}(-\Lambda^{-1}a, \Lambda^{-1}) = (\Lambda\varepsilon)_{\mu} P^{\mu}. \quad (3.55)$$

O termo da direita em (3.54) pode ser expandido resultando em

$$(a, \Lambda) M^{\mu\nu}(-\Lambda^{-1}a, \Lambda^{-1}) = \Lambda_{\rho}^{\mu} \Lambda_{\sigma}^{\nu} (M^{\rho\sigma} + 2ia^{\sigma} P^{\rho}). \quad (3.56)$$

Além disso, levando em conta a antissimetria nos índices μ e ν em $M^{\mu\nu}$,

$$-(a, \Lambda) M^{\mu\nu}(-\Lambda^{-1}a, \Lambda^{-1}) = \Lambda_{\sigma}^{\nu} \Lambda_{\rho}^{\mu} (M^{\sigma\rho} + 2ia^{\rho} P^{\sigma}), \quad (3.57)$$

o que, subtraindo (3.57) de (3.56), resulta em

$$(a, \Lambda) M^{\mu\nu}(-\Lambda^{-1}a, \Lambda^{-1}) = \Lambda_{\rho}^{\mu} \Lambda_{\sigma}^{\nu} (M^{\rho\sigma} + ia^{\sigma} P^{\rho} - ia^{\rho} P^{\sigma}). \quad (3.58)$$

A expressão (3.55) também pode ser desenvolvida resultando em

$$(a, \Lambda) P^{\mu}(-\Lambda^{-1}a, \Lambda^{-1}) = \Lambda_{\nu}^{\mu} P^{\nu}. \quad (3.59)$$

Por fim, escolhendo $(a, \Lambda) = (\varepsilon, I + w)$ em (3.58) obtém-se que:

$$i[P^\rho, J^{\mu\nu}] = \eta^{\rho\mu} P^\nu - \eta^{\rho\nu} P^\mu \quad (3.60)$$

$$i[J^{\mu\nu}, J^{\rho\sigma}] = \eta^{\nu\rho} J^{\mu\sigma} - \eta^{\mu\rho} J^{\nu\sigma} - \eta^{\sigma\mu} J^{\rho\nu} + \eta^{\sigma\nu} J^{\rho\mu} \quad (3.61)$$

A relação (3.61) é equivalente às relações (3.39), (3.40) e (3.41) encontradas no tratamento do grupo de Lorentz. Junto com $[P^\mu, P^\nu] = 0$, as relações (3.60) e (3.61) formam a álgebra de Lie do grupo de Poincaré. Essa álgebra de Lie não é simples nem semissimples, já que o conjunto de geradores $\{P^\mu\}$ forma um ideal abeliano não trivial.

É possível mostrar que a álgebra de Poincaré possui dois invariantes de Casimir [55], i.e. duas quantidades que comutam com todos os geradores da álgebra e, portanto, são invariantes por transformações de Poincaré. Essas quantidades são dadas por

$$P^2 = P_\mu P^\mu \quad e \quad W^2 = W_\mu W^\mu, \quad (3.62)$$

sendo W_μ as componentes de um vetor (na verdade um pseudovetor), chamado de vetor de Pauli-Lubanski, dadas por

$$W_\mu = \frac{1}{2} \epsilon_{\sigma\nu\rho\mu} J^{\nu\rho} P^\sigma, \quad (3.63)$$

em que $\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma}$ é o tensor de Levi-Civita. As partes temporal e espacial do vetor de Pauli-Lubanski em uma dada base ON ($e_{(\alpha)}$) são dadas por

$$W_0 = -\mathbf{J} \cdot \mathbf{P}, \quad (3.64)$$

$$W_i = J_i P^0 + (\mathbf{K} \times \mathbf{P})_i. \quad (3.65)$$

Utilizando as relações de comutação apresentadas anteriormente, prova-se então que:

$$P^\mu W_\mu = 0, \quad (3.66)$$

$$[P^\mu, W^\nu] = 0, \quad (3.67)$$

$$[J^{\mu\nu}, W^\rho] = i(\eta^{\rho\nu} W^\mu - \eta^{\rho\mu} W^\nu). \quad (3.68)$$

3.4 Conexidade e Recobrimento Universal de \mathcal{P}_+^\uparrow

Existe uma última propriedade do grupo de Poincaré que deve ser observada: o número de classes de homotopia. É bem conhecido [52–56] que \mathcal{P}_+^\uparrow possui duas classes de homotopia, i.e. \mathcal{P}_+^\uparrow é 2-conexo. Para visualizar isso é mais simples observar apenas o subgrupo $SO(3)$ das rotações espaciais. Os elementos desse subgrupo, denotados por $(0, R)$, têm três parâmetros reais: dois ângulos polares α e β , que determinam o eixo de rotação \hat{n} , e o ângulo de rotação θ , sendo que $0 \leq \alpha \leq \pi$, $0 \leq \beta \leq 2\pi$ e $0 \leq \theta \leq \pi$. Portanto os

elementos $(0, R)$ podem ser denotados por $R(\hat{n}, \theta)$.

O espaço desses parâmetros pode ser imaginado como uma esfera tridimensional de raio π , tal que as coordenadas polares de um ponto especificam a direção de \hat{n} e a distância do ponto até a origem é igual ao ângulo de rotação θ . Como $R(-\hat{n}, \pi) = R(\hat{n}, \pi)$, os pontos em extremidades opostas de um diâmetro dessa esfera são equivalentes e, portanto, representam o mesmo elemento de $SO(3)$.

Na Figura 3.1 é apresentado um corte ao longo de uma diagonal da esfera de parâmetros. Os dois caminhos fechados C_1 e C_2 não podem ser continuamente deformados um no outro, portanto existem duas classes de homotopia em $SO(3)$. Posteriormente será necessário calcular as representações do grupo de Poincaré e o fato desse não ser simplesmente conexo torna essa tarefa mais complicada devido à existência de representações multivaloradas. No entanto, esse problema pode ser contornado utilizando o recobrimento universal de \mathcal{P}_+^\uparrow , denotado por $\tilde{\mathcal{P}}_+^\uparrow$. O recobrimento universal do grupo de Poincaré é dado pelo produto semidireto [52, 55]

$$\tilde{\mathcal{P}}_+^\uparrow = \mathcal{T} \times SL(2, \mathbb{C}), \tag{3.69}$$

em que \mathcal{T} é o grupo de translação e $SL(2, \mathbb{C})$ é o recobrimento universal de \mathcal{L}_+^\uparrow . Portanto basta estabelecer o homomorfismo de $SL(2, \mathbb{C})$ em \mathcal{L}_+^\uparrow que o homomorfismo de $\tilde{\mathcal{P}}_+^\uparrow$ em \mathcal{P}_+^\uparrow estará definido.

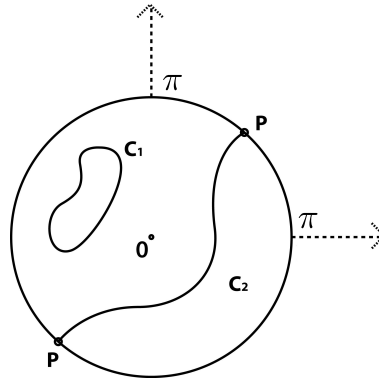


Figura 3.1 Corte transversal da esfera de parâmetros para $SO(3)$.

O grupo $SL(2, \mathbb{C})$ é formado por todas as matrizes 2×2 de elementos complexos e determinante igual a 1. Toda matriz 2×2 hermitiana M pode ser escrita na forma $v^\mu \sigma_\mu$, em que σ_0 é a identidade 2×2 , σ_i ($i = 1, 2, 3$) são as matrizes de Pauli

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \tag{3.70}$$

e os v^μ são coeficientes reais, portanto

$$\det(M) = (v^0)^2 - (v^1)^2 - (v^2)^2 - (v^3)^2 = -\eta_{\mu\nu}v^\mu v^\nu. \quad (3.71)$$

Se M for transformada em uma matriz M' através da operação $M' = AMA^\dagger$, em que $A \in SL(2, \mathbb{C})$, então M' também será hermitiana e $\det(M') = \det(M)$. Portanto M' pode ser escrita como $v'^\mu \sigma_\mu$. Pode-se mostrar então que

$$v^\mu = \frac{1}{2}\text{Tr}(\sigma_\mu M) \quad \text{e} \quad v'^\mu = \frac{1}{2}\text{Tr}(\sigma_\mu M'), \quad (3.72)$$

o que, usando $M' = AMA^\dagger$, resulta em

$$v'^\mu = \frac{1}{2}\text{Tr}(\sigma_\mu A \sigma_\nu A^\dagger) v^\nu. \quad (3.73)$$

Como $\eta_{\mu\nu}v^\mu v^\nu = -\det M = -\det(M') = \eta_{\mu\nu}v'^\mu v'^\nu$, segue que $\frac{1}{2}\text{Tr}(\sigma_\mu A \sigma_\nu A^\dagger)$ é uma transformação de Lorentz dada por

$$L^\mu{}_\nu(A) = \frac{1}{2}\text{Tr}(\sigma_\mu A \sigma_\nu A^\dagger). \quad (3.74)$$

Para terminar de demonstrar o homomorfismo é preciso mostrar que a regra de composição é respeitada. Para isso, basta olhar para o produto

$$L^\mu{}_\lambda(A)L^\lambda{}_\nu(B) = \frac{1}{4}\text{Tr}(\sigma_\mu A \sigma_\lambda A^\dagger)\text{Tr}(\sigma_\lambda B \sigma_\nu B^\dagger) = \frac{1}{2}\text{Tr}(\sigma_\mu AB \sigma_\nu (AB)^\dagger) = L^\mu{}_\nu(AB), \quad (3.75)$$

que implica em

$$L(AB) = L(A)L(B), \quad (3.76)$$

demonstrando o homomorfismo de $SL(2, \mathbb{C})$ em \mathcal{L}_+^\uparrow . Portanto, o homomorfismo é definido por

$$L : SL(2, \mathbb{C}) \rightarrow \mathcal{L}_+^\uparrow \quad (3.77)$$

$$A \mapsto L(A), \quad (3.78)$$

a aplicação $L(A)$ sendo dada por (3.74). O núcleo do homomorfismo é dado por $\text{Ker}(L) = \{-\sigma_0, \sigma_0\}$ e, portanto, \mathcal{L}_+^\uparrow é isomórfico a $SL(2, \mathbb{C})/\{-\sigma_0, \sigma_0\}$. Disso resulta que a cada transformação de Lorentz restrita Λ estão associadas duas matrizes, A e $-A$, de $SL(2, \mathbb{C})$, i.e. $\Lambda = L(A) = L(-A)$. Além disso,

$$L(A)L(A^{-1}) = L(AA^{-1}) = L(\sigma_0) = I, \quad (3.79)$$

ou seja, $L(A^{-1}) = L^{-1}(A)$.

É possível mostrar [52, 55] que uma matriz arbitrária de $SL(2, \mathbb{C})$ pode ser escrita na forma

$$A(\hat{n}, \theta) = \cos \theta \sigma_0 + i \operatorname{sen} \theta \vec{\sigma} \cdot \hat{n}, \quad (3.80)$$

sendo que θ e \hat{n} podem ser complexos e respeitam as relações $0 \leq \operatorname{Re}(\theta) \leq \pi$, $0 \leq \operatorname{Re}(\alpha) \leq \pi$ e $0 \leq \operatorname{Re}(\beta) \leq 2\pi$, em que α e β são os “ângulos polares” que definem \hat{n} . A inversa de $A(\hat{n}, \theta)$ é dada então por $A(-\hat{n}, \theta)$. Além disso, mostra-se que o subgrupo $SU(2)$ das matrizes unitárias (α, β e θ reais) corresponde ao subgrupo $SO(3)$ das matrizes de rotação em \mathcal{L}_+^\uparrow , enquanto que as matrizes hermitianas (α, β reais e θ imaginário) de $SL(2, \mathbb{C})$ correspondem aos *boost* puros de \mathcal{L}_+^\uparrow .

Para analisar a conexidade de $SL(2, \mathbb{C})$ basta olhar novamente para o subgrupo associado às rotações, ou seja, $SU(2)$. O espaço de parâmetros de $SU(2)$ pode ser imaginado, assim como foi feito para $SO(3)$, como uma esfera tridimensional de raio π . No entanto, $A(\hat{n}, \pi) = -\sigma_0$ para qualquer \hat{n} , ou seja, a superfície da esfera como um todo é um único ponto. Nesse espaço qualquer caminho fechado pode ser continuamente transformado em um ponto, como pode ser visto na Figura 3.2, e, portanto, o grupo é simplesmente conexo.

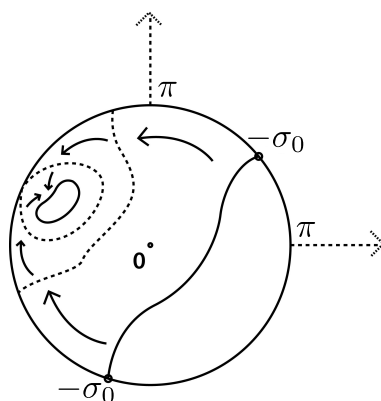


Figura 3.2 Corte transversal da esfera de parâmetros para $SU(2)$.

A Simetria Relativística em Mecânica Quântica

Neste trabalho, o regime analisado é tal que a natureza e o número de partículas não mudam durante os processos considerados. Apesar de simplificado, esse tratamento permite prever diversos efeitos quânticos interessantes [8, 9, 12–35] e, num futuro próximo, deve trazer consequências importantes para aplicações que envolvem o uso de graus de liberdade internos das partículas para codificar a informação. A partir deste capítulo será adotado o sistema de unidades com $c = 1$ e $\hbar = 1$.

Para levar em conta os efeitos da relatividade especial na MQ é preciso mapear o princípio de relatividade no formalismo quântico. Isso é feito impondo que o grupo de Poincaré seja um grupo de simetria fundamental da natureza, ou seja, dado um sistema físico S e um conjunto de observadores O , uma transformação $(a, \Lambda) \in \mathcal{P}_+^\uparrow$ atuando tanto em S quanto em O produzirá um novo sistema S' e um novo conjunto de observadores O' tal que os resultados das medições feitas por O' em S' sejam idênticos aos resultados das medições feitas por O em S [49, 52–55]. Quanticamente uma partícula pode ser representada por qualquer estado pertencente a um raio

$$\hat{\Psi} = \{e^{i\varphi} |\psi\rangle \mid \varphi \in \mathbb{R}\}, \quad (4.1)$$

o conjunto de todos os raios associados a um dado espaço de Hilbert \mathcal{H} sendo denotado por $P(\mathcal{H})$. Portanto a inclusão do princípio de relatividade na MQ implica na existência de uma correspondência entre raios para cada $(a, \Lambda) \in \mathcal{P}_+^\uparrow$ dada por uma aplicação

$$T_{(a,\Lambda)} : P(\mathcal{H}) \rightarrow P(\mathcal{H}) \quad (4.2)$$

$$\hat{\Psi} \mapsto \hat{\Psi}_{(a,\Lambda)} = T_{(a,\Lambda)} \hat{\Psi}, \quad (4.3)$$

tal que as probabilidades de transição $[\hat{\Psi}, \hat{\Phi}] \equiv |\langle \psi | \phi \rangle|^2$, com $|\psi\rangle \in \hat{\Psi}$ e $|\phi\rangle \in \hat{\Phi}$, sejam invariantes, i.e

$$[T_{(a,\Lambda)} \hat{\Psi}, T_{(a,\Lambda)} \hat{\Phi}] = [\hat{\Psi}, \hat{\Phi}], \quad \forall (a, \Lambda) \in \mathcal{P}_+^\uparrow. \quad (4.4)$$

O resultado da aplicação sucessiva de duas transformações de Poincaré, (a_1, Λ_1) seguida de (a_2, Λ_2) , em um sistema pode ser obtido através da aplicação direta de $(a_2, \Lambda_2)(a_1, \Lambda_1)$,

portanto

$$T_{(a_2, \Lambda_2)} T_{(a_1, \Lambda_1)} = T_{(a_2, \Lambda_2)(a_1, \Lambda_1)}. \quad (4.5)$$

Um importante teorema devido a Wigner [51–54] permite transformar essas relações entre raios em relações entre vetores do espaço de Hilbert \mathcal{H} .

Teorema 4.1 (Wigner). *Toda correspondência entre raios que satisfaz a equação (4.4) pode ser convertida em uma correspondência unitária ou anti-unitária entre vetores, i.e.*

$$|\psi\rangle = U(a, \Lambda) |\phi\rangle, \quad (4.6)$$

em que $|\phi\rangle \in \hat{\Phi}$, $|\psi\rangle \in T_{(a, \Lambda)} \hat{\Phi}$ e $U(a, \Lambda)$ é um operador unitário ou antiunitário¹.

Todo elemento g de um grupo de Lie conexo pode ser escrito como h^2 , em que h é algum outro elemento do grupo [49, 52–55]. Como o produto de dois operadores antiunitários é um operador unitário, a possibilidade de operadores antiunitários fica automaticamente excluída para representações de grupos de Lie conexos, como é o caso de \mathcal{P}_+^\uparrow .

Da relação (4.5) sabe-se que os operadores unitários $U(a_2, \Lambda_2)U(a_1, \Lambda_1)$ e $U(a_2 + \Lambda_2 a_1, \Lambda_2 \Lambda_1)$ convertem a mesma correspondência entre raios em correspondências entre vetores. A pergunta que surge naturalmente é: qual a relação entre $U(a_2, \Lambda_2)U(a_1, \Lambda_1)$ e $U(a_2 + \Lambda_2 a_1, \Lambda_2 \Lambda_1)$? Sejam $U(a, \Lambda)$ e $V(a, \Lambda)$ dois operadores unitários compatíveis com uma dada correspondência entre raios $T_{(a, \Lambda)}$, então, dado um estado $|\psi\rangle \in \hat{\Psi}$, a transformação $U(a, \Lambda)$ levará $|\psi\rangle$ em $U(a, \Lambda) |\psi\rangle \in \hat{\Psi}_{(a, \Lambda)}$ enquanto que $V(a, \Lambda)$ levará $|\psi\rangle$ em $V(a, \Lambda) |\psi\rangle \in \hat{\Psi}_{(a, \Lambda)}$ e, portanto, $U(a, \Lambda) |\psi\rangle$ e $V(a, \Lambda) |\psi\rangle$ deverão diferir no máximo por uma fase, implicando que

$$U(a, \Lambda) = e^{i\alpha} V(a, \Lambda).^2 \quad (4.7)$$

Devido a essa equivalência entre operadores que diferem por uma fase

$$U(P_2)U(P_1) = e^{i\alpha(P_2, P_1)} U(P_2 P_1), \quad (4.8)$$

sendo que a fase $\alpha(P_1, P_2)$ depende de que operadores unitários foram escolhidos para $P_1 = (a_1, \Lambda_1)$ e $P_2 = (a_2, \Lambda_2)$. Portanto os operadores $U(a, \Lambda)$ formam uma representação projetiva ou representação a menos de um fase do grupo de Poincaré restrito.

Uma análise superficial da equação (4.8) pode levar a crer que as fases nos operadores $U(a, \Lambda)$ podem ser ajustadas tal que uma relação da forma

$$U(a_2, \Lambda_2)U(a_1, \Lambda_1) = U(a_2 + \Lambda_2 a_1, \Lambda_2 \Lambda_1) \quad (4.9)$$

¹Um operador unitário (antiunitário) é um operador linear (antilinear) inversível cujo adjunto é igual à inversa.

²Em (4.7) poderia ser argumentado que a fase α depende do estado $|\psi\rangle$ em que os operadores atuam, no entanto é possível mostrar [53] que, para os casos de interesse, essa dependência não existe.

seja válida, porém isso nem sempre é possível e depende da existência ou não de representações multivaloradas [52]. No caso do grupo de Poincaré existem duas classes de homotopia, portanto representações 2-valoradas podem existir e a relação (4.9) não é necessariamente verdadeira. No entanto esse problema pode ser contornado utilizando as representações unitárias do recobrimento universal $\tilde{\mathcal{P}}_+^\uparrow$, já que para $\tilde{\mathcal{P}}_+^\uparrow$ é possível mostrar [52, 53, 55] que qualquer representação projetiva pode ter as fases ajustadas tal que se transforme em uma representação vetorial, isto é,

$$U(a_2, A_2)U(a_1, A_1) = U(a_2 + L(A_2)a_1, A_2A_1). \quad (4.10)$$

Uma das condições necessárias para que as representações projetivas de $\tilde{\mathcal{P}}_+^\uparrow$ possam ser reescritas como em (4.10) é que seus geradores possam ser escolhidos tal que satisfaçam a mesma álgebra dos geradores de $\tilde{\mathcal{P}}_+^\uparrow$ [53], que é isomórfica à álgebra de \mathcal{P}_+^\uparrow . Portanto, usando a mesma notação utilizada para \mathcal{P}_+^\uparrow , os geradores das representações unitárias de $\tilde{\mathcal{P}}_+^\uparrow$ satisfazem as relações (3.27), (3.60), (3.61) e, além disso, os operadores de Casimir podem ser definidos da mesma forma que em (3.62). Observe que as definições feitas para P^μ e $J^{\mu\nu}$ foram tais que, para representações unitárias, os operadores correspondentes são hermitianos e, portanto, possíveis observáveis dos sistemas quânticos.

De (4.10) obtém-se que

$$U(0, -A) = \pm U(0, A). \quad (4.11)$$

As representações para as quais a relação (4.11) com sinal positivo é válida são chamadas de representações inteiras, enquanto que as representações em que o sinal negativo prevalece são chamadas de semi-inteiras (representações 2-valoradas). As representações vetoriais de $\tilde{\mathcal{P}}_+^\uparrow$ equivalem a representações a menos de um sinal de \mathcal{P}_+^\uparrow , ou seja, o fato das representações projetivas de $\tilde{\mathcal{P}}_+^\uparrow$ poderem ser ajustadas tal que (4.10) seja válida implica que as representações projetivas de \mathcal{P}_+^\uparrow podem ser ajustadas tal que

$$U(a_1, \Lambda_1)U(a_2, \Lambda_2) = \pm U(a_1 + \Lambda_1 a_2, \Lambda_1 \Lambda_2) \quad (4.12)$$

seja verdadeira, o sinal negativo podendo ocorrer apenas nas representações semi-inteiras. Por simplicidade as representações do recobrimento universal serão utilizadas daqui em diante, assim como a seguinte notação:

$$\begin{aligned} U(a, \sigma_0) &\equiv U(a), \\ U(0, A) &\equiv U(A). \end{aligned}$$

4.1 Representações Irredutíveis de $\tilde{\mathcal{P}}_+^\uparrow$

Em geral a teoria de representações para grupos simples ou semissimples, assim como para grupos compactos, é bem entendida [55, 56]. Apesar de $\tilde{\mathcal{P}}_+^\uparrow$ não pertencer a nenhum desses tipos de grupos, suas representações são conhecidas, as RUIs podendo ser obtidas através do método das representações induzidas. Neste trabalho, essas representações serão obtidas seguindo a metodologia apresentada em [52, 53]. No entanto, com intuito de adiantar algumas idéias associadas a resultados que serão apresentados no Capítulo 5, a notação utilizada irá diferir em alguns pontos daquela presente na literatura.

