UNIVERSIDADE FEDERAL DE GOIÁS
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA

# Transformações de Ribaucour para Hipersuperfícies em Formas Espaciais

por

Leonardo Antônio Souto

Orientador: Dr. Max Valério Lemes

Dissertação de Mestrado em Matemática
Goiânia, Goiás
2008

UNIVERSIDADE FEDERAL DE GOIÁS
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA
COORDENAÇÃO DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

# Transformações de Ribaucour para Hipersuperfícies em Formas Espaciais

**por**

**Leonardo Antônio Souto**

Área de Concentração : **Geometria e Topologia**
Orientador: **Dr. Max Valério Lemes**

**Dissertação submetida à Banca Examinadora designada pelo Conselho Diretor do Instituto de Matemática e Estatística da Universidade Federal de Goiás, como parte dos requisitos necessários à obtenção do grau de Mestre em Matemática.**

**Goiânia, Goiás**
**2008**

*Dedico este trabalho a minha esposa e minha mãe;*
*Valmira e Maria Virgínia*

# Agradecimentos


Agradeço a Deus por tudo.

Em primeiro lugar, agradeço à minha esposa Valmira, pelo amor, paciência, incentivo e pela pessoa fantástica que é.

Agradeço de coração a minha mãe, Maria Virgínia, e a minha irmã Luciana, pelo amor, carinho, compreensão e incentivo.

Sou grato ao orientador Prof. Dr. Max Valério Lemes, pelo profissionalismo e incentivo a mim dedicado, através de sua grande experiência e conhecimento matemático.

Aos professores do Departemento de Matemática, em especial, Romildo, Maurílio, Ticiane, Mário, Armando e Rogério.

A todos meus amigos, que me acompanharam e muito ajudaram a tornar esse sonho realidade em minha vida; em especial ao Haroldo, Erivelton, Wesley e a toda à equipe da escola Elias Rocha.

# Sumário

# Resumo

A Teoria da transformação de Ribaucour para hipersuperfícies em formas espaciais é apresentada. É mostrado um método para obter superfícies linear Weingarten em formas espaciais tridimensionais. Aplicando a teoria da transformações de Ribaucour ao cilindro, obtemos uma família à dois parâmetros de superfícies linear Weingarten. Uma nova família à um parâmetro de superfícies com curvatura média constante completas na esfera unitária, localmente associada ao toro plano é obtida. Construímos uma família de superfícies com curvatura média constante igual a 1 no espaço hiperbólico tridimensional que são localmente associadas a prima da superfície de Enneper.

# Abstract

The theory of Ribaucour transformations for hypersurfaces in space forms is presented. A method to obtaining linear Weingarten surfaces in a three-dimensional space form is showed. By applying the theory to the cylinder, we obtain a two-parameter family of linear Weingarten surfaces. A new one-parameter family of complete constant mean curvature surfaces in the unit sphere, locally associated to the flat torus, is obtained. We construct new families of constant mean curvature 1 (cmc-1) surfaces which are locally associated to Enneper cousin.

# Introdução

O estudo das superfícies com curvatura média constante em formas espaciais tem sido bem desenvolvido nos últimos anos, principalmente em duas direções: teoria e construção de superfícies com curvatura média constante. Os métodos usados na construção de superfícies com curvatura média constante são: o método da pertubarção [K1, K2]; sistemas integráveis [Bo, PS]; superfícies prima conjugadas [Ka, La]; e um tipo de representação de Weierstrass [DH, KMS]. Recentemente, superfícies com curvatura média constante completas foram construídas aplicando outro método, baseado nas transformações de Ribaucour. Estas transformações para hipersuperfícies nas formas espaciais foram estudadas por Bianchi em 1918-1919 [Bi]. A teoria clássica mostra que as transformações de Ribaucour podem ser usadas para construir superfícies com curvatura Gaussiana constante e superfícies com curvatura média constante a partir de uma dada supefície do mesmo tipo. Entretanto, a primeira aplicação deste método para superfícies mínimas e superfícies com curvatura média constante em $\mathbb{R}^3$ foi obtida recentemente por Corro, Ferreira e Tenenblat em [CFT1, CFT3]. Eles construíram novas famílias de superfícies mínimas completas associadas à superfície de Enneper e ao catenóide. Além disso, superfícies com curvatura média constante completas foram obtidas aplicando a teoria ao cilindro e a superfície de Delaunay.

Em [CFT1], a teoria clássica da transformação de Ribaucour foi estendida para superfícies linear Weingarten em $\mathbb{R}^3$, fornecendo uma versão unificada dos resultados clássicos. Aplicando a transformação de Ribaucour ao cilindro, foi provado a existência de superfícies linear Weingarten hiperbólica completas imersas em $\mathbb{R}^3$, em contraste com o teorema de Hilbert's que afirma a não existência de superfícies completas de curvartura constante negativa imersa em $\mathbb{R}^3$.

A teoria clássica das transformações de Ribaucour considera hipersuperfícies parametrizadas por linhas de curvaturas, cujas curvaturas principais tem multiplicidade um. Embora, isto não seja afirmado explicitamente. Em [CFT4], a definição de uma transformação de Ribaucour no espaço Euclidiano é revisado, extendendo o conceito para subvariedades com ambiente normal plano, cujas curvaturas principais tem multiplicidade maior que um.

A teoria das transformações de Ribaucour para hipersuperfícies $M^n$ em uma forma espacial $\overline{M}^{n+1}(\overline{k}), \overline{k} = 0, \pm 1$, foi estabelecida por Wang e Tenenblat em [WT1]. Além disso, as autoras mostraram que para qualquer hipersuperfície $M^n \subset \overline{M}^{n+1}(\overline{k})$ que admite campo de vetores principais ortonormais, existe uma hipersuperfície totalmente úmbilica de $\overline{M}$ localmente associada a $M$ por uma transformação de Ribaucour. Um método para obter superfícies linear Weingarten em $\overline{M}^3(\overline{k})$ a partir de uma dada superfície linear Weingarten também é apresentado, bem como um método para construir superfícies com curvatura média constante completas a um parâmetro na esfera unitária $S^3$, associada ao toro plano por uma transformação de Ribaucour. Em [WT2], as autoras aplicaram a teoria obtida em [WT1] para as superfícies com curvatura média constante igual a 1 no espaço hiperbólico tridimensional, em particular para a prima da superfície de Enneper.

Este trabalho foi baseado nos artigos [CFT1], [WT1] e [WT2] tendo como objetivo apresentar a teoria geral das transformações de Ribaucour para hipersuperfícies em formas espaciais, bem como a teoria das transformações de Ribaucour para superfícies linear Weingarten em $\overline{M}^3(\overline{k})$ (cf, [WT1]). Além disso, apresentar, num mesmo trabalho, aplicações das transformações de Ribaucour nas formas espaciais; aplicando a transformação de Ribaucour ao cilindro em $\mathbb{R}^3$ (cf, [CFT1]), ao toro plano em $\mathbb{S}^3$ (cf, [WT1]) e à prima da superfície de Enneper em $\mathbb{H}^3$ (cf, [WT2]).

Descrevemos a seguir o conteúdo de cada capítulo deste trabalho.

No Capítulo 1, introduzimos a teoria local das hipersuperfícies $M^n$ em uma forma espacial $\overline{M}^{n+1}(\overline{k}), \overline{k} = 0, \pm 1$ através de formas diferenciais e equações de estrutura, aplicando a teoria em particular, às superfícies em $\overline{M}^3(\overline{k})$. Descrevemos ainda as superfícies no espaço hiperbólico com curvatura média igual a 1 usando um tipo de representação de Weierstrass obtendo ,em particular, a prima da superfície de Enneper.

Iniciamos o Capítulo 2 com a definição da transformação de Ribaucour para hipersuperfícies nas formas espaciais. Esta definição tem também uma forma local. O primeiro teorema no estudo das transformações de Ribaucour é caracterizá-la em termos de equações diferenciais. Estas equações se reduzem em um sistema de equações diferenciais lineares.

Mostramos também que para hipersuperfícies $M$ de $\mathbb{S}^{n+1}$ ou $\mathbb{H}^{n+1}$, que admite um campo de vetores principais ortonormais, a existência de hipersuperfícies totalmente úmbilicas, localmente associadas a $M$ por uma transformação de Ribaucour. Na seção seguinte estudamos as transformações de Ribaucour para superfícies linear Weingarten em $\overline{M}^3(\bar{k})$. Lembrando que uma superfície linear Weingarten em $\overline{M}^3(\bar{k})$ é uma superfície cuja curvatura Gaussiana e curvatura média $K$ e $H$ satisfazem a relação $\alpha + \beta H + \gamma(K - \bar{k}) = 0$ onde $\alpha, \beta$ e $\gamma \in \mathbb{R}$, $\beta^2 - 4\alpha\gamma \neq 0$, $H = -\dfrac{(\lambda^1 + \lambda^2)}{2}$ e $K = \lambda^1\lambda^2 + \bar{k}$, $\lambda^i, i = 1, 2$ são as curvaturas principais de $M$. Provamos uma condição suficiente para que a transformação de Ribaucour transforme uma superfície linear Weingarten em outra superfície linear Weingarten do mesmo tipo. Esta condição fornece um sistema integrável de equações diferenciais cujas soluções permite-nos obter superfícies linear Weingarten em $\overline{M}^3(\bar{k})$. a partir de outra superfície linear Weingarten. Como um caso particular, estudamos transformações de Ribaucour entre superfícies com curvatura média constante imersas em $\overline{M}^3(\bar{k})$.

No Capítulo 3, aplicamos a teoria da transformação de Ribaucour para superfícies linear Weingarten no espaço Eucliadiano $\mathbb{R}^3$, na esfera unitária $\mathbb{S}^3$ e no espaço hiperbólico $\mathbb{H}^3$. Na primeira seção considerarmos o cilindro como uma superfície linear Weingarten satisfazendo $-\dfrac{1}{2} + H + \gamma K = 0$, obtemos uma família à dois parâmetros $\widetilde{X}_{c\gamma}$ em $\mathbb{R}^3$ associados ao cilindro por uma transformação de Ribaucour que são superficies linear Weingarten. Em seguida construimos uma família à um parâmetro de superfícies de curvatura média constante completas na esfera unitária $\mathbb{S}^3$, associada ao toro plano. Como um caso particular , conseguimos uma família de superfíces mínimas completas localmente associado ao toro de Clifford por uma transformação de Ribaucour. Finalmente, construimos uma família de superfícies imersas em $\mathbb{H}^3$, com curvatura média constante igual a 1. Estas superfícies são localmente associadas, por uma transformação de Ribaucour, a prima da superfície de Enneper.

# Capítulo 1

# Método do Referencial móvel

## 1.1 Formas diferenciais

Nesta seção vamos desenvolver a teoria das superfícies utilizando o método do referencial móvel. Este método consiste essencialmente em escolher adequadamente, para cada ponto da superfície, uma base ortonormal $e_1, e_2, e_3$ de $\mathbb{R}^3$ de tal forma, que os vetores $e_1, e_2$ são tangentes à superfície. As demontrações das propriedades e teorema desta seção podem ser encontrados em [dC2, dC3]. Vamos introduzir a noção de formas diferenciais em $\mathbb{R}^n$.

Consideremos o espaço vetorial $\mathbb{R}^n$ e denotamos por $\mathbb{R}^{n^*}$ o espaço dual de $\mathbb{R}^n$, isto é, o conjunto das aplicações lineares de $\mathbb{R}^n$ em $\mathbb{R}$. O espaço dual, munido com as operações usuais de funções é um espaço vetorial.

**Definição 1.1.** *Uma forma de grau 1 ou uma 1-forma em um aberto $U$ de $\mathbb{R}^n$ é uma aplicação $\omega$ que para cada $x = (x_1, ..., x_n) \in U$ associa $\omega_x \in \mathbb{R}^{n^*}$. Isto é, $\omega_x$ é uma função linear de $\mathbb{R}^n$ em $\mathbb{R}$ e portanto $\omega_x$ é da forma*

$$\omega_x = a_1(x)dx_1 + ... + a_n dx_n,$$

*onde $dx_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, i = 1..., n$, é a base dual da base canônica de $\mathbb{R}^n$. $\omega$ é dita diferencial em $U$ se $a_i, i = 1, ..., n$, são funções diferenciáveis de $\mathbb{R}^n$ em $\mathbb{R}$.*

**Exemplo 1.2.** *Com a notação anterior, temos que $dx_i, i = 1, ..., n$, são 1-formas diferenciais em $\mathbb{R}^n$.*

**Exemplo 1.3.** *Seja $f$ uma função diferenciável de um aberto $U$ de $\mathbb{R}^n$ em $\mathbb{R}$. Então, a aplicação $df : U \to \mathbb{R}^{n^*}$, que para cada $x \in U$ associa $df_x$, a diferencial de $f$ em $x$, é uma*

*1-forma diferencial, pois temos*

$$df(v) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(x)dx_i(v).$$

A soma de 1-formas diferenciais $\omega$ e $\overline{\omega}$ em $U \subset \mathbb{R}^n$ é definida como a soma de funções, isto é, $\omega + \overline{\omega}$ é uma 1-forma diferencial que para cada $x \in U$ associa

$$(\omega + \overline{\omega})_x = \omega_x + \overline{\omega}_x.$$

Se $\omega$ é uma 1-forma diferencial em $U \subset \mathbb{R}^n$ e $f : U \to \mathbb{R}$ é uma função diferenciável, definimos o produto $f\omega$ como sendo a 1-forma diferencial tal que para cada $x \in U$ associa

$$(f\omega)_x = f(x)\omega_x.$$

A seguir vamos definir duas operações de produto para 1-formas diferenciais. Para isto, lembramos que uma aplicação $B : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ é dita bilinear se for linear em cada componente, isto é, para quaisquer vetores $v_1, v_2, v_3$ em $\mathbb{R}^n$ e números reais $a$ e $b$

$$\begin{aligned} B(av_1 + bv_2, v_3) &= aB(v_1, v_3) + bB(v_2, v_3), \\ B(v_1, av_2 + bv_3) &= aB(v_1, v_2) + bB(v_1, v_3). \end{aligned}$$

Uma aplicação $B : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ é dita alternada ou anti-simétrica se

$$B(v_1, v_2) = -B(v_2, v_1).$$

**Definição 1.4.** *Sejam $\omega$ e $\overline{\omega}$ 1-formas diferenciais em um aberto $U \subset \mathbb{R}^n$. O produto tensorial de $\omega$ e $\overline{\omega}$, denotado por $\omega \otimes \overline{\omega}$ ou $\omega\overline{\omega}$, é uma aplicação que para cada $x \in U$, associa uma transformação bilinear $(\omega\overline{\omega})_x$: $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ definida por*

$$(\omega\overline{\omega})_x(v_1, v_2) = \omega_x(v_1)\overline{\omega}_x(v_2)$$

*onde $v_1, v_2 \in \mathbb{R}^n$.*

Na definição acima, a ordem dos fatores $\omega$ e $\overline{\omega}$ deve ser observada, já que, em geral $\omega\overline{\omega} \neq \overline{\omega}\omega$. O produto tensorial $\omega\omega$ será denotado por $\omega^2$. A operação produto tensorial satisfaz as seguintes propriedades.

**Proposição 1.5.** *Sejam* $\omega, \overline{\omega}, \overline{\overline{\omega}}$ *1-formas diferenciais em um aberto* $U \subset \mathbb{R}^n$ *e* $f : U \to \mathbb{R}$ *uma função diferenciável. Então*

$$
\begin{array}{ll}
(a) & (\omega + \overline{\omega})\overline{\overline{\omega}} = \omega\overline{\overline{\omega}} + \overline{\omega}\overline{\overline{\omega}}, \\
(b) & \omega(\overline{\omega} + \overline{\overline{\omega}}) = \omega\overline{\omega} + \omega\overline{\overline{\omega}}, \\
(c) & (f\omega)\overline{\omega} = \omega(f\overline{\omega}) = f\omega\overline{\omega}, \\
d) & \text{se } \omega = \sum_{i=1}^{n} a_i dx_i \text{ e } \overline{\omega} = \sum_{j=1}^{n} b_j dx_j, \text{ então } \omega\overline{\omega} = \sum_{i,j=1}^{n} a_i b_j dx_i dx_j,
\end{array}
$$

*onde* $f\omega\overline{\omega}$ *é a aplicação que para cada* $x \in U$ *associa* $f(x)(\omega\overline{\omega})_x$.

A partir do produto tensorial de duas 1-formas , podemos definir uma outra operação chamada produto exterior.