Como visto anteriormente, $\tilde{\mathcal{P}}_+^\uparrow = \mathcal{T} \rtimes SL(2, \mathbb{C})$, sendo que \mathcal{T} é um subgrupo abeliano normal. Como \mathcal{T} é abeliano e não compacto, todas as suas representações irredutíveis são unidimensionais e podem ser caracterizadas pelos autovalores contínuos dos P^μ . Usando a notação de Dirac, cada representação irredutível de \mathcal{T} está associada a um estado $|p\rangle$ que é autoestado simultâneo de todas as componentes P^μ :

$$P^\mu |p\rangle = p^\mu |p\rangle, \quad (4.13)$$

$$\|P\|^2 |p\rangle = \|p\|^2 |p\rangle. \quad (4.14)$$

Além disso, usando o mapa exponencial, $U(a)$ pode ser escrito como $e^{-ia_\mu P^\mu}$, portanto

$$U(a) |p\rangle = e^{-ia_\mu p^\mu} |p\rangle. \quad (4.15)$$

Os estados $\{|p\rangle\}$ formam uma base (imprópria) completa no espaço associado às representações de \mathcal{T} , que é o espaço de Hilbert $L^2(\mathbb{R}^4, d^4p)$ das funções quadrado integráveis com relação a medida d^4p

Os p^μ ainda não foram devidamente interpretados, isto é, eles ainda estão desprovidos de sentido físico. Para introduzir seu significado primeiramente observa-se como essas grandezas se transformam sob a ação de uma transformação de Lorentz. Relações análogas às apresentadas em (3.58) e (3.59) são válidas para os geradores das representações unitárias, isto é,

$$U(a, A) P^\mu U^\dagger(a, A) = L_\nu{}^\mu(A) P^\nu, \quad (4.16)$$

$$U(a, A) J^{\mu\nu} U^\dagger(a, A) = L_\rho{}^\mu(A) L_\sigma{}^\nu(A) (J^{\rho\sigma} + a^\sigma P^\rho - a^\rho P^\sigma). \quad (4.17)$$

Usando (4.16) mostra-se que

$$P^\mu U(a, A) = L_\nu{}^\mu(A) U(a, A) P^\nu, \quad (4.18)$$

portanto

$$P^\mu U(0, A) |p\rangle = (L(A)p)^\mu U(0, A) |p\rangle, \quad (4.19)$$

ou seja, os autovalores p^μ de P^μ se transformam, sob a ação de transformações de Lorentz, como as componentes de um vetor contravariante, justificando a notação que vinha sendo adotada. Para finalizar a interpretação dos p^μ observa-se o efeito de uma translação espaço-temporal no caso não relativístico [52] em que uma partícula livre, de momento linear \mathbf{p} e energia ω , é descrita por uma função de onda dada por $e^{i(\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}-\omega t)}$. Realizando uma translação espaço-temporal ($\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x} + \mathbf{a}$, $t \rightarrow t + b$) essa função transforma-se em

$$e^{-i(\mathbf{p}\cdot\mathbf{a}-bt)}e^{i(\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}-\omega t)}. \quad (4.20)$$

O termo $e^{-i(\mathbf{p}\cdot\mathbf{a}-bt)}$ associado à translação espaço-temporal possui a mesma forma do termo que aparece em (4.15), o que sugere interpretar P^μ como sendo o operador quadrimomento. Com isso,

$$\|P\|^2 |p\rangle = -m^2 |p\rangle, \quad (4.21)$$

sendo m a massa do sistema.

Dado um vetor p , a órbita de $SL(2, \mathbb{C})$ em p é dada por

$$\mathcal{O}(p) = \{L(A)p | A \in SL(2, \mathbb{C})\},$$

vetores em uma mesma órbita sendo ditos equivalentes. Além do valor de $\|p\|^2$, o sinal da componente temporal de p quando $\|p\|^2 \leq 0$ também não é alterado por transformações de Lorentz restritas [52] e, portanto, diferentes órbitas podem ser identificadas pelo valor de $\|p\|^2$ e, se $\|p\|^2 \leq 0$, pelo sinal de p^0 . Cada representação irredutível do grupo de Poincaré corresponderá a uma órbita diferente, ou seja, os estados de uma mesma representação irredutível devem ter o mesmo valor de $\|p\|^2$ e, se $\|p\|^2 \leq 0$, o mesmo sinal de p^0 . Se isso não fosse verdade, ou seja, se uma representação com diferentes valores de $\|p\|^2$ fosse construída, então o conjunto dos estados com mesmo valor de $\|p\|^2$ formaria um subespaço invariante não trivial e a representação não seria irredutível (o mesmo raciocínio se aplica ao sinal de p^0 se $\|p\|^2 \leq 0$).

Por corresponderem a estados observados experimentalmente, as representações de interesse físico são aquelas cujos quadrimomentos pertencem a alguma das seguintes famílias de órbitas

$$\begin{aligned} m_+ &= \{p \in \mathbb{R}^4 | \|p\|^2 = -m^2 < 0, p^0 > 0\}, \\ 0_+ &= \{p \in \mathbb{R}^4 | \|p\|^2 = 0, p^0 > 0\}, \\ 0_0 &= \{p \in \mathbb{R}^4 | p = 0\}. \end{aligned}$$

A representação 0_0 corresponde à representação trivial em que $U(a, A) = I \forall (a, A) \in \tilde{\mathcal{P}}_+^\uparrow$. A representação trivial é unidimensional e o espaço associado a ela é descrito por um único estado $|p = 0\rangle \equiv |0\rangle$ invariante por todas as transformações de Poincaré, chamado de estado

de vácuo.

A teoria de RUIs desenvolvida a seguir é válida tanto para m_+ quanto para 0_+ . Para construir essas representações é necessário restringir as funções da representação de \mathcal{T} à órbita de interesse. Com esse intuito é introduzida uma medida com suporte invariante por \mathcal{L}_+^\uparrow concentrado em uma única órbita. Essa medida é dada por

$$d\mu(p) = d^4p \delta(\|p\|^2 + m^2) \theta(p^0) |B(p)|^2, \quad (4.22)$$

em que $\theta(p^0)$ é a função degrau de Heaviside e $|B(p)|^2$ é uma função positiva arbitrária não nula na órbita de interesse. Com isso

$$\int d\mu(p) |\psi(p)|^2 = \int \frac{d\mathbf{p}}{2\omega(\mathbf{p})} |B(\mathbf{p})|^2 |\psi(\mathbf{p})|^2 < \infty, \quad (4.23)$$

em que $\omega(\mathbf{p}) = p^0 = \sqrt{\|\mathbf{p}\|^2 + m^2}$, define a norma na órbita. Portanto o espaço de Hilbert considerado é o espaço $L^2(\mathbb{R}^3, d\mu(\mathbf{p}))$ das funções $\psi(\mathbf{p})$ quadrado integráveis com relação a medida $d\mu(\mathbf{p}) = \frac{|B(\mathbf{p})|^2 d\mathbf{p}}{2\omega(\mathbf{p})}$. Uma nova base $\{|\mathbf{p}\rangle\}$ restrita à órbita de interesse pode ser definida tal que

$$|\psi(\mathbf{p})|^2 = \langle \psi | \mathbf{p} \rangle \langle \mathbf{p} | \psi \rangle. \quad (4.24)$$

Dessa forma,

$$\int \frac{d\mathbf{p}}{2\omega(\mathbf{p})} |B(\mathbf{p})|^2 |\mathbf{p}\rangle \langle \mathbf{p}| = I, \quad (4.25)$$

em que I é a identidade na órbita. Atuando $|\mathbf{q}\rangle$ pela direita em (4.25) obtém-se que

$$\langle \mathbf{p} | \mathbf{q} \rangle = \frac{2\omega(\mathbf{q})}{|B(\mathbf{p})|^2} \delta(\mathbf{p} - \mathbf{q}) \equiv |A(\mathbf{p})|^2 \delta(\mathbf{p} - \mathbf{q}) \quad (4.26)$$

e, portanto,

$$\int \frac{d\mathbf{p}}{|A(\mathbf{p})|^2} |\mathbf{p}\rangle \langle \mathbf{p}| = I \quad (4.27)$$

define a relação de completeza restrita ao hiperbolóide correspondente à órbita analisada. O fator de normalização $|A(\mathbf{p})|^2$ é arbitrário e será escolhido posteriormente.

Para a base $\{|\mathbf{p}\rangle\}$ de uma dada representação irredutível permanecem válidas as relações

$$P^\mu |\mathbf{p}\rangle = p^\mu |\mathbf{p}\rangle, \quad (4.28)$$

$$\|P\|^2 |\mathbf{p}\rangle = -m^2 |\mathbf{p}\rangle, \quad (4.29)$$

$$U(a) |\mathbf{p}\rangle = e^{-ia_\mu p^\mu} |\mathbf{p}\rangle, \quad (4.30)$$

sendo que cada representação irredutível possui um valor bem definido de m e o valor de p^0 pode ser obtido de $p^0 = \omega(\mathbf{p})$.

É interessante analisar como a função $\delta(\mathbf{q} - \mathbf{p})$ se transforma sob a ação de uma mudança de coordenadas dada por uma transformação de Lorentz. A função delta é definida por

$$f(\mathbf{p}) = \int d\mathbf{q} \delta(\mathbf{q} - \mathbf{p}) f(\mathbf{q}). \quad (4.31)$$

Uma mudança de coordenadas $q = \Lambda q'$ resulta então em

$$f(\mathbf{p}) = \int \frac{d\mathbf{q}'}{2\omega_{\mathbf{q}'}} 2\omega_{\Lambda\mathbf{q}'} \delta(\Lambda\mathbf{q}' - \mathbf{p}) f(\Lambda\mathbf{q}'), \quad (4.32)$$

o que, por definição, deve ser igual a

$$\int d\mathbf{q}' \delta(\mathbf{q}' - \Lambda^{-1}\mathbf{p}) f(\Lambda\mathbf{q}'). \quad (4.33)$$

Portanto, escrevendo $p = \Lambda p'$,

$$\delta(\Lambda\mathbf{q}' - \Lambda\mathbf{p}') = \frac{\omega_{\mathbf{p}'}}{\omega_{\Lambda\mathbf{p}'}} \delta(\mathbf{q}' - \mathbf{p}'). \quad (4.34)$$

A distribuição $2\omega(\mathbf{p})\delta(\mathbf{q} - \mathbf{p})$ é chamada de delta invariante por Lorentz, pois de (4.34) resulta que

$$2\omega(\mathbf{p})\delta(\mathbf{q} - \mathbf{p}) = 2\omega_{\mathbf{p}'}\delta(\mathbf{q}' - \mathbf{p}'). \quad (4.35)$$

A base (imprópria) $\{|\mathbf{p}\rangle\}$ definida para cada órbita será utilizada para construir as representações irredutíveis de $\tilde{\mathcal{P}}_+^\uparrow$, no entanto o comportamento dos estados sob a ação de transformações de Poincaré gerais ainda não foi especificado, portanto é necessário acrescentar um rótulo α aos estados da base para representar possíveis graus de liberdade ainda não especificados associados à atuação do grupo de Poincaré como um todo.

Os elementos do grupo estabilizador $G_p \subset SL(2, \mathbb{C})$ de um dado vetor p serão denotados por M_p , de tal forma que $L(M_p)p = p$. De (4.18) segue que o rótulo \mathbf{p} em $|\mathbf{p}, \alpha\rangle$ não muda sob a ação de um $U(M_p)$, portanto $U(M_p)|\mathbf{p}, \alpha\rangle$ deve ser uma combinação linear de estados de momento \mathbf{p} :

$$U(M_p)|\mathbf{p}, \alpha\rangle = \sum_{\beta} Q_{\beta\alpha}^p(M_p)|\mathbf{p}, \beta\rangle. \quad (4.36)$$

Por simplicidade de notação e sem perda de generalidade, a relação (4.36) foi escrita assumindo que os índices β são discretos. Como $U(M_p^1 M_p^2) = U(M_p^1)U(M_p^2)$, então

$$\sum_{\beta\gamma} Q_{\beta\alpha}^p(M_p^2) Q_{\gamma\beta}^p(M_p^1)|\mathbf{p}, \gamma\rangle = \sum_{\gamma} Q_{\gamma\alpha}^p(M_p^1 M_p^2)|\mathbf{p}, \gamma\rangle \quad (4.37)$$

e

$$Q^p(M_p^1 M_p^2) = Q^p(M_p^1)Q^p(M_p^2). \quad (4.38)$$

A relação (4.38) implica que as matrizes $Q^p(M_p)$ formam uma representação do grupo estabilizador G_p e os índices α em $|\mathbf{p}, \alpha\rangle$ estão associados a estados de base dessa representação em um espaço de Hilbert \mathcal{H}_p . Por essa razão e por motivos que ficarão claros no Capítulo 5 é útil adotar a notação aparentemente redundante $|\mathbf{p}, \alpha_p\rangle$. Além disso, para garantir a unitariedade e irredutibilidade de $U(M_p)$, as representações $Q^p(M_p)$ de G_p também devem ser unitárias e irredutíveis.

Grupos estabilizadores de elementos pertencentes a uma mesma órbita são isomórficos. Para ver isso suponha dois quadrimomentos equivalentes p e q de grupos estabilizadores G_p e G_q , respectivamente. Dada uma transformação de Lorentz $L(A)$, tal que $L(A)q = p$, e um $M_q \in G_q$, então $L(M_q)q = q$ implica que

$$L(AM_qA^{-1})p = p, \quad (4.39)$$

portanto AM_qA^{-1} pertence ao grupo estabilizador de p :

$$AM_qA^{-1} = M_p \in G_p. \quad (4.40)$$

Essa correspondência é bijetiva, isto é, a cada M_q corresponde um M_p dado por (4.40) e a cada M_p corresponde um M_q dado por $A^{-1}M_pA$. Além disso, ela é preservada na multiplicação, isto é,

$$M_p^1 M_p^2 = AM_q^1 A^{-1} AM_q^2 A^{-1} = AM_q^1 M_q^2 A^{-1} \quad (4.41)$$

o que demonstra o isomorfismo dos grupos estabilizadores de quadrimomentos equivalentes. Portanto, dado o conjunto de geradores $\{\mathcal{G}_a(\mathbf{q})\}$ de G_q , se eles satisfazem

$$[\mathcal{G}_b(\mathbf{q}), \mathcal{G}_c(\mathbf{q})] = C^a{}_{bc} \mathcal{G}_a(\mathbf{q}), \quad (4.42)$$

então os geradores $\mathcal{G}_a(\mathbf{p}) = A\mathcal{G}_a(\mathbf{q})A^{-1}$ de G_p satisfarão

$$[\mathcal{G}_b(\mathbf{p}), \mathcal{G}_c(\mathbf{p})] = C^a{}_{bc} \mathcal{G}_a(\mathbf{p}). \quad (4.43)$$

Isso implica que os espaços de Hilbert \mathcal{H}_p associados às RUIs de grupos estabilizadores de quadrimomentos equivalentes também são isomórficos.

Seja $\{\mathcal{G}_a(\mathbf{p})\}$ o conjunto de geradores de G_p e dado que

$$P^\mu U(M_p) |\mathbf{p}, \alpha_p\rangle = \sum_{\beta} p^\mu Q_{\beta\alpha}^p(M_p) |\mathbf{p}, \beta_p\rangle = U(M_p) P^\mu |\mathbf{p}, \alpha_p\rangle, \quad (4.44)$$

então

$$[P^\mu, \mathcal{G}_a(\mathbf{p})] |\mathbf{p}, \alpha_p\rangle = 0. \quad (4.45)$$

Uma transformação infinitesimal $U(M_p^{inf})$ com parâmetro não nulo apenas para um dado

gerador $\mathcal{G}_a(\mathbf{p})$ pode ser escrita como

$$U(M_p^{inf}) = I + i\gamma\mathcal{G}_a(\mathbf{p}) \quad (4.46)$$

e a matriz $Q^p(M_p^{inf})$ associada a essa transformação infinitesimal é dada por

$$Q^p(M_p^{inf}) = 1 + i\gamma\mathbf{g}_a, \quad (4.47)$$

sendo \mathbf{g}_a o gerador da representação Q^p associado ao gerador $\mathcal{G}_a(\mathbf{p})$ de $U(M_p)$. Devido à relação (4.45), a base em \mathcal{H}_p pode ser construída tal que o rótulo α em $|\mathbf{p}, \alpha_p\rangle$ seja um autovalor de \mathbf{g}_a , portanto

$$\begin{aligned} U(M_p^{inf}) |\mathbf{p}, \alpha_p\rangle &= |\mathbf{p}, \alpha_p\rangle + i\gamma\mathcal{G}(\mathbf{p})_a |\mathbf{p}, \alpha_p\rangle = \sum_{\beta} Q_{\beta\alpha}^p(M_p^{inf}) |\mathbf{p}, \beta_p\rangle \\ &= |\mathbf{p}, \alpha_p\rangle + \sum_{\beta} i\gamma(\mathbf{g}_a)_{\beta\alpha} |\mathbf{p}, \beta_p\rangle \\ &= |\mathbf{p}, \alpha_p\rangle + \sum_{\beta} i\gamma\beta\delta_{\beta\alpha} |\mathbf{p}, \beta_p\rangle \\ &= |\mathbf{p}, \alpha_p\rangle + i\gamma\alpha |\mathbf{p}, \alpha_p\rangle \end{aligned}$$

e

$$\mathcal{G}_a(\mathbf{p}) |\mathbf{p}, \alpha_p\rangle = \alpha |\mathbf{p}, \alpha_p\rangle. \quad (4.48)$$

Para um elemento $\mathcal{G}_b(\mathbf{p})$ qualquer de $\{\mathcal{G}_a(\mathbf{p})\}$, um cálculo análogo ao anterior conduz a

$$\mathcal{G}_b(\mathbf{p}) |\mathbf{p}, \alpha_p\rangle = \sum_{\beta} (\mathbf{g}_b)_{\beta\alpha} |\mathbf{p}, \beta_p\rangle, \quad (4.49)$$

sendo $(\mathbf{g}_b)_{\beta\alpha}$ os elementos, na base em que \mathbf{g}_a é diagonal, do gerador \mathbf{g}_b da RUI de G_p associado ao gerador $\mathcal{G}_b(\mathbf{p})$.

Ao escrever

$$U(M_p) |\mathbf{p}, \alpha_p\rangle = \sum_{\beta} Q_{\beta\alpha}^p(M_p) |\mathbf{p}, \beta_p\rangle, \quad (4.50)$$

o estado $|\mathbf{p}, \alpha_p\rangle$ é tal que a equação (4.48) seja válida para um dado $\mathcal{G}_a(\mathbf{p})$, no entanto nenhuma regra para definir quem é o $\mathcal{G}_a(\mathbf{p})$ escolhido para cada p foi estabelecida, i.e. não há ainda uma relação que conecte a maneira com que as bases são escolhidas para cada \mathcal{H}_p . Isso será feito agora. Para cada órbita um vetor arbitrário k , chamado de vetor fundamental, é escolhido para ser utilizado como referência. O vetor k pode ser transformado por diferentes transformações de Lorentz em qualquer outro vetor equivalente p . Para cada $p \in \mathcal{O}(k)$ uma transformação $C(p, k)$ que transforme k em p é escolhida, isto é, $L(C(p, k))k = p$. Um conjunto de transformações $C(p, k)$, uma para cada p , forma um conjunto chamado

conjunto complementar de k se as transformações $C(p, k)$ forem contínuas em p . Existe certa arbitrariedade na escolha desse conjunto, já que qualquer transformação pertencente ao coset esquerdo $C(p, k)G_k$, i.e. qualquer transformação da forma $C(p, k)M_k(p)$ com $M_k(p) \in G_k$, transforma k em p , e, por isso, um índice C será introduzido nos estados de base. Os estados $|\mathbf{k}, \alpha_k\rangle^C$ estão associados a um $\mathcal{G}_a^C(\mathbf{k})$ escolhido arbitrariamente dentre os elementos do conjunto $\{\mathcal{G}_a(\mathbf{k})\}$, tal que

$$\mathcal{G}_a^C(\mathbf{k}) |\mathbf{k}, \alpha_k\rangle^C = \alpha |\mathbf{k}, \alpha_k\rangle^C. \quad (4.51)$$

Para fixar a base para todos os outros quadrimomentos da órbita basta impor que para cada $p \in \mathcal{O}(k)$ o índice α em $|\mathbf{p}, \alpha_p\rangle^C$ seja autovalor do operador dado por

$$\mathcal{G}_a^C(\mathbf{p}) = U(C(p, k))\mathcal{G}_a^C(\mathbf{k})U(C^{-1}(p, k)), \quad (4.52)$$

ou seja,

$$\mathcal{G}_a^C(\mathbf{p}) |\mathbf{p}, \alpha_p\rangle^C = U(C(p, k))\mathcal{G}_a^C(\mathbf{k})U(C^{-1}(p, k)) |\mathbf{p}, \alpha_p\rangle^C = \alpha |\mathbf{p}, \alpha_p\rangle^C. \quad (4.53)$$

Dessa forma os vetores de base que definem os estados pertencentes à órbita de interesse ficam completamente definidos uma vez escolhidos a base do espaço \mathcal{H}_k associado ao vetor fundamental k e um conjunto complementar $\{C(p, k)\}$.

De (4.18) resulta que $U(A) |\mathbf{p}, \alpha_p\rangle^C$ é uma superposição linear de estados de quadrimomento $L(A)p$,

$$U(A) |\mathbf{p}, \alpha_p\rangle^C = \sum_{\beta} \Pi_{\beta\alpha}^C(A, \mathbf{p}) |L(A)\mathbf{p}, \beta_{L(A)p}\rangle^C, \quad (4.54)$$

portanto

$$U(C(p, k)) |\mathbf{k}, \alpha_k\rangle^C = \sum_{\beta} \Pi_{\beta\alpha}^C(C(p, k), \mathbf{k}) |\mathbf{p}, \beta_p\rangle^C. \quad (4.55)$$

Partindo de (4.53) encontra-se quem são os elementos $\Pi_{\beta\alpha}^C(C(p, k), \mathbf{k})$ que definem (4.55):

$$\begin{aligned} \mathcal{G}_a^C(\mathbf{k}) |\mathbf{k}, \alpha_k\rangle &= \alpha |\mathbf{k}, \alpha_k\rangle^C \\ U(C(p, k))\mathcal{G}_a^C(\mathbf{k})U^\dagger(C(p, k))[U(C(p, k)) |\mathbf{k}, \alpha_k\rangle^C] &= \alpha U(C(p, k)) |\mathbf{k}, \alpha_k\rangle^C \\ \mathcal{G}_a^C(\mathbf{p})[U(C(p, k)) |\mathbf{k}, \alpha_k\rangle^C] &= \alpha [U(C(p, k)) |\mathbf{k}, \alpha_k\rangle^C], \end{aligned} \quad (4.56)$$

ou seja,

$$U(C(p, k)) |\mathbf{k}, \alpha_k\rangle^C \equiv N(k, p) |\mathbf{p}, \alpha_p\rangle^C \quad (4.57)$$

e

$$\Pi_{\beta\alpha}^C(C(p, k), \mathbf{k}) = N(k, p)\delta_{\beta\alpha}, \quad (4.58)$$

em que $N(k, p)$ é um fator numérico a ser determinado.

O conjunto complementar e o grupo estabilizador de k juntos com (4.40) podem ser utilizados para descrever o comportamento dos elementos dos outros grupos estabilizadores. Um $M_p \in G_p$ sempre pode ser escrito como

$$M_p = C(p, k)M_k^C(M_p, \mathbf{p})C^{-1}(p, k), \quad (4.59)$$

em que $M_k^C(M_p, \mathbf{p})$ é dado por

$$M_k^C(M_p, \mathbf{p}) = C^{-1}(p, k)M_pC(p, k). \quad (4.60)$$

Portanto,

$$U(M_p)|\mathbf{p}, \alpha_p\rangle^C = \sum_{\beta} Q_{\beta\alpha}^p(M_p)|\mathbf{p}, \beta_p\rangle^C = \frac{U(M_pC(p, k))}{N(k, p)}|\mathbf{k}, \alpha_k\rangle^C \quad (4.61)$$

$$= \frac{U(C(p, k)M_k^C(M_p, \mathbf{p}))}{N(k, p)}|\mathbf{k}, \alpha_k\rangle^C \quad (4.62)$$

$$= \sum_{\beta} Q_{\beta\alpha}^k(M_k^C(M_p, \mathbf{p}))|\mathbf{p}, \beta_p\rangle^C, \quad (4.63)$$

ou seja, $Q_{\beta\alpha}^p(M_p) = Q_{\beta\alpha}^k(M_k^C(M_p, \mathbf{p}))^3$.