**Definição 1.6.** *Sejam* $\omega$ *e* $\overline{\omega}$ *1-formas diferenciais em um aberto* $U \subset \mathbb{R}^n$. *O produto exterior de* $\omega$ *e* $\overline{\omega}$, *denotado por* $\omega \wedge \overline{\omega}$, *é uma aplicação que para cada* $x \in U$ *associa uma transformação bilinear e alternada* $(\omega \wedge \overline{\omega})_x$: $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *definida por*

$$(\omega \wedge \overline{\omega})_x = (\omega\overline{\omega})_x - (\overline{\omega}\omega)_x.$$

**Observação 1.7.** *Segue-se desta definição, que para quaisquer vetores* $v_1, v_2 \in \mathbb{R}^n$ *que*

$$(\omega \wedge \overline{\omega})_x(v_1, v_2) = \begin{vmatrix} \omega_x(v_1) & \omega_x(v_2) \\ \overline{\omega}_x(v_1) & \overline{\omega}_x(v_2) \end{vmatrix}.$$

*Portanto,* $(du \wedge dv)_x(e_1, e_2) = 1, \quad du \wedge du = dv \wedge dv = 0, \quad du \wedge dv = -dv \wedge du.$

O produto exterior satisfaz as seguintes propriedades:

**Proposição 1.8.** *Sejam* $\omega, \overline{\omega}, \overline{\overline{\omega}}$ *1-formas diferenciais em um aberto* $U \subset \mathbb{R}^n$ *e* $f : U \to \mathbb{R}$ *uma função diferenciável. Então*

$$
\begin{array}{ll}
(a) & \omega \wedge (\overline{\omega} + \overline{\overline{\omega}}) = \omega \wedge \overline{\omega} + \omega \wedge \overline{\overline{\omega}}, \\
(b) & (\omega + \overline{\omega}) \wedge \overline{\overline{\omega}} = \omega \wedge \overline{\overline{\omega}} + \overline{\omega} \wedge \overline{\overline{\omega}}, \\
(c) & (f\omega) \wedge \overline{\omega} = \omega \wedge (f\overline{\omega}) = f\omega \wedge \overline{\omega}, \\
(d) & \text{se } \omega = \sum_{i=1}^{n} a_i dx_i \text{ e } \overline{\omega} = \sum_{j=1}^{n} b_j dx_j, \text{ entao } \omega \wedge \overline{\omega} = \sum_{i,j=1}^{n} (a_i b_j - a_j b_i) dx_i \wedge dx_j, \\
(e) & \omega \wedge \overline{\omega} = -\overline{\omega} \wedge \omega, \\
(f) & \omega \text{ e } \overline{\omega} \text{ são linearmentes independente, se e somente, se para todo } x \in U, (\omega \wedge \overline{\omega})_x \neq 0.
\end{array}
$$

**Definição 1.9.** *Uma forma diferencial de grau $r$ ou uma $r$-forma diferencial em um aberto $U$ de $\mathbb{R}^n$ é uma aplicação $\phi$ que, para cada $x \in U$, associa uma transformação $r$-linear alternada $\phi_x : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times ... \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, dada por*

$$\phi_x = \sum_{i_1<...<i_r<n} A_{i_1...i_r}(x) dx_{i_1} \wedge ... \wedge dx_{i_r} = \sum_I A_I dx_I,$$

*onde $I = i_1, ..., i_r$. As funções $A_I$ são funções diferenciáveis de $U$ em $\mathbb{R}$.*

Temos que o produto exterior de $r$ 1-formas diferenciais é uma $r$-forma diferencial. Uma função diferenciável $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ é dita 0-forma diferencial. A seguir vamos introduzir o conceito da diferencial exterior de uma $r$-forma obtendo uma $r+1$-forma diferencial.

**Definição 1.10.** *Seja $\omega = \sum_I A_I dx_I$ uma $r$-forma diferencial em $U \subset \mathbb{R}^n$, onde $I = i_1, ..., i_r$. A diferencial exterior de $\omega$, denotada por $d\omega$, é a $r+1$-forma diferencial em $U$ definida por*

$$d\omega = \sum_I dA_I \wedge dx_I = \sum_{i,I} \frac{\partial A}{\partial x_i} dx_i \wedge dx_I.$$

A diferencial exterior satisfaz as seguintes propriedades:

**Proposição 1.11.** *Sejam $\omega, \overline{\omega}$ $r$-formas diferenciais em um aberto $U \subset \mathbb{R}^n$ e $f : U \to \mathbb{R}$ uma função diferenciável. Então*

$$\begin{array}{ll} (a) & d(\omega + \overline{\omega}) = d\omega + d\overline{\omega}, \\ (b) & d(d\omega) = 0, \\ (c) & d(\omega \wedge \overline{\omega}) = d\omega \wedge \overline{\omega} + (-1)^r \omega \wedge d\overline{\omega}, \\ (d) & d(f\omega) = df \wedge \omega + (-1)^r f d\omega. \end{array}$$

**Definição 1.12.** *Seja $\omega$, uma $r$-forma diferencial em um aberto $U \subset \mathbb{R}^n$. Dizemos que $\omega$ é fechada se $d\omega = 0$. Dizemos que $\omega$ é exata se existe uma $(r-1)$-forma diferencial $\theta$ tal que $d\theta = \omega$.*

**Proposição 1.13.** *Toda forma diferencial exata é fechada.*

De fato, seja $\omega$ uma $r$-forma exata, logo existe uma $(r-1)$-forma $\theta$ tal que $d\theta = \omega$. Mas $d(d\theta) = d\omega$ que implica $d\omega = 0$ pela propriedade (c) da proposição anterior. Portanto $\omega$ é fechada.

**Observação 1.14.** *A recíproca geral da proposição é falsa. Basta considerar*

$$\omega = \frac{x}{x^2+y^2}dy - \frac{y}{x^2+y^2}dx,\ U = \mathbb{R}^2 - \{0\}.$$

*Temos que $\omega$ é fechada, mas não é exata em $U$. Entretanto, num domínio adequado vale a recíproca.*

**Definição 1.15.** *Uma região $U \subset \mathbb{R}^n$ é dita estrelada em relação a um ponto $p \in U$ se todo segmento de $q \in U$ a $p$ está contido em $U$.*

**Lema 1.16.** ***Lema de Poincaré:*** *Se $\omega$ é uma $r$-forma fechada em uma região $U \subset \mathbb{R}^n$ estrelada em relação a um ponto, então $\omega$ é exata.*

**Definição 1.17.** *Uma $p$-uplas de 1-formas em um aberto $U \subset \mathbb{R}^n$ é uma aplicação $\Omega$ que, para cada $x \in U$, associa uma transformação linear $\Omega_x : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$, isto é*

$$\Omega_x(v) = \big(\Omega^1_x(v), ..., \Omega^p_x(v)\big),$$

*onde $\Omega^i, i = 1, ..., p$ são 1-formas diferenciais e $v \in \mathbb{R}^n$.*

Se $\Omega, \Lambda$ são duas $p$-uplas de 1-formas diferenciais em $U \subset \mathbb{R}^n$ e $f$ é uma função diferenciável em $U$, definimos a soma $\Omega + \Lambda$ e o produto $f\Omega$ como soma e produto de funções, isto é, se

$$\begin{aligned} \Omega &= (\Omega^1, ..., \Omega^p), \\ \Lambda &= (\Lambda^1, ..., \Lambda^p), \end{aligned}$$

então,

$$\begin{aligned} \Omega + \Lambda &= (\Omega^1 + \Lambda^1, ..., \Omega^p + \Lambda^p), \\ f\Omega &= (f\Omega^1, ..., f\Omega^p). \end{aligned}$$

De modo inteiramente análogo definimos uma $p$-uplas de 2-formas diferenciais em $U \subset \mathbb{R}^n$ como sendo uma aplicação $\Phi$ que, para cada $x \in U$, associa uma transformação bilinear $\Phi_x : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ cujas funções coordenadas $(\Phi^1)_x, ..., (\Phi^p)_x$ são 2-formas diferenciais.

**Definição 1.18.** *Dizemos que as 1-formas $\omega_1 = 0, ..., \omega_k = 0$ linearmente independentes é integrável se para todo $x \in \mathbb{R}^{n+k}$, existe um aberto $U \subset \mathbb{R}^n$, $0 \in U$ e uma aplicação $X : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{n+k}$ diferenciável tal que $X(0) = x$, $dX_x : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{n+k}$ injetiva onde $dX_x(\mathbb{R}^n) = D_x = \{v \in \mathbb{R}^{n+k}; (\omega_1)_x(v) = ... = (\omega_k)_x(v) = 0\}$.*

**Definição 1.19.** *Uma r-forma $\Lambda$ se anula em $D$ se $\Lambda(v_1, ..., v_r) = 0$, para todo $(v_1, ..., v_r) \in D$.*

**Definição 1.20.** *O conjunto das 1-formas que se anulam em $D$ é o ideal gerado por $\omega_1, ..., \omega_k$, denotado por $J$.*

**Definição 1.21.** *O ideal $J$ é fechado se $dJ \subset J$, isto é, para toda 1-forma $\omega$ em $J$, $d\omega \in J$.*

Temos a seguinte proposição.

**Proposição 1.22.** *Sejam $\omega_1, ..., \omega_k$ 1-formas que geram o ideal $J$. Então o ideal $J$ é fechado se e somente se,*

$$d\omega_i = \sum_{j=1}^{k} \omega_j \wedge \theta_{ji}$$

*onde $\theta_{ji}$ são 1-formas.*

Concluímos esta seção, enunciando o Teorema de Frobenius que será de grande utilidade no desenvolvimento deste trabalho.

**Teorema 1.23.** ***Teorema de Frobenius:*** *O ideal $J$ é integrável se e somente se o ideal $J$ é fechado.*

## 1.2 Equações de Estrutura

Seja $U \subset \mathbb{R}^n$ um aberto do $\mathbb{R}^n$ e sejam $e_1, ..., e_n$ $n$ campos diferenciáveis de vetores em $U$ de tal modo que, para todo $p \in U$, se tenha $< e_i, e_j >= \delta_{ij}$, onde $\delta_{ij} = 0$ se $i \neq j$ e $\delta_{ij} = 1$ se $i = j$, $i, j = 1, ..., n$. Um tal conjunto de vetores é chamado um referencial ortonormal móvel em $U$. De agora em diante, omitiremos os adjetivos ortonormal e móvel.

A partir do referencial $\{e_i\}$ podemos definir formas diferenciais lineares $\omega_1, ..., \omega_n$ pela condição $\omega_i(e_j) = \delta_{ij}$; em outras palavras, em cada ponto $p \in U$, a base $\{(\omega_i)_p\}$ é a base dual da base $\{(e_i)\}$. O conjunto das formas diferenciais $\{\omega_i\}$ é chamado coreferencial associado ao referencial $\{e_i\}$.

Cada campo $\{e_i\}$ pode ser pensado como uma aplicação diferenciável $e_i : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$. A diferencial $(de_i)_p : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, em $p \in U$, é uma aplicação linear. Portanto, para todo $v \in \mathbb{R}^n$ podemos escrever

$$(de_i)_p(v) = \sum_{j=1}^{n} (\omega_{ij})_p(v) e_j.$$

Portanto temos $(\omega_{ij})_p$ é uma forma linear em $\mathbb{R}^n$. Como $e_i$ é um campo diferenciável, $\omega_{ij}$ é uma forma diferencial linear. Com estes significados, escreveremos

$$de_i = \sum_{j=1}^{n} \omega_{ij} e_j, \tag{1.1}$$

como definição das formas $\omega_{ij}$, que são chamadas formas de conexão do $\mathbb{R}^n$ no referencial $\{e_i\}$. Pela equação (1.1) temos

$$\omega_{ij} =< de_i, e_j > .$$

Derivando a expressão $< e_i, e_j >= \delta_{ij}$, obteremos

$$0 =< de_i, e_j > + < e_i, de_j >= \omega_{ij} + \omega_{ji},$$

isto é, as formas de conexão $\omega_{ij} = -\omega_{ji}$ são anti-simétricas nos índicies $i, j$.

O ponto fundamental no método do referencial móvel é que as formas $\omega_i, \omega_{ij}$ satisfazem as chamadas equações de estrutura de Elie Cartan, cuja demonstração pode ser encontrada em [dC3].

**Teorema 1.24.** *(Equações de estrutura do $\mathbb{R}^n$ )- Seja $\{e_i\}$ um referencial móvel ortonormal em um aberto $U \subset \mathbb{R}^n$. Sejam $\{\omega_i\}$ o coreferencial associado a $\{e_i\}$, e $\omega_{ij}$ as formas de conexão de $U$ no referencial $\{e_i\}$. Então:*

$$d\omega_i = \sum_k \omega_k \wedge \omega_{ki}, \tag{1.2}$$

$$d\omega_{ij} = \sum_k \omega_{ik} \wedge \omega_{kj}, \tag{1.3}$$

*onde, $k = 1, ..., n$.*

Agora enuciaremos o Lema de Cartan, cuja demonstração pode ser encontrada em [dC3].

**Lema 1.25.** *Seja $V$ um espaço vetorial de dimensão $n$. Sejam $\omega_1, ..., \omega_r : V \to \mathbb{R}$, $r < n$, formas lineares em $V$ linearmente independentes. Suponhamos que existam formas lineares $\theta_1, ..., \theta_r : V \to \mathbb{R}$ satisfazendo a seguinte condição:*

$$\sum_{i=1}^{r} \omega_i \wedge \theta_i = 0.$$

*Então*

$$\theta_i = \sum_j a_{ij}\omega_j, \qquad i, j = 1, ..., r, \qquad a_{ij} = a_{ji}.$$

Aplicaremos agora as equações de estrutura para hipersuperfícies nas formas espaciais.

Seja $M^{n+1}(\overline{k})$, $\overline{k} = 0, \pm 1$ a forma espacial simplesmente conexa de curvatura seccional $\overline{k}$. Seja $\mathbb{L}^{n+2}$ o conjunto com $x = (x_0, x_1, ..., x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+2}$ dotado com o produto interno

$$< x, y >= -x_0 y_0 + \sum_{i=1}^{n+1} x_i y_i.$$

Considere o espaço hiperbólico como a subvariedade:

$$\mathbb{H}^{n+1} = \{x \in \mathbb{L}^{n+2} | < x, x >= -1, x_0 > 0\}.$$

Considere uma hipersuperfície orientável $M$ em $\overline{M}^{n+1}(\overline{k})$, onde $\overline{M}^{n+1}(\overline{k}) = \mathbb{S}^{n+1} \subset \mathbb{R}^{n+2}$ quando $\overline{k} = 1$, $\overline{M}^{n+1}(\overline{k}) = \mathbb{H}^{n+1} \subset \mathbb{L}^{n+2}$ quando $\overline{k} = -1$ e $\overline{M}^{n+1}(\overline{k}) = \mathbb{R}^{n+1}$ quando $\overline{k} = 0$

Seja $e_i, i = 1, ..., n$ um referencial ortonormal tangente a $M$ e $N$ um campo de vetores normais unitários definido sobre $M$. Denote por $\omega_i$ a 1-forma dual a $e_i$ e $\omega_{ij}, 1 \leq i, j \leq n$, as formas de conexão definidas por

$$d\omega_i = \sum_{j \neq i}^{n} \omega_{ij} \wedge \omega_j, \text{ onde } \omega_{ij} + \omega_{ji} = 0. \tag{1.4}$$

As equações de Gauss são dadas por:

$$d\omega_{ij} = \sum_{k=1}^{n} \omega_{ik} \wedge \omega_{kj} + \omega_{in+1} \wedge \omega_{n+1j} - \overline{k}\omega_i \wedge \omega_j, \tag{1.5}$$

onde $\omega_{in+1} = -\omega_{n+1i} =< de_i, N >$.
As equações de Codazzi são:

$$d\omega_{in+1} = \sum_{j=1}^{n} \omega_{ij} \wedge \omega_{jn+1} \tag{1.6}$$

Se o campo de vetores $e_i$, definido acima são direções principais correspondendo as curvaturas principais $-\lambda^i, 1 \leq i \leq n$, então

$$\omega_{in+1} = -\lambda^i \omega_i, \qquad dN(e_i) = \lambda^i e_i. \tag{1.7}$$

Vamos considerar uma hipersuperfície $M$ em $\mathbb{R}^{n+1}, \mathbb{H}^{n+1}$ ou $\mathbb{S}^{n+1}$ parametrizada por linhas de curvaturas ortogonais, $X(u_1, ..., u_n)$ onde $X$ denota o vetor posição em $\mathbb{R}^{n+1}, \mathbb{R}^{n+2}$ e $\mathbb{R}^{n+2}$. A primeira forma fundamental de $M$ é determinada por $I = \sum_i^n \omega_i^2$ onde $\omega_i = a_i du_i$ e $a_i = |X_{u_i}|$ são funções diferenciáveis. As direções principais são $e_i = \dfrac{X_{,i}}{a_i}$, onde $X_{,i}$ denota a derivada parcial com respeito a $u_i$. Segue de (1.4) que

$$\omega_{ij} = \frac{1}{a_i a_j} \left( -\frac{\partial a_i}{\partial u_j} \omega_i + \frac{\partial a_j}{\partial u_i} \omega_j \right) \tag{1.8}$$

onde $1 \leq i, j \leq n$.
De fato, temos que $\omega_i = a_i du_i$ e logo

$$\begin{aligned} d\omega_i &= \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial a_i}{\partial u_j} du_j \wedge du_i \\ &= -\sum_{j=1}^{n} \frac{1}{a_i a_j} \frac{\partial a_i}{\partial u_j} a_i du_i \wedge a_j du_j \\ &= -\sum_{j=1}^{n} \frac{1}{a_i a_j} \frac{\partial a_i}{\partial u_j} \omega_i \wedge \omega_j. \end{aligned}$$

Segue de (1.4) que

$$\omega_{ij} = -\frac{1}{a_i a_j} \frac{\partial a_i}{\partial u_j} \omega_i + \frac{1}{a_i a_j} \frac{\partial a_j}{\partial u_i} \omega_j = \frac{1}{a_i a_j} \left( -\frac{\partial a_i}{\partial u_j} \omega_i + \frac{\partial a_j}{\partial u_i} \omega_j \right).$$

Em particular, vamos aplicar a teoria vista anteriormente às superfícies em $M^3(\overline{k})$. Portanto, seja $U \subset \mathbb{R}^2$ aberto e considere $X : U \subset S \to M^3(\overline{k})$ uma imersão, isto é $X$ é diferenciável e $dX_p : T_pS \to T_pS$ injetiva. Seja $V$ uma vizinhança de $X(p)$ em $M^3(\overline{k})$ tal que $X(U) \subset V$. Então $V$ tem um referencial ortonormal móvel adaptado $e_1, e_2, e_3$, onde $e_1$ e $e_2$ sejam tangentes a $X(U)$ e $e_3$ seja normal a $X(U)$.

Em $V$ estão definidas as formas $\omega_i$ do coreferencial de $\{e_i\}, i = 1, 2, 3$ e as formas de conexão $\omega_{12} = -\omega_{21}$, $\omega_{32} = -\omega_{23}$, $\omega_{13} = -\omega_{31}$. Tais formas satisfazem as equações de estrutura dadas por (1.4) e (1.5).

A imersão $X : U \subset S \to V \subset M^3(\overline{k})$ induz em $U$ formas $X^*(\omega_i)$ e $X^*(\omega_{ij}), i, j = 1, 2, 3$. Como $X^*$ comuta com a diferencial exterior e o produto exterior, tais formas satisfazem as equações (1.4) e (1.5). Observe que $X^*(\omega_3) = 0$ , pois para todo $q \in U$ e todo $v \in T_qS$, teremos $dX(v) = a_1e_1 + a_2e_2$ e portanto $X^*(\omega_3) = \omega_3 dX(v) = \omega_3(a_1e_1 + a_2e_2) = 0$.

Vamos identificar $U$ com $X(U)$, assim também convencionaremos $X^*(\omega_i) = \omega_i$ e $X^*(\omega_{ij}) = \omega_{ij}$. Como $\omega_3 = 0$ quando restrito a $X(U)$, temos que $d\omega_3 = 0$ que implica que $\omega_1 \wedge \omega_{13} + \omega_2 \wedge \omega_{23} = 0$. Pelo Lema de Cartan, temos

$$\begin{cases} \omega_{13} = h_{11}\omega_1 + h_{12}\omega_2 \\ \omega_{23} = h_{21}\omega_1 + h_{22}\omega_2 \end{cases}$$

onde $h_{12} = h_{21}$. A matriz $(h_{ij})$ dada por

$$(h_{ij}) = \begin{pmatrix} -h_{11} & -h_{12} \\ -h_{21} & -h_{22} \end{pmatrix}$$

é a matriz da diferencial da aplicação $e_3 : U \to M^3(\overline{k})$ na base $\{e_1, e_2\}$. Como $|e_3| = 1$, esta última aplicação toma valores na esfera unitária . Fixemos uma orientação em $U$ e escolhemos o referencial $\{e_1, e_2, e_3\}$ de tal modo que , para todo $q \in U$, $(e_1)_q, (e_2)_q$ formam uma base de $T_qS$ na orientação escolhida e $(e_1)_q, (e_2)_q, (e_3)_q$ sejam uma base positiva de $M^3(\overline{k})$. Neste caso, a aplicação $e_3 : U \to S^2 \subset M^3(\overline{k})$ está completamente definida e é chamada a aplicação normal de Gauss em $U$.

Como $(h_{ij})$ é simétrica concluímos que $de_3$ é uma aplicação auto-adjunta. Logo, tal aplicação pode ser diagonalizada, com valores próprios $-\lambda^1, -\lambda^2$ reais , e vetores próprios ortogonais. É usual definir a curvatura Gaussiana $K$ de $S$ em $p$ por

$$K - \overline{k} = \det(de_3)_p = \lambda^1\lambda^2 = h_{11}h_{22} - h_{12}^2.$$

A curvatura média $H$ é dada por $H = -\dfrac{1}{2}tr(de_3)_p = \dfrac{h_{11} + h_{22}}{2}$.

**Proposição 1.26.** *Sejam $e_1, e_2, e_3$ um triedo móvel associado a uma superfície $S$. Então as formas diferenciais $\omega_1, \omega_2$ e $\omega_{ij}$ satisfazem as seguintes equações*

$$\begin{aligned} d\omega_{12} &= -K\omega_1 \wedge \omega_2 & (1.9)\\ 2H\omega_1 \wedge \omega_2 &= \omega_1 \wedge \omega_{23} + \omega_{13} \wedge \omega_2. & (1.10)\end{aligned}$$

*Demonstração.*

$$\begin{aligned} d\omega_{12} &= \omega_{13} \wedge \omega_{32} - \overline{k}\omega_1 \wedge \omega_2 \\ &= -(h_{11}\omega_1 + h_{12}\omega_2) \wedge (h_{21}\omega_1 + h_{22}\omega_2) - \overline{k}\omega_1 \wedge \omega_2 \\ &= [-(h_{11}h_{22} - h_{12}^2) - \overline{k}]\omega_1 \wedge \omega_2 = -K\omega_1 \wedge \omega_2. \end{aligned}$$

Agora

$$\begin{aligned} \omega_1 \wedge \omega_{23} + \omega_{13} \wedge \omega_2 &= \omega_1 \wedge (h_{21}\omega_1 + h_{22}\omega_2) + (h_{11}\omega_1 + h_{12}\omega_2) \wedge \omega_2 \\ &= h_{22}\omega_1 \wedge \omega_2 + h_{11}\omega_1 \wedge \omega_2 \\ &= (h_{11} + h_{22})\omega_1 \wedge \omega_2 = 2H\omega_1 \wedge \omega_2, \end{aligned}$$

onde usamos o fato que $\omega_i \wedge \omega_i = 0$. □

A equação (1.9) é denominada equação de Gauss. A primeira forma fundamental em $T_pS$ é dada por

$$I_p(v) =< v, v >_p = (\omega_1^2 + \omega_2^2)_p(v). \tag{1.11}$$

De fato, seja $v = ae_1 + be_2$, logo $< v, v >= a^2 + b^2$. Portanto

$$\begin{aligned} (\omega_1^2 + \omega_2^2)(v) &= \omega_1(v)\omega_1(v) + \omega_2(v)\omega_2(v) \\ &= \omega_1(ae_1 + be_2)\omega_1(ae_1 + be_2) + \omega_2(ae_1 + be_2)\omega_2(ae_1 + be_2) \\ &= a^2 + b^2 =< v, v > . \end{aligned}$$

Analogamente, como $e_3$ é normal à superfície segue que a segunda forma fundamental é dada por

$$II_p(v) = - < de_3(v), (v) >= (\omega_1\omega_{13} + \omega_2\omega_{23})(v). \tag{1.12}$$

## 1.3 Superfícies CMC-1 no Espaço Hiperbólico

O assunto desta seção é dar uma representação de Weierstrass para superfícies de curvatura média igual a 1 no espaço hiperbólico. Alguns resultados nesta seção serão apresentados sem demonstração as quais podem ser encontrados em [GG]. Tal representação depende da aplicação de Gauss hiperbólica e daremos um exemplo construindo a superfície prima da superfície de Enneper.

Considere o espaço de Lorentz $\mathbb{L}^4 = \{x = (x_0, x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^4\}$ com o produto interno

$$< x, y >= -x_0y_0 + x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3.$$

O modelo de Minkowsky para o espaço Hiperbólico é a subvariedade

$$\mathbb{H}^3 = \{x \in \mathbb{L}^4 | < x, x >= -1, x_0 > 0\}.$$

Em $\mathbb{H}^3$ consideramos a orientação induzida a partir de $\mathbb{L}^4$ para que os vetores $\nu_1, \nu_2, \nu_3$ em $T_p\mathbb{H}^3$ formem uma base orientada se $\{p, \nu_1, \nu_2, \nu_3\}$ é uma base orientada positiva de $\mathbb{L}^4$ .

Seja $X : M \to \mathbb{H}^3$ uma imersão isométrica de uma superfície Riemanniana orientável $M$ no espaço hiperbólico e $N(p)$ o vetor normal unitário em $p \in M$. Nas coordendas isotérmicas locais $z = u + iv$, temos $\|X_u\| = \|X_v\| = \lambda, < X_u, X_v >= 0$ e $N$ é tal que $\{X(p), \frac{1}{\lambda}X_u, \frac{1}{\lambda}X_v, N(p)\}$ é uma base postiva ortogonal de $T_p\mathbb{L}^4$.

Considere a aplicação $\Phi : \mathbb{H}^3 \to D$ dada por

$$\Phi(x_0, x_1, x_2, x_3) = \left(1, \frac{x_1}{x_0}, \frac{x_2}{x_0}, \frac{x_3}{x_0}\right)$$

e o vetor $d\Phi(N(p))$ onde $D = \{(x_0, x_1, x_2, x_3)| \, x_0 = 1, x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 < 1\}$.

**Definição 1.27.** *A aplicação de Gauss hiperbólica de uma imersão* $X : M \to \mathbb{H}^3$ *é* $n : M \to \partial D$ *dada por* $n(p) = \Phi(X(p)) + td\Phi(N(p))$ *onde* $t > 0$ *e* $n(p) \in \partial D$.

Segue imediatamente que:

**Lema 1.28.** *A aplicação de Gauss hiperbólica* $n$ *de uma imersão* $X : M \to \mathbb{H}^3$ *é dada por*

$$n = \frac{1}{x_0 + N_0}(X + N).$$

*Demonstração.* Para $X(p) = (x_0, x_1, x_2, x_3)$ e $N = (N_0, N_1, N_2, N_3)$ temos que

$$d\Phi(N(p)) = -\frac{N_0}{x_0^2}X + \frac{1}{x_0}N.$$

Como $n(p) = \Phi(X(p)) + td\Phi(N(p))$ está no cone $-x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 0$ temos

$$< n(p), n(p) >= -\frac{(x_0 - tN_0)^2}{x_0^4} + \frac{t^2}{x_0^2} = 0.$$

A solução $t$ com $t > 0$ é $t = \dfrac{x_0}{x_0 + N_0}$. Portanto

$$\begin{aligned} n(p) &= \Phi(X(p)) + td\Phi(N(p)) \\ &= \left(1, \frac{x_1}{x_0}, \frac{x_2}{x_0}, \frac{x_3}{x_0}\right) + \frac{x_0}{x_0 + N_0}\left( - \frac{N_0}{x_0^2}X + \frac{1}{x_0}N\right) \\ &= \frac{1}{x_0}X\left(1 - \frac{N_0}{x_0 + N_0}\right) + \frac{1}{x_0 + N_0}N \\ &= \frac{1}{x_0 + N_0}(X + N). \end{aligned}$$

□

**Observação 1.29.** *Visto que o vetor $X+N$ também está no cone, então existe $\psi : U \to \mathbb{R}$,*

$$\psi(p) = -\frac{1}{< n, X >} = x_0 + N_0 = - < X + N, e_0 >, \; e_0 = (1, 0, 0, 0)$$

*tal que $\psi(p)n(p) = X(p) + N(p), \; \forall p \in U$ e*

$$N = -\frac{1}{< n, X >}n - X.$$

Trabalhando com a aplicação de Gauss hiperbólica, para superfícies com curvatura média constante igual a 1, temos um teorema de representação local similar à representação de Weierstrass para superfícies mínimas no espaço euclidiano.

**Teorema 1.30.** *Seja $X : M \to \mathbb{H}^3$ uma imersão não-umbílica em $\mathbb{H}^3$ com curvatura média 1 e*

$$n(z) = \left(1, \frac{2Reh}{1 + |h|^2}, \frac{2Imh}{1 + |h|^2}, \frac{1 - |h|^2}{1 + |h|^2}\right) \tag{1.13}$$

*a sua aplicação de Gauss hiperbólica. Denotando* $X(z) = (x_0(z), x_1(z), x_2(z), x_3(z))$*, as funções reais* $\phi_1(z) = x_0(z) + x_3(z)$ *e* $\phi_2(z) = x_0(z) - x_3(z)$ *e as funções complexas* $\phi_3(z) = x_1(z) + ix_2(z)$ *satisfazem*

$$\begin{cases} \phi_1\phi_2 & = 1 + |\phi_3|^2 \\ \dfrac{\partial\phi_1}{\partial z} & = h\dfrac{\partial\overline{\phi_3}}{\partial z} \\ \dfrac{\partial\phi_2}{\partial z} & = \dfrac{1}{h}\dfrac{\partial\phi_3}{\partial z} \end{cases} \tag{1.14}$$

*Reciprocamente, dada uma função holomorfa não-constante* $h : U \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$*, duas funções reais* $\phi_1$ *e* $\phi_2$ $(\phi_2 > 0)$ *e uma função complexa* $\phi_3$ *satisfazendo (1.14) no domínio simplesmente conexo* $U$*, então*

$$X(z) = \left(\frac{\phi_1(z) + \phi_2(z)}{2}, Re\phi_3(z), Im\phi_3(z), \frac{\phi_1(z) - \phi_2(z)}{2}\right) \tag{1.15}$$

*define uma imersão conforme em* $\mathbb{H}^3$ *com curvatura média constante igual a* $1$ *e a sua aplicação de Gauss hiperbólica* $n$ *é dada por* $h$ *como acima.*

A demonstração do teorema pode ser encontrada em [GG].