Para definir como uma transformação $A \in SL(2, \mathbb{C})$ atua em um estado qualquer $|\mathbf{p}, \alpha_p\rangle^C$, observa-se que $L(C(p, k))k = p$ implica que

$$L(C(L(A)p, k))k = L(A)p = L(AC(p, k))k, \quad (4.64)$$

portanto

$$L(C^{-1}(L(A)p, k)AC(p, k))k = k, \quad (4.65)$$

ou seja, $C^{-1}(L(A)p, k)AC(p, k)$ pertence ao grupo estabilizador de k . Então uma transformação qualquer $A \in SL(2, \mathbb{C})$ sempre pode ser escrita como

$$A = C(L(A)p, k)M_k^C(A, \mathbf{p})C^{-1}(p, k), \quad (4.66)$$

em que

$$M_k^C(A, \mathbf{p}) = C^{-1}(L(A)p, k)AC(p, k). \quad (4.67)$$

³De fato, devido à arbitrariedade do conjunto complementar, seria adequado incluir um índice C em $Q_{\beta\alpha}^p(M_p)$, no entanto, para não sobrecarregar a notação, optou-se por omitir esse índice.

Com isso, para uma transformação qualquer $A \in SL(2, \mathbb{C})$,

$$\begin{aligned} U(A) |\mathbf{p}, \alpha_p\rangle^C &= U(C(L(A)p, k))U(M_k^C(A, \mathbf{p}))U(C^{-1}(p, k)) |\mathbf{p}, \alpha_p\rangle^C \\ &= \frac{N(k, L(A)p)}{N(k, p)} \sum_{\beta} Q_{\beta\alpha}^k(M_k^C(A, \mathbf{p})) |L(A)\mathbf{p}, \beta_{L(A)p}\rangle^C, \end{aligned} \quad (4.68)$$

ou seja, conhecido o grupo estabilizador de um vetor fundamental k e definido um conjunto complementar para o mesmo, basta conhecer as representações unitárias irredutíveis de G_k para se construir as representações unitárias do grupo de Poincaré como um todo. A partir de agora a notação $Q^k(M_k) \equiv Q(M_k)$ será adotada e, portanto, uma transformação de Poincaré geral é dada por:

$$U(a, A) |\mathbf{p}, \alpha_p\rangle^C = e^{-ia_{\mu}(L(A)p)^{\mu}} \frac{N(k, L(A)p)}{N(k, p)} \sum_{\beta} Q_{\beta\alpha}(M_k^C(A, \mathbf{p})) |L(A)\mathbf{p}, \beta_{L(A)p}\rangle^C. \quad (4.69)$$

Para finalizar a construção das RUIs de $\tilde{\mathcal{P}}_+^{\dagger}$ é necessário definir quem são os fatores $N(k, p)$. Partindo da relação

$${}^C\langle \mathbf{q}, \beta_q | U^{\dagger}(A)U(A) |\mathbf{p}, \alpha_p\rangle^C = {}^C\langle \mathbf{q}, \beta_q | \mathbf{p}, \alpha_p\rangle^C \quad (4.70)$$

tem-se que

$$\frac{|N(k, L(A)p)|^2}{|N(k, p)|^2} |A(L(A)p)|^2 \frac{\omega(\mathbf{p})}{\omega(L(A)\mathbf{p})} \delta(\mathbf{q} - \mathbf{p}) \delta_{\beta\alpha} = |A(\mathbf{p})|^2 \delta(\mathbf{q} - \mathbf{p}) \delta_{\beta\alpha}, \quad (4.71)$$

ou seja,

$$\frac{|N(k, L(A)p)|^2 |A(L(A)\mathbf{p})|^2}{\omega(L(A)\mathbf{p})} = \frac{|N(k, p)|^2 |A(\mathbf{p})|^2}{\omega(\mathbf{p})} \quad (4.72)$$

No entanto, em (4.72) $L(A)$ e \mathbf{p} são arbitrários, portanto

$$\frac{|N(k, p)|^2 |A(\mathbf{p})|^2}{\omega(\mathbf{p})} = |C(k)|^2. \quad (4.73)$$

Como $N(k, k) = 1$, então $|C(k)| = \frac{|A(\mathbf{k})|}{\omega(\mathbf{k})^{1/2}}$ e, considerando $N(k, p)$ real,

$$N(k, p) = \frac{|A(\mathbf{k})|}{|A(\mathbf{p})|} \left(\frac{\omega(\mathbf{p})}{\omega(\mathbf{k})} \right)^{1/2}, \quad (4.74)$$

ou seja, o valor de $N(k, p)$ depende da constante de normalização $A(\mathbf{p})$ ainda não definida. Para facilitar cálculos envolvendo mudanças de coordenadas é adequado escolher a medida $d\mu(\mathbf{p}) = d\mathbf{p}/|A(\mathbf{p})|^2$ tal que ela seja invariante por transformações de Lorentz restritas (i.e. $d\mu(\mathbf{p}) = d\mu(\Lambda\mathbf{p}') = d\mu(\mathbf{p}')$). Isso é feito tomando $|A(\mathbf{p})|^2 = 2\omega(\mathbf{p})$ e, portanto, $|B(\mathbf{p})|^2 = 1$,

o que implica em ${}^C\langle \mathbf{q}, \beta_q | \mathbf{p}, \alpha_p \rangle^C = 2\omega(\mathbf{p})\delta(\mathbf{q} - \mathbf{p})\delta_{\beta\alpha}$ e $N(k, p) = 1$. Com isso,

$$U(a, A) |\mathbf{p}, \alpha_p\rangle^C = e^{-ia_\mu(L(A)p)^\mu} \sum_{\beta} Q_{\beta\alpha}(M_k^C(A, \mathbf{p})) |L(A)\mathbf{p}, \beta_{L(A)p}\rangle^C \quad (4.75)$$

e a relação de completeza em uma dada órbita, considerando os graus de liberdade extras, se escreve

$$\sum_{\alpha} \int \frac{d\mathbf{p}}{2\omega(\mathbf{p})} |\mathbf{p}, \alpha_p\rangle^C {}^C\langle \mathbf{p}, \alpha_p| = I. \quad (4.76)$$

As leis de transformação dos rótulos α dependem explicitamente dos momentos e, por isso, eles são chamados de variáveis secundárias, ao contrário dos momentos que são denominados variáveis primárias [9, 11]. Da relação (4.49), que deve ser reescrita como

$$\mathcal{G}_b^C(\mathbf{p}) |\mathbf{p}, \alpha_p\rangle^C = \sum_{\beta} (\mathfrak{g}_b)_{\beta\alpha} |\mathbf{p}, \beta_p\rangle^C, \quad (4.77)$$

conclui-se que os rótulos α para diferentes $p \in \mathcal{O}(k)$ estão associados a conjuntos de observáveis diferentes. Apesar disso, sempre é possível construir operadores

$$\mathcal{G}_b^C = \sum_{\alpha} \int \frac{d\mathbf{p}}{2\omega(\mathbf{p})} \mathcal{G}_b^C(\mathbf{p}) |\mathbf{p}, \alpha_p\rangle^C {}^C\langle \mathbf{p}, \alpha_p| \quad (4.78)$$

tal que

$$\mathcal{G}_b^C |\mathbf{p}, \alpha_p\rangle^C = \mathcal{G}_b^C(\mathbf{p}) |\mathbf{p}, \alpha_p\rangle^C \quad (4.79)$$

para qualquer $p \in \mathcal{O}(k)$. Esses operadores são hermitianos e, portanto, possíveis observáveis do sistema. Além disso é possível mostrar que os $\{\mathcal{G}_a^C\}$ construídos dessa maneira respeitam as mesmas relações de comutação que os $\{\mathcal{G}_a^C(\mathbf{p})\}$, i.e.

$$[\mathcal{G}_b^C, \mathcal{G}_c^C] = C_{bc}^a \mathcal{G}_a^C. \quad (4.80)$$

Antes de aplicar o raciocínio desenvolvido nesta seção é preciso interpretar fisicamente o que representam os geradores $J^{\mu\nu}$. Esses operadores estão associados ao tensor relativístico de momento angular, J_α em (3.38) sendo interpretado como o momento angular total de uma partícula com relação a um observador de quadrivelocidade v e o operador K_α estando associado à definição do operador centro de massa de uma partícula com relação ao mesmo observador. Com isso fica clara a interpretação física de W_α , já que W_α/m é um caso particular de J_α , i.e. W_α/m é o momento angular total da partícula com relação a um observador inercial de mesma quadrivelocidade.

4.2 Partículas Massivas

As representações associadas às órbitas do tipo m_+ representam estados de partículas massivas. O vetor fundamental mais adequado para desenvolver essas representações é o quadrimento de repouso $k = (m, \mathbf{0})$. O grupo estabilizador de k é o subgrupo $SU(2)$ associado às rotações espaciais. $SU(2)$ é um grupo simples e compacto, suas RUIs sendo todas finitas. A teoria de representações de $SU(2)$ é bem conhecida, por isso os resultados relevantes serão apresentados mas não demonstrados, demonstrações rigorosas podendo ser encontradas em diversas referências, como por exemplo em [52, 55, 56].

As diferentes RUIs de $SU(2)$ são diferenciadas por um índice s , chamado de número quântico de spin, que pode assumir valores inteiros e semi-inteiros:

$$s = 0, 1/2, 1, 3/2, \dots$$

Além disso, estados em uma mesma representação irredutível, ou seja, estados com um mesmo valor de s , possuem outro índice α que pode assumir os valores $-s, -s+1, \dots, s-1, s$, as representações irredutíveis de $SU(2)$ sendo $(2s+1)$ -dimensionais. Os estados associados a uma mesma representação irredutível serão denotados por $|\mathbf{p}, \alpha_p\rangle$.

A dimensão das matrizes $Q(M_k)$ depende do valor de s . Dada a matriz

$$M_k = \begin{pmatrix} w & x \\ y & z \end{pmatrix}, \quad (4.81)$$

mostra-se [52] que os elementos de matriz $Q_{\alpha\beta}(M_k)$ são descritos por

$$Q_{\alpha\beta}(M_k) = \sum_{q=0}^{\infty} \frac{[(s+\alpha)!(s-\alpha)!(s+\beta)!(s-\beta)!]^{1/2}}{(s+\alpha-q)!q!(\beta-\alpha+q)!(s-\beta-q)!} w^{s+\alpha-q} x^q y^{\beta-\alpha+q} z^{s-\beta-q}, \quad (4.82)$$

sendo que só devem ser levados em conta no somatório os termos para os quais os fatoriais fazem sentido. No caso $s = \frac{1}{2}$, que é o de maior interesse por representar partículas de spin $\frac{1}{2}$, obtém-se simplesmente que $Q(M_k) = M_k$.

Os geradores de $SU(2)$ são dados por $\mathbf{J} = (J_1, J_2, J_3)$ e satisfazem as relações de comutação (3.39). Os estados $|\mathbf{0}, \alpha_k\rangle$ são comumente escolhidos tal que o índice α esteja associado a J_3 , ou seja,

$$J_3 |\mathbf{0}, \alpha_k\rangle = \alpha |\mathbf{0}, \alpha_k\rangle \quad (4.83)$$

e, portanto, α em $|\mathbf{0}, \alpha_k\rangle$ representa o momento angular total na direção z da partícula no repouso.

De (4.49) e utilizando as propriedades do grupo estabilizador $SU(2)$, obtém-se a

forma com que J_1 e J_2 atuam em $|\mathbf{0}, \alpha_k\rangle$:

$$J_i |\mathbf{0}, \alpha_k\rangle = \sum_{\beta} (\mathbf{g}_i)_{\beta\alpha} |\mathbf{0}, \beta_k\rangle, \quad (4.84)$$

sendo que

$$(\mathbf{g}_1)_{\beta\alpha} = \frac{1}{2} [\sqrt{s(s+1) - \alpha(\alpha+1)} \delta_{\beta, \alpha+1} + \sqrt{s(s+1) - \alpha(\alpha-1)} \delta_{\beta, \alpha-1}] \quad (4.85)$$

$$(\mathbf{g}_2)_{\beta\alpha} = \frac{1}{2i} [\sqrt{s(s+1) - \alpha(\alpha+1)} \delta_{\beta, \alpha+1} - \sqrt{s(s+1) - \alpha(\alpha-1)} \delta_{\beta, \alpha-1}] \quad (4.86)$$

$$(\mathbf{g}_3)_{\beta\alpha} = \beta \delta_{\beta\alpha}. \quad (4.87)$$

A notação \mathbf{g} será utilizada para denotar o vetor $(\mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2, \mathbf{g}_3)$.

É necessário definir também quem é o operador associado à variável s . No subespaço de estados de repouso o operador associado é obviamente $\|\mathbf{J}\|^2$, sendo que

$$\|\mathbf{J}\|^2 |\mathbf{0}, \alpha_k\rangle = s(s+1) |\mathbf{0}, \alpha_k\rangle. \quad (4.88)$$

É preciso encontrar então o operador que para qualquer valor de \mathbf{p} possui esse mesmo autovalor e que se reduza a $\|\mathbf{J}\|^2$ quando atuado num estado de repouso. Esse operador é dado por $\frac{W_\mu W^\mu}{m^2}$, em que W_μ é o pseudovetor de Pauli-Lubanski. Isso pode ser visto aplicando-se $\frac{W_\mu W^\mu}{m^2}$ ao estado no repouso, pois

$$\frac{W_\mu W^\mu}{m^2} |\mathbf{0}, \alpha_k\rangle = \|\mathbf{J}\|^2 |\mathbf{0}, \alpha_k\rangle = s(s+1) |\mathbf{0}, \alpha_k\rangle, \quad (4.89)$$

mas como $W_\mu W^\mu$ é invariante por transformações de Lorentz, então

$$\frac{W_\mu W^\mu}{m^2} |\mathbf{p}, \alpha_k\rangle = s(s+1) |\mathbf{p}, \alpha_k\rangle. \quad (4.90)$$

Usando a teoria desenvolvida anteriormente, a base $\{|\mathbf{p}, \alpha_p\rangle^C\}$ é construída tal que

$$U(C(p, k)) J_i U^\dagger(C(p, k)) |\mathbf{p}, \alpha_p\rangle^C = \sum_{\beta} (\mathbf{g}_i)_{\beta\alpha} |\mathbf{p}, \beta_p\rangle^C. \quad (4.91)$$

Apesar dos valores da variável α estarem definidos pelas representações unitárias irredutíveis de $SU(2)$, seu significado físico só está definido para o estado de repouso para o qual (4.83) é válida. Para obter o seu significado para outros estados de momento linear não nulo é preciso definir quem será o conjunto complementar utilizado, pois assim será encontrado quem são os operadores $U(C(p, k)) J_i U^\dagger(C(p, k))$. No caso das partículas massivas existem dois conjuntos complementares bastante explorados na literatura que dão origem a duas bases diferentes:

a de helicidade e a de spin. Das relações de comutação em (3.39) obtém-se facilmente que

$$[\mathcal{G}_i^C(\mathbf{p}), \mathcal{G}_j^C(\mathbf{p})] = i\epsilon_{ijk}\mathcal{G}_k^C(\mathbf{p}) \quad (4.92)$$

e, portanto,

$$[\mathcal{G}_i^C, \mathcal{G}_j^C] = i\epsilon_{ijk}\mathcal{G}_k^C. \quad (4.93)$$

A rotação

$$M_k^C(A, \mathbf{p}) = C^{-1}(L(A)p, k)AC(p, k) \quad (4.94)$$

é chamada de rotação de Wigner generalizada. De (4.75) percebe-se que uma transformação de Lorentz arbitrária induz, para cada valor de momento, uma rotação das variáveis de spin, dada pela rotação de Wigner (4.94).

4.2.1 Base de Helicidade

É possível mostrar [53] que um elemento qualquer de $SL(2, \mathbb{C})$ pode ser escrito como

$$A = R(\alpha, \beta, 0)B_3(\xi)R^{-1}(\phi, \theta, \psi), \quad (4.95)$$

em que $B_3(\xi)$ representa um *boost* puro de rapidez ξ ao longo do eixo z e $R(\phi, \theta, \psi)$ representa uma rotação espacial definida pelos ângulos de Euler ϕ, θ e ψ .

Para construir a base de helicidade, as transformações do conjunto complementar são escolhidas tal que

$$C(p, k) \equiv H(p, k) = R(\alpha, \beta, 0)B_3(\xi) \equiv R(\hat{\mathbf{p}})B(\|\mathbf{p}\|\hat{z}, \mathbf{0}), \quad (4.96)$$

os ângulos β e α representando os ângulos polar e azimutal do vetor \mathbf{p} . Em (4.96), $B(\|\mathbf{p}\|\hat{z}, \mathbf{0})$ representa um *boost* que leva o quadrimomento $k = (m, \mathbf{0})$ em $(\sqrt{\|\mathbf{p}\|^2 + m^2}, 0, 0, \|\mathbf{p}\|)$ e $R(\hat{\mathbf{p}})$ é uma rotação que leva $(\sqrt{\|\mathbf{p}\|^2 + m^2}, 0, 0, \|\mathbf{p}\|)$ em $p = (\sqrt{\|\mathbf{p}\|^2 + m^2}, \mathbf{p})$. As transformações de Lorentz associadas a esse conjunto complementar são dadas por

$$L(H(p, k)) = \begin{pmatrix} \frac{p^0}{m} & 0 & 0 & \frac{\|\mathbf{p}\|}{m} \\ \frac{p^1}{m} & \frac{p^1 p^3}{\sqrt{(p^1)^2 + (p^2)^2} \|\mathbf{p}\|} & \frac{-p^2}{\sqrt{(p^1)^2 + (p^2)^2}} & \frac{p^0 p^1}{m \|\mathbf{p}\|} \\ \frac{p^2}{m} & \frac{p^2 p^3}{\sqrt{(p^1)^2 + (p^2)^2} \|\mathbf{p}\|} & \frac{p^1}{\sqrt{(p^1)^2 + (p^2)^2}} & \frac{p^0 p^2}{m \|\mathbf{p}\|} \\ \frac{p^3}{m} & \frac{-\sqrt{(p^1)^2 + (p^2)^2}}{\|\mathbf{p}\|} & 0 & \frac{p^0 p^3}{m \|\mathbf{p}\|} \end{pmatrix}. \quad (4.97)$$

Os operadores $U(H(p, k))J_i U^\dagger(H(p, k))$ associados às variáveis secundárias serão denotados por $\mathcal{G}_i^H(\mathbf{p}) \equiv H_i(\mathbf{p})$ para a base de helicidade. No caso da helicidade, apenas a componente $H_3(\mathbf{p})$ é de interesse imediato e ela pode ser obtida de $U(H(p, k))J_3 U^\dagger(H(p, k))$

usando (4.17) e (4.97), resultando em

$$H_3(\mathbf{p}) = \frac{\mathbf{J} \cdot \mathbf{p}}{\|\mathbf{p}\|}. \quad (4.98)$$

Portanto, os índices α em $|\mathbf{p}, \alpha_p\rangle^H$ estão associados ao momento angular total da partícula na direção de seu momento linear, propriedade essa chamada de helicidade:

$$H_3(\mathbf{p}) |\mathbf{p}, \alpha_p\rangle^H = \alpha |\mathbf{p}, \alpha_p\rangle^H. \quad (4.99)$$

Em vez de trabalhar com um operador $H_3(\mathbf{p})$ para cada subespaço associado a um dado momento \mathbf{p} , a relação (4.78) pode ser utilizada para construir um operador H_3 válido para qualquer valor de momento:

$$H_3 = \frac{\mathbf{J} \cdot \mathbf{P}}{\|\mathbf{P}\|}. \quad (4.100)$$

Os estados $|\mathbf{p}, \alpha_p\rangle^H$ são portanto autoestados de $\|W\|^2$, $\|P\|^2$, P^μ e H_3 , com autovalores dados por:

$$\|W\|^2 |\mathbf{p}, \alpha_p\rangle^H = m^2 s(s+1) |\mathbf{p}, \alpha_p\rangle^H, \quad (4.101)$$

$$\|P\|^2 |\mathbf{p}, \alpha_p\rangle^H = -m^2 |\mathbf{p}, \alpha_p\rangle^H, \quad (4.102)$$

$$P^\mu |\mathbf{p}, \alpha_p\rangle^H = p^\mu |\mathbf{p}, \alpha_p\rangle^H, \quad (4.103)$$

$$H_3 |\mathbf{p}, \alpha_p\rangle^H = \alpha |\mathbf{p}, \alpha_p\rangle^H \quad (4.104)$$

$$(4.105)$$

4.2.2 Base de Spin

Para obter a chamada base de spin escolhe-se um conjunto complementar formado apenas por *boosts* puros dados por

$$C(p, k) \equiv B(p, k) = \left(\frac{p^0 + m}{2m} \right)^{1/2} \sigma_0 + \left(\frac{p^0 - m}{2m} \right)^{1/2} \frac{\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p}}{\|\mathbf{p}\|}. \quad (4.106)$$

A matriz $L(B(p, k))$ associada é dada por

$$L(B(p, k)) = \begin{pmatrix} \frac{p^0}{m} & \frac{p^1}{m} & \frac{p^2}{m} & \frac{p^3}{m} \\ \frac{p^1}{m} & \frac{p^1 p^1}{m(m+p^0)} + 1 & \frac{p^1 p^2}{m(m+p^0)} & \frac{p^1 p^3}{m(m+p^0)} \\ \frac{p^2}{m} & \frac{p^2 p^1}{m(m+p^0)} & \frac{p^2 p^2}{m(m+p^0)} + 1 & \frac{p^2 p^3}{m(m+p^0)} \\ \frac{p^3}{m} & \frac{p^3 p^1}{m(m+p^0)} & \frac{p^3 p^2}{m(m+p^0)} & \frac{p^3 p^3}{m(m+p^0)} + 1 \end{pmatrix}. \quad (4.107)$$

Para transformações $R \in SU(2)$, i.e. para rotações espaciais, as rotações de

Wigner na base de spin são independentes dos momentos [52], ou seja,

$$M_k^B(R, \mathbf{p}) \equiv M_k^B(R) = R, \quad \forall R \in SU(2). \quad (4.108)$$

Além disso, se $K \in SL(2, \mathbb{C})$ descrever um *boost* na direção $\hat{\mathbf{e}}$, i.e.

$$K = \cosh\left(\frac{\xi}{2}\right) \sigma_0 + \sinh\left(\frac{\xi}{2}\right) \boldsymbol{\sigma} \cdot \hat{\mathbf{e}}, \quad (4.109)$$

então a rotação de Wigner associada a essa transformação será dada por [52]

$$M_k^B(K, \mathbf{p}) = \frac{1}{[(\omega(\mathbf{p}) + m)(\omega(K\mathbf{p}) + m)]^{1/2}} \left[(\omega(\mathbf{p}) + m) \cosh\left(\frac{\xi}{2}\right) \sigma_0 + (\mathbf{p} \cdot \hat{\mathbf{e}}) \sinh\left(\frac{\xi}{2}\right) \sigma_0 - i \sinh\left(\frac{\xi}{2}\right) \boldsymbol{\sigma} \cdot (\mathbf{p} \times \hat{\mathbf{e}}) \right]. \quad (4.110)$$

Os operadores $U(B(p, k))J_iU^\dagger(B(p, k))$ associados aos rótulos α para cada valor de momento \mathbf{p} serão denotados por $\mathcal{G}_i^B(\mathbf{p}) \equiv S_i(\mathbf{p})$. Os operadores $S_i(\mathbf{p})$ podem ser obtidos expandindo-se a relação $U(B(p, k))J_iU^\dagger(B(p, k))$ usando (4.17) e (4.107), o que resulta em

$$m\mathbf{S}(p) = \mathbf{J}p^0 - \frac{(\mathbf{J} \cdot \mathbf{p})}{m + p^0} \mathbf{p} + (\mathbf{K} \times \mathbf{p}), \quad (4.111)$$

em que $\mathbf{S}(p) = (S_1(p), S_2(p), S_3(p))$ e $\mathbf{K} = (K_1, K_2, K_3)$. Assim como foi feito para o operador de helicidade, o operador (4.111) junto com (4.78) permite escrever um operador \mathbf{S} válido para qualquer valor de \mathbf{p} na órbita:

$$m\mathbf{S} = \mathbf{J}P^0 - \frac{(\mathbf{J} \cdot \mathbf{P})}{m + P^0} \mathbf{P} + (\mathbf{K} \times \mathbf{P}). \quad (4.112)$$

Diferentemente do que ocorreu na base de helicidade, a interpretação do operador \mathbf{S} não é imediata. No entanto, uma interpretação satisfatória pode ser obtida observando-se a relação entre $\mathbf{S}(\mathbf{p})$ e W_μ . De fato, $mS_i(\mathbf{p}) = [L(B^{-1}(p, k))W]_i$, ou seja, para uma partícula de momento bem definido \mathbf{p} , $m\mathbf{S}(\mathbf{p})$ é igual a parte espacial do operador de Pauli-Lubanski no referencial de repouso da partícula. Isso implica que $\mathbf{S}(\mathbf{p})$ é o momento angular total da partícula tomado no seu referencial de repouso.