**Observação 1.31.** *A condição de compatibilidade para as duas equações diferenciais parciais em (1.14) é a mesma e escreve*

$$Im\{\overline{h}\Delta\phi_3\} = 0. \tag{1.16}$$

*Portanto cada equação do sistema (1.14) tem as condições de integrabilidade dada por (1.16).*

**Exemplo 1.32.** *O sistema (1.14) também admite soluções como* $\phi_3(z) = F(z)\overline{G}(z)$ *com* $F$ *e* $G$ *funções holomorfas. Neste caso se*

$$F'(z) = h(z)G'(z) \tag{1.17}$$

*a condição de integrabilidade (1.17) é verificada.*

*As duas últimas equações em (1.14) pode ser integrada e as soluções são*

$$\phi_1(z) = |F(z)|^2 \qquad e \qquad \phi_2(z) = |G(z)|^2.$$

*Modificaremos estas soluções para ter a primeira equação satisfeita; neste caso, tomaremos* $F_1, F_2, G_1$ *e* $G_2$ *como em (1.17),* $A$ *e* $B$ *constantes reais tais que*

$$\begin{cases} \phi_1 &= A|F_1|^2 + B|F_2|^2 \\ \phi_2 &= A|G_1|^2 + B|G_2|^2 \\ \phi_3 &= AF_1\overline{G}_1 + BF_2\overline{G}_2 \end{cases}$$

*com*

$$AB(\overline{F}_1\overline{G}_2 - \overline{F}_2\overline{G}_1)(F_1G_2 - F_2G_1) = 1. \tag{1.18}$$

*Escolhendo*

$$h(z) = \tanh \lambda z, \qquad G_1'(z) = \cosh \lambda z, \qquad G_2'(z) = z \cosh \lambda z,$$

*obtemos as superfícies chamadas a prima da superfície de Enneper. Consequentemente por (1.17) e (1.18),*

$$\begin{aligned} F_1(z) &= \frac{1}{\lambda}\cosh \lambda z, \\ F_2(z) &= \frac{1}{\lambda}\left(z\cosh\lambda z - \frac{1}{\lambda}\operatorname{senh}\lambda z\right), \\ G_1(z) &= \frac{1}{\lambda}\operatorname{senh}\lambda z, \\ G_2(z) &= \frac{1}{\lambda}\left(z\operatorname{senh}\lambda z - \frac{1}{\lambda}\cosh\lambda z\right) \end{aligned}$$

*e* $AB = |\lambda|^6, \lambda \in \mathbb{C}$. *A primeira forma fundamental da prima da superfície de Enneper é*

$$ds^2 = \left[\frac{A}{\lambda} + \frac{B}{\lambda}|z|^2\right]^2 |dz|^2.$$

Tomando os valores $\lambda = \frac{1}{2}$, $A = \frac{1}{4\sqrt{2}}$ e $B = \frac{1}{8\sqrt{2}}$ iremos obter a superfície prima da superfície de Enneper que será trabalhada no Capítulo 3, que é

$$\begin{aligned} X(x,y) = \frac{\sqrt{2}}{2}\Bigg(&\frac{|z|^2+6}{4}\cosh(x) - x\operatorname{senh}(x), \frac{|z|^2+6}{4}\operatorname{senh}(x) \\ &-x\cosh(x), \frac{2-|z|^2}{4}\operatorname{sen}(y) - y\cos(y), \frac{|z|^2-2}{4}\cos(y) - y\operatorname{sen}(y)\Bigg), \end{aligned} \tag{1.19}$$

onde $z = x + iy$. Calculando a aplicação de Gauss hiperbólica de $X$ dada por (1.13) onde $h(z) = \tanh \frac{1}{2}z$, obtemos

$$n(z) = \frac{1}{\cosh x}(\cosh x, \operatorname{senh} x, \operatorname{sen} y, -\cos y).$$

Um cálculo fácil mostra que

$$< n, X >= -\frac{\sqrt{2}}{4}\frac{|z|^2+2}{\cosh x}.$$

Portanto, pela Observação 1.29 temos que o vetor normal $N$ de $X$ é

$$\begin{aligned} N &= -\frac{1}{< n, X >}n - X \\ &= \frac{4}{\sqrt{2}}\frac{\cosh x}{|z|^2+2} \cdot \frac{1}{\cosh x}(\cosh x, \operatorname{senh} x, \operatorname{sen} y, -\cos y) - X \\ &= \frac{2\sqrt{2}}{|z|^2+2}(\cosh x, \operatorname{senh} x, \operatorname{sen} y, -\cos y) - X. \end{aligned} \tag{1.20}$$

A primeira forma fundamental de $X$ dada por (1.19) é

$$ds^2 = \frac{|z|^2+2}{32}(dx^2 + dy^2).$$

# Capítulo 2

# Transformações de Ribaucour

Neste capítulo apresentamos a teoria geral das transformações de Ribaucour para hipersuperfícies em formas espaciais e o estudo das transformações de Ribaucour para construção de superfícies linear Weingarten em $\overline{M}^3(\overline{k})$. Os resultados deste capítulo podem ser encontrados em [WT1].

## 2.1 Transformações de Ribaucour para Hipersuperfícies

Esta seção contém a definição e a teoria básica da transformação de Ribaucour para hipersuperfícies na forma espacial.

Motivado pelas definições clássica e moderna da transformação de Ribaucour para hipersuperfícies em $\mathbb{R}^{n+1}$, introduzimos uma definição similar para hipersuperfícies sobre uma forma espacial.

**Definição 2.1.** *(i) Uma congruência de esferas geodésicas em $\overline{M}^{n+1}(\overline{k})$ é uma família a n-parâmetros de esferas geodésicas em $\overline{M}^{n+1}(\overline{k})$ tal que o conjunto dos centros das esferas é uma hipersuperficie de $\overline{M}^{n+1}(\overline{k})$ e o raio das esferas são dados por uma função diferenciável sobre a hipersuperfície.*

*(ii) Uma envoltória da congruência de esferas geodésicas é uma subvariedade n-dimensional $M$ de $\overline{M}^{n+1}(\overline{k})$, tal que cada ponto de $M$ é tangente a uma esfera geodésica da congruência de esferas geodésicas.*

*(iii)* *Sejam $M$ e $\widetilde{M}$ hipersuperfícies em $\overline{M}^{n+1}(\overline{k})$. Dizemos que $M$ e $\widetilde{M}$ são associadas por uma congruências de esferas geodésicas se existe um difeomorfismo $\psi : M \to \widetilde{M}$ tal que, para os pontos correspondentes $p$ e $\psi(p)$, $M$ e $\widetilde{M}$ são tangentes a uma mesma esfera geodésica da congruências de esferas geodésicas.*

Um caso especial importante do item (iii) é quando $d\psi$ aplica $n$ campos de vetores principais de $M$ a $n$ campos de vetores principais de $\widetilde{M}$.

**Definição 2.2.** *Seja $M$ uma hipersuperfície orientada em $\overline{M}^{n+1}(\overline{k})$. Suponha que existe $n$ campos de vetores principais ortonormais $e_i, ..., e_n$ definidos sobre $M$. Uma hipersuperfície orientável $\widetilde{M} \subset \overline{M}^{n+1}(\overline{k})$ está associada a $M$ por uma transformação de Ribaucour com respeito a $e_i, ..., e_n$, se existe uma função diferenciável $h : M \to \mathbb{R}$, um difeomorfismo $\psi : M \to \widetilde{M}$ e um campo de vetores normais unitários $N$ e $\widetilde{N}$ de $M$ e $\widetilde{M}$ respectivamente, tais que:*

*(i)* $\exp_p h(p)N(p) = \exp_{\psi(p)} h(p)\widetilde{N}(\psi(p)),\ \forall\ p \in M$, *onde* exp *é a exponencial da aplicação de $\overline{M}$;*

*(ii)* *O subconjunto $S = \{\exp_p h(p)N(p) | p \in M\}$ é uma subvariedade de dimensão $n$ de $\overline{M}$;*

*(iii)* *$d\psi(e_i), i = 1, ..., n$, são direções principais ortogonais de $\widetilde{M}$.*

**Observação 2.3.** *Sejam $M$ e $\widetilde{M}$ hipersuperfícies de $\overline{M}^{n+1}(\overline{k})$ como na Definição 2.2. Considerando $\overline{M}$ como $\mathbb{R}^{n+1}, \mathbb{S}^{n+1} \subset \mathbb{R}^{n+2}$, ou $\mathbb{H}^{n+1} \subset \mathbb{L}^{n+2}$ podemos reescrever a condição (i) acima como*

$$p + h(p)N(p) = \psi(p) + h(p)\widetilde{N}(\psi(p)) \qquad p \in M,$$

*onde*

$$h(p) = \begin{cases} \tan(\phi(p)), & \phi : M \to \left(0, \frac{\pi}{2}\right), \quad \textit{se } \overline{k} = 1, \\ \tanh(\phi(p)), & \phi : M \to \mathbb{R}, \quad \textit{se } \overline{k} = -1. \end{cases}$$

Podemos formular uma definição local.

**Definição 2.4.** *Seja $M$ uma hipersuperfície orientada em $\overline{M}^{n+1}(\overline{k})$, $\overline{k} = 0, 1 - 1$. Suponha que existe $n$ campos de vetores principais ortonormais $e_1, ..., e_n$ definidos sobre $M$. Dizemos que uma hipersuperfície $\widetilde{M} \subset \overline{M}^{n+1}(\overline{k})$ está localmente associada a $M$ por uma* *transformação de Ribaucour com respeito a* $e_1, ..., e_n$ *se, para qualquer* $\widetilde{q} \in \widetilde{M}$*, existe uma vizinhança* $\widetilde{V}$ *de* $\widetilde{q}$ *em* $\widetilde{M}$ *e um subconjunto aberto* $V \subset M$ *tal que* $\widetilde{V}$ *é associado a* $V$ *por uma transformação de Ribaucour com respeito a* $e_1, ..., e_n$*.*

O seguinte teorema é uma caracterização da transformação de Ribaucour em termos de equações diferenciais, quando o espaço ambiente é a forma espacial $\overline{M}(\overline{k})$, $\overline{k} = 0, 1, -1$.

**Teorema 2.5.** *Seja* $M$ *uma hipersuperfície orientada em* $\overline{M}^{n+1}(\overline{k})$*,* $\overline{k} = 0, 1 - 1$*. Suponha que existem* $n$ *campos de vetores principais ortonormais* $e_1, ..., e_n$ *definidos sobre* $M$*. Uma hipersuperfície* $\widetilde{M} \subset \overline{M}^{n+1}(\overline{k})$ *está localmente associada a* $M$ *por uma transformação de Ribaucour com respeito a* $e_1, ..., e_n$ *se, e somente, para todo* $p \in \widetilde{M}$*, existe parametrização* $\widetilde{X} : U \subset \mathbb{R}^n \to \widetilde{M} \subset \overline{M}^{n+1}(\overline{k})$ *de uma vizinhança de* $p$ *e uma função diferenciável não-nula* $h$

$$h : U \to \mathbb{R}, \text{ quando } \overline{k} = 0, 1,$$

$$h : U \to (-1, 1) \text{ quando } \overline{k} = -1,$$

*tal que*

$$\widetilde{X} = X + h(N - \widetilde{N}),$$

*onde* $X$ *é uma parametrização de um subconjunto aberto de* $M$*,* $N$ *é um campo de vetores normais unitários de* $M$ *e o campo de vetores normais unitários* $\widetilde{N}$ *de* $\widetilde{M}$ *é dado por*

$$\widetilde{N} = \frac{1}{\Delta + \overline{k}h^2 + 1}\left(\sum_{i=1}^{n} 2Z^i e_i + (\Delta + \overline{k}h^2 - 1)N + 2\overline{k}hX\right), \tag{2.1}$$

*com*

$$Z^i = \frac{dh(e_i)}{1 + h\lambda^i}, \qquad \Delta = \sum_{i=1}^{n} (Z^i)^2. \tag{2.2}$$

*e* $h$ *satisfaz as equações diferenciais*

$$dZ^j(e_i) + \sum_{i=1}^{n} Z^i \omega_{ij}(e_i) - Z^i Z^j \lambda^i = 0 \tag{2.3}$$

*onde* $1 \leq i \neq j \leq n$*.*

O argumento da demonstração será omitida e pode ser encontrada em [WT1]

Observe que $h$ satisfaz um sistema de equações não lineares de segunda ordem. O próximo resultado lineariza o problema da obtenção de $h$.

**Proposição 2.6.** *Se $h$ é uma solução de (2.3) que não se anula num domínio simplesmente conexo, então $h = \dfrac{\Omega}{W}$, onde $W$ é uma função não-nula e as funções $\Omega, \Omega_i$ e $W$ satisfazem*

$$
\begin{aligned}
d\Omega_i(e_j) &= \sum_{k=1}^{n} \Omega_k \omega_{ik}(e_j), \qquad i \neq j, && (2.4)\\
d\Omega &= \sum_{i=1}^{n} \Omega_i \omega_i && (2.5)\\
dW &= -\sum_{i=1}^{n} \Omega_i \lambda^i \omega_i. && (2.6)
\end{aligned}
$$

*Reciprocamente, suponha (2.4), (2.5) e (2.6) são satisfeitas então $h = \dfrac{\Omega}{W}$ é uma solução de (2.3).*

*Demonstração.* Seja $h$ uma solução não-nula de (2.3), então $\psi = \dfrac{1}{h} \sum_{k=1}^{n} Z^k \omega_k$ é uma 1-forma fechada. Logo sobre um domínio simplesmente conexo existe uma função diferenciável $\Omega$ tal que $d(\log \Omega) = \psi$. Definimos

$$\Omega_i = d\Omega(e_i), \qquad W = \frac{\Omega}{h}.$$

Temos que (2.5) vale e

$$
\begin{aligned}
dh(e_i) &= \frac{d\Omega(e_i)W - dW(e_i)\Omega}{W^2}\\
&= \frac{\Omega_i}{W} - \frac{\Omega}{W}\left(\frac{dW(e_i)}{W}\right)\\
&= \frac{\Omega_i}{W}\left(1 - \frac{\Omega}{W}\left(\frac{dW(e_i)}{\Omega_i}\right)\right).
\end{aligned}
$$

Seja $d(\log \Omega) = \psi$, logo temos

$$\frac{d\Omega(e_i)}{\Omega} = \frac{\Omega_i}{\Omega} = \sum_{k=1}^{n} \frac{Z^k \omega_k(e_i)}{h} = \frac{Z^i}{h}.$$

Obtendo $Z^i = \dfrac{\Omega_i}{W}$. Por (2.2)

$$Z^i = \frac{dh(e_i)}{1 + h\lambda^i} = \frac{\Omega_i}{W}. \tag{2.7}$$

Logo obtemos que $dh(e_i) = \dfrac{\Omega_i}{W}(1 + h\lambda^i)$. Igualando as duas expressões de $dh(e_i)$ encontradas acima, obtemos

$$\frac{\Omega_i}{W}(1 + h\lambda^i) = \frac{\Omega_i}{W}\left(1 - \frac{\Omega}{W}\left(\frac{dW(e_i)}{\Omega_i}\right)\right)$$

Portanto, como $\Omega_i \neq 0$ temos

$$dW(e_i) = -\lambda^i\Omega_i.$$

Donde segue (2.6). De (2.7) temos

$$\begin{aligned} dZ^i(e_j) &= \frac{d\Omega_i(e_j)}{W} - \frac{\Omega_i}{W}\frac{dW(e_j)}{W} \\ &= \frac{d\Omega_i(e_j)}{W} + \frac{\Omega_i}{W}\lambda^j\frac{\Omega_j}{W} \\ &= \frac{d\Omega_i(e_j)}{W} + \lambda^j Z^i Z^j. \end{aligned}$$

Concluindo que

$$dZ^i(e_j) - \lambda^j Z^i Z^j = \frac{d\Omega_i(e_j)}{W}.$$

De (2.3) temos

$$\sum_{k=1}^{n} Z^k\omega_{ik}(e_j) = \frac{1}{W}d\Omega_i(e_j) = \sum_{k=1}^{n}\frac{\Omega_k}{W}\omega_{ik}(e_j).$$

Portanto concluimos que

$$d\Omega_i(e_j) = \sum_{k=1}^{n}\Omega_k\omega_{ik}(e_j).$$

Mostrando que a equação (2.4) é satisfeita.

Agora suponha que as equações (2.4),(2.5) e (2.6) são satisfeitas, de (2.7) concluimos que a equação (2.3) é satisfeita. Definimos $h = \dfrac{\Omega}{W}$, então segue que $dh(e_i) = Z^i(1 + h\lambda^i)$. $\square$

A partir de agora, consideraremos que uma hipersuperfície $\widetilde{M}$ em $\overline{M}^{n+1}(\overline{k})$, $\overline{k} = 0, 1, -1$ está localmente associada a $M$ por uma transformação de Ribaucour com respeito ao conjunto de direções principais $e_1, ..., e_n$, sobre $M$, se existem funções $\Omega, \Omega_i$ e $W$, localmente definidas satisfazendo o sistema (2.4), (2.5) e (2.6). Quando todas as curvaturas principais de $M$ são distintas, apenas dizemos que $\widetilde{M}$ está associado a $M$ por uma transformação de Ribaucour.

O Teorema 2.5 pode ser reescrito da seguinte forma.

**Teorema 2.7.** *Seja $M \subset \overline{M}^{n+1}(\overline{k})$ uma hipersuperfície parametrizada por $X : U \subset \mathbb{R}^n \to M$. Suponha que $e_i, 1 \leq i \leq n$ são campos de vetores ortonormais de direções principais e $N$ é um campo vetores normais unitários de $M$, $dN(e_i) = \lambda^i e_i, 1 \leq i \leq n$ . Uma hipersuperfície $\widetilde{M} \subset \overline{M}^{n+1}(\overline{k})$ está localmente associada a $M$ por uma transformação de Ribaucour com respeito a $e_1, ..., e_n$ se, e somente, para qualquer $p \in \widetilde{M}$, existe um subconjunto aberto $V \subset U$, funções não-nulas $W, \Omega, \Omega_i : V \subset U \to \mathbb{R}$, que são soluções do sistema (2.4), (2.5) e (2.6) satisfazendo $WS(W+\lambda^i\Omega)(S-\Omega T^i) \neq 0$, e $\widetilde{X} : V \subset \mathbb{R}^n \to \widetilde{M}$ uma parametrização de $\widetilde{M}$, dada por*

$$\widetilde{X} = \left(1 - \frac{2\overline{k}\Omega^2}{S}\right) X - \frac{2\Omega}{S}\left(\sum_{i=1}^{n} \Omega_i e_i - WN\right), \tag{2.8}$$

*onde*

$$S = \sum_{k=1}^{n} (\Omega_i)^2 + \overline{k}\Omega^2 + W^2. \tag{2.9}$$

*Demonstração.* Vimos no Teorema 2.5 que o campo de vetores normais $\widetilde{N}$ é dado por:

$$\begin{aligned}
\widetilde{N} &= \frac{1}{\Delta + \overline{k}h^2 + 1}\left[\sum_{i=1}^{n} 2Z^i e_i + (\Delta + \overline{k}h^2 - 1)N + 2\overline{k}hX\right] \\
&= \frac{1}{\frac{1}{W^2}S}\left[\sum_{k=1}^{n} 2\frac{\Omega_i}{W} e_i + \left(\frac{\sum_{k=1}^{n}\Omega_i^2 + \overline{k}\Omega^2 - W^2}{W^2}\right) N + 2\overline{k}\frac{\Omega}{W}X\right] \\
&= \frac{W}{S}\left[2\sum_{k=1}^{n} \Omega_i e_i + \left(\frac{S}{W} - 2W\right) N + 2\overline{k}\Omega X\right] \\
&= N + 2\frac{W}{S}\left(\sum_{i=1}^{n} \Omega_i e_i + \overline{k}\Omega X - WN\right).
\end{aligned}$$

Na prova acima usamos as equações (2.2) e (2.7). Como $\widetilde{X} = X + h(N - \widetilde{N})$ temos

$$\begin{aligned}\widetilde{X} &= X - 2\frac{\Omega}{S}\left(\sum_{i=1}^{n}\Omega_i e_i + \overline{k}\Omega X - WN\right)\\ &= \left(1 - \frac{2\overline{k}\Omega^2}{S}\right)X - 2\frac{\Omega}{S}\left(\sum_{i=1}^{n}\Omega_i e_i - WN\right).\end{aligned}$$

A condição $WS(W + \lambda^i\Omega) \neq 0$, para todo $i$ segue do fato de $h = \dfrac{\Omega}{W}$ e $1 + h\lambda^i$ serem não nulos. $\square$

Se $M$ é parametrizada por linhas de curvaturas ortogonais, assumimos que $e_i$ são campos de vetores unitários tangentes a curvas coordenadas, isto é, $e_i = \dfrac{X_{,i}}{a_i}$ onde $a_i = \mid X_{u_i} \mid$. Neste caso, usando (1.8), verificamos que o sistema (2.4), (2.5) e (2.6) é dado por

$$\frac{\partial \Omega_i}{\partial u_j} = \Omega_j \frac{1}{a_i}\frac{\partial a_j}{\partial u_i}, \qquad j \neq i, \tag{2.10}$$

$$\frac{\partial \Omega}{\partial u_i} = a_i\Omega_i, \tag{2.11}$$

$$\frac{\partial W}{\partial u_i} = -a_i\lambda^i\Omega_i. \tag{2.12}$$

De fato, de (1.8) temos

$$\begin{aligned}\frac{\partial \Omega_i}{\partial u_j} &= d\Omega_i(a_j e_j)\\ &= \sum_{k=1}^{n}\Omega_k\omega_{ik}(a_j e_j)\\ &= \sum_{k=1}^{n}\Omega_k\frac{1}{a_i a_k}\left(-\frac{\partial a_i}{\partial u_k}\omega_i(a_j e_j) + \frac{\partial a_k}{\partial u_i}\omega_k(a_j e_j)\right)\\ &= \Omega_j\frac{1}{a_i a_j}\left(\frac{\partial a_j}{\partial u_i}a_j\omega_j(e_j)\right)\\ &= \Omega_i\frac{1}{a_i}\frac{\partial a_j}{\partial u_i}.\end{aligned}$$

Além disso,

$$\frac{\partial \Omega}{\partial u_i} = d\Omega(a_j e_j) = \sum_{i=1}^{n}\Omega_i\omega_i(a_j e_j) = \sum_{i=1}^{n}\Omega_i a_j\omega_i(e_j) = a_i\Omega_i.$$

Para terminar, calculamos,

$$\begin{aligned}
\frac{\partial W}{\partial u_i} &= dW(a_j e_j) \\
&= -\sum_{i=1}^{n} \Omega_i \lambda^i \omega_i (a_j e_j) \\
&= -a_i \lambda^i \Omega_i .
\end{aligned}$$

Agora mostraremos que o sistema de equações (2.4), (2.5) e (2.6) é integrável.

**Proposição 2.8.** *A equação (2.4) é a condição de integrabilidade do sistema (2.5) e (2.6) para $\Omega$ e $W$.*

*Demonstração.* Considere o ideal $I$ gerado pelas 1-formas que se anulam

$$\begin{aligned}
\alpha &= d\Omega - \sum_{i=1}^{n} \Omega_i \omega_i , \\
\beta &= dW + \sum_{i=1}^{n} \Omega_i \lambda^i \omega_i = dW - \sum_{i=1}^{n} \Omega_i \omega_{in+1} .
\end{aligned}$$

Usando a equação $d\omega_i = \sum_{j\neq i}^{n} \omega_{ij} \wedge \omega_j$, temos que:

$$d\alpha = -\sum_{i=1}^{n} d\Omega_i \wedge \omega_i - \sum_{i=1}^{n} \Omega_i d\omega_i = -\sum_{i=1}^{n} d\Omega_i \wedge \omega_i - \sum_{i=1}^{n} \Omega_i \sum_{j\neq i}^{n} \omega_{ij} \wedge \omega_j .$$

Considere agora a 1-forma $\gamma_i = d\Omega_i - \sum_{j=1}^{n} \Omega_j \omega_{ij}$. Temos então que,

$$\begin{aligned}
d\alpha &= -\sum_{i=1}^{n} \left( \gamma_i + \sum_{j=1}^{n} \Omega_j \omega_{ij} \right) \wedge \omega_i - \sum_{i=1}^{n} \sum_{j\neq i}^{n} \Omega_i \omega_{ij} \wedge \omega_j \\
&= -\sum_{i=1}^{n} \gamma_i \wedge \omega_i - \sum_{i=1}^{n} \sum_{j\neq i}^{n} \Omega_j \omega_{ij} \wedge \omega_i + \sum_{i}^{n} \sum_{j\neq i}^{n} \Omega_j \omega_{ij} \wedge \omega_i \\
&= -\sum_{i=1}^{n} \gamma_i \wedge \omega_i .
\end{aligned}$$

Analogamente, calculando $d\beta$ usando a equação de Codazzi (1.6) obtemos:

$$\begin{aligned} d\beta &= -\sum_{i=1}^{n} d\Omega_i \wedge \omega_{in+1} - \sum_{i=1}^{n} \Omega_i d\omega_{in+1} \\ &= -\sum_{i=1}^{n} d\Omega_i \wedge \omega_{in+1} - \sum_{i=1}^{n} \Omega_i \sum_{j=1}^{n} \omega_{ij} \wedge \omega_{jn+1} \\ &= -\sum_{i=1}^{n} (\gamma_i + \sum_{j=1}^{n} \Omega_j \omega_{ij}) \wedge \omega_{in+1} - \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \Omega_i \omega_{ij} \wedge \omega_{jn+1} \\ &= -\sum_{i=1}^{n} \gamma_i \wedge \omega_{in+1}. \end{aligned}$$

Mostramos que o ideal $I$ é fechado sobre a diferencial exterior. Portanto pelo Teorema de Frobenius o sistema (2.5) e (2.6) é integrável. □

**Teorema 2.9.** *Seja $M$ uma hipersuperfície orientada em $\overline{M}^{n+1}(\overline{k})$, $e_i$ campos de vetores ortonormais nas direções principais definida sobre $M$ e $N$ um campo de vetores normais unitários de $M$, $dN(e_i) = \lambda^i e_i$, $1 \leq i \leq n$. Suponha que uma hipersuperfície $\widetilde{M} \subset \overline{M}^{n+1}(\overline{k})$ é localmente associada a $M$ por uma transformação de Ribaucour com respeito a $e_1, ..., e_n$. Então as curvaturas principais de $\widetilde{M}$ para cada $1 \leq i \leq n$ são dadas por*

$$\widetilde{\lambda}^i = \frac{WT^i + \lambda^i S}{S - \Omega T^i}. \tag{2.13}$$

*onde $\Omega_i$, $\Omega$ e $W$ satisfaz (2.4)-(2.6) e*

$$T^i = 2\left( d\Omega_i(e_i) + \sum_{k=1}^{n} \Omega_k \omega_{ki}(e_i) - W\lambda^i + \overline{k}\Omega \right). \tag{2.14}$$

*onde $S$ é dado por (2.9).*

A demonstração do teorema pode ser encontrada em [WT1]. Nesta mesma demonstração encontramos outra maneira de calcular as curvaturas $\widetilde{\lambda}^i$, que será bastante útil, a saber

$$\widetilde{\lambda}^i = \frac{dS(e_i)W + \Omega_i \lambda^i S}{\Omega_i S - \Omega dS(e_i)} \tag{2.15}$$

se $\Omega_i \neq 0$.

Para hipersuperfícies $M$ do espaço Euclidiano que admite campos de vetores principais ortonormais, $e_1, ..., e_n$, consegue-se mostrar (ver [CFT3]) que um subconjunto aberto de $\mathbb{R}^n$ ou $\mathbb{S}^n$, está localmente associado a $M$ por uma transformação de Ribaucour com respeito a $e_i$. O seguinte teorema estende o resultado para hipersuperfícies em $\mathbb{S}^{n+1}$ ou $\mathbb{H}^{n+1}$.

**Teorema 2.10.** *Seja $M$ uma hipersuperfície em $\overline{M}^{n+1}(\overline{k})$ que admite $n$ campos de vetores de direções principais ortonormais $e_i$, $i = 1, ..., n$. Para quaisquer constantes reais $b_1 \neq 0$ e $b_0$, o sistema de equações*

$$\begin{aligned} d\Omega_i &= \sum_k \Omega_k \omega_{ik} + (b_0 - \overline{k}\Omega)\omega_i + (b_1 - W)\omega_{in+1}, \\ d\Omega &= \sum_{i=1}^n \Omega_i \omega_i, \\ dW &= \sum_{i=1}^n \Omega_i \omega_{in+1}. \end{aligned}$$

*é integrável. A função $S - 2(b_0\Omega + b_1 W) = c$ é uma constante determinada pelas condições iniciais. Considerando $c = 0$, a hipersuperfície associada é um subconjunto aberto de uma hipersuperfície totalmente umbílica (respectivamente totalmente geodésica) se $b_0 \neq 0$ (respectivamente $b_0 = 0$).*

*Demonstração.* A prova de que o sistema de equações é integrável é similar a demonstração da Proposição 2.8. Segue de (2.9) que

$$\begin{aligned}
d(S-2(b_0\Omega+b_1W)) &= dS-2(b_0d\Omega+b_1dW) \qquad (2.16)\\
&= \sum_{i=1}^{n}2\Omega_i d\Omega_i+2\overline{k}\Omega d\Omega+2WdW-2(b_0d\Omega+b_1dW)\\
&= 2\sum_{i=1}^{n}\Omega_i\left(\sum_k\Omega_k\omega_{ik}+(b_0-\overline{k}\Omega)\omega_i+(b_1-W)\omega_{in+1}\right)\\
&+ 2\overline{k}\Omega\sum_{i=1}^{n}\Omega_i\omega_i+2W\sum_{i=1}^{n}\Omega_i\omega_{in+1}-2\left(b_0\sum_{i=1}^{n}\Omega_i\omega_i+b_1\sum_{i=1}^{n}\Omega_i\omega_{in+1}\right)\\
&= 2\sum_{i=1}^{n}\Omega_i\sum_k(\Omega_k\omega_{ik}+b_0\omega_i-\overline{k}\Omega\omega_i+b_1\omega_{in+1}\\
&- W\omega_{in+1}+\overline{k}\Omega\omega_i+W\omega_{in+1}-b_0\omega_i-b_1\omega_{in+1}-W\omega_{in+1})\\
&= 2\sum_{i=1}^{n}\Omega_i\sum_k\Omega_k\omega_{ik}=2\sum_{i=1}^{n}\sum_k\Omega_i\Omega_k\omega_{ik}=0.
\end{aligned}$$

Portanto, podemos escolher as condições iniciais de forma que $S-2(b_0\Omega+b_1W)=0$. Finalmente, segue de (2.13) que curvatura principal da hipersuperfície associada é dada por $\frac{b_0}{b_1}$. Com efeito, calcularemos primeiro $T^i$ que é dado por (2.14).

$$\begin{aligned}
T^i &= 2\left(d\Omega_i(e_i)+\sum_{k=1}^{n}\Omega_k\omega_{ki}(e_i)-W\lambda^i+\overline{k}\Omega\right)\\
&= 2\left(\sum_k\Omega_k\omega_{ik}(e_i)+(b_0-\overline{k}\Omega)\omega_i(e_i)-(b_1-W)\lambda^i\omega_i(e_i)+\sum_{k=1}^{n}\Omega_k\omega_{ki}(e_i)-W\lambda^i+\overline{k}\Omega\right)\\
&= 2(b_0-\overline{k}\Omega-b_1\lambda^i+W\lambda^i-W\lambda^i+\overline{k}\Omega)\\
&= 2b_0-2b_1\lambda^i.
\end{aligned}$$

Calculando $\widetilde{\lambda}^i$ por (2.13), temos:

$$\begin{aligned}
\widetilde{\lambda}^i &= \frac{WT^i+^iS}{S-\Omega T^i}=\frac{W(2b_0-2b_1\lambda^i)+\lambda^i(2(b_0\Omega+b_1W)}{2(b_0\Omega+b_1W)-\Omega(2b_0-2b_1\lambda^i)}\\
&= \frac{2b_0W-2b_1W\lambda^i+2b_0\Omega\lambda^i+2b_1W\lambda^i}{2b_0\Omega+2b_1W-2b_0\Omega+2b_1\Omega\lambda^i}\\
&= \frac{2b_0(W+\Omega\lambda^i)}{2b_1(W+\Omega\lambda^i)}=\frac{b_0}{b_1}.
\end{aligned}$$

Portanto, a hipersuperfície associada é um subconjunto aberto de uma hipersuperfície totalmente umbilíca para $b_0 \neq 0$ e totalmente geodésica para $b_0 = 0$. $\square$

Observe que o sistema de equações do Teorema 2.10 contêm (2.4)-(2.6).

## 2.2 Transformações de Ribaucour para Superfícies Linear Weingarten

Nesta seção, usaremos a teoria da seção anterior para estudar as transformações de Ribaucour para superfícies linear Weingarten nas formas espaciais tridimensionais.

**Definição 2.11.** *Uma superfície linear Weingarten em $\overline{M}^3(\overline{k})$ é uma superfície cuja curvatura Gaussiana, $K$, e curvatura média, $H$, satisfazem a relação*

$$\alpha + \beta H + \gamma(K - \overline{k}) = 0 \tag{2.17}$$

*onde $\alpha, \beta$ e $\gamma \in \mathbb{R}$, $\beta^2 - 4\alpha\gamma \neq 0$, $H = -\dfrac{(\lambda^1 + \lambda^2)}{2}$ e $K = \lambda^1\lambda^2 + \overline{k}$.*

O resultado a seguir fornece uma condição suficiente para uma transformação de Ribaucour associar uma superfície linear Weingarten a outra superfície linear Weingarten do mesmo tipo, isto é, preservando as constantes $\alpha, \beta$ e $\gamma$.