Além da interpretação anterior, uma análise do modo com que \mathbf{S} está associado a \mathbf{J} também é útil. Para obter tal relação analisa-se o comportamento de um estado qualquer $|\psi\rangle$ pertencente à representação em questão quando transformado por uma rotação infinitesimal $R \in SU(2)$. Primeiramente,

$$L(R)p = p + i\boldsymbol{\theta} \cdot \mathbf{J}p = p + \Delta p = (p^0, \mathbf{p} - \boldsymbol{\theta} \times \mathbf{p}) = (p^0, \Delta \mathbf{p}), \quad (4.113)$$

em que $\boldsymbol{\theta}$ é um vetor formado por três ângulos infinitesimais. Tem-se então que

$$\psi_\alpha^B(\mathbf{p}) = {}^B\langle \mathbf{p}, \alpha_p | \psi' \rangle = {}^B\langle \mathbf{p}, \alpha_p | U(R) | \psi \rangle = \psi_\alpha^B(\mathbf{p}) + i\boldsymbol{\theta} \cdot ({}^B\langle \mathbf{p}, \alpha_p | \mathbf{J} | \psi \rangle). \quad (4.114)$$

No entanto

$${}^B\langle \mathbf{p}, \alpha_p | U(R) = \sum_\beta Q_{\beta\alpha}^*(M_k^B(R^{-1}, \mathbf{p})) {}^B\langle \mathbf{p} - \Delta\mathbf{p}, \beta_{p-\Delta p} | \quad (4.115)$$

e, portanto,

$$\psi_\alpha^B(\mathbf{p}) = \sum_\beta Q_{\beta\alpha}^*(M_k^B(R^{-1}, \mathbf{p})) \psi_\beta^B(\mathbf{p} - \Delta\mathbf{p}), \quad (4.116)$$

$$= \sum_\beta Q_{\beta\alpha}^*(M_k^B(R^{-1}, \mathbf{p})) \{ \psi_\beta^B(\mathbf{p}) - \Delta\mathbf{p} \cdot \nabla_{\mathbf{q}} \psi_\beta^B(\mathbf{q}) |_{\mathbf{p}} \}. \quad (4.117)$$

Utilizando (4.108) resulta que

$$Q_{\beta\alpha}^*(M_k^B(R^{-1}, \mathbf{p})) = \delta_{\beta\alpha} + i\boldsymbol{\theta} \cdot \mathbf{g}_{\alpha\beta}. \quad (4.118)$$

Substituindo (4.118) em (4.117) obtém-se então que

$$\psi_\alpha^B(\mathbf{p}) = \psi_\alpha^B(\mathbf{p}) - \Delta\mathbf{p} \cdot \nabla_{\mathbf{q}} \psi_\alpha^B(\mathbf{q}) |_{\mathbf{p}} + i\boldsymbol{\theta} \cdot \sum_\beta \mathbf{g}_{\alpha\beta} \psi_\beta^B(\mathbf{p}), \quad (4.119)$$

o que, comparando com (4.114) resulta em

$${}^B\langle \mathbf{p}, \alpha_p | \mathbf{J} | \psi \rangle = -i(\mathbf{p} \times \nabla_{\mathbf{q}}) \psi_\alpha^B(\mathbf{q}) |_{\mathbf{p}} + \sum_\beta \mathbf{g}_{\alpha\beta} \psi_\beta^B(\mathbf{p}). \quad (4.120)$$

No entanto, como

$$\mathbf{S} | \mathbf{p}, \alpha_p \rangle^B = \sum_\beta \mathbf{g}_{\beta\alpha} | \mathbf{p}, \beta_p \rangle^B, \quad (4.121)$$

então

$${}^B\langle \mathbf{p}, \alpha_p | \mathbf{J} | \psi \rangle = -i(\mathbf{p} \times \nabla_{\mathbf{q}}) \psi_\alpha^B(\mathbf{q}) |_{\mathbf{p}} + {}^B\langle \mathbf{p}, \alpha_p | \mathbf{S} | \psi \rangle. \quad (4.122)$$

O termo $-i(\mathbf{p} \times \nabla_{\mathbf{q}}) \psi_\alpha^B(\mathbf{q}) |_{\mathbf{p}}$ é idêntico à expressão não relativística do operador momento angular orbital na base dos momentos, portanto definindo o operador de momento angular orbital como

$${}^B\langle \mathbf{p}, \alpha_p | \mathbf{L} | \psi \rangle = -i(\mathbf{p} \times \nabla_{\mathbf{q}}) \psi_\alpha^B(\mathbf{q}) |_{\mathbf{p}}, \quad (4.123)$$

finalmente obtém-se que

$$\mathbf{J} = \mathbf{L} + \mathbf{S}. \quad (4.124)$$

De (4.124) resulta que o operador \mathbf{S} corresponde à diferença entre o momento angular total e o momento angular orbital da partícula, portanto está associado a um momento angular

intrínseco da partícula, chamado de spin. Esse resultado reforça a interpretação obtida através da conexão entre $\mathbf{S}(\mathbf{p})$ e o operador de Pauli-Lubanski. Observe que $\mathbf{J} \cdot \mathbf{P} = \mathbf{S} \cdot \mathbf{P}$, portanto o operador helicidade nada mais é do que a projeção do operador de spin na direção do momento da partícula.

Os estados $|\mathbf{p}, \alpha_p\rangle^B$ são portanto autoestados dos operadores $\|W\|^2$, $\|P\|^2$, P^μ e S_3 , com autovalores dados por

$$\|W\|^2 |\mathbf{p}, \alpha_p\rangle^B = m^2 s(s+1) |\mathbf{p}, \alpha_p\rangle^B, \quad (4.125)$$

$$\|P\|^2 |\mathbf{p}, \alpha_p\rangle^B = -m^2 |\mathbf{p}, \alpha_p\rangle^B, \quad (4.126)$$

$$P^\mu |\mathbf{p}, \alpha_p\rangle^B = p^\mu |\mathbf{p}, \alpha_p\rangle^B, \quad (4.127)$$

$$S_3 |\mathbf{p}, \alpha_p\rangle^B = \alpha |\mathbf{p}, \alpha_p\rangle^B. \quad (4.128)$$

4.3 Partículas Sem Massa

As representações associadas às órbitas do tipo 0_+ representam estados de partículas sem massa. Para desenvolver essas representações o quadrimomento $k = (1, 0, 0, 1) = (1, \hat{\mathbf{z}})$ é utilizado como vetor fundamental. É possível mostrar, partindo diretamente da relação $L(M_k)k = k$, que as transformações de Lorentz associadas ao grupo estabilizador de k são dadas por

$$L(M_k) = \begin{pmatrix} \frac{\|v\|^2}{2} + 1 & -v^T R & -\frac{\|v\|^2}{2} \\ -v & R & v \\ \frac{\|v\|^2}{2} & -v^T R & 1 - \frac{\|v\|^2}{2} \end{pmatrix}, \quad (4.129)$$

em que $v = (\alpha, \beta)$ é um vetor bidimensional e

$$R = \begin{pmatrix} \cos \theta & \text{sen } \theta \\ -\text{sen } \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \quad (4.130)$$

é uma rotação bidimensional.

Os elementos desse grupo estabilizador podem ser denotados por (v, R) , sendo que

$$(v, R)(u, S) = (v + Ru, RS). \quad (4.131)$$

Além disso, os elementos (v, I) formam um subgrupo abeliano normal não trivial do grupo estabilizador, isto é,

$$(v, I)(u, I) = (u, I)(v, I) = (v + u, I), \quad (4.132)$$

$$(u, R)(v, I)(-R^T u, R^T) = (Rv, I) \in \{(u, I)\} \quad (4.133)$$

e, portanto, o grupo estabilizador de k não é simples nem semissimples. O conjunto formado por todos os elementos da forma $(0, R)$ também forma um subgrupo abeliano pois

$$(0, R(\theta_1))(0, R(\theta_2)) = (0, R(\theta_2))(0, R(\theta_1)) = (0, R(\theta_1 + \theta_2)). \quad (4.134)$$

O grupo estabilizador é portanto isomórfico ao grupo Euclideo bidimensional $E(2)$, formado por translações e rotações bidimensionais.

Os geradores do grupo estabilizador podem ser obtidos diretamente de (4.129):

$$-i \frac{\partial L(M_k)}{\partial \alpha} \Big|_{\alpha, \beta, \theta=0} = -i \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & +1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = K_1 - J_2 \equiv A_1, \quad (4.135)$$

$$-i \frac{\partial L(M_k)}{\partial \beta} \Big|_{\alpha, \beta, \theta=0} = -i \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & +1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} = K_2 + J_1 \equiv A_2, \quad (4.136)$$

$$-i \frac{\partial L(M_k)}{\partial \theta} \Big|_{\alpha, \beta, \theta=0} = -i \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & +1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = J_3. \quad (4.137)$$

As relações de comutação são dadas então por

$$[J_3, A_1] = +iA_2, \quad (4.138)$$

$$[J_3, A_2] = -iA_1, \quad (4.139)$$

$$[A_1, A_2] = 0, \quad (4.140)$$

confirmando a afirmação anterior sobre o grupo estabilizador de k não ser simples nem semissimples.

Portanto, devido a estrutura de G_k , é necessário aplicar novamente a técnica das representações induzidas para se encontrar as representações irredutíveis de G_k . Por ser abeliano, as representações irredutíveis do subgrupo normal são todas unidimensionais e cada representação irredutível está associada a um estado $|a = (a_1, a_2)\rangle$ tal que

$$A_1 |a\rangle = a_1 |a\rangle, \quad (4.141)$$

$$A_2 |a\rangle = a_2 |a\rangle. \quad (4.142)$$

As rotações bidimensionais $(0, R)$ não alteram o valor de $\|a\|^2$, portanto existem apenas dois

tipos de órbitas para o grupo estabilizador de k : aquelas para as quais $\|a\|^2 > 0$ e aquelas em que $\|a\|^2 = 0$, i.e. $a = (0, 0)$.

É possível mostrar [53] que

$$U(R(\theta))A_1U^\dagger(R(\theta)) = A_1 \cos \theta - A_2 \sin \theta, \quad (4.143)$$

$$U(R(\theta))A_2U^\dagger(R(\theta)) = A_1 \sin \theta + A_2 \cos \theta. \quad (4.144)$$

Portanto, dado um estado $|a\rangle$, com $a \neq (0, 0)$,

$$A_1[U(R(\theta))|a\rangle] = (a_1 \cos \theta + a_2 \sin \theta)[U(R(\theta))|a\rangle], \quad (4.145)$$

$$A_2[U(R(\theta))|a\rangle] = (-a_1 \sin \theta + a_2 \cos \theta)[U(R(\theta))|a\rangle], \quad (4.146)$$

ou seja, $U(R(\theta))|a\rangle$ é autoestado de A_1 e A_2 com autovalores

$$(a_1 \cos \theta + a_2 \sin \theta) \quad \text{e} \quad (-a_1 \sin \theta + a_2 \cos \theta). \quad (4.147)$$

Como θ é contínuo então, para órbitas com $a \neq (0, 0)$, as representações irredutíveis possuem um conjunto contínuo de autovalores para A_1 e A_2 , i.e. as representações irredutíveis são infinitas. Experimentalmente nunca foram identificadas partículas sem massa com tal grau de liberdade contínuo, portanto as representações associadas às órbitas com $a \neq (0, 0)$ são desprezadas.

Resta analisar o segundo tipo de órbita em que $a = (0, 0)$, ou seja,

$$A_1|a\rangle = 0, \quad (4.148)$$

$$A_2|a\rangle = 0. \quad (4.149)$$

Os estados dessa órbita são distinguidos então pelo autovalor do terceiro gerador:

$$J_3|a = (0, 0), \sigma\rangle = \sigma|a = (0, 0), \sigma\rangle, \quad (4.150)$$

já que $[J_3, A_i]|a = (0, 0), \sigma\rangle = 0$, para $i = 1, 2$. Por simplicidade a notação $|a = (0, 0), \sigma\rangle \equiv |\sigma\rangle$ será adotada.

Os estados associados ao subespaço do vetor fundamental k são então da forma $|\hat{\mathbf{z}}, \sigma_k\rangle$, com

$$J_3|\hat{\mathbf{z}}, \sigma_k\rangle = \sigma|\hat{\mathbf{z}}, \sigma_k\rangle. \quad (4.151)$$

Além disso,

$$U(M_k) = U(v = (\alpha, \beta), I)U(0, R(\theta)) = e^{i(\alpha A_1 + \beta A_2)} e^{i\theta J_3}, \quad (4.152)$$

tal que

$$U(M_k)|\hat{\mathbf{z}}, \sigma_k\rangle = e^{i\theta\sigma}|\hat{\mathbf{z}}, \sigma_k\rangle, \quad (4.153)$$

ou seja,

$$Q_{\sigma'\sigma}^k(M_k) = e^{i\theta\sigma} \delta_{\sigma'\sigma}. \quad (4.154)$$

Para completar a análise das partículas sem massa deve-se escolher um conjunto complementar. Uma escolha adequada é aquela dada por

$$C(p, k) \equiv H(p, k) = R(\hat{\mathbf{p}})B(\|\mathbf{p}\|\hat{z}, \hat{z}), \quad (4.155)$$

em que $B(\|\mathbf{p}\|\hat{z}, \hat{z})$ é um *boost* na direção \hat{z} que leva $k = (1, 0, 0, 1)$ em $(\|\mathbf{p}\|, 0, 0, \|\mathbf{p}\|)$ e $R(\hat{\mathbf{p}})$ é uma rotação que leva $(\|\mathbf{p}\|, 0, 0, \|\mathbf{p}\|)$ em $p = (\|\mathbf{p}\|, \mathbf{p})$.

Dessa forma os operadores $U(H(p, k))J_3U^\dagger(H(p, k))$, denotados por $H(\mathbf{p})$, podem ser obtidos pelo mesmo caminho utilizado para a base de helicidade no caso de partículas massivas, resultando em

$$H(\mathbf{p}) = \frac{\mathbf{J} \cdot \mathbf{p}}{\|\mathbf{p}\|}, \quad (4.156)$$

ou seja, σ em $|\mathbf{p}, \sigma_p\rangle^H$ corresponde à helicidade da partícula.

Uma transformação de Lorentz qualquer sempre pode ser escrita como em (4.66), $M_k(A, \mathbf{p})$ sendo da forma (v, R) no caso considerado. A rotação $R \equiv R(\theta(A, \mathbf{p}))$ é chamada de rotação de Wigner para partículas sem massa. Com isso,

$$U(a, A) |\mathbf{p}, \sigma_p\rangle^H = e^{-ia_\mu(L(A)p)^\mu} e^{i\theta(A, \mathbf{p})\sigma} |L(A)\mathbf{p}, \sigma_{L(A)p}\rangle^H, \quad (4.157)$$

em que $\theta(A, \mathbf{p})$ corresponde ao ângulo da rotação de Wigner de $M_k(A, \mathbf{p})$.

Até o presente momento não foi discutido quais valores σ pode assumir. Dada uma rotação $R(\theta)$ em torno do eixo z ,

$$U(R(\theta)) |\hat{\mathbf{z}}, \sigma_k\rangle^H = e^{i\theta\sigma} |\hat{\mathbf{z}}, \sigma_k\rangle^H. \quad (4.158)$$

Além disso,

$$-R(\theta) = R(2\pi + \theta), \quad (4.159)$$

implicando em

$$U(-R(\theta)) |\hat{\mathbf{z}}, \sigma_k\rangle^H = e^{i(2\pi+\theta)\sigma} |\hat{\mathbf{z}}, \sigma_k\rangle^H. \quad (4.160)$$

No caso de representações inteiras,

$$U(-R(\theta)) = U(R(\theta)), \quad (4.161)$$

portanto

$$\cos(2\pi\sigma) = 1 \quad (4.162)$$

e $\sigma = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$. Para representações semi-inteiras,

$$U(-R(\theta)) = -U(R(\theta)), \quad (4.163)$$

portanto

$$\cos(2\pi\sigma) = -1 \quad (4.164)$$

e $\sigma = \pm\frac{1}{2}, \pm\frac{3}{2}, \dots$

Portanto, de modo geral $\sigma = 0, \pm\frac{1}{2}, \pm 1, \dots$, sendo que cada representação irreduzível é caracterizada por um único valor de σ . De (4.157) resulta que nenhuma transformação de Poincaré restrita é capaz de alterar o valor de σ , ou seja, a helicidade para partículas sem massa é invariante por transformações de Poincaré restritas. Seria justificável então pensar que cada estado de helicidade diferente corresponde a uma partícula diferente, no entanto é possível mostrar [52, 53] que partículas de helicidades opostas estão conectadas pela simetria de inversão espacial. Portanto, dado que as forças eletromagnéticas obedecem a simetria de inversão espacial, as partículas sem massa de helicidade ± 1 associadas a fenômenos eletromagnéticos são ambas chamadas de fóton.

Apesar da helicidade de partículas sem massa ser invariante por transformações de Poincaré restritas, o estado em si não é invariante. Em particular, um estado formado pela superposição linear de estados com helicidades opostas será transformado em uma superposição diferente por uma transformação de Poincaré. No caso de fótons, diferentes estados de polarização correspondem a diferentes superposições de estados de quadrimomento bem definido, isto é, estados de polarização gerais são da forma

$$|\mathbf{p}, \alpha_p\rangle = \alpha_+ |\mathbf{p}, +1_p\rangle^H + \alpha_- |\mathbf{p}, -1_p\rangle^H, \quad (4.165)$$

com

$$|\alpha_+|^2 + |\alpha_-|^2 = 1. \quad (4.166)$$

Portanto transformações de Poincaré restritas mudam o estado de polarização dos fótons.

Teoria da Informação Quântica Relativística

Na última década, diversos trabalhos abordaram diferentes cenários em que a introdução dos efeitos relativísticos na TIQ é necessária. Mesmo no cenário simplificado em que os observadores possuem velocidades relativas constantes, diversos fenômenos interessantes são observados, como por exemplo a não covariância das correlações [12, 26], da entropia [9], da distinguibilidade [11, 24] e da violação da desigualdade CHSH [8] para estados reduzidos de variáveis secundárias, assim como a limitação do formalismo de mapas completamente positivos [4] na descrição de canais de transmissão de informação envolvendo sistemas relativísticos [11, 18]. A seguir será feita uma revisão sucinta de alguns resultados importantes presentes na literatura, o foco estando voltado para o comportamento de sistemas formados por partículas massivas quando analisados por diferentes observadores inerciais, regime no qual as RUIs do grupo de Poincaré desenvolvidas no Capítulo 4 podem ser utilizadas para descrever os sistemas quânticos.

Como apontado no Capítulo 4, a primeira consequência relevante associada à introdução da simetria relativística na MQ é a existência de uma hierarquia nas variáveis que descrevem os estados quânticos. Essa hierarquia divide as variáveis dinâmicas em primárias e secundárias de acordo com a maneira com que elas se transformam sob a ação de transformações de Lorentz restritas, as transformações de variáveis secundárias sendo dependentes dos graus de liberdade de momento através das rotações de Wigner.

Apesar deste trabalho estar voltado ao estudo de partículas massivas, é interessante observar primeiramente a abordagem presente na literatura para as partículas sem massa (fótons), para as quais a variável secundária é dada pela polarização. É bem estabelecido na literatura o fato de que estados de polarização associados a valores distintos de momento pertencem a diferentes espaços de Hilbert \mathcal{H}_p , e por isso a notação $|\mathbf{p}, \alpha_p\rangle$ com um índice p na variável secundária é comum [11, 26, 29]. Isso implica que os estados de polarização para diferentes momentos não podem ser superpostos¹², ou seja, uma expressão da forma $|\alpha_p\rangle + |\beta_q\rangle$ não possui sentido se $q \neq p$ [11] e, portanto, o traço parcial dos graus de liberdade de momento não pode ser utilizado para construir MDRs de polarização que tenham sentido físico. Apesar disso, não é impossível construir MDRs de polarização para fótons, porém essas deverão ser efetivas, ou seja, elas irão depender do modelo de detecção de polarização adotado (geralmente uma medida POVM [4]) e, conseqüentemente, não descreverão todos

¹Na literatura é comum denominar essa restrição de regra de superseleção

²A base completa $|\mathbf{p}, \alpha_p\rangle$ não viola essa regra de superseleção devido à ortogonalidade da base de momento.

os tipos de medida de polarização possíveis [11, 29].

É curioso o fato de que, apesar do formalismo utilizado para obter as RUIs tanto de partículas sem massa quanto massivas ser o mesmo, o tratamento dado na literatura para as variáveis secundárias de partículas massivas em geral difere muito daquele utilizado para partículas sem massa. No caso de partículas massivas, a base de spin $\{|\mathbf{p}, \alpha_p\rangle^B\}$ é comumente adotada, porém em geral assume-se, explicitamente ou implicitamente, que a superposição $|\alpha_p\rangle^B + |\beta_q\rangle^B$ faz sentido mesmo que $p \neq q$. Isso corresponde a afirmar que $|\alpha_p\rangle^B \equiv |\alpha\rangle^B$ não depende de p , e ${}^B\langle\alpha_p|\beta_q\rangle^B = {}^B\langle\alpha|\beta\rangle^B = \delta_{\alpha\beta} \forall p, q \in \mathcal{O}(k)$, o que implica na ausência de uma regra de superseleção que impeça a utilização do traço parcial dos graus de liberdade de momento para partículas massivas [11–23]. Devido a essa abordagem, os subíndices p nas variáveis secundárias de partículas massivas não são utilizados na literatura e escreve-se $|\mathbf{p}, \alpha\rangle$ em vez da notação mais completa $|\mathbf{p}, \alpha_p\rangle^B$. Para partículas massivas, uma matriz densidade qualquer de uma única partícula pode ser escrita na base de spin como

$$\rho = \sum_{\alpha, \beta} \int \int d\mu(\mathbf{p}) d\mu(\mathbf{q}) \rho_{\alpha\beta}^B(\mathbf{p}, \mathbf{q}) |\mathbf{p}, \alpha_p\rangle^B {}^B\langle\mathbf{q}, \beta_q|, \quad (5.1)$$

em que $\rho_{\alpha\beta}^B(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = {}^B\langle\mathbf{p}, \alpha_p|\rho|\mathbf{q}, \beta_q\rangle^B$. Portanto, assumindo a possibilidade de se realizar o traço parcial dos graus de liberdade de momento, a seguinte MDR de spin é obtida:

$$\tau = \sum_{\alpha, \beta} |\alpha\rangle^B {}^B\langle\beta| \left(\int d\mu(\mathbf{p}) \rho_{\alpha\beta}^B(\mathbf{p}, \mathbf{p}) \right). \quad (5.2)$$

As MDRs de spin obtidas dessa forma são interpretadas como estando associadas às previsões estatísticas de medidas de spin realizadas por um aparato ideal que não é afetado pelo momento das partículas [9, 11].