**Teorema 2.12.** *Seja $M$ uma superfície em $\overline{M}^3(\overline{k})$, $\overline{k} = 0, 1 - 1$ que admite um referencial ortonormal de direções principais $e_1, e_2$. Seja $\widetilde{M}$ uma superfície regular associada a $M$ por uma transformação de Ribaucour com respeito a $e_i$. Suponha que as funções $\Omega_i \neq 0, \Omega$ e $W$ que satisfazem o sistema (2.4)-(2.6) satisfazem também a relação algébrica*

$$S = 2c(\alpha\Omega^2 + \beta\Omega W + \gamma W^2), \tag{2.18}$$

*onde $S$ é dado por (2.9), $c \neq 0$ e $\alpha, \beta$ e $\gamma$ são constantes reais tais que $\beta^2 - 4\alpha\gamma \neq 0$. Então $\widetilde{M}$ é uma superfície linear Weingarten satisfazendo $\alpha + \beta\widetilde{H} + \gamma(\widetilde{K} - \overline{k}) = 0$ se, e somente se, $\alpha + \beta H + \gamma(K - \overline{k}) = 0$ vale para a surperfície $M$, onde $K, \widetilde{K}$ e $H, \widetilde{H}$ são as curvaturas Gaussianas e médias de $M$ e $\widetilde{M}$ respectivamente. Além disso, $\widetilde{M}$ não tem pontos umbílicos se, e somente se, $M$ não tem pontos umbílicos.*

*Demonstração.* Introduza a seguinte notação para o lado esquerdo da equação algébrica

$$P = (\alpha\Omega^2 + \beta\Omega W + \gamma W^2), \tag{2.19}$$

Assim $S$ satisfaz $S = 2cP$, e segue a partir de (2.4) e (2.6) que

$$\begin{aligned} dS &= 2cdP = 2c(2\alpha\Omega d\Omega + \beta\Omega dW + \beta W d\Omega + 2\gamma W dW) \\ &= 2c\left[(2\alpha\Omega + \beta W)\sum_i^2 \Omega_i\omega_i + (\beta\Omega + 2\gamma W)\sum_i^2 \Omega_i\omega_{i3}\right]. \end{aligned}$$

Obtendo

$$dS = 2c\sum_{i}^{2}[(2\alpha\Omega + \beta W)\omega_i + (2\gamma W + \beta\Omega)\omega_{i3}]\Omega_i \tag{2.20}$$

Portanto usando (2.19) e (2.20) temos

$$WdS(e_i) + S\Omega_i\lambda^i = 2c\Omega_i\{[(2\alpha\Omega + \beta W) - (2\gamma W + \beta\Omega)\lambda^i]W + \lambda^i P\}. \tag{2.21}$$

Analogamente

$$S\Omega_i - \Omega dS(e_i) = 2c\Omega_i\{P - \Omega[(2\alpha\Omega + \beta W) - (2\gamma W + \beta\Omega)\lambda^i]\}. \tag{2.22}$$

Por hipótese, $\Omega_i \neq 0$ para todo $i$, portanto a partir de (2.15), (2.21) e (2.22), conseguimos

$$\begin{aligned}\widetilde{\lambda}^i &= \frac{2\alpha\Omega W + \beta W^2 - 2\gamma W^2 - \beta\Omega\lambda^i W + \alpha\Omega^2\lambda^i + \lambda^i\beta\Omega W + \gamma\lambda^i W^2}{\alpha\Omega^2 + \beta\Omega W + \gamma W^2 - 2\alpha\Omega^2 - \beta\Omega W + 2\gamma\Omega\lambda^i W + \beta\Omega^2\lambda^i} \\ &= \frac{(2\alpha\Omega W + \beta W^2) + \lambda^i(\alpha\Omega^2 - \gamma W^2)}{(2\gamma\Omega W + \beta\Omega^2)\lambda^i - (\alpha\Omega^2 - \gamma W^2)}.\end{aligned}$$

Na ordem para concluir a prova, introduziremos a seguinte notação:

$$L = 2\alpha\Omega W + \beta W^2,\ T = \alpha\Omega^2 - \gamma W^2 \ \ e \ \ Q = 2\gamma\Omega W + \beta\Omega^2.$$

Então,

$$\widetilde{\lambda}^i = \frac{(L + \lambda^i T)}{(Q\lambda^i - T)}.$$

Considerando $\Gamma$ o numerador da expressão

$$\alpha + \beta\widetilde{H} + \gamma(\widetilde{K} - \overline{k}) = \alpha - \frac{\beta}{2}\left(\frac{L + \lambda^1 T}{Q\lambda^1 - T} + \frac{L + \lambda^2 T}{Q\lambda^2 - T}\right) + \gamma\left[\frac{(L + \lambda^1 T)}{Q\lambda^1 - T}\cdot\frac{(L + \lambda^2 T)}{Q\lambda^2 - T}\right].$$

Substituindo $\dfrac{-(\lambda^1 + \lambda^2)}{2}$ por $H$ e $\lambda^1\lambda^2$ por $(K - \overline{k})$, obtemos

$$\begin{aligned}\Gamma &= T^2[\alpha + \beta H + \gamma(K - \overline{k})] - 2\beta T^2 H + L(\beta T + \gamma L) - 2TH(-\alpha Q + \gamma L) \\ &- Q(K - \overline{k})(-\alpha Q + \beta T) + \beta LQH \\ &= (T^2 + QL)[\alpha + \beta H + \gamma(K - \overline{k})] + (\beta T + \gamma L - \alpha Q)[L - 2TH - Q(K - \overline{k})].\end{aligned}$$

Temos que $(\beta T + \gamma L - \alpha Q) = 0$. De fato:
$\beta(\alpha\Omega^2 - \gamma W^2) + \gamma(2\alpha\Omega W + \beta W^2) - \alpha(2\gamma\Omega W + \beta\Omega^2) = \alpha\beta\Omega^2 - \gamma\beta W^2 + 2\alpha\gamma\Omega W +$

$\gamma\beta W^2 - 2\alpha\gamma\Omega W - \alpha\beta\Omega^2 = 0.$
Portanto,
$\Gamma = (T^2 + QL)[\alpha + \beta H + \gamma(K - \overline{k})].$
Mas segue que
$T^2 + QL = P^2 = \dfrac{S^2}{4c^2} \neq 0$, pois por hipótese $\Omega_i \neq 0$.
Portanto, concluimos que $\alpha - \beta\widetilde{H} + \gamma(\widetilde{K} - \overline{k}) = 0$ se, e somente se, $\alpha + \beta H + \gamma(K - \overline{k}) = 0$, demonstrando a primeira parte.

Para concluir a desmonstração observe que

$$\begin{aligned} \widetilde{\lambda^2} - \widetilde{\lambda^1} &= \frac{L + \lambda^1 T}{Q\lambda^1 - T} - \frac{L + \lambda^2 T}{Q\lambda^2 - T} \\ &= \frac{(T^2 + QL)}{(Q\lambda^1 - T)(Q\lambda^2 - T)}(\lambda^1 - \lambda^2). \end{aligned}$$

□

O sistema (2.4), (2.5) e (2.6) com a condição adicional (2.18) é sempre integrável quando nós iniciamos a partir de uma superfície linear Weingarten, isto é, temos o seguinte resultado:

**Teorema 2.13.** *Seja $M$ uma superfície linear Weingarten em $\overline{M^3}(\overline{k})$, que admite campos de vetores principais ortonormais. Suponha que a curvatura Gaussiana e média de $M$ satisfazem $\alpha + \beta H + \gamma(K - \overline{k}) = 0$. Então para qualquer constante $c \neq 0$, o sistema de equações*

$$d\Omega = \sum_{i=1}^{2} \Omega_i \omega_i, \tag{2.23}$$

$$dW = \sum_{i=1}^{2} \Omega_i \omega_{i3}, \tag{2.24}$$

$$d\Omega_i = \sum_j \Omega_j \omega_{ij} + \{(2c\alpha - \overline{k})\Omega - \beta c W\}\omega_i + \{c\beta\Omega + (2c\gamma - 1)W\}\omega_{i3}, i \neq j. \tag{2.25}$$

*é integrável. Qualquer solução satisfaz (2.18) sobre um domínio simplesmente conexo $U$ sempre que as condições iniciais dadas satisfazem (2.18). Além disso, quando $\overline{k} = 0$, ou*

*$\overline{k} = 1$ com $\alpha \neq 0$, qualquer solução do sistema definido sobre $U$ é identicamente nulo (assim $S \equiv 0$) ou $S$ não se anula.*

*Demonstração.* Vamos considerar o ideal $I$ gerado pelas 1-formas

$$\begin{aligned}
\theta &= d\Omega - \sum_{i=1}^{2} \Omega_i \omega_i, \\
\phi &= dW - \sum_{i=1}^{2} \Omega_i \omega_{i3}, \\
\theta_i &= d\Omega_i - \sum_{j} \Omega_j \omega_{ij} - \{(2c\alpha - \overline{k})\Omega - \beta c W\}\omega_i - \{c\beta\Omega + (2c\gamma - 1)W\}\omega_{i3}, i \neq j.
\end{aligned}$$

Temos que

$$d\theta = -\sum_{i=1}^{2} d\Omega_i \wedge \omega_i - \sum_{i}^{2} \Omega_i d\omega_i \tag{2.26}$$

Por outro lado,

$$\theta_i \wedge \omega_i = d\Omega_i \wedge \omega_i - \sum_j \Omega_j \omega_{ij} \wedge \omega_i.$$

Logo

$$\begin{aligned}
\sum_i d\Omega_i \wedge \omega_i &= \sum_i \theta_i \wedge \omega_i + \sum_i \sum_j \Omega_j \omega_{ij} \wedge \omega_i \\
&= \sum_i \theta_i \wedge \omega_i + \sum_j \Omega_j \sum_i \omega_{ij} \wedge \omega_i \\
&= \sum_i \theta_i \wedge \omega_i - \sum_j \Omega_j d\omega_j.
\end{aligned}$$

Substituindo $\sum_i d\Omega_i \wedge \omega_i$ em (2.26), obtemos

$$d\theta = -\sum_i \theta_i \wedge \omega_i + \sum_j \Omega_j d\omega_j - \sum_i \Omega_i d\omega_i = -\sum_i \theta_i \wedge \omega_i.$$

Agora calculando

$$d\phi = -\sum_{i=1}^{2} d\Omega_i \wedge \omega_{i3} - \sum_{i}^{2} \Omega_i d\omega_{i3}. \tag{2.27}$$

Por outro lado,

$$\theta_i \wedge \omega_{i3} \;=\; d\Omega_i \wedge \omega_{i3} - \sum_j \Omega_j \omega_{ij} \wedge \omega_{i3}.$$

Logo pela equação de Codazzi temos

$$\begin{aligned} \sum_i d\Omega_i \wedge \omega_{i3} &= \sum_i \theta_i \wedge \omega_{i3} + \sum_i \sum_j \Omega_j \omega_{ij} \wedge \omega_{i3} \\ &= \sum_i \theta_i \wedge \omega_{i3} - \sum_j \Omega_j d\omega_{i3}. \end{aligned}$$

Substituindo $\sum\limits_i d\Omega_i \wedge \omega_{i3}$ em (2.27), obtemos

$$d\phi = -\sum_i \theta_i \wedge \omega_{i3} + \sum_j \Omega_j d\omega_{j3} - \sum_i \Omega_i d\omega_{i3} = -\sum_i \theta_i \wedge \omega_{i3}.$$

Agora calculando $d\theta_i$, obtemos

$$\begin{aligned} d\theta_i &= -\sum_j (d\Omega_j \wedge \omega_{ij} - \Omega_j d\omega_{ij}) - \{(2c\alpha - \overline{k})\omega_i + c\beta\omega_{i3}\} \wedge d\Omega \\ &+ \{\beta c\omega_i - (2\gamma c - 1)\omega_{i3}\} \wedge dW - [(2c\alpha - \overline{k})\Omega - c\beta W] d\omega_i - [c\beta\Omega + (2\gamma c - 1)W] d\omega_{i3}. \end{aligned} \tag{2.28}$$

Segue da equação de Gauss que

$$\begin{aligned} \sum_j \theta_j \wedge \omega_{ij} &= \sum_j d\Omega_j \wedge \omega_{ij} + \sum_k \Omega_k [d\omega_{ki} - \omega_{k3} \wedge \omega_{3i} + \overline{k}\omega_k \wedge \omega_i] \\ &- \{(2c\alpha - \overline{k})\Omega - c\beta W\}\omega_j \wedge \omega_{ij} - \{c\beta\Omega + (2\gamma c - 1)W\}\omega_{j3} \wedge \omega_{ij}. \end{aligned}$$

Substituindo $\sum\limits_j d\Omega_j \wedge \omega_{ij}$ na equação (2.28) e reduzindo os termos semelhantes, obtemos

$$d\theta_i = -\theta_j \wedge \omega_{ij} + \Omega_k[-\omega_{k3} \wedge \omega_{3i} + \overline{k}\omega_k \wedge \omega_i] - \{(2c\alpha - \overline{k})\omega_i + c\beta\omega_{i3}\} \wedge d\Omega + \{\beta c\omega_i - (2c\gamma - 1)\omega_{i3}\} \wedge dW.$$

Somando e subtraindo $\{(2c\alpha - \overline{k})\omega_i + c\beta\omega_{i3}\} \wedge \sum_i \Omega_i \omega_i$ e $\{\beta c\omega_i - (2c\gamma - 1)\omega_{i3}\} \wedge \sum_i \Omega_i \omega_{i3}$ na equação acima e calculando os termos semelhantes iremos obter

$$d\theta_i = -\theta_j \wedge \omega_{ij} + \{\beta c\omega_i + (2c\gamma - 1)\omega_{i3}\} \wedge \phi + \{(2c\alpha - \overline{k})\omega_i + c\beta\omega_{i3}\} \wedge \theta - 2c\Omega_i(\alpha + \beta H + \gamma(K - \overline{k})\omega_j \wedge \omega_i,$$

onde $i \neq j$. E visto que $M$ é uma superfície Linear Weingarten temos que

$$d\theta_i = -\theta_j \wedge \omega_{ij} + \{\beta c\omega_i + (2c\gamma - 1)\omega_{i3}\} \wedge \phi + \{(2c\alpha - \overline{k})\omega_i + c\beta\omega_{i3}\} \wedge \theta.$$

E segue que $I$ é fechado sobre a diferencial exterior, o que implica que o sistema (2.23), (2.24) e (2.25) é integrável pelo Teorema de Frobenius.

Observamos que para qualquer solução (2.23)- (2.25) do sistema, $d(S-2cP) = 0$, onde $P$ é dado por (2.19). De fato,

$$\begin{aligned} d(S-2cP) &= \sum_{i=1}^{2} 2\Omega_i d\Omega_i + 2\overline{k}\Omega d\Omega + 2WdW - 4c\alpha\Omega d\Omega - 2c\beta\Omega dW - 2c\beta W d\Omega - 4c\gamma W dW \\ &= 2\sum_{i}^{2} \Omega_i\{d\Omega_i + (W - c\beta\Omega - 2c\gamma W)\omega_{i3} - [(2c\alpha - \overline{k})\Omega + \beta c W]\omega_i\} \\ &= 2\sum_{i}^{2} \Omega_i \sum_{j}^{2} \Omega_j\omega_{ij} = 2\sum_{i=1}^{2}\sum_{j}^{2} \Omega_i\Omega_j\omega_{ij} = 0. \end{aligned}$$

para $i \neq j$. Portanto, quando consideramos a condição inicial para o ponto $p_0$ tal que $(S - 2cP)(p_0) = 0$, sabemos que $S = 2cP$ é válido sobre um domínio conexo.