É instrutivo analisar alguns exemplos que permitam observar de que modo as rotações de Wigner junto com o traço parcial dos graus de liberdade de momento implicam em um comportamento inusitado de certas propriedades associadas aos graus de liberdade secundários das partículas massivas. Como os resultados dos exemplos a seguir serão baseados na utilização do traço parcial, os subíndices de momento nas variáveis secundárias serão omitidos para que a notação fique mais próxima daquela encontrada na literatura. Seja Alice um observador inercial que descreve uma partícula de massa m e spin $1/2$ pelo estado

$$|\psi_{(1)}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(|\mathbf{p}, +1/2\rangle^B + |-\mathbf{p}, -1/2\rangle^B \right), \quad (5.3)$$

em que $\mathbf{p} = p\hat{\mathbf{y}} = \gamma_v m v \hat{\mathbf{y}}$ com $\gamma_v = (1 - v^2)^{-1/2}$. Suponha agora que a mesma partícula seja analisada por Bob, um outro observador inercial que se move com velocidade $w\hat{\mathbf{z}}$ com

relação a Alice. No referencial de Bob a partícula será descrita pela matriz densidade

$$\rho'_{(1)} = U(A)\rho_{(1)}U^\dagger(A) = U(A)|\psi_{(1)}\rangle\langle\psi_{(1)}|U^\dagger(A), \quad (5.4)$$

sendo $L(A)$ o *boost* que conecta os sistemas de coordenadas associados a cada um dos observadores. De (4.110) obtém-se que a rotação de Wigner associada a esse *boost* é dada por

$$M_k^B(A, \pm p\hat{\mathbf{y}}) = \cos\left(\frac{\varphi}{2}\right)\sigma_0 \pm i\sin\left(\frac{\varphi}{2}\right)\sigma_1, \quad (5.5)$$

em que

$$\sin\left(\frac{\varphi}{2}\right) = \sqrt{\frac{(\gamma_v - 1)(\gamma_w - 1)}{2(1 + \gamma_v\gamma_w)}}. \quad (5.6)$$

Portanto, tomando o traço parcial dos graus de liberdade de momento em $\rho'_{(1)}$, obtém-se a MDR de spin

$$\tau'_{(1)} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -i\sin\varphi \\ i\sin\varphi & 1 \end{pmatrix}. \quad (5.7)$$

A matriz densidade $\rho_{(1)}$ do sistema como um todo se transforma de maneira bem definida quando atuada a transformação de Lorentz $L(A)$, i.e.

$$\rho_{(1)} \rightarrow U(A)\rho_{(1)}U^\dagger(A), \quad (5.8)$$

portanto $\rho_{(1)}$ se transforma de forma covariante e, como $U(A)$ é unitário, todas as propriedades do sistema que são invariantes por transformações unitárias se conservam, como por exemplo a entropia. No entanto, algo inusitado ocorre quando a MDR de spin é considerada. Como as transformações relativísticas das variáveis secundárias dependem explicitamente das variáveis de momento, então as MDRs de spin de um mesmo sistema obtidas por diferentes observadores inerciais, além de serem distintas, não estão conectadas por nenhuma lei de transformação bem definida dependente apenas da transformação de Lorentz $L(A)$ que conecta os observadores [11, 19], i.e. as MDRs de spin não são covariantes.

Uma consequência imediata da não covariância das MDRs de spin se refere a pureza dos estados, que pode ser medida, por exemplo, pela entropia de von Neumann [4]

$$S(\tau) = -\text{Tr}(\tau \log \tau). \quad (5.9)$$

A entropia de von Neumann do estado reduzido (5.7) é dada por

$$\begin{aligned} S(\tau'_{(1)}) &= -\text{Tr}(\tau'_{(1)} \log \tau'_{(1)}) \\ &= -\frac{1}{2}(1 + \sin\varphi) \log\left(\frac{1}{2}(1 + \sin\varphi)\right) - \frac{1}{2}(1 - \sin\varphi) \log\left(\frac{1}{2}(1 - \sin\varphi)\right). \end{aligned} \quad (5.10)$$

O comportamento da entropia em função da velocidade de Bob para diferentes valores fixos de v está apresentado na Figura 5.1. Conclui-se desse resultado que a pureza das MDRs de spin depende do estado de movimento do observador em relação ao sistema analisado e da distribuição de momentos do sistema, ou seja, a entropia de von Neumann das MDRs de spin não é uma grandeza covariante. Essa característica da entropia das MDRs de spin é um resultado importante em TIQR, já que a entropia de von Neumann tem grande importância em diversos conceitos, como por exemplo na definição do limite de Holevo [49], e, portanto, esse comportamento tem consequências relevantes no estudo dos processos de transmissão de informação quando essa estiver codificada nos graus de liberdade secundários de partículas relativísticas.

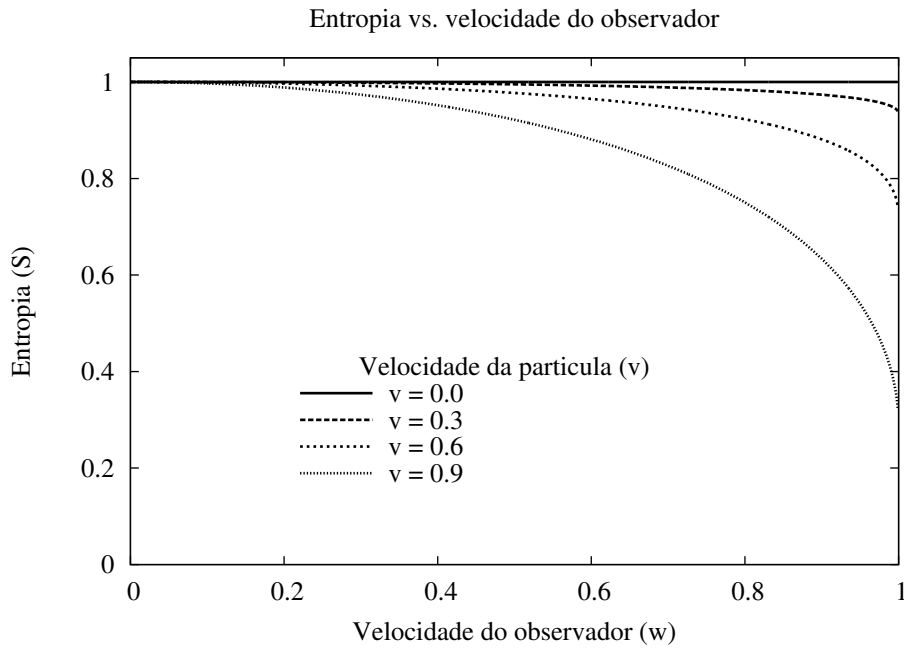


Figura 5.1 Entropia de von Neumann em função da velocidade de Bob para diferentes velocidades da partícula.

O efeito da dependência intrínseca dos spins com os momentos na distinguibilidade entre estados também pode ser analisado. Considere agora que existem dois estados possíveis para descrever uma partícula de massa m e spin $1/2$, sendo que no referencial de Alice o primeiro estado possível é dado por (5.3) e o segundo é descrito por

$$|\psi_{(2)}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(|\mathbf{p}, -1/2\rangle^B + |-\mathbf{p}, +1/2\rangle^B \right). \quad (5.11)$$

Para Bob a MDR de spin associada ao estado (5.11) é dada por

$$\tau'_{(2)} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & i \operatorname{sen} \varphi \\ -i \operatorname{sen} \varphi & 1 \end{pmatrix} \quad (5.12)$$

O critério mais simples para estudar a distinguibilidade entre dois estados quânticos é a probabilidade de erro, cuja definição é dada a seguir. Se um observador receber uma única cópia de um entre dois estados equiprováveis possíveis e realizar uma única operação com o objetivo de decidir que estado foi entregue, a probabilidade de obter uma resposta errada para uma medida otimizada será dada por [11]

$$P_E(\rho_1, \rho_2) = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} \text{Tr} \sqrt{(\rho_1 - \rho_2)^2}. \quad (5.13)$$

Essa definição aplicada às MDRs $\tau'_{(1)}$ e $\tau'_{(2)}$ resulta em

$$P_E(\tau'_{(1)}, \tau'_{(2)}) = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} \text{Tr} \sqrt{(\tau'_{(1)} - \tau'_{(2)})^2} = \frac{1}{2}(1 - \sin \varphi). \quad (5.14)$$

A probabilidade de erro em função da velocidade de Bob para diferentes valores fixos de v está apresentada na Figura 5.2. Obviamente a distinguibilidade entre os estados totais, i.e. considerando as variáveis primárias e secundárias, é preservada, já que os estados completos se transformam unitariamente sob a ação de transformações de Lorentz restritas. Isso implica que, dada qualquer medida de distinguibilidade D cujo valor diminui quando os estados se tornam mais distinguíveis,

$$D(\tau'_{(1)}, \tau'_{(2)}) \geq D(\rho_{(1)}, \rho_{(2)}), \quad (5.15)$$

sendo $\tau'_{(1)}$ e $\tau'_{(2)}$ as MDRs de spin em um dado referencial inercial e $\rho_{(1)}$ e $\rho_{(2)}$ as matrizes densidades completas em qualquer referencial inercial.

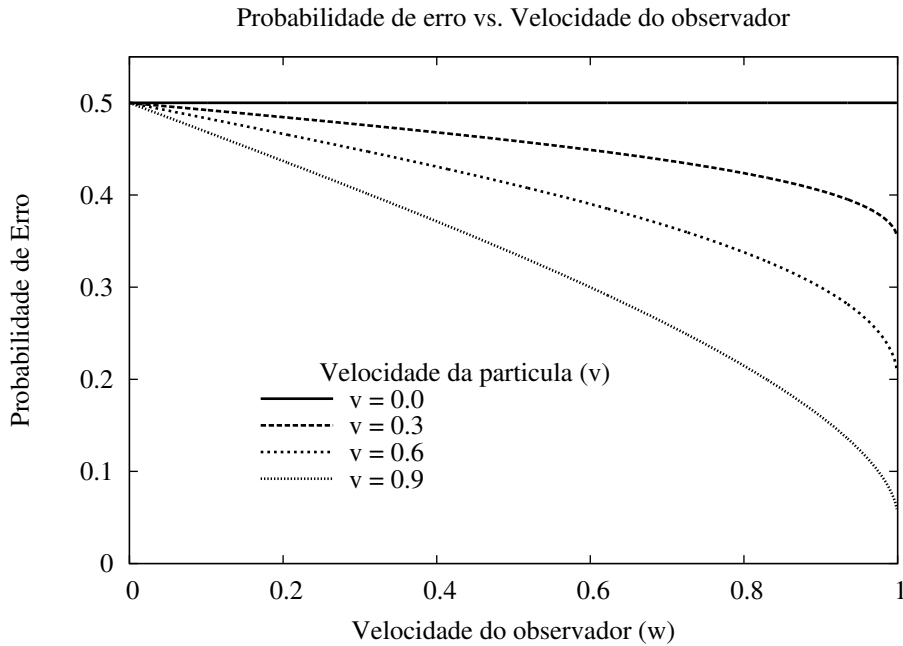


Figura 5.2 Probabilidade de erro em função da velocidade de Bob para diferentes valores de velocidade da partícula.

As transformações descritas por mapas completamente positivos tem um papel especial na TIQ e são muito importantes no estudo dos processos, das correlações e dos canais ruidosos quânticos [4]. Apesar das MDRs de spin para diferentes observadores inerciais não poderem ser conectadas por regras de transformação bem definidas, em alguns casos pode ser interessante tentar definir tais regras para classes particulares de estados. Nesse caso, seriam essas transformações mapas completamente positivos? É um fato bem estabelecido que a distinguibilidade não pode ser aprimorada por mapas completamente positivos, portanto do exemplo anterior conclui-se que essas transformações não podem em geral ser representadas por esse tipo de mapa [11, 18]. Isso implica em uma limitação do formalismo de mapas completamente positivos na descrição de processos de transmissão de informação em que efeitos relativísticos podem ser importantes.

Da mesma forma que as rotações de Wigner induzidas por uma mudança de referencial levam a não covariância da entropia e da distinguibilidade para as MDRs de spin de uma única partícula, as correlações spin-spin, momento-spin e momento-momento para um sistema composto também não serão covariantes. Um importante teorema por Gingrich *et al.* [12] estabelece que é necessário que o emaranhamento entre as partes de spin e momento de um estado puro seja não nulo para que o emaranhamento spin-spin possa aumentar sob a ação de transformações de Lorentz restritas. A demonstração desse teorema é apresentada a seguir. Suponha que em um dado referencial inercial um estado de duas partículas seja dado por

$$|\psi\rangle = \sum_{\alpha\beta} \int \int d\mu(\mathbf{p})d\mu(\mathbf{q})\phi_{\alpha\beta}\chi(\mathbf{p}, \mathbf{q}) |\mathbf{p}, \alpha_p\rangle^B |\mathbf{q}, \beta_q\rangle^B, \quad (5.16)$$

i.e. não há emaranhamento entre as partes de spin e momento das duas partículas. A MDR de spin para esse estado será dada então por

$$\tau = \sum_{\alpha_1\beta_1} \sum_{\alpha_2\beta_2} \phi_{\alpha_1\beta_1}\phi_{\alpha_2\beta_2}^* |\alpha_1\rangle^B \langle\alpha_2| \otimes |\beta_1\rangle^B \langle\beta_2| \quad (5.17)$$

Aplicando uma transformação de Lorentz $U(A) \otimes U(C)$ no sistema, ou seja, considerando que os observadores que irão analisar as partículas se encontram em referenciais inerciais diferentes, a MDR de spin passa a ser dada por

$$\tau' = \int \int d\mu(\mathbf{p})d\mu(\mathbf{q})|\chi(L(A)^{-1}\mathbf{p}, L(C)^{-1}\mathbf{q})|^2 F(\mathbf{p}, \mathbf{q})\tau F^\dagger(\mathbf{p}, \mathbf{q}), \quad (5.18)$$

em que

$$F(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = Q[M_k^B(A, L(A)^{-1}\mathbf{p})] \otimes Q[M_k^B(C, L(C)^{-1}\mathbf{q})]. \quad (5.19)$$

Como os operadores Q são representações unitárias finitas do grupo estabilizador $G_k = SU(2)$, a aplicação de qualquer *entanglement monotone*³ $E(\rho)$ no estado τ' resultará na

desigualdade

$$\begin{aligned} E(\tau') &\leq \int \int d\mu(\mathbf{p})d\mu(\mathbf{q})|\chi(L(A)^{-1}\mathbf{p}, L(C)^{-1}\mathbf{q})|^2 E(F(\mathbf{p}, \mathbf{q})\tau F^\dagger(\mathbf{p}, \mathbf{q})) \\ &= \int \int d\mu(\mathbf{p})d\mu(\mathbf{q})|\chi(L(A)^{-1}\mathbf{p}, L(C)^{-1}\mathbf{q})|^2 E(\tau) = E(\tau), \end{aligned} \quad (5.20)$$

o que demonstra o teorema. Devido à natureza convexa do conjunto dos operadores densidade, a extensão desse teorema para estados de mistura é imediata. É importante ressaltar que o emaranhamento entre as partículas, considerando tanto as variáveis de momento quanto as variáveis secundárias, não é alterado, já que as transformações de Lorentz são dadas por transformações unitárias que atuam em cada partícula separadamente. Portanto o que ocorre de fato é uma troca de correlações entre os diferentes graus de liberdade do sistema.

Baseando-se na aplicação do traço parcial dos graus de liberdade de momento e na interpretação dada às MDRs obtidas por esse método, diversos trabalhos foram desenvolvidos na última década para entender as consequências do comportamento não covariante das MDRs de spin para a TIQ [11–23]. No entanto, artigos recentes [35–38] apontaram problemas associados ao uso das MDRs de spin, gerando dúvidas quanto à validade dos resultados obtidos por meio dessas matrizes.

Em [35] argumenta-se que as MDRs de spin introduzidas por Peres *et al.* em [9] não são capazes de descrever todo tipo de medida de spin. Apesar do autor em [35] trabalhar com a base de helicidade, seu argumento pode ser mapeado para a base de spin da seguinte maneira: transformações unitárias $U(\mathbf{p})$ dependentes do momento podem ser aplicadas em $\mathcal{G}^B(\mathbf{p}) \equiv \mathbf{S}(\mathbf{p})$ para produzir novos operadores de spin, i.e. operadores $U(\mathbf{p})\mathbf{S}(\mathbf{p})U^\dagger(\mathbf{p})$ com o mesmo conjunto de autovalores que $\mathbf{S}(\mathbf{p})$ e que obedecem as relações de comutação (4.92), no entanto a estatística associada às medidas desses observáveis não pode ser explicada pelas MDRs de spin habituais. O autor conclui então que seriam necessárias MDRs diferentes das usuais para descrever a estatística desses outros observáveis de spin, porém ele não faz nenhuma referência quanto ao sentido físico dessas outras matrizes e não menciona de que forma elas seriam matematicamente definidas, visto que o traço parcial é capaz de fornecer apenas uma MDR de spin (a menos de mudanças de base triviais). Talvez pelo fato do autor não ter feito essas especificações, o argumento apresentado em [35] não recebeu a devida atenção de grande parte da comunidade de TIQR e o traço parcial dos momentos continuou a ser aplicado na construção de MDRs de spin [15–23].

Recentemente outras críticas às MDRs obtidas pelo traço parcial dos graus de liberdade de momento foram apresentadas em [36–38]. Em [36,37] argumenta-se que qualquer experimento que seja construído para medir grandezas associadas aos graus de liberdade de

³Um *entanglement monotone* é definido como sendo qualquer função $E(\rho)$ que satisfaça as seguintes propriedades: (1) $E(\rho)$ deve mapear operadores densidade em números positivos; (2) $E(\rho) = 0$ se e somente se ρ for separável; (3) $E(\rho)$ não aumenta em média sob LOCC (operações locais com comunicação clássica). [60]

spin dependerá do momento da partícula, o que, segundo os autores, tornaria as MDRs de spin e sua interpretação desprovidas de sentido físico. Para defender esse ponto de vista os autores construíram um modelo de medida Stern-Gerlach (SG) para partículas relativísticas e mostraram que as previsões obtidas para essas medidas de spin não poderiam ser explicadas utilizando o formalismo usual de MDRs. Apesar do modelo de medida SG introduzido pelo autores ser simplificado, resultados mais recentes [38], em que a interação do aparato SG com a partícula é tratada de maneira mais formal, mostram que a proposta feita em [36, 37] de fato descreve corretamente a medida SG para partículas relativísticas.

Na seção a seguir serão discutidos os argumentos e conclusões apresentados em [36, 37]. Além disso será mostrado que os resultados apresentados nesses artigos estão diretamente conectados à crítica feita previamente em [35]. Uma vez estabelecida essa conexão, será mostrado que essas críticas podem ser facilmente compreendidas, sem a necessidade de introduzir modelos de interação, por meio de uma análise cuidadosa da teoria de RUIs do grupo de Poincaré. Essa análise permitirá mostrar que, apesar do atual formalismo de MDRs de spin para partículas relativísticas não ser rigoroso, a introdução de uma nova abordagem permite manter os resultados presentes na literatura e ao mesmo tempo incorporar as recentes críticas. Para isso será necessário abandonar o traço parcial dos graus de liberdade de momento e a interpretação original das MDRs de spin.

5.1 Medida Stern-Gerlach de Partículas Relativísticas

Em [36] é proposto um modelo de medida SG para partículas relativísticas de spin $1/2$. Como visto no Capítulo 4, o operador de spin $\mathbf{S}(\mathbf{p})$ é interpretado como sendo o momento angular total de uma partícula de momento \mathbf{p} em seu próprio referencial. Partindo dessa interpretação e também do fato de que no referencial da partícula um tratamento não relativístico pode ser aplicado para descrever a interação no interior do aparato SG, os autores concluem que o eixo de quantização para uma partícula de momento bem definido que passa por um equipamento SG se dá na direção do campo magnético não homogêneo no próprio referencial da partícula. Suponha que uma partícula de momento $\mathbf{p} = \gamma_v m \mathbf{v}$ passe por um aparato SG cujo campo eletromagnético é descrito pelo tensor $F^{\mu\nu}$ no referencial do laboratório (Alice). No referencial da partícula o tensor eletromagnético será dado por $L(B(p, k)^{-1})^\alpha_\mu L(B(p, k)^{-1})^\beta_\nu F^{\mu\nu}$ e, portanto, a partícula perceberá o campo magnético apontando na direção

$$\hat{\mathbf{n}}(\hat{\mathbf{n}}_0, \mathbf{v}) = \frac{(\gamma + 1)\hat{\mathbf{n}}_0 - \gamma(\hat{\mathbf{n}}_0 \cdot \mathbf{v})\mathbf{v}}{[1 - (\hat{\mathbf{n}}_0 \cdot \mathbf{v})^2]^{1/2}(\gamma + 1)}, \quad (5.21)$$

sendo $\hat{\mathbf{n}}_0$ a direção do campo magnético não homogêneo no referencial de Alice.

Os autores argumentam então que, dada a interpretação de $\mathbf{S}(\mathbf{p})$ e o fato da separação momento-spin fazer sentido no referencial de repouso da partícula, os estados de

spin $|\phi_p\rangle^B$ definidos por

$$|\mathbf{p}, \phi_p\rangle^B = \sum_{\beta} Q_{\beta\alpha} [M_k^B(M_p, \mathbf{p})] |\mathbf{p}, \beta_p\rangle^B, \quad (5.22)$$

com $M_p \in G_p$, podem ser representados pelo vetor de Bloch $\mathbf{r} = \langle \phi_p | \boldsymbol{\sigma} | \phi_p \rangle$, em que $\boldsymbol{\sigma} = \sigma_1 \hat{\mathbf{x}} + \sigma_2 \hat{\mathbf{y}} + \sigma_3 \hat{\mathbf{z}}$. Dessa construção os autores concluem que, para se produzir um estado $|\mathbf{p}, \mathbf{r}\rangle^B$, é necessário medir o momento da partícula, obtendo os autovalores p^i para cada componente, e medir o spin com um eixo de quantização na direção \mathbf{r} no referencial de repouso da partícula obtendo como resultado o autovalor $+1/2$. Para medir o spin seria necessário então usar um equipamento SG com campo magnético não homogêneo apontando na direção \mathbf{r} no referencial da partícula, ou seja,

$$\hat{\mathbf{n}}(\hat{\mathbf{n}}_0, \mathbf{v}) = \mathbf{r}. \quad (5.23)$$

Caso Bob, um outro observador inercial, queira relatar o procedimento anterior de produção do estado, ele irá descrever o tensor eletromagnético do aparato SG por $L(A)^\alpha{}_\mu L(A)^\beta{}_\nu F^{\mu\nu}$ e o momento da partícula por $L(A)p$, sendo $L(A)$ a transformação de Lorentz que conecta os referenciais de Alice e Bob. Com isso, o vetor de Bloch \mathbf{r}' computado por Bob será dado por

$$\mathbf{r}' = R(M_k^B(A, \mathbf{p})) \hat{\mathbf{n}}(\hat{\mathbf{n}}_0, \mathbf{v}) = R(M_k^B(A, \mathbf{p})) \mathbf{r}, \quad (5.24)$$

em que $R(M_k^B(A, \mathbf{p}))$ é a transformação de $SO(3)$ associada à rotação de Wigner $M_k^B(A, \mathbf{p}) \in SU(2)$. Os autores concluem dessa relação que as rotações de Wigner são uma consequência direta da dependência do eixo de quantização de uma medida de spin com o momento da partícula.