Quando $\overline{k} = 1$ ou $\overline{k} = 0$, suponha que $S(p_0) = 0$ para algum $p_0 \in U$. Segue de (2.9) que $\Omega_1, \Omega_2, \Omega$ e $W$ se anulam em $p_0$. Visto que $U$ é simplesmente conexo, a unicidade da solução para o sistema implica que $\Omega \equiv \Omega_1 \equiv \Omega_2 \equiv W \equiv 0$ sobre $U$ e portanto $S \equiv 0$ sobre $U$. $\square$

**Teorema 2.14.** *Seja $M$ uma surperfície linear Weingarten em $\overline{M}^3(\overline{k}), \overline{k} = \pm 1, 0$, satisfazendo $\alpha + \beta H + \gamma(K - \overline{k}) = 0$, que admite campos de vetores ortonormais $e_1, e_2$. Suponha que $M$ é localmente parametrizada por $X : U \subset \mathbb{R}^2 \to M \subset \overline{M}^3(\overline{k})$. Então qualquer superfície linear Weingarten parametrizada em $\overline{M}^3(\overline{k})$ localmente associada a $X$ por uma transformação de Ribaucour com respeito a $e_1, e_2$, como no Teorema 2.12, é dada por*

$$\widetilde{X} = \left(1 - \frac{2\overline{k}\Omega^2}{S}\right) X - \frac{2\Omega}{S}\left(\sum_{i=1}^{2} \Omega_i e_i - WN\right), \tag{2.29}$$

*onde $\Omega, \Omega_i, i = 1, 2$, e $W$ são soluções de (2.23), (2.24) e (2.25) e $\widetilde{X}$ é definido sobre*

$$\widetilde{U} = \{(u_1, u_2) \in U : T^2 + 2TQH + Q^2(K - \overline{k}) \neq 0\}, \tag{2.30}$$

*onde $T = \alpha\Omega^2 - \gamma W^2$ e $Q = 2\gamma\Omega W + \beta\Omega^2$.*

*Demonstração.* Pelo Teorema 2.7, somente precisamos mostrar que $\widetilde{X}$ definido por (2.29), sobre $\widetilde{U}$, é uma superfície parametrizada em $\overline{M}^3(\overline{k})$. Visto que $S = 2cP$, onde $P$ é dado por (2.19) e a diferencial de $S$ é dado por (2.20). Segue de (2.5) e (2.6) que

$$\begin{aligned} d\left(\frac{\Omega}{S}\right) &= \frac{1}{S^2}\left[\sum_{i=1}^{2}\Omega_i\omega_i 2cP - 2c\Omega dP\right] \\ &= \frac{1}{S^2}\left[\sum_{i=1}^{2}\Omega_i\omega_i 2cP - 2c\Omega\sum_{i}^{2}\{(2\alpha\Omega+\beta W)\omega_i + (2\gamma W+\beta\Omega)\omega_{i3}\}\Omega_i\right] \\ &= \frac{1}{2cP^2}\sum_{i=1}^{2}\Omega_i[\omega_i(\gamma W^2-\alpha\Omega^2) - \omega_{i3}(\beta\Omega^2+2\gamma W\Omega)]. \end{aligned}$$

Fazendo $\eta_i = \omega_i(\gamma W^2-\alpha\Omega^2) - \omega_{i3}(\beta\Omega^2+2\gamma W\Omega)$, temos

$$d\left(\frac{\Omega}{S}\right) = \frac{1}{2cP^2}\sum_{i=1}^{2}\Omega_i\eta_i.$$

Por um cálculo análogo, obtemos:

$$d\left(\frac{\Omega^2}{S}\right) = \frac{\Omega}{2cP^2}\sum_{i=1}^{2}[(2\gamma W^2+\beta\Omega W)\omega_i - (2\gamma W\Omega+\beta\Omega^2)\omega_{i3}]\Omega_i.$$

Usando (2.23), (2.24) e (2.25), concluímos que

$$d\widetilde{X} = \frac{1}{P}\sum_{i=1}^{2}\eta_i\widetilde{e_i},$$

onde

$$\begin{aligned} \widetilde{e_1} &= \frac{1}{cP}(-\overline{k}\Omega_1\Omega X + (cP-\Omega_1^2)e_1 - \Omega_1\Omega_2 e_2 + \Omega_1 WN), \quad (2.31) \\ \widetilde{e_2} &= \frac{1}{cP}(-\overline{k}\Omega_2\Omega X + (cP-\Omega_2^2)e_2 - \Omega_1\Omega_2 e_1 + \Omega_2 WN), \quad (2.32) \end{aligned}$$

são vetores ortonormais. Portanto, $\widetilde{X}$ é uma imersão quando $\eta_1\wedge\eta_2 \neq 0$, isto é, sobre o subconjunto $\widetilde{U}$ dado por (2.30). De fato, fazendo $T = \alpha\Omega^2 - \gamma W^2$ e $Q = 2\gamma\Omega W + \beta\Omega^2$, obtemos

$$\begin{aligned} \eta_1\wedge\eta_2 &= (-T\omega_1 - Q\omega_{13})\wedge(-T\omega_2 - Q\omega_{23}) \\ &= T^2(\omega_1\wedge\omega_2) + TQ(\omega_1\wedge\omega_{23} + \omega_{13}\wedge\omega_2) + Q^2(\omega_{13}\wedge\omega_{23}) \\ &= T^2(\omega_1\wedge\omega_2) + 2TQH(\omega_1\wedge\omega_2) + Q^2(K-\overline{k})(\omega_1\wedge\omega_2) \\ &= (T^2 + 2TQH + Q^2(K-\overline{k}))(\omega_1\wedge\omega_2). \end{aligned}$$

Temos então que $\eta_1 \wedge \eta_2 \neq 0$ se, e somente se, $T^2 + 2TQH + Q^2(K - \overline{k}) \neq 0$. $\square$

**Observação 2.15.** *A partir da prova do Teorema 2.14 sabemos que as direções $\widetilde{e}_1, \widetilde{e}_2$ de $\widetilde{X}$ são dadas por (2.31) e (2.32). Além disso, suas formas duais são*

$$\begin{aligned} \widetilde{\omega}_i &= \frac{1}{P}\eta_i = \frac{1}{P}\omega_i(\gamma W^2 - \alpha\Omega^2) - \omega_{i3}(\beta\Omega^2 + 2\gamma W\Omega) \\ &= \frac{1}{P}[\gamma W^2 - \alpha\Omega^2 + (\beta\Omega + 2\gamma W)\Omega\lambda^i]\omega_i, \ i = 1, 2. \end{aligned}$$

Considerando $H$ constante, $\alpha = -H, \beta = 1$ e $\gamma = 0$ nos Teoremas 2.12, 2.13 e 2.14, temos os casos de curvatura média constante (cmc) $H$ ( se $H = 0$, é o caso de superfície minímas). Observe que $\lambda^1 \neq \lambda^2$ é equivalente a $\lambda^1 \neq -H$ e $\lambda^2 \neq -H$.

Na demonstração do Teorema 2.12 vimos que

$$S\Omega_i - \Omega dS(e_i) = 2c\Omega_i\{P - \Omega[(2\alpha\Omega + \beta W) - (2\gamma W + \beta\Omega)\lambda^i]\}.$$

Para $\alpha = -H, \beta = 1$ e $\gamma = 0$, obtemos

$$S\Omega_i - \Omega dS(e_i) = 2c\Omega_i\Omega^2(\lambda^i + H).$$

Portanto, o fato de $M$ não ter pontos umbílicos com $\Omega_i \neq 0$ implica que $S\Omega_i - \Omega dS(e_i) \neq 0$. Podemos afirmar os seguintes corolários, tendo em vista $\alpha = -H, \beta = 1$ e $\gamma = 0$, sobre os Teoremas 2.13 e 2.14.

**Corolário 2.16.** *Seja $M$ uma superfície em $\overline{M}^3(\overline{k})$ que admite campos de vetores de direções principais ortonormais $e_1, e_2$. Se $M$ é uma superfície com curvatura média constante $H$, então para qualquer constante $c \neq 0$ o sistema de equações*

$$d\Omega = \sum_{i=1}^{2} \Omega_i\omega_i, \tag{2.33}$$

$$dW = \sum_{i=1}^{2} \Omega_i\omega_{i3}, \tag{2.34}$$

$$d\Omega_i = \sum_j \Omega_j\omega_{ij} - [(2cH + \overline{k})\Omega - cW]\omega_i + (c\Omega - W)\omega_{i3}, \qquad i \neq j. \tag{2.35}$$

*é integrável. Se*

$$-\overline{k} + c^2 - 2cH > 0, \tag{2.36}$$

*então qualquer solução sobre um domínio simplesmente conexo U satisfaz*

$$S = 2c\Omega(-H\Omega + W), \tag{2.37}$$

*sempre que as condições iniciais satisfaça (2.37). Além disso, quando* $\overline{k} = 1$ *ou* $\overline{k} = 0$ *com* $H \neq 0$*, para qualquer solução não-trivial a função S não se anula sobre U.*

*Demonstração.* Necessitamos exigir que $c \neq 0$ também satisfaça (2.36), se nós queremos que (2.37) seja satisfeito por uma solução não trivial. De fato, visto que $S$ é dado por (2.9), a condição algébrica (2.37) converte a:

$$\sum_{k=1}^{2}(\Omega_i)^2 + \overline{k}\Omega^2 + W^2 = 2c(\alpha\Omega^2 + \beta\Omega W + \gamma W^2) = -2cH\Omega^2 + 2c\Omega W.$$

Logo, temos que

$$\sum_{k=1}^{2}(\Omega_i)^2 + (W - c\Omega)^2 + (\overline{k} - c^2 + 2cH)\Omega^2 = 0.$$

Portanto, $-\overline{k} + c^2 - 2cH > 0$. □

**Corolário 2.17.** *Seja M uma superfície com curvatura média constante H em* $\overline{M}^3(\overline{k})$ *parametrizada por* $X : U \subset \mathbb{R}^2 \to M \subset \overline{M}^3(\overline{k})$*., que admite campos de vetores de direções principais ortonormais* $e_1, e_2$*. Então qualquer superfície com curvatura média constante H parametrizada em* $\overline{M}^3(\overline{k})$*, localmente associada a X por uma Transformação de Ribaucour como no Teorema (2.12) é dado por*

$$\widetilde{X} = \left(1 - \frac{\overline{k}\Omega}{c(W - H\Omega)}\right)X - \frac{1}{c(W - H\Omega)}\left(\sum_{i=1}^{2}\Omega_i e_i - WN\right), \tag{2.38}$$

*onde* $\Omega, \Omega_i, i = 1, 2,$ *e W são soluções de (2.33), (2.34) e (2.35) com a constante* $c \neq 0$ *e* $-\overline{k} + c^2 - 2cH > 0$*.*

A demonstração deste corolário é feita substituindo $S$ dado por (2.37) na equação (2.29) obtida na prova do Teorema (2.14).

# Capítulo 3

# Aplicações da Transformação de Ribaucour

Neste capítulo apresentamos aplicações das transformações de Ribaucour nas formas espaciais. Aplicando os resultados do capítulo anterior ao cilindro em $\mathbb{R}^3$ (cf, [CFT1]), ao toro plano em $\mathbb{S}^3$ (cf, [WT1]) e à prima da superfície de Enneper em $\mathbb{H}^3$ (cf, [WT2]).

## 3.1 Aplicações da Transformação de Ribaucour no Espaço Euclidiano

Nesta seção, aplicando a transformação de Ribaucour ao cilindro, iremos obter uma família a dois parâmetros $(c, \gamma)$ de superfícies linear Weingarten associadas.

**Teorema 3.1.** *Considere o cilindro parametrizado por*

$$X(u_1, u_2) = (\cos(u_2), \operatorname{sen}(u_2), u_1), \quad (u_1, u_2) \in \mathbb{R}^2 \tag{3.1}$$

*como uma Superfície Linear Weingarten satisfazendo* $-\frac{1}{2} + H + \gamma K = 0$. *Uma superfície parametrizada,* $\widetilde{X}_{c\gamma}$, *é uma superfície linear Weingarten localmente associada a* $X$ *por uma transformação de Ribaucour como no Teorema 2.14 se, e somente se, ele é dado por*

$$\widetilde{X}_{c\gamma} = X - \frac{2(f+g)}{c[(2\gamma+1)g^2 - f^2]}(f' X_{u_1} + g' X_{u_2} - gN) \tag{3.2}$$

*onde* $N$ *é o campo de vetores normais unitários interno ao cilindro,* $c \neq 0$ *e* $\gamma$ *são* *constantes reais tais que*

$$\xi(c,\gamma) = 1 - c(2\gamma + 1) \tag{3.3}$$

*e $c$ não são simultaneamente positivos, e $f(u_1), g(u_2)$ são soluções das equações*

$$\begin{aligned} f'' + cf &= 0, & (3.4)\\ g'' + \xi g &= 0 & (3.5) \end{aligned}$$

*com as condições iniciais satisfazendo*

$$\left((f')^2 + (g')^2 + \xi g^2 + cf^2\right)(u_1^0, u_2^0) = 0. \tag{3.6}$$

*Além disso, $\widetilde{X}_{c\gamma}$ é uma superfície regular definida sobre o subconjunto de $U$ onde*

$$\left((f+g)^2 + 2\gamma g^2\right)\left(f^2 + 2(2\gamma+1)fg + (2\gamma+1)g^2\right) \neq 0. \tag{3.7}$$

*Demonstração.* Os coeficientes da primeira forma fundamental do cilindro são $E = G = 1$ e $F = 0$. Portanto a primeira forma fundamental do cilindro é $ds^2 = du_1^2 + du_2^2$. Temos que $\lambda^1 = 0$ e $\lambda^2 = -1$. Na ordem para obter a transformação de Ribaucour, precisamos resolver o seguinte sistema de equações

$$\frac{\partial \Omega_i}{\partial u_j} = 0, \qquad \frac{\partial \Omega}{\partial u_i} = \Omega_i, \qquad \frac{\partial W}{\partial u_i} = -\lambda^i \Omega_i, \qquad 1 \leq j \neq i \leq 2. \tag{3.8}$$

que é obtida a partir de (2.10), (2.11) e (2.12).
A superfície associada será Linear Weingarten quando $\Omega_1$, $\Omega_2, W$ e $\Omega$ satisfazem

$$\frac{\partial \Omega_1}{\partial u_1} = c(W - \Omega) \;\; e \;\; \frac{\partial \Omega_2}{\partial u_2} = (c - 1 + 2c\gamma)W.$$

De fato, derivando a condição algébrica (2.18) em relação a $u_1$ em ambos os lados e usando (3.8) obtemos:

$$\begin{aligned} 2\Omega_1 \frac{\partial \Omega_1}{\partial u_1} + 2W(-\lambda^1\Omega_1) &= 2c(-\Omega\Omega^1 + \beta\Omega(-\lambda^1\Omega_1) + \beta W\Omega_1 + 2\gamma(-\lambda^1\Omega_1));\\ \frac{\partial \Omega_1}{\partial u_1} &= c(-\Omega + W). \end{aligned}$$

O caso $\dfrac{\partial \Omega_2}{\partial u_2} = (c-1+2c\gamma)W$ é analógo ao primeiro, só que deriva-se a condição algébrica (2.18) em relação a $u_2$ .

Temos também que $\dfrac{\partial \Omega}{\partial u_1 u_2} = 0$, que segue do fato de $\dfrac{\partial \Omega_1}{\partial u_2} = 0$ e $\dfrac{\partial \Omega}{\partial u_1} = \Omega_1$. Portanto segue que $\Omega = f(u_1) + g(u_2)$, onde $f$ e $g$ são funções de $u_1$ e $u_2$ respectivamente. Portanto $\Omega_1 = f'$ e $\Omega_2 = g'$. A partir de $\dfrac{\partial W}{\partial u_i} = -\lambda^i \Omega_i$ temos que $\dfrac{\partial W}{\partial u_2} = \Omega_2 = g'$. Logo temos $W = g + a$, onde $a$ é uma constante real. Logo,

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Omega_1}{\partial u_1} &= c(W - \Omega); \\ f''(u_1) &= c(g(u_2) + a - (f(u_1) + g(u_2)). \end{aligned}$$

Portanto $f''(u_1) + cf(u_1) - ac = 0$. Analogamente prova-se que $g'' + \xi(g + a) = 0$. Segue a partir destas equações e das expressões de $\Omega$ e $W$ que, sem perda de generalidade, podemos considerar $a = 0$. Portanto, $f$ e $g$ satisfazem as equações (3.4) e (3.5). Além disso, $f$ e $g$ devem satisfazer a condição algébrica (condição inicial) (2.18), que resulta em (3.6).

Visto que a condição (3.6) deve ser identicamente satisfeita pela solução não-trivial das funções $f$ e $g$, concluímos que as constantes $c \neq 0$ e $\gamma$ são de tal modo que $c$ e $\xi$ não podem ser simultaneamente positivos.

Além disso, a partir de (2.29) concluímos que a superfície linear Weingarten associada a $X$ é dada por (3.2). Com efeito, vimos que

$$\begin{aligned} S &= 2c(\alpha\Omega^2 + \beta\Omega W + \gamma W^2) \\ S &= 2c\left(-\frac{1}{2}(f+g)^2 + (f+g)g + \gamma g^2\right) \\ &= -cf^2 + cg^2 + 2c\gamma g^2 \\ &= c[(2\gamma + 1)g^2 - f^2]. \end{aligned}$$

Temos também que

$$\begin{aligned} \sum_i^2 e_i \Omega_i &= f'\left(\frac{X_{u_1}}{a_1}\right) + g'\left(\frac{X_{u_2}}{a_2}\right) \\ &= f' X_{u_1} + g' X_{u_2}. \end{aligned}$$

Portanto, substituindo as duas expressões obtidas acima na equação (2.29) e considerando $\overline{k} = 0$ por estarmos no espaço Euclidiano, obtemos a equação (3.2).