Dessa construção obtém-se então que se uma partícula de spin $1/2$ preparada num estado $|\mathbf{p}, \mathbf{r}\rangle^B$ passar por um aparato SG com campo magnético não homogêneo na direção $\hat{\mathbf{n}}_0$ no referencial do laboratório, o valor esperado da medida será dado por

$$E(|p, \mathbf{r}\rangle^B, \hat{\mathbf{n}}_0) = \frac{\mathbf{r} \cdot \hat{\mathbf{n}}(\hat{\mathbf{n}}_0, \mathbf{v})}{2}. \quad (5.25)$$

Isso decorre do fato de que no referencial de repouso da partícula o formalismo não relativístico da MQ pode ser utilizado, portanto o valor esperado da medida SG é dado pelo produto escalar entre o vetor de Bloch e o vetor unitário na direção do campo magnético nesse referencial. Como o valor médio da medida apresentada depende explicitamente do momento da partícula, os autores concluem que não é possível prever corretamente a estatística de uma medida de spin sem considerar os graus de liberdade de momento e, por isso, não faz sentido definir MDRs de spin para sistemas relativísticos por meio do traço

parcial dos momentos.

Para expor a inconsistência das MDRs de spin, os autores apresentam um exemplo que consiste em uma partícula neutra de spin $1/2$ que se propaga com velocidade

$$\mathbf{v} = v(\cos(\theta)\hat{\mathbf{x}} + \sin(\theta)\hat{\mathbf{y}}) \quad (5.26)$$

e que passa por dois aparatos SG, o campo magnético não homogêneo do primeiro estando na direção $\hat{\mathbf{x}}$ e do segundo na direção $\hat{\mathbf{y}}$, sendo ambas as direções definidas no referencial do laboratório. É importante ressaltar que o observador não possui conhecimento acerca da velocidade da partícula, já que a única informação a que ele tem acesso é aquela obtida por meio do detector que retorna apenas resultados $\pm 1/2$. Os autores calculam então o valor esperado da medida do segundo SG depois do primeiro ter dado $+1/2$ como resultado. Partindo do fato de que o estado produzido pela primeira medida é dado por $|\mathbf{p}, \mathbf{r} = \hat{\mathbf{n}}(\hat{\mathbf{x}}, \mathbf{v})\rangle^B$, obtém-se, usando as equações (5.21) e (5.25), que o valor esperado da segunda medida é

$$E(v, \theta) = \frac{1}{2} \hat{\mathbf{n}}(\hat{\mathbf{x}}, \mathbf{v}) \cdot \hat{\mathbf{n}}(\hat{\mathbf{y}}, \mathbf{v}) = \frac{-v^2 \sin(\theta) \cos(\theta)}{2\sqrt{[1 - v^2 \cos^2(\theta)][1 - v^2 \sin^2(\theta)]}}. \quad (5.27)$$

O comportamento desse valor médio em função de v para diferentes valores de θ está apresentado na Figura 5.3.

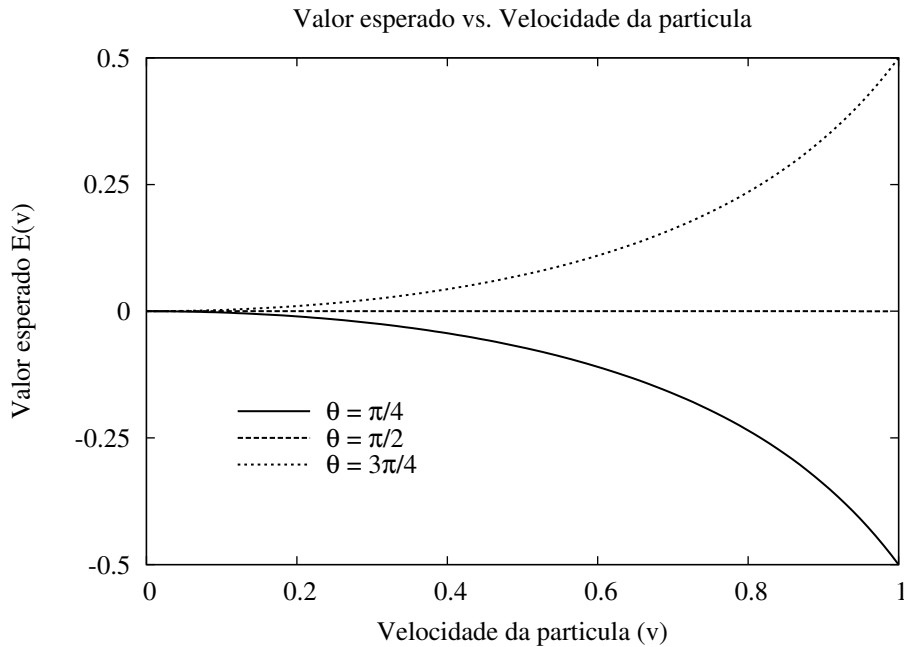


Figura 5.3 Valor esperado da medida de spin efetuada pelo equipamento SG em função do módulo da velocidade da partícula para diferentes valores de θ .

Como será mostrado a seguir, esse resultado não pode ser explicado pela MDR obtida por meio do traço parcial dos graus de liberdade de momento. A MDR de spin para

o estado produzido pelo primeiro SG é dada por

$$\tau = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & \hat{\mathbf{n}}(\hat{\mathbf{x}}, \mathbf{v}) \cdot \hat{\mathbf{x}} - i\hat{\mathbf{n}}(\hat{\mathbf{x}}, \mathbf{v}) \cdot \hat{\mathbf{y}} \\ \hat{\mathbf{n}}(\hat{\mathbf{x}}, \mathbf{v}) \cdot \hat{\mathbf{x}} + i\hat{\mathbf{n}}(\hat{\mathbf{x}}, \mathbf{v}) \cdot \hat{\mathbf{y}} & 1 \end{pmatrix}. \quad (5.28)$$

Qualquer observável que descreva uma medida de spin que possa ser associada a essa MDR deverá ser da forma $a_0\sigma_0 + \mathbf{a} \cdot \boldsymbol{\sigma}$, sendo que os coeficientes a_0 e \mathbf{a} são independentes dos momentos. Se esses coeficientes pudessem depender dos momentos, isso significaria que o observador tem conhecimento sobre a velocidade da partícula e, nesse caso, não faria mais sentido definir a MDR de spin. Como o valor médio de $\mathbf{a} \cdot \boldsymbol{\sigma}$ é dado por

$$\text{Tr}(\mathbf{a} \cdot \boldsymbol{\sigma} \tau) = \hat{\mathbf{n}}(\hat{\mathbf{x}}, \mathbf{v}) \cdot \mathbf{a}, \quad (5.29)$$

então é impossível reproduzir o resultado dado em (5.27) utilizando apenas a MDR de spin (5.28) obtida por meio do traço parcial.

Em [37], o modelo de medida SG descrito acima é utilizado em um sistema bipartite de partículas de spin 1/2 para analisar a violação da desigualdade CHSH⁴ [3]. Essa desigualdade é dada por

$$S = |\langle \hat{\mathbf{a}}_1, \hat{\mathbf{b}}_1 \rangle + \langle \hat{\mathbf{a}}_1, \hat{\mathbf{b}}_2 \rangle + \langle \hat{\mathbf{a}}_2, \hat{\mathbf{b}}_1 \rangle - \langle \hat{\mathbf{a}}_2, \hat{\mathbf{b}}_2 \rangle| \leq 2, \quad (5.30)$$

sendo que $\langle \hat{\mathbf{a}}_i, \hat{\mathbf{b}}_j \rangle$ representa o valor esperado normalizado de medidas de spin nas direções $\hat{\mathbf{a}}_i$ e $\hat{\mathbf{b}}_j$ realizadas sobre a primeira e a segunda partícula, respectivamente. O estado bipartite considerado em [37] é dado por

$$|\psi\rangle = \int d\mu(\mathbf{p}) \psi(\mathbf{p}) [|\mathbf{p}, +1/2\rangle_a^B |-\mathbf{p}, -1/2\rangle_b^B - |\mathbf{p}, -1/2\rangle_a^B |-\mathbf{p}, 1/2\rangle_b^B], \quad (5.31)$$

sendo que os subíndices a e b referem-se aos observadores, denominados de Alice e Bob, responsáveis por medir cada uma das partículas. Os subíndices p nas variáveis secundárias foram novamente omitidos para que a notação fique mais próxima daquela presente na literatura. Os autores consideram em seu exemplo que $\psi(\mathbf{p}) = \psi(p, \theta, \phi) \propto \delta(p - m_b \gamma_{v_b} v_b)$, sendo que m_b e v_b são a massa e a velocidade, respectivamente, da partícula analisada por Bob. Além disso, eles assumem que a massa m_a da partícula analisada por Alice é muito maior do que a massa da partícula de Bob, permitindo que um tratamento não relativístico seja aplicado à partícula de Alice. Apesar do estado (5.31) possuir a distribuição de momentos $\psi(p, \theta, \phi)$, os resultados presentes em [37] para esse modelo dependem apenas da análise do

⁴A desigualdade CHSH possui grande importância no estudo dos fundamentos da MQ e em diversos protocolos quânticos, a sua violação estando associada à impossibilidade de se construir uma teoria de variáveis ocultas que seja capaz de reproduzir os resultados quânticos e, ao mesmo tempo, respeitar as hipóteses de localidade e realismo feitas por Einstein *et al.* em [1].

estado

$$|\phi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}[|\mathbf{p}, +1/2\rangle_a^B |-\mathbf{p}, -1/2\rangle_b^B - |\mathbf{p}, -1/2\rangle_a^B |-\mathbf{p}, 1/2\rangle_b^B], \quad (5.32)$$

todos os resultados relacionados a (5.31) sendo obtidos por meio de médias sobre as previsões feitas para (5.32). Por isso, apenas os resultados para o estado (5.32) serão apresentados neste trabalho.

As direções dos campos magnéticos não homogêneos nos equipamentos SG considerados são dadas abaixo:

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{a}}_1 &= \hat{\mathbf{x}}, & \hat{\mathbf{b}}_1 &= \frac{\hat{\mathbf{x}} + \hat{\mathbf{y}}}{\sqrt{2}}, \\ \hat{\mathbf{a}}_2 &= \hat{\mathbf{y}}, & \hat{\mathbf{b}}_2 &= \frac{\hat{\mathbf{x}} - \hat{\mathbf{y}}}{\sqrt{2}}. \end{aligned} \quad (5.33)$$

Utilizando a definição (5.25) e o estado (5.32) obtém-se então que

$$\langle \hat{\mathbf{a}}_i, \hat{\mathbf{b}}_j \rangle = -\hat{\mathbf{n}}(\hat{\mathbf{a}}_i, \mathbf{v}_a) \cdot \hat{\mathbf{n}}(\hat{\mathbf{b}}_j, \mathbf{v}_b) \approx -\hat{\mathbf{a}}_i \cdot \hat{\mathbf{n}}(\hat{\mathbf{b}}_j, \mathbf{v}_b). \quad (5.34)$$

Portanto, o observável S da desigualdade CHSH é dado por

$$S(v_b, \theta, \phi) = \frac{|\sqrt{h_+(v_b, \theta, \phi)} (2\sqrt{1-v_b^2} + h_-(v_b, \theta, \phi)) + \sqrt{h_-(v_b, \theta, \phi)} (2\sqrt{1-v_b^2} + h_+(v_b, \theta, \phi))|}{\sqrt{h_+(v_b, \theta, \phi)}\sqrt{h_-(v_b, \theta, \phi)} (\sqrt{1-v_b^2} + 1)}, \quad (5.35)$$

sendo que

$$h_{\pm}(v_b, \theta, \phi) = 2 - (1 \pm \sin(2\phi)) (\sin \theta)^2 v_b^2 \quad (5.36)$$

Na Figura 5.4 está apresentado o comportamento de (5.35) em função das coordenadas polares θ e ϕ do momento para $v_b = 0.99$.

Violação da desigualdade CHSH

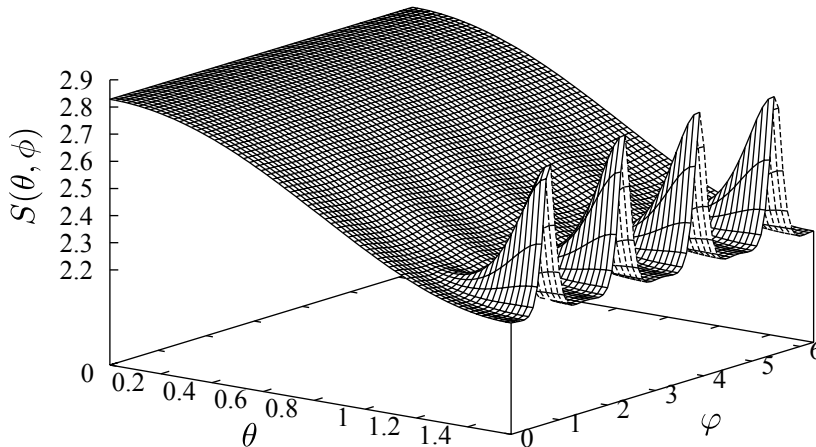


Figura 5.4 Violação da desigualdade CHSH em função das coordenadas polares do momento da partícula de Bob para $v_b = 0.99$.

A MDR de spin que resulta do traço parcial dos graus de liberdade de momento do estado (5.32) corresponde à matriz densidade do estado singleto

$$\frac{1}{\sqrt{2}}(|+1/2\rangle_a^B |-1/2\rangle_b^B - |-1/2\rangle_a^B |+1/2\rangle_b^B) \quad (5.37)$$

e, portanto, não depende de \mathbf{p} . Conseqüentemente, esse estado reduzido não é capaz de reproduzir as previsões obtidas em (5.35) para a violação da desigualdade CHSH envolvendo medidas SG do spin.

Existe uma conexão entre os resultados expostos nesta seção e a crítica apresentada em [35] que parece ter sido ignorada pelos autores de [36, 37]. Para demonstrar essa relação observe que a direção $\hat{\mathbf{n}}(\hat{\mathbf{n}}_0, \mathbf{v})$ pode ser escrita como

$$\hat{\mathbf{n}}(\hat{\mathbf{n}}_0, \mathbf{v}) = R(\hat{\mathbf{n}}_0, \mathbf{p})\hat{\mathbf{z}}, \quad (5.38)$$

em que $R(\hat{\mathbf{n}}_0, \mathbf{p})$ é uma rotação espacial. A seguir a notação $R(\hat{\mathbf{n}}_0, \mathbf{p})$ será utilizada tanto para indicar a matriz de rotação 3×3 pertencente a $SO(3)$ quanto a matriz correspondente de $SU(2)$. De acordo com a interpretação dada em [36] o equipamento SG mede o spin na direção $\hat{\mathbf{n}}(\hat{\mathbf{n}}_0, \mathbf{p})$ no referencial de repouso da partícula, ou seja, para um dado momento \mathbf{p} o observável que será medido é descrito por

$$\begin{aligned} U[B(p, k)]\mathbf{J} \cdot \hat{\mathbf{n}}(\hat{\mathbf{n}}_0, \mathbf{p})U^\dagger[B(p, k)] &= U[B(p, k)R(\hat{\mathbf{n}}_0, \mathbf{p})]\mathbf{J} \cdot \hat{\mathbf{z}}U^\dagger[B(p, k)R(\hat{\mathbf{n}}_0, \mathbf{p})] \\ &= U[M_p(\hat{\mathbf{n}}_0)B(p, k)]\mathbf{J} \cdot \hat{\mathbf{z}}U^\dagger[M_p(\hat{\mathbf{n}}_0)B(p, k)] \\ &= U[M_p(\hat{\mathbf{n}}_0)]\mathbf{S}(\mathbf{p}) \cdot \hat{\mathbf{z}}U^\dagger[M_p(\hat{\mathbf{n}}_0)], \end{aligned} \quad (5.39)$$

em que $M_p(\hat{\mathbf{n}}_0) = B(p, k)R(\hat{\mathbf{n}}_0, \mathbf{p})B^{-1}(p, k) \in G_p$. O observável associado à medida SG utilizada em [36, 37] corresponde, portanto, a uma transformação unitária dependente do momento do operador $\mathbf{S}(\mathbf{p})$, ou seja, é um observável de spin do tipo mencionado na discussão apresentada em [35].

5.2 MDRs Efetivas como Solução para as Críticas ao Modelo Usual de MDRs de Spin

Como apontado anteriormente, para se utilizar o traço parcial dos graus de liberdade de momento na construção de MDRs de spin para partículas massivas, é necessário assumir que a superposição $|\alpha_p\rangle^B + |\beta_q\rangle^B$ faz sentido mesmo que $p \neq q$, e que

$${}^B\langle\alpha_p|\beta_q\rangle^B = {}^B\langle\alpha|\beta\rangle^B = \delta_{\alpha\beta}, \quad \forall p, q \in \mathcal{O}(k). \quad (5.40)$$

Isso é equivalente a afirmar que a base associada ao conjunto complementar $\{B(p, k)\}$ possui propriedades privilegiadas com relação aos outros conjuntos complementares, já que (5.40) implica que

$${}^C\langle\beta_q|\alpha_p\rangle^C = Q_{\beta\alpha}[R^\dagger(\mathbf{q})R(\mathbf{p})], \quad (5.41)$$

sendo $R(p) = B^{-1}(p, k)C(p, k) \in SU(2)$. Contudo, como visto no Capítulo 4, todos os conjuntos complementares são equivalentes, portanto nenhuma das propriedades acima pode ser demonstrada para $\{B(p, k)\}$ a partir da teoria de RUIs do grupo de Poincaré.

No Capítulo 4 mostrou-se que diversos operadores de spin \mathcal{G}^C podem ser definidos para diferentes escolhas de conjunto complementar $\{C(p, k)\}$. Utilizando o fato de que as transformações $C(p, k)$ de um conjunto complementar qualquer sempre podem ser expandidas como

$$C(p, k) = B(p, k)R(p) = M_p[R(p)]B(p, k), \quad (5.42)$$

sendo que $R(p) \in SU(2)$ e

$$M_p[R(p)] = B(p, k)R(p)B^{-1}(p, k) \in G_p, \quad (5.43)$$

obtém-se que todo observável $\mathcal{G}^C(\mathbf{p})$ pode ser escrito como

$$\begin{aligned} \mathcal{G}^C(\mathbf{p}) &= U[C(p, k)]\mathbf{J}U^\dagger[C(p, k)] \\ &= U[M_p[R(p)]]U[B(p, k)]\mathbf{J}U^\dagger[B(p, k)]U^\dagger[M_p[R(p)]], \\ &= U[M_p[R(p)]]\mathbf{S}(\mathbf{p})U^\dagger[M_p[R(p)]]. \end{aligned} \quad (5.44)$$

Isso significa que os observáveis de spin utilizados na argumentação apresentada em [35] nada mais são do que os operadores \mathcal{G}^C associados a diferentes escolhas de conjunto complementar. Da mesma forma, (5.39) e (5.44) implicam que o modelo de medida SG utilizado em [36, 37] corresponde simplesmente a uma escolha particular de observáveis \mathcal{G}^C . Dessa constatação conclui-se que as críticas feitas tanto em [35] quanto em [36, 37] podem ser expressas em termos da teoria de RUIs do grupo de Poincaré conforme descrito a seguir. Para que o traço parcial dos graus de liberdade de momento de partículas massivas possa ser aplicado, é necessário que certas propriedades sejam impostas para a base associada ao conjunto complementar $\{B(p, k)\}$, o que não é justificável do ponto de vista da teoria de RUIs do grupo de Poincaré. Essas imposições são responsáveis por gerar inconsistências quando outros observáveis de spin associados a conjuntos complementares diferentes são considerados, levando à conclusão de que o traço parcial dos momentos para partículas massivas não é rigoroso e deve ser reavaliado juntamente com as MDRs de spin.

A conclusão acima implica na seguinte pergunta: será possível recuperar de uma maneira consistente os resultados presentes na literatura obtidos por meio do traço parcial dos graus de liberdade de momento? Para responder a essa questão é necessário relembrar por

que, no Capítulo 4, os subíndices p foram introduzidos nas variáveis secundárias de partículas massivas. Durante a construção das RUIs do grupo de Poincaré concluiu-se da equação (4.38) que os rótulos α em $|\mathbf{p}, \alpha\rangle$ estavam associados a estados de base de uma representação unitária do grupo estabilizador G_p . Isso significa que para cada valor de $p \in \mathcal{O}(k)$ os índices α estão definidos em espaços de Hilbert \mathcal{H}_p isomórficos porém diferentes, e por isso os subíndices de momento são introduzidos nas variáveis secundárias de spin. Essa análise permite visualizar o espaço de Hilbert associado a uma dada RUI do grupo de Poincaré como sendo composto por funções definidas no hiperbolóide associado à órbita $\mathcal{O}(k)$ e quadrado integráveis com relação à medida $d\mu(\mathbf{p})$, sendo que em cada ponto p do hiperbolóide encontra-se “acoplado” um espaço de Hilbert \mathcal{H}_p associado aos graus de liberdade secundários dos estados. Na Figura 5.5 é apresentado um esquema que permite visualizar essa construção. Observe que, apesar da relação (5.40) não ser rigorosa, não há nenhum problema com a definição

$${}^C\langle \mathbf{p}, \alpha_p | \mathbf{q}, \beta_q \rangle^C = 2\omega(\mathbf{q})\delta(\mathbf{p} - \mathbf{q})\delta_{\alpha\beta}, \quad (5.45)$$

já que a relação ${}^C\langle \alpha_p | \beta_p \rangle^C = \delta_{\alpha\beta}$ é bem definida para estados em um mesmo espaço de Hilbert \mathcal{H}_p .

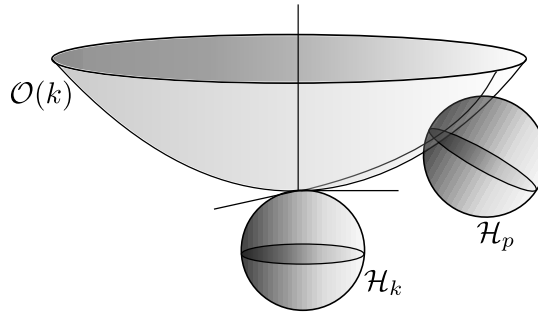


Figura 5.5 Esquema do espaço de Hilbert associado a uma dada RUI do grupo de Poincaré

A construção esquematizada na Figura 5.5 deixa claro que, devido à estrutura do espaço de Hilbert dos estados totais, não existe uma única maneira de se comparar os estados de spin definidos nos diferentes espaços \mathcal{H}_p . Por isso não é possível inferir da teoria de RUIs do grupo de Poincaré que a superposição $|\alpha_p\rangle^B + |\beta_q\rangle^B$ faz sentido para $p \neq q$, nem que a propriedade (5.40) é verdadeira. Outra conclusão que pode ser obtida dessa estrutura é que todo observável de spin depende dos graus de liberdade de momento, ou seja, uma separação da forma $\mathcal{G}^C = \mathbf{1}_p \otimes \mathbf{g}$ não faz sentido para nenhum conjunto complementar, o que torna a interpretação usual dada às MDRs obtidas pelo traço parcial dos momentos desprovida de sentido físico. Apesar de não existir uma única maneira de se comparar os estados de spin para diferentes valores de momento, se um observador decidir medir um dado observável $\mathcal{G}^C \cdot \hat{\mathbf{a}}$, seu equipamento retornará apenas os resultados $-s, -s + 1, \dots, s - 1$ e s , sendo s o número quântico de spin do sistema analisado, ou seja, a escolha de um conjunto

específico de observáveis de spin \mathcal{G}^C estabelece uma conexão entre os diferentes espaços \mathcal{H}_p . Essa relação entre a escolha dos observáveis de spin e a conexão dos espaços \mathcal{H}_p implica que se uma descrição em termos de MDRs for possível para os graus de liberdade de spin, então as matrizes correspondentes deverão ser efetivas, já que elas dependerão do conjunto complementar associado ao modelo de detecção adotado e não descreverão todos os tipos de medida de spin possíveis.

A seguir será demonstrado que uma abordagem em termos de MDRs efetivas de fato é possível. Para isso é necessário introduzir um espaço de Hilbert auxiliar \mathcal{H}_C isomórfico aos espaços \mathcal{H}_p . As MDRs efetivas serão definidas então a partir de um mapa f^C que, para um dado conjunto complementar $\{C(p, k)\}$, transforma os operadores densidade totais ρ em matrizes densidade $f^C(\rho)$ definidas no espaço de operadores lineares limitados $\mathcal{B}(\mathcal{H}_C)$. Um esquema do mapa a ser construído é apresentado na Figura 5.6. Além disso, deseja-se que as matrizes densidade produzidas por esse mapa sejam capazes de descrever a estatística de medidas da forma $A^C = \mathbf{a}_0 I + \mathbf{a} \cdot \mathcal{G}^C$, sendo que \mathbf{a}_0 e \mathbf{a} são coeficientes reais arbitrários independentes dos momentos. Com esse intuito, impõe-se que

$$\text{Tr}(\rho A^C) = \text{Tr}_{\mathcal{H}_C}(f^C(\rho) a^C), \quad (5.46)$$

sendo $a^C = \mathbf{a}_0 \mathbf{g}_0 + \mathbf{a} \cdot \mathbf{g}$, \mathbf{g}_0 a identidade em $\mathcal{B}(\mathcal{H}_C)$ e \mathbf{g} um conjunto de três operadores isomórficos aos geradores das representações unitárias dos grupos estabilizadores G_p ($p \in \mathcal{O}(k)$). A conexão entre os observáveis \mathcal{G}^C e os operadores \mathbf{g} é estabelecida a partir das equações (4.77) e (4.78), que implicam em

$$\mathcal{G}^C = \sum_{\alpha, \beta} (\mathbf{g})_{\beta\alpha} \int \frac{d\mathbf{p}}{2\omega(\mathbf{p})} |\mathbf{p}, \beta_p\rangle^C \langle \mathbf{p}, \alpha_p|. \quad (5.47)$$

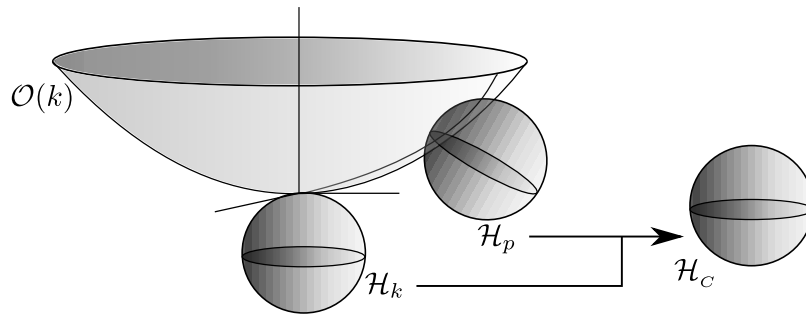


Figura 5.6 Esquema do mapa f^C para a construção de MDRs efetivas associadas a um dado conjunto complementar $\{C(p, k)\}$.

O primeiro passo para a obtenção do mapa f^C é tentar provar que, dado um operador densidade qualquer ρ e um conjunto complementar $\{C(p, k)\}$, existe um único mapa f^C tal que (5.46) seja verdadeira. No entanto, a equação (5.46) só garante a unicidade

de $f^C(\rho)$ para o caso de spins $1/2$. Isso se deve ao fato de que o conjunto dos operadores lineares hermitianos para $s = 1/2$ possui dimensão quatro, portanto $\sqrt{2}\mathbf{g} = \boldsymbol{\sigma}/\sqrt{2}$ e $\sigma_0/\sqrt{2}$ formam uma base ortonormal de matrizes com relação ao produto interno de Hilbert-Schmidt nesse espaço. Com isso, qualquer operador hermitiano a^C que atue em \mathcal{H}_C para $s = 1/2$ pode ser expandido como $a^C = a_0\sigma_0 + \mathbf{a} \cdot \boldsymbol{\sigma}$. Isso implica que $f^C(\rho)$ pode ser escrito como

$$f^C(\rho) = \sum_{i=0}^3 \sigma_i \text{Tr}_{\mathcal{H}_C} \left(\frac{\sigma_i}{2} f^C(\rho) \right), \quad (5.48)$$

o que, utilizando (5.46), resulta em

$$f^C(\rho) = \sum_{i=0}^3 \sigma_i \text{Tr}(\mathcal{G}_i^C \rho), \quad (5.49)$$

sendo $\mathcal{G}_0^C \equiv I/2$. A equação (5.49) implica então que $f^C(\rho)$ é univocamente definido por (5.46) para $s = 1/2$.

No caso de partículas com um spin s qualquer, $4s(s+1)$ matrizes Hermiteanas ortonormais de traço zero, além da identidade devidamente normalizada, são necessárias para descrever um operador hermitiano qualquer que atue sobre \mathcal{H}_C . Dessa forma, a relação (5.46) não é suficiente para determinar $f^C(\rho)$ univocamente para um spin qualquer s . No entanto, esse problema pode ser contornado da seguinte maneira. Suponha que $\{\mathbf{m}_i\}$, com $i = 1, \dots, 4s(s+1)$, seja um conjunto ortonormal de matrizes Hermiteanas de traço zero. Qualquer observável b^C que atue em \mathcal{H}_C , inclusive os \mathbf{g} , pode ser expandido como

$$b^C = \sum_{i=0}^{4s(s+1)} b_i^C \mathbf{m}_i, \quad (5.50)$$

sendo que \mathbf{m}_0 é a identidade devidamente normalizada e b_i^C são fatores reais. Portanto, baseando-se na relação (5.47), pode-se definir o seguinte conjunto de observáveis no espaço total:

$$M_i^C = \sum_{\alpha, \beta} (\mathbf{m}_i)_{\beta\alpha} \int \frac{d\mathbf{p}}{2\omega(\mathbf{p})} |\mathbf{p}, \beta_p\rangle^C \langle \mathbf{p}, \alpha_p|, \quad (5.51)$$

sendo que

$$M_i^C |\mathbf{p}, \alpha_p\rangle^C = \sum_{\beta} (\mathbf{m}_i)_{\beta\alpha} |\mathbf{p}, \beta_p\rangle^C. \quad (5.52)$$

Dessa forma, os operadores A^C utilizados em (5.46) são casos particulares dos operadores mais gerais

$$B^C = \sum_{i=0}^{4s(s+1)} b_i^C M_i^C, \quad (5.53)$$

em que b_i^C são coeficientes reais. Com isso, pode-se impor que o mapa f^C respeite a seguinte

relação:

$$\text{Tr}(\rho B^C) = \text{Tr}_{\mathcal{H}_C}(f^C(\rho)b^C), \quad (5.54)$$

em que B^C é dado por (5.53) e b^C por (5.50).

Uma vez estabelecido a condição (5.54) para o mapa f^C , pode-se utilizar o mesmo procedimento adotado para o caso com $s = 1/2$ para provar que, dado um operador densidade ρ qualquer e um conjunto complementar $\{C(p, k)\}$, existe um único mapa $f^C(\rho)$ tal que (5.54) seja verdadeira. A demonstração desse resultado é apresentada a seguir. Como $f^C(\rho)$ é uma matriz Hermiteana, ela pode ser expandida da seguinte forma:

$$f^C(\rho) = \sum_{i=0}^{4s(s+1)} m_i \text{Tr}(f^C(\rho)m_i). \quad (5.55)$$

No entanto, da relação (5.54), resulta que

$$f^C(\rho) = \sum_{i=0}^{4s(s+1)} m_i \text{Tr}(\rho M_i^C). \quad (5.56)$$

Como ρ é arbitrário e a operação $\text{Tr}(\rho M_i^C)$ é bem definida, a equação (5.56) implica que o mapa f^C é único, i.e. f^C é univocamente determinado por (5.54).

O procedimento adotado para demonstrar a unicidade da solução para (5.54) é o mesmo utilizado para demonstrar que subsistemas de sistemas quânticos compostos devem ser descritos pelo traço parcial dos subsistemas ignorados [4]. No entanto, o resultado obtido aqui difere daquele encontrado para os sistemas compostos usuais, já que existe uma dependência da solução $f^C(\rho)$ com o conjunto complementar associado ao observável de spin escolhido. Isso demonstra que, de fato, o traço parcial usual dos momentos não é adequado para descrever os sistemas reduzidos de variáveis secundárias.

Para obter o mapa f^C , o valor médio de \mathcal{G}^C , dado por

$$\text{Tr}(\rho \mathcal{G}^C) = \sum_{\alpha, \beta} \int \frac{d\mathbf{p}}{2\omega(\mathbf{p})} (\mathbf{g})_{\beta\alpha} \rho_{\alpha\beta}^C(\mathbf{p}, \mathbf{p}), \quad (5.57)$$

em que $\rho_{\alpha\beta}^C(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = {}^C\langle \mathbf{p}, \alpha_p | \rho | \mathbf{q}, \beta_q \rangle^C$, deve ser analisado. Introduzindo o espaço de Hilbert \mathcal{H}_C isomórfico aos espaços \mathcal{H}_p , a expressão (5.57) pode ser reescrita como

$$\text{Tr}(\rho \mathcal{G}^C) = \text{Tr}_{\mathcal{H}_C} \left[\mathbf{g} \left(\sum_{\alpha, \beta} \int \frac{d\mathbf{p}}{2\omega(\mathbf{p})} \rho_{\alpha\beta}^C(\mathbf{p}, \mathbf{p}) |\alpha\rangle^C \langle\beta|^C \right) \right], \quad (5.58)$$

em que $\{|\alpha\rangle^C\}$ forma uma base ortonormal no espaço \mathcal{H}_C . Isso permite definir a matriz

densidade

$$\tau^C = \sum_{\alpha, \beta} |\alpha\rangle^C \langle \beta| \left(\int \frac{d\mathbf{p}}{2\omega(\mathbf{p})} \rho_{\alpha\beta}^C(\mathbf{p}, \mathbf{p}) \right) \quad (5.59)$$

no espaço $\mathcal{B}(\mathcal{H}_C)$. Essa matriz densidade satisfaz a relação (5.54), portanto o mapa f^C deve ser definido por $f^C(\rho) = \tau^C$. Observe que se os operadores $\mathbf{S} \equiv \mathcal{G}^B$ forem escolhidos como observáveis de spin, então a matriz τ^B será igual a MDR de spin (5.2) utilizada na literatura. Isso significa que o método proposto neste trabalho permite construir MDRs efetivas para qualquer observável de spin associado a um dado conjunto complementar, os resultados presentes na literatura sendo recuperados como casos particulares.

Apesar das MDRs de spin presentes na literatura poderem ser descritas usando a abordagem introduzida neste trabalho, é importante enfatizar que a interpretação dada às MDRs efetivas obtidas aqui não é a mesma da literatura. De acordo com os resultados obtidos nesta seção, as novas MDRs apresentadas em (5.59) devem ser interpretadas como sendo matrizes reduzidas efetivas que permitem descrever as previsões estatísticas de um sistema quando houver uma restrição quanto ao tipo de medida que o observador é capaz de efetuar, ou seja, dado um conjunto complementar $\{C(p, k)\}$, elas descrevem a estatística das medidas de um observador que é capaz de realizar apenas medidas de spin descritas por observáveis da forma (5.53).

Para partículas de spin 1/2 existe um outro resultado, baseado na entropia de von Neumann das MDRs efetivas, que confirma a interpretação dada para as MDRs obtidas em (5.59). Dado o observável $\hat{\mathbf{a}} \cdot \mathcal{G}^C$ e definindo

$$\Pi_{\alpha}^C(\hat{\mathbf{a}} \cdot \mathcal{G}^C) = \int \frac{d\mathbf{p}}{2\omega(\mathbf{p})} |\mathbf{p}, \alpha_p\rangle_a^C \langle \mathbf{p}, \alpha_p|, \quad (5.60)$$

sendo que $\mathcal{G}^C \cdot \hat{\mathbf{a}} |\mathbf{p}, \alpha_p\rangle_a^C = \alpha |\mathbf{p}, \alpha_p\rangle_a^C$, a entropia de medida⁵ de ρ para o observável $\hat{\mathbf{a}} \cdot \mathcal{G}^C$ é dada por

$$H(\hat{\mathbf{a}} \cdot \mathcal{G}^C / \rho) = - \sum_{\alpha} P_{\alpha}(\hat{\mathbf{a}} \cdot \mathcal{G}^C / \rho) \log P_{\alpha}(\hat{\mathbf{a}} \cdot \mathcal{G}^C / \rho), \quad (5.61)$$

em que $P_{\alpha}(\hat{\mathbf{a}} \cdot \mathcal{G}^C / \rho) = \text{Tr}[\rho \Pi_{\alpha}^C(\hat{\mathbf{a}} \cdot \mathcal{G}^C)]$ é a probabilidade de uma medida de $\hat{\mathbf{a}} \cdot \mathcal{G}^C$ retornar o autovalor α . Para a MDR efetiva τ^C , o observável correspondente a $\hat{\mathbf{a}} \cdot \mathcal{G}^C$ é descrito por $\hat{\mathbf{a}} \cdot \mathbf{g}$, e a entropia de medida de τ^C com relação a esse observável é dada por

$$H(\hat{\mathbf{a}} \cdot \mathbf{g} / \tau^C) = - \sum_{\alpha} p_{\alpha}(\hat{\mathbf{a}} \cdot \mathbf{g} / \tau^C) \log p_{\alpha}(\hat{\mathbf{a}} \cdot \mathbf{g} / \tau^C) = H(\hat{\mathbf{a}} \cdot \mathcal{G}^C / \rho), \quad (5.62)$$

pois

$$p_{\alpha}(\hat{\mathbf{a}} \cdot \mathbf{g} / \tau^C) = \text{Tr} \left(\tau^C |\alpha\rangle^C \langle \alpha| \right) = P_{\alpha}(\hat{\mathbf{a}} \cdot \mathcal{G}^C / \rho). \quad (5.63)$$

⁵A entropia de medida é a incerteza de Shannon associada aos resultados i , de probabilidades p_i , de um aparato que mede um dado observável A : $H(A/\rho) = \sum_i p_i \log p_i$

Ao contrário de $\hat{\mathbf{a}} \cdot \mathcal{G}^C$, o observável $\hat{\mathbf{a}} \cdot \mathbf{g}$ não é degenerado para partículas de spin 1/2, portanto a entropia de medida pode ser conectada à entropia de von Neumann do estado reduzido por meio de [61]

$$S(\tau^C) = \min_{\hat{\mathbf{a}}} H(\hat{\mathbf{a}} \cdot \mathbf{g} / \tau^C). \quad (5.64)$$

Usando (5.62), resulta então que

$$S(\tau^C) = \min_{\hat{\mathbf{a}}} H(\hat{\mathbf{a}} \cdot \mathcal{G}^C / \rho), \quad (5.65)$$

ou seja, a entropia de von Neumann da MDR é o valor mínimo assumido pela entropia de medida do estado total ρ se o observável considerado estiver restrito a ser da forma $\hat{\mathbf{a}} \cdot \mathcal{G}^C$. Isso está de acordo com a interpretação apresentada anteriormente para as MDRs efetivas obtidas em (5.59). O problema em se demonstrar esse resultado para outros valores de s se deve ao fato dos operadores \mathbf{m}_i poderem apresentar degenerescências para $s \neq 1/2$.

Os exemplos de [36, 37] que foram apresentados na Seção 5.1 serão resolvidos a seguir utilizando o formalismo proposto neste trabalho. Com isso ficará claro que as MDRs de spin usuais não podem ser utilizadas para descrever os resultados desses exemplos, porque os observáveis de spin associados à medida SG proposta não podem ser escritos como uma combinação linear da forma $\mathbf{a}_0 I + \mathbf{a} \cdot \mathbf{S}$.

No final da Seção 5.1 foi mostrado que os observáveis associados às medidas SG propostas em [36] podem ser escritos como $U[B(p, k)]\mathbf{J} \cdot \hat{\mathbf{n}}(\hat{\mathbf{n}}_0, \mathbf{v})U^\dagger[B(p, k)]$, sendo que $\mathbf{p} = \gamma_v m \mathbf{v}$. Expandindo essa relação obtém-se que o observável associado a uma medida SG com campo magnético não homogêneo na direção $\hat{\mathbf{n}}_0$ é dado por

$$\begin{aligned} U[B(p, k)]\mathbf{J} \cdot \hat{\mathbf{n}}(\hat{\mathbf{n}}_0, \mathbf{v})U^\dagger[B(p, k)] &= U[C(\hat{\mathbf{n}}_0; p, k)]\mathbf{J} \cdot \hat{\mathbf{z}}U^\dagger[C(\hat{\mathbf{n}}_0; p, k)] \\ &= \mathbf{S}(\mathbf{p}) \cdot \hat{\mathbf{n}}(\hat{\mathbf{n}}_0, \mathbf{v}), \end{aligned} \quad (5.66)$$

sendo que $C(\hat{\mathbf{n}}_0; p, k) = B(p, k)R(\hat{\mathbf{n}}_0, \mathbf{p})$ e $R(\hat{\mathbf{n}}_0, \mathbf{p})$ é definido pela relação (5.38). Portanto, as transformações dadas por $C(\hat{\mathbf{n}}_0; p, k)$ definem o conjunto complementar associado ao observável de spin que descreve a medida SG desejada. Existe uma certa arbitrariedade na definição das rotações $R(\hat{\mathbf{n}}_0, \mathbf{p})$, pois a equação (5.38) não é suficiente para defini-las completamente. Contudo, essa arbitrariedade não será importante para os resultados a serem apresentados e, por isso, uma discussão mais aprofundada de seu significado físico não será feita neste trabalho.

A base $\{|\mathbf{p}, \alpha\rangle^{C_{n_0}}\}$ associada ao conjunto complementar $\{C(\hat{\mathbf{n}}_0; p, k)\}$ é definida a partir de

$$\mathbf{S}(\mathbf{p}) \cdot \hat{\mathbf{n}}(\hat{\mathbf{n}}_0, \mathbf{v}) |\mathbf{p}, \alpha_p\rangle^{C_{n_0}} = \alpha |\mathbf{p}, \alpha_p\rangle^{C_{n_0}}. \quad (5.67)$$

Portanto

$$|\mathbf{p}, \alpha_p\rangle^{C_{n_0}} = U[C(\hat{\mathbf{n}}_0; p, k)] |\mathbf{0}, \alpha_k\rangle^B = \sum_{\beta} Q_{\beta\alpha} [R(\hat{\mathbf{n}}_0, \mathbf{p})] |\mathbf{p}, \beta_p\rangle^B, \quad (5.68)$$

sendo que nessa expressão utilizou-se o fato de que $M_k^B(R, \mathbf{p}) = M_k^B(R) = R$ para $R \in SU(2)$. Isso implica que $|\mathbf{0}, \alpha_k\rangle^{C_{n_0}} = U[R(\hat{\mathbf{n}}_0, \mathbf{0})]|\mathbf{0}, \alpha_k\rangle^B$ e $\mathbf{J} \cdot \hat{\mathbf{n}}_0 |\mathbf{0}, \alpha_k\rangle^{C_{n_0}} = \alpha |\mathbf{0}, \alpha_k\rangle^{C_{n_0}}$. Da equação (4.78) obtém-se então que o observável que representa essa medida SG para qualquer valor de momento é dado por

$$\mathcal{G}^{C_{n_0}} = \sum_{\alpha} \int \frac{d\mathbf{p}}{2\omega(\mathbf{p})} \mathbf{S}(\mathbf{p}) \cdot \hat{\mathbf{n}}(\hat{\mathbf{n}}_0, \mathbf{v}) |\mathbf{p}, \alpha_p\rangle^{C_{n_0}} \langle \mathbf{p}, \alpha_p|. \quad (5.69)$$

É evidente que esse operador não pode ser escrito como uma combinação linear da forma $\mathbf{a}_0 I + \mathbf{a} \cdot \mathbf{S}$, e por isso as MDRs usuais obtidas pelo traço parcial dos graus de liberdade de momento não são capazes de descrever os resultados obtidos pelos autores em [36, 37].

No exemplo desenvolvido em [36] supõe-se que o estado considerado possui um momento bem definido e que a medida de um primeiro SG, com campo magnético na direção $\hat{\mathbf{x}}$ no referencial do laboratório, resulta no autovalor $+1/2$. Portanto o estado produzido pelo primeiro aparato SG é dado por $|\psi\rangle = |\mathbf{p}, +1/2_p\rangle^{C_x}$, sendo que o índice C_x indica que esse estado está escrito na base associada ao conjunto complementar $\{C(\hat{\mathbf{x}}; p, k)\}$. Deseja-se construir a MDR de spin associada à medida do segundo SG, cujo campo magnético aponta na direção $\hat{\mathbf{y}}$ no referencial do laboratório, portanto é necessário escrever o estado $|\psi\rangle$ na base $\{|\mathbf{p}, \alpha_p\rangle^{C_y}\}$ associada ao conjunto complementar $\{C(\hat{\mathbf{y}}; p, k)\}$. Utilizando (5.68) obtém-se então que

$$|\psi\rangle = |\mathbf{p}, +1/2_p\rangle^{C_x} = \sum_{\beta} Q_{\beta+\frac{1}{2}} [R^{-1}(\hat{\mathbf{y}}, \mathbf{p})R(\hat{\mathbf{x}}, \mathbf{p})] |\mathbf{p}, \beta_p\rangle^{C_y} \quad (5.70)$$

Para os momentos considerados, i.e. levando em conta a relação (5.26), os operadores de rotação $R(\hat{\mathbf{x}}, \mathbf{p})$ e $R(\hat{\mathbf{y}}, \mathbf{p})$ são dados por

$$R(i, \mathbf{p}) = \frac{\sqrt{2}}{2} \begin{pmatrix} e^{i(\chi_i + \phi_i)/2} & ie^{i(\chi_i - \phi_i)/2} \\ ie^{-i(\chi_i - \phi_i)/2} & e^{-i(\chi_i + \phi_i)/2} \end{pmatrix}, \quad (5.71)$$

com $i = \hat{\mathbf{x}}, \hat{\mathbf{y}}$ e

$$\begin{aligned} \cos(\chi_i) &= \hat{\mathbf{n}}(i, \mathbf{v}) \cdot \hat{\mathbf{y}} \\ \text{sen}(\chi_i) &= \hat{\mathbf{n}}(i, \mathbf{v}) \cdot \hat{\mathbf{x}} \end{aligned} \quad (5.72)$$

O ângulo ϕ_i em (5.71) está associado à arbitrariedade na definição das rotações $R(\hat{\mathbf{n}}_0, \mathbf{p})$ mencionada anteriormente. Para partículas de spin $1/2$, $Q[R(\hat{\mathbf{n}}_0, \mathbf{p})] = R(\hat{\mathbf{n}}_0, \mathbf{p})$, portanto a MDR do sistema associada à medida SG- $\hat{\mathbf{y}}$ é dada por

$$\tau^{C_y} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 + \hat{\mathbf{n}}(\hat{\mathbf{x}}, \mathbf{v}) \cdot \hat{\mathbf{n}}(\hat{\mathbf{y}}, \mathbf{v}) & e^{-i\phi_y} [\hat{\mathbf{n}}(\hat{\mathbf{x}}, \mathbf{v}) \times \hat{\mathbf{n}}(\hat{\mathbf{y}}, \mathbf{v})] \cdot \hat{\mathbf{z}} \\ e^{i\phi_y} [\hat{\mathbf{n}}(\hat{\mathbf{x}}, \mathbf{v}) \times \hat{\mathbf{n}}(\hat{\mathbf{y}}, \mathbf{v})] \cdot \hat{\mathbf{z}} & 1 - \hat{\mathbf{n}}(\hat{\mathbf{x}}, \mathbf{v}) \cdot \hat{\mathbf{n}}(\hat{\mathbf{y}}, \mathbf{v}) \end{pmatrix}. \quad (5.73)$$

É importante ressaltar que a velocidade só aparece explicitamente em τ^{C_y} porque o estado considerado é um autoestado de momento. Caso contrário, integrais sobre os graus de liberdade de momento apareceriam no interior da matriz.

O observável associado à medida desse SG é dado por (5.69) com $\hat{\mathbf{n}}_0 = \hat{\mathbf{y}}$, portanto, como $\mathbf{S}(\mathbf{p}) \cdot \hat{\mathbf{n}}(\hat{\mathbf{y}}, \mathbf{v}) |\mathbf{p}, \alpha_p\rangle^{C_y} = \alpha |\mathbf{p}, \alpha_p\rangle^{C_y}$, o observável correspondente na descrição em termos da MDR efetiva será descrito por $\mathbf{g}_3 = \sigma_3/2$. Utilizando a MDR efetiva (5.73), obtém-se então que o valor esperado para a segunda medida de spin é igual a

$$\text{Tr}_{\mathcal{H}_{C_y}} \left(\frac{\sigma_3}{2} \tau^{C_y} \right) = \frac{1}{2} \hat{\mathbf{n}}(\hat{\mathbf{x}}, \mathbf{v}) \cdot \hat{\mathbf{n}}(\hat{\mathbf{y}}, \mathbf{v}), \quad (5.74)$$

o que está de acordo com a equação (5.27).

No exemplo envolvendo a violação da desigualdade CHSH, a rotação $R(\hat{\mathbf{n}}_0, \mathbf{p})$ é dada por

$$R(\hat{\mathbf{n}}_0, \mathbf{p}) = \begin{pmatrix} \cos\left(\frac{\theta'}{2}\right) e^{i\frac{\psi'}{2}} & i \sin\left(\frac{\theta'}{2}\right) e^{i\frac{\psi'}{2}} \\ i \sin\left(\frac{\theta'}{2}\right) e^{-i\frac{\psi'}{2}} & \cos\left(\frac{\theta'}{2}\right) e^{-i\frac{\psi'}{2}} \end{pmatrix}, \quad (5.75)$$

sendo que os ângulos θ' e ψ' são definidos por

$$\cos \theta' = \hat{\mathbf{n}}(\hat{\mathbf{n}}_0, \mathbf{v}) \cdot \hat{\mathbf{z}}, \quad (5.76)$$

$$\cos \psi' = \frac{\hat{\mathbf{n}}(\hat{\mathbf{n}}_0, \mathbf{v}) \cdot \hat{\mathbf{y}}}{\sqrt{1 - [\hat{\mathbf{n}}(\hat{\mathbf{n}}_0, \mathbf{v}) \cdot \hat{\mathbf{z}}]^2}}. \quad (5.77)$$

Em (5.75) escolheu-se, por simplicidade e sem perda de generalidade, o ângulo arbitrário ϕ' igual a zero. Nesse exemplo, a partícula de Alice recebe um tratamento não relativístico, ou seja, sua velocidade é tal que $R(\hat{\mathbf{n}}_0, \mathbf{p}) \approx R(\hat{\mathbf{n}}_0, \mathbf{0})$. Portanto, ao contrário do que ocorre para a partícula de Bob, não é necessário realizar uma mudança de base dos estados de Alice em (5.32), pois $C(\hat{\mathbf{n}}_0, p, k) \approx B(p, k)R(\hat{\mathbf{n}}_0, \mathbf{0})$ para baixas velocidades. Dessa forma, a MDR efetiva que descreve uma medida SG de spin na direção $\hat{\mathbf{b}}_j$ para Bob e em uma direção qualquer para Alice será dada por

$$\tau^{BC_{b_j}} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} |R_{\uparrow\downarrow}|^2 & -R_{\uparrow\downarrow}R_{\uparrow\uparrow}^* & R_{\uparrow\downarrow}R_{\uparrow\uparrow} & R_{\uparrow\downarrow}^2 \\ -R_{\uparrow\uparrow}R_{\uparrow\downarrow}^* & |R_{\uparrow\uparrow}|^2 & -R_{\uparrow\uparrow}^2 & -R_{\uparrow\uparrow}R_{\uparrow\downarrow} \\ R_{\uparrow\uparrow}^*R_{\uparrow\downarrow}^* & -(R_{\uparrow\uparrow}^*)^2 & |R_{\uparrow\uparrow}|^2 & R_{\uparrow\uparrow}^*R_{\uparrow\downarrow} \\ (R_{\uparrow\downarrow}^*)^2 & -R_{\uparrow\downarrow}^*R_{\uparrow\uparrow}^* & R_{\uparrow\downarrow}^*R_{\uparrow\uparrow} & |R_{\uparrow\downarrow}|^2 \end{pmatrix} \quad (5.78)$$

sendo que $R \equiv R(\hat{\mathbf{b}}_j, -\mathbf{p})$. Os índices B e C_{b_j} em (5.78) estão associados aos conjuntos complementares adotados para descrever as medidas de cada um dos observadores.

Os valores esperados $\langle \hat{\mathbf{a}}_i, \hat{\mathbf{b}}_j \rangle$ que aparecem na desigualdade CHSH podem então

ser calculados usando a MDR (5.78) da seguinte forma:

$$\mathrm{Tr}_{\mathcal{H}_B \otimes \mathcal{H}_C} \left(\boldsymbol{\sigma} \cdot \hat{\mathbf{a}}_i \otimes \sigma_3 \tau^{BCb_j} \right) = -\hat{\mathbf{n}}(\hat{\mathbf{b}}_j, \mathbf{v}_b) \cdot \hat{\mathbf{a}}_i. \quad (5.79)$$

Aplicando (5.79) na definição (5.30) da desigualdade CHSH obtém-se exatamente o mesmo resultado apresentado em (5.35), o que demonstra que o método proposto neste trabalho pode de fato ser utilizado para definir MDRs efetivas de spin consistentes, mesmo quando conjuntos complementares diferentes são utilizados para descrever as medidas feitas em partículas distintas de um estado multipartite.

Por fim, é interessante realizar uma análise do comportamento dos observáveis \mathcal{G}^C quando realizadas transformações de referenciais inerciais. Utilizando as equações (4.78) e (4.17), e lembrando que

$$\mathcal{G}_i^C = U[C(p, k)] J_i U^\dagger[C(p, k)] = U[C(p, k)] J^{jk} U^\dagger[C(p, k)], \quad (5.80)$$

com i, j, k cíclicos, obtém-se que

$$U(A) \mathcal{G}_i^C U^\dagger(A) = \sum_\alpha \int \frac{d\mathbf{p}}{2\omega(\mathbf{p})} L[M_k^C(A^{-1}, \mathbf{p})]^j {}_l L[M_k^C(A^{-1}, \mathbf{p})]^k {}_m \mathcal{G}_C^{lm}(\mathbf{p}) |\mathbf{p}, \alpha_p\rangle^C \langle \mathbf{p}, \alpha_p|, \quad (5.81)$$

sendo $\mathcal{G}_C^{jk}(\mathbf{p}) = \mathcal{G}_i^C(\mathbf{p})$ e a soma sobre os índices repetidos l, m indo de 1 até 3. Esses novos observáveis serão uma combinação linear das componentes de \mathcal{G}^C apenas se $M_k^C(A^{-1}, \mathbf{p}) = M_k^C(A^{-1})$, sendo que, nesse caso,

$$U(A) \mathcal{G}_C^{jk} U^\dagger(A) = L[M_k^C(A^{-1})]^j {}_l L[M_k^C(A^{-1})]^k {}_m \mathcal{G}_C^{lm}. \quad (5.82)$$

Essa análise é necessária para que a seguinte pergunta seja respondida: dado um aparato descrito pelos observáveis de spin \mathcal{G}^C e uma MDR τ^C associada ao conjunto complementar correspondente, para que conjuntos complementares é possível rotacionar o equipamento e ainda assim utilizar a mesma MDR τ^C para descrever os resultados das medidas? Da equação (5.81) percebe-se que isso só será possível se $M_k^C(R, \mathbf{p}) = M_k^C(R)$ para toda rotação $R \in SU(2)$. É importante ressaltar também que apenas se

$$M_k^C(R, \mathbf{p}) = M_k^C(R) = R \quad (5.83)$$

é que a relação (5.81) irá implicar que \mathcal{G}^C se transforma como um trivetor, i.e.

$$[J_j, \mathcal{G}_k^C] = i\epsilon_{jkl} \mathcal{G}_l^C. \quad (5.84)$$

De fato, só existe um conjunto complementar [34] para o qual (5.83) é válida. Como apontado no Capítulo 4, esse é o conjunto complementar $\{B(p, k)\}$ associado à base de spin. Portanto,

apesar da notação vetorial ter sido utilizada para todos os observáveis de spin \mathfrak{G}^C , esses observáveis só se comportarão verdadeiramente como vetores sob a ação de rotações espaciais para o conjunto complementar $\{B(p, k)\}$. Isso justifica por que, no caso da medida SG definida em [36, 37], é necessário definir uma MDR efetiva para cada direção de campo magnético utilizada.

CAPÍTULO 6

Conclusões

Nesta dissertação foram estudados recentes argumentos contra a utilização do traço parcial dos momentos na construção de MDRs de spin para partículas relativísticas massivas descritas por RUIs do grupo de Poincaré.

Em um primeiro momento estudou-se o grupo de simetria da relatividade especial e o processo de construção das RUIs do grupo de Poincaré. Partindo desse estudo, analisou-se o comportamento de algumas propriedades quânticas das variáveis de spin para partículas relativísticas. Essa primeira abordagem foi feita utilizando MDRs de spin obtidas por meio do traço parcial dos momentos, ou seja, utilizando a abordagem presente em grande parte da literatura.

Em um segundo momento apresentou-se a argumentação feita em [35–37] contra a utilização do traço parcial na definição de MDRs de spin. A partir do estudo da teoria de RUIs do grupo de Poincaré feito no Capítulo 4, mostrou-se que essas críticas podem ser unificadas, bastando observar que a utilização do traço parcial dos graus de liberdade de momento implica na definição de propriedades privilegiadas para o conjunto complementar $\{B(p, k)\}$. Tais propriedades não são justificáveis do ponto de vista da teoria de RUIs do grupo de Poincaré, já que a estrutura do espaço de Hilbert associado aos estados dessas representações não permite definir uma única maneira de se comparar os graus de liberdade de spin para diferentes valores de momento. A análise dessa estrutura permitiu concluir também que não é possível separar nenhum observável de spin \mathcal{G}^C como $\mathbf{1}_p \otimes \mathbf{g}$, ou seja, a definição de um aparato de medida de spin que não sofre influência dos graus de liberdade de momento não possui sentido físico.

Em vista dos problemas associados à utilização das MDRs de spin usuais, uma nova proposta para a construção de MDRs efetivas consistentes foi apresentada. Essa abordagem não utiliza o traço parcial usual e permite associar a cada conjunto de observáveis \mathcal{G}^C uma MDR efetiva diferente. Dessa forma, as MDRs de spin usuais são recuperadas como casos particulares da proposta apresentada. Diferentemente das MDRs de spin presentes na literatura, as MDRs propostas nesta dissertação são efetivas e descrevem as previsões estatísticas das medidas de um observador quando este estiver restrito a realizar algum tipo específico de medida de spin associado a um dado conjunto complementar. Uma única pergunta deve ser respondida quando uma MDR efetiva é construída para um dado conjunto complementar: como construir um aparato experimental que seja capaz de medir os observáveis de spin correspondentes? Apesar da proposta apresentada nessa dissertação per-

mitir que os resultados obtidos na literatura por meio das MDRs de spin sejam recuperados de maneira consistente, não há nenhuma evidência de que se possa construir um aparato capaz de medir os observáveis \mathbf{S} associados ao conjunto complementar $\{B(p, k)\}$. Os recentes trabalhos associados à medida SG do spin de partículas relativísticas indicam que \mathbf{S} provavelmente não será o observável de spin que poderá ser medido experimentalmente.

Por fim, vale ressaltar a possibilidade de se utilizar o método apresentado nesta dissertação na análise de outra questão. Recentemente, os autores em [38] apontaram um problema associado à tomografia de estados de spin $1/2$ de partículas relativísticas por meio de medidas SG. Eles observaram que, ao contrário do caso não relativístico em que apenas medidas em três direções linearmente independentes são necessárias para se reconstruir o estado de spin, no caso de medidas SG com partículas relativísticas, três direções não são mais suficientes. Os autores deixaram como uma questão em aberto qual seria o conjunto mínimo de medidas necessárias para se reconstruir o estado nesse caso. Esse problema está diretamente associado à discussão realizada no final do Capítulo 5 quanto ao comportamento das MDRs efetivas sob a ação de rotações espaciais, e acredita-se que a abordagem apresentada nesta dissertação possa ajudar na análise dessa questão.

Referências Bibliográficas

- [1] A. Einstein, B. Podolsky, and N. Rosen. Can Quantum-Mechanical Description of Physical Reality Be Considered Complete? *Physical Review*, 47:777(4), 1935.
- [2] J. S. Bell. On the Einstein Podolsky Rosen Paradox. *Physics*, 1(3):195–200, 1964.
- [3] John F. Clauser, Michael A. Horne, Abner Shimony, and Richard A. Holt. Proposed Experiment to Test Local Hidden-Variable Theories. *Phys. Rev. Lett.*, 23(15):880(5), 1969.
- [4] Michael A. Nielsen and Isaac L. Chuang. *Quantum Computation and Quantum Information*. Cambridge University Press, 2000.
- [5] Charles H. Bennett et al. Teleporting an Unknown Quantum State via Dual Classical and Einstein-Podolsky-Rosen Channels.
- [6] Charles H. Bennett, Herbert J. Bernstein, Sandu Popescu, and Benjamin Schumacher. Concentrating partial entanglement by local operations. *Phys. Rev. A*, 53(4):2046(7), 1996.
- [7] Charles H. Bennett and Stephen J. Wiesner. Communication via one- and two-particle operators on Einstein-Podolsky-Rosen states. *Phys. Rev. Lett.*, 69:2881–2884, 1992.
- [8] Marek Czachor. Einstein-Podolsky-Rosen-Bohm experiment with relativistic massive particles. *Phys. Rev. A*, 55:72–77, 1997.
- [9] Asher Peres, Petra F. Scudo, and Daniel R. Terno. Quantum Entropy and Special Relativity. *Phys. Rev. Lett.*, 88:230402, 2002.
- [10] David Rideout et al. Fundamental quantum optics experiments conceivable with satellites - reaching relativistic distances and velocities. *Class. Quantum Grav.*, 29:224011, 2012.
- [11] Asher Peres and Daniel R. Terno. Quantum information and relativity theory. *Rev. Mod. Phys.*, 76:93–123, 2004.
- [12] Robert M. Gingrich and Christoph Adami. Quantum Entanglement of Moving Bodies. *Phys. Rev. Lett.*, 89:270402, 2002.

-
- [13] Hui Li and Jiangfeng Du. Relativistic invariant quantum entanglement between the spins of moving bodies. *Phys. Rev. A*, 68:022108, 2003.
- [14] Cezary Gonera, Piotr Kosiński, and Pawel Maslanka. Special relativity and reduced spin density matrices. *Phys. Rev. A*, 70:034102, 2004.
- [15] Daeho Lee and Ee Chang-Young. Quantum Entanglement under Lorentz Boost. *New Journal of Physics*, 6:67, 2004.
- [16] Stephen D. Bartlett and Daniel R. Terno. Relativistically invariant quantum information. *Phys. Rev. A*, 71:012302, 2005.
- [17] Won Tae Kim and Edwin J. Son. Lorentz-invariant Bell’s inequality. *Phys. Rev. A*, 71:014102, 2005.
- [18] Thomas F. Jordan, Anil Shaji, and E. C. G. Sudarshan. Maps for Lorentz transformations of spin. *Phys. Rev. A*, 73:032104, 2006.
- [19] Daniel R. Terno. *Quantum Information Processing - From Theory to Experiments*, chapter 1, pages 61–82. IOS Press, 2006.
- [20] Thomas F. Jordan, Anil Shaji, and E. C. G. Sudarshan. Lorentz transformations that entangle spins and entangle momenta. *Phys. Rev. A*, 75:022101, 2007.
- [21] André G. S. Landulfo and George E. A. Matsas. Influence of detector motion in Bell inequalities with entangled fermions. *Physical Review A*, 79:044103, 2009.
- [22] Jacob Dunningham, Veiko Palge, and Vlatko Vedral. Entanglement and nonlocality of a single relativistic particle. *Phys. Rev. A*, 80:044302, 2009.
- [23] Veiko Palge and Jacob Dunningham. Generation of maximally entangled states with subluminal Lorentz boosts. *Phys. Rev. A*, 85:042322, 2012.
- [24] S. N. Molotkov and S. S. Nazin. Relativistic COstraints on the Distinguishability of Orthogonal Quantum States. *JETP*, 94(6):1080–1087, 2002.
- [25] Marek Czachor and Marcin Wilczewski. Relativistic Bennett-Brassard cryptographic scheme, relativistic errors, and how to correct them. *Phys. Rev. A*, 68:010302(R), 2003.
- [26] Robert M. Gingrich, Attila J. Bergou, and Christoph Adami. Entangled light in moving frames. *Phys. Rev. A*, 68:042102, 2003.
- [27] Pawel Caban and Jakub Rembieliński. Lorentz-covariant reduced spin density matrix and Einstein-Podolsky-Rosen-Bohm correlations. *Phys. Rev. A*, 72:012103, 2005.

- [28] Pawel Caban and Jakub Rembieliński. Einstein-Podolsky-Rosen correlations of Dirac particles: Quantum field theory approach. *Phys. Rev. A*, 74:042103, 2006.
- [29] André G. S. Landulfo, George E. A. Matsas, and Adriano C. Torres. Influence of detector motion in entanglement measurements with photons. *Physical Review A*, 81:044103, 2010.
- [30] J. P. Singh. Relativistic Spin Operator with Observers in Motion. *Electronic Journal of Theoretical Physics*, 7(23):161–172, 2010.
- [31] Marek Czachor. Two-spinors, oscillator algebras, and qubits: aspects of manifestly covariant approach to relativistic quantum information. *Quantum Inf. Process*, 9:171–232, 2010.
- [32] Pawel Caban and Jakub Rembieliński. Relativistic Einstein-Podolsky-Rosen Correlations. *Open Systems & Information Dynamics*, 18(2):165–173, 2011.
- [33] Carlo Cafaro, Salvatore Capozziello, and Stefano Mancini. On Relativistic Quantum Information Properties of Entangled Wave Vectors of Massive Fermions. *Int. J. Theor. Phys.*, 51:2313–2340, 2012.
- [34] W. N. Polyzou, W. Glockle, and H. Witala. Spin in Relativistic Quantum Theory. *Few-Body Syst.*, 54:1667–1704, 2012.
- [35] Marek Czachor. Comment on “Quantum Entropy and Special Relativity”. *Phys. Rev. Lett.*, 94:078901, 2005.
- [36] Pablo L. Saldanha and Vlatko Vedral. Physical interpretation of the Wigner rotations and its implications for relativistic quantum information. *New Journal of Physics*, 14:023041, 2012.
- [37] Pablo L. Saldanha and Vlatko Vedral. Spin quantum correlations of relativistic particles. *Phys. Rev. A*, 85:062101, 2012.
- [38] Matthew C. Palmer, Maki Takahashi, and Hans F. Westman. WKB analysis of relativistic Stern-Gerlach measurements. *Annals of Physics*, 336:505–516, 2013.
- [39] Paul M. Alsing and G. J. Milburn. Teleportation with a Uniformly Accelerated Partner. *Phys. Rev. Lett.*, 91:180404, 2003.
- [40] Paul M. Alsing, David McMahon, and G. J. Milburn. Teleportation in a non-inertial frame. *J. Opt. B: Quantum Semiclass. Opt.*, 6:834–843, 2004.
- [41] Dinesh Singh and Nader Mobed. The Implications of Noninertial Motion on Covariant Quantum Spin. *Class. Quantum Grav.*, 24:2453, 2007.

- [42] Animesh Datta. Quantum discord between relatively accelerated observers. *Phys. Rev. A*, 80:052304, 2009.
- [43] Jason Doukas and Benedict Carson. Entanglement of two qubits in a relativistic orbit. *Phys. Rev. A*, 81:062320, 2010.
- [44] Hossein Mehri-Dehnavi, Behrouz Mirza, Hosein Mohammadzadeh, and Robabeh Rahimi. Pseudo-entanglement evaluated in noninertial frames. *Annals of Physics*, 326:1320–1333, 2011.
- [45] T. G. Downes, I. Fuentes, and T. C. Ralph. Entangling Moving Cavities in Noninertial Frames. *Phys. Rev. Lett.*, 106:210502, 2011.
- [46] Nicolai Friis, David Edward Bruschi, Jorma Louko, and Ivette Fuentes. Motion generates entanglement. *Phys. Rev. D*, 85:081701(R), 2012.
- [47] I. Fuentes-Schuller and R. B. Mann. Alice Falls into a Black Hole: Entanglement in Noninertial Frames. *Phys. Rev. Lett.*, 95:120404, 2005.
- [48] Ivette Fuentes, Robert B. Mann, Eduardo Martin-Martinez, and Shahpoor Moradi. Entanglement of Dirac fields in an expanding spacetime. *Phys. Rev. D*, 82:045030, 2010.
- [49] André G. S. Landulfo. *Aspectos Relativísticos da Teoria da Informação Quântica*. PhD thesis, IFT-UNESP, 2011.
- [50] Matthew C. Palmer, Maki Takahashi, and Hans F. Westman. Localized qubits in curved spacetimes. *Annals of Physics*, 327:1078–1131, 2012.
- [51] E. Wigner. On unitary representations of the inhomogeneous lorentz group. *Annals of Mathematics*, 40, 1939.
- [52] Francis R. Halpern. *Special Relativity and Quantum Mechanics*. Prentice-Hall, 1968.
- [53] Steven Weinberg. *The Quantum Theory of Fields - Volume 1 - Foundations*. Cambridge University Press, 1995.
- [54] Y.S. Kim and Marilyn E. Noz. *Theory and Applications of the Poincaré Group*. D. Reidel Publishing Company, 1986.
- [55] Wu-Ki Tung. *Group Theory in Physics - An Introduction*. World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd., 1985.
- [56] J. F. Cornwell. *Group Theory in Physics - An Introduction*. Academic Press, 1997.
- [57] Ivan Avramidi. Notes on Lie Groups, 2000.

-
- [58] Malcolm Ludvigsen. *General Relativity - A Geometric Approach*. Cambridge University Press, 1999.
- [59] D. F. Lawden. *Introduction to Tensor Calculus, Relativity and Cosmology*. John Wiley & Sons, Ltd., 3rd edition, 1982.
- [60] Guifre Vidal. Entanglement monotones. *J. Mod. Opt.*, 47:355, 2000.
- [61] R. Balian, M. Veneroni, and N. Balazs. Relevant Entropy vs. Measurement Entropy. *Europhys. Lett.*, 1(1):1–5, 1986.