Agora, iremos obter o domínio onde $\widetilde{X}$ é uma superfície regular. Pelo Teorema 2.14

sabemos que $\widetilde{X}$ é uma superfície regular sobre um subconjunto $U$ se $T^2 + 2TQH + Q^2(K - \overline{k}) \neq 0$, onde $T = \alpha\Omega^2 - \gamma W^2$ e $Q = 2\gamma\Omega W + \beta\Omega^2$. No nosso caso, como $K = 0$ e $H = \dfrac{1}{2}$ o domínio é dado por $T(T+Q) \neq 0$. Logo

$$\begin{aligned} T(T+Q) &= \left(-(f+g)^2 - 2\gamma g^2\right)\left(-(f+g)^2 - 2\gamma g^2 + 4\gamma fg + 4\gamma g^2 + 2(f+g)^2\right) \\ &= \left(-(f+g)^2 - 2\gamma g^2\right)\left(f^2 + g^2 + 2fg + 2\gamma g^2 + 4\gamma fg\right) \\ &= \left((f+g)^2 + 2\gamma g^2\right)\left(f^2 + 2(2\gamma+1)fg + (2\gamma+1)g^2\right) \neq 0. \end{aligned}$$

□

A família da superfícies linear Weingarten dado por (3.2) inclui o cilindro. De fato, se escolhermos as condições iniciais tais que $f \equiv 0$, $g \neq 0$ para $\xi \leq 0$ ou $f \neq 0$, $g \equiv 0$ para $c \leq 0$, conseguimos uma reparametrização do cilindro.

Agora introduziremos uma notação, que será útil no resultado seguinte. Uma rotação de um ângulo $\theta$ no plano $xy$ de $\mathbb{R}^3$ será denotada por

$$R_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta & 0 \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{3.9}$$

Denotamos por $T_\delta$ a translação definida por

$$T_\delta(x,y,z) = (x, y, z+\delta). \tag{3.10}$$

**Teorema 3.2.** *Considere uma Superfície Linear Weingarten associada ao cilindro e parametrizada por (3.2). Excluindo o cilindro:*
*i) Se $c\xi \geq 0$, então qualquer surpefície $\widetilde{X}_{c\gamma}$ tem curvas de singularidades.*
*ii) Se $c\xi < 0$ então, por movimentos rígidos de $\mathbb{R}^3$, a superfície $\widetilde{X}_{c\gamma}$ é determinada pelas funções*

$$f = \varepsilon_1\sqrt{\frac{|\xi|}{c}}\operatorname{sen}(\sqrt{c}u_1) \qquad g = \cosh(\sqrt{|\xi|}u_2) \qquad se\, c > 0, \xi < 0 \tag{3.11}$$

$$f = \cosh(\sqrt{|c|}u_1) \qquad g = \varepsilon_2\sqrt{\frac{|c|}{\xi}}\operatorname{sen}(\sqrt{\xi}u_2) \qquad se\, c < 0, \xi > 0 \tag{3.12}$$

*onde $\varepsilon_1 = \pm 1$, $c \neq 0$ e $\gamma$ são números reais e $\xi(c,\gamma)$ é definido por (3.3).*

*Demonstração.* Pela resolução das equações diferenciais (3.4) e (3.5), observamos que as funções $f$ e $g$ da família de superfície descrita por (3.2) são dadas por

$$f = \begin{cases} a_1 \cos(\sqrt{c}u_1) + b_1 \operatorname{sen}(\sqrt{c}u_1) & \text{se } c > 0, \\ a_1 \cosh(\sqrt{|c|}u_1) + b_1 \operatorname{senh}(\sqrt{|c|}u_1) & \text{se } c < 0, \end{cases}$$

$$g = \begin{cases} a_2 u_2 + b_2 & \text{se } \xi = 0, \\ a_2 \cosh(\sqrt{|\xi|}u_2) + b_2 \operatorname{senh}(\sqrt{|\xi|}u_2) & \text{se } \xi < 0, \\ a_2 \cos(\sqrt{\xi}u_2) + b_2 \operatorname{sen}(\sqrt{\xi}u_2) & \text{se } \xi > 0, \end{cases}$$

onde as contantes satisfazem a relação algébrica dada por (3.6),

$$\begin{aligned} a_1 = b_1 = a_2 = 0 \quad & \text{se } c > 0 \text{ e } \xi = 0, \\ c(b_1^2 - a_1^2) - a_2^2 = 0 \quad & \text{se } c < 0 \text{ e } \xi = 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} c(b_1^2 + a_1^2) + \xi(a_2^2 - b_2^2) = 0 \quad & \text{se } c > 0 \text{ e } \xi < 0, \\ c(b_1^2 - a_1^2) - \xi(a_2^2 - b_2^2) = 0 \quad & \text{se } c < 0 \text{ e } \xi < 0, \\ c(b_1^2 - a_1^2) - \xi(a_2^2 + b_2^2) = 0 \quad & \text{se } c < 0 \text{ e } \xi > 0. \end{aligned}$$

Demonstraremos a primeira relação sendo as outras análogas. Temos que

$$f' = \begin{cases} -a_1\sqrt{c} \operatorname{sen}(\sqrt{c}u_1) + b_1\sqrt{c} \cos(\sqrt{c}u_1) & \text{se } c > 0, \\ a_1\sqrt{|c|} \operatorname{senh}(\sqrt{|c|}u_1) + b_1\sqrt{|c|} \cosh(\sqrt{|c|}u_1) & \text{se } c < 0, \end{cases}$$

$$g' = \begin{cases} a_2 & \text{se } \xi = 0, \\ a_2\sqrt{|\xi|} \operatorname{senh}(\sqrt{|\xi|}u_2) + b_2\sqrt{|\xi|} \cosh(\sqrt{|\xi|}u_2) & \text{se } \xi < 0, \\ -a_2\sqrt{\xi} \operatorname{sen}(\sqrt{\xi}u_2) + b_2\sqrt{\xi} \cos(\sqrt{\xi}u_2) & \text{se } \xi > 0. \end{cases}$$

Pela relação (3.6), obtemos:

$$\begin{aligned} [-a_1\sqrt{c} \operatorname{sen}(\sqrt{c}u_1) + b_1\sqrt{c} \cos(\sqrt{c}u_1)]^2 + a_2^2 + c[a_1 \cos(\sqrt{c}u_1) + b_1 \operatorname{sen}(\sqrt{c}u_1)]^2 &= 0, \\ a_1^2 c[\operatorname{sen}^2(\sqrt{c}u_1) + \cos^2(\sqrt{c}u_1)] + b_1^2 c[\operatorname{sen}^2(\sqrt{c}u_1) + \cos^2(\sqrt{c}u_1)] + a_2^2 &= 0. \end{aligned}$$

Portanto temos que $c(a_1^2 + b_1^2) + a_2^2 = 0$. Como $c > 0$, obtemos a relação algebrica dada por $a_1 = b_1 = a_2 = 0$ se $c > 0$ e $\xi = 0$.

Se $c > 0$ e $\xi = 0$, então a superfície $\widetilde{X}$ reduz ao cilindro. De fato, pois $f = 0$ e $g = b_2$ e teremos por (3.2) que

$$\begin{aligned}\widetilde{X}_{c\gamma} &= X - \frac{2(f+g)}{c[(2\gamma+1)g^2 - f^2]}(f'X_{u_1} + g'X_{u_2} - gN)\\ &= X + \frac{2}{c(2\gamma+1)}N\\ &= \left(\cos(u_2) - \frac{2}{c(2\gamma+1)}\cos(u_2), \operatorname{sen}(u_2) - \frac{2}{c(2\gamma+1)}\operatorname{sen}(u_2), u_1\right)\\ &= \left(\left(1 - \frac{2}{c(2\gamma+1)}\right)\cos(u_2), \left(1 - \frac{2}{c(2\gamma+1)}\right)\operatorname{sen}(u_2), u_1\right)\\ &= (\rho\cos(u_2), \rho\operatorname{sen}(u_2), u_1).\end{aligned}$$

Onde $\rho = \left(1 - \dfrac{2}{c(2\gamma+1)}\right)$. Logo, $\widetilde{X}$ é um cilindro.

Se $c < 0$ e $\xi = 0$, existem curvas em $\mathbb{R}^2$ onde (3.7) se anulam. Se $c\xi > 0$, pelo Teorema 3.1 $c$ e $\xi(c,\gamma)$ não podem ser simultaneamente positivos, então $c < 0$ e $\xi < 0$. Neste caso, as funções $f$ e $g$ são dadas como acima, $\gamma < \dfrac{-1}{2}$ e existem quatro curvas sobre $\mathbb{R}^2$ determinadas por (3.7) onde $\widetilde{X}$ não é regular. De fato, por (3.7), as quatro curvas que se anulam são dadas por

$$f + g \pm \sqrt{2|\gamma|}g = 0, \qquad f + (2\gamma+1)g \pm \sqrt{2\gamma(2\gamma+1)}g = 0.$$

Se $c > 0$ e $\xi < 0$, então escolhendo $a_1 = b_1 = 0$, temos $b_2 = \pm a_2$, $f = 0$ e $g = a_2\exp(\pm\sqrt{|\xi|}u_2)$ e a superfície $\widetilde{X}$ se reduz a uma reparametrização do cilindro. De fato, por (3.2) temos

$$\begin{aligned}\widetilde{X}_{c\gamma} &= X - \frac{2}{c(2\gamma+1)g}(g'X_{u_2} - gN)\\ &= X - \frac{2(a_2\sqrt{|\xi|}\exp(\pm\sqrt{|\xi|}u_2)}{c(2\gamma+1)\exp(\pm\sqrt{|\xi|}u_2)}X_{u_2} + \frac{2}{c(2\gamma+1)}N\\ &= X - \frac{2}{1-\xi}(\pm\sqrt{|\xi|}X_{u_2} - N).\end{aligned}$$

onde na última equação usamos o fato de $\xi(c,\gamma) = 1 - c(2\gamma+1)$. Substituindo $X$ e $N$ por suas respectivas coordenadas obtemos que $\widetilde{X}$ é dado por

$$\begin{aligned}\widetilde{X} &= \left(\left(1 - \frac{2}{1-\xi}\right)\cos(u_2) - \frac{2}{1-\xi}(\pm\sqrt{|\xi|}\operatorname{sen}(u_2)), \left(1 - \frac{2}{1-\xi}\right)\operatorname{sen}(u_2)\right.\\ &- \left.\frac{2}{1-\xi}(\pm\sqrt{|\xi|}\cos(u_2)), u_1\right)\end{aligned}$$

bastando mostrar que a reparametrização acima é um cilindro. Com efeito, verifica-se facilmente que

$$\left(1-\frac{2}{1-\xi}\right)^2+\left(-\frac{2}{1-\xi}(\pm\sqrt{|\xi|})\right)^2=1.$$

Logo, fazendo

$$\cos(Y)=\left(1-\frac{2}{1-\xi}\right), \qquad \operatorname{sen}(Y)=\left(-\frac{2}{1-\xi}(\pm\sqrt{|\xi|})\right).$$

Portanto,

$$\begin{aligned}\widetilde{X} &= (\cos(Y)\cos(u_2)-\operatorname{sen}(Y)\operatorname{sen}(u_2), \cos(Y)\operatorname{sen}(u_2)+\operatorname{sen}(Y)\cos(u_2), u_1)\\ &= (\cos(Y+u_2), \operatorname{sen}(Y+u_2), u_1).\end{aligned}$$

que implica que $\widetilde{X}$ é um cilindro.
Portanto, excluindo o cilindro, podemos assumir que $a_1^2+b_1^2\neq 0$ e

$$f=\varepsilon_1\sqrt{\frac{|\xi|}{c}}\operatorname{sen}(A+\sqrt{c}u_1), \qquad g=\cosh(B+\sqrt{|\xi|}u_2).$$

De fato, temos que

$$f=a_1\cos(\sqrt{c}u_1)+b_1\operatorname{sen}(\sqrt{c}u_1),$$

e dividindo e multiplicando a equação acima por $\sqrt{a_1^2+b_1^2}$, obtemos

$$f=\sqrt{a_1^2+b_1^2}\left(\frac{a_1}{\sqrt{a_1^2+b_1^2}}\cos(\sqrt{c}u_1)+\frac{b_1}{\sqrt{a_1^2+b_1^2}}\operatorname{sen}(\sqrt{c}u_1)\right).$$

E como

$$\left(\frac{a_1}{\sqrt{a_1^2+b_1^2}}\right)^2+\left(\frac{b_1}{\sqrt{a_1^2+b_1^2}}\right)^2=1.$$

Fazendo

$$\operatorname{sen}(A)=\left(\frac{a_1}{\sqrt{a_1^2+b_1^2}}\right), \qquad \cos(A)=\left(\frac{b_1}{\sqrt{a_1^2+b_1^2}}\right).$$

Temos

$$\begin{aligned}f &= \sqrt{a_1^2+b_1^2}\left(\operatorname{sen}(A)\cos(\sqrt{c}u_1)+\cos(A)\operatorname{sen}(\sqrt{c}u_1)\right)\\ &= \sqrt{a_1^2+b_1^2}\left(\operatorname{sen}(A+\sqrt{c}u_1)\right).\end{aligned}$$

Como $a_2^2 - b_2^2 \neq 0$, analogamente obtemos que

$$g = \sqrt{a_2^2 - b_2^2}\cosh(B + \sqrt{|\xi|}u_2).$$

Como as constantes $\sqrt{a_1^2 + b_1^2}$ e $\sqrt{a_2^2 - b_2^2}$ não alteram as parametrizações de $\widetilde{X}_{c\gamma}$, assumimos que $\sqrt{a_2^2 - b_2^2} = 1$ e calculando $\sqrt{a_1^2 + b_1^2}$ na condição algebrica (3.6), temos que $(a_1^2 + b_1^2)c = -\xi$, obtendo portanto que $\sqrt{a_1^2 + b_1^2} = \varepsilon_1\sqrt{\frac{|\xi|}{c}}$. Logo obtemos

$$f = \varepsilon_1\sqrt{\frac{|\xi|}{c}}\,\mathrm{sen}(A + \sqrt{c}u_1), \qquad g = \cosh(B + \sqrt{|\xi|}u_2).$$

Analogamente, se $c < 0$ e $\xi > 0$, então excluindo o cilindro, podemos assumir $\sqrt{a_2^2 - b_2^2} \neq 0$ e assim

$$f = \cosh(A + \sqrt{|c|}u_1), \qquad g = \varepsilon_2\sqrt{\frac{|c|}{\xi}}\,\mathrm{sen}(B + \sqrt{\xi}u_2).$$

Agora concluímos a demonstração do teorema observando que as constantes $A$ e $B$, sem perda de generalidade, podemos considera-las nulas. Podemos verificar que as superfícies com diferentes valores de $A$ e $B$ são congruentes por movimentos rígidos em $\mathbb{R}^3$. De fato, usando a notação $\widetilde{X}_{c\gamma AB}$ para superfícies $\widetilde{X}_{c\gamma}$ com valores fixados $A$ e $B$, temos

$$\widetilde{X}_{c\gamma AB} = R_{-\frac{B}{\sqrt{\xi}}}\widetilde{X}_{c\gamma 00} \circ h + T_{-\frac{A}{\sqrt{|c|}}}$$

onde $h(u_1, u_2) = \left(u_1 + \dfrac{A}{\sqrt{|c|}}, u_2 + \dfrac{B}{\sqrt{|\xi|}}\right)$ $R$, $T$ são a rotação e translação dado por (3.9) e (3.10). Logo, visto que a rotação é uma transformação linear temos que

$$\begin{aligned}\widetilde{X}_{c\gamma AB} &= R_{-\frac{B}{\sqrt{\xi}}} \circ X(h) - \frac{2}{c[(2\gamma+1)g^2 - f^2}\Big(f' R_{-\frac{B}{\sqrt{|\xi|}}} \circ X_{u_1}(h) \\ &+ g' R_{-\frac{B}{\sqrt{|\xi|}}} \circ X_{u_2}(h) - g R_{-\frac{B}{\sqrt{|\xi|}}} \circ N(h)\Big) + T_{-\frac{A}{\sqrt{|c|}}}.\end{aligned}$$

Vamos calcular $R_{-\frac{B}{\sqrt{|\xi|}}} \circ X(h)$.

$$\begin{aligned}
R_{-\frac{B}{\sqrt{|\xi|}}} \circ X(h) &= \left( \cos\left(-\frac{B}{\sqrt{|\xi|}}\right) \cos\left(u_2 + \frac{B}{\sqrt{\xi}}\right) - \operatorname{sen}\left(-\frac{B}{\sqrt{\xi}}\right) \operatorname{sen}\left(u_2 + \frac{B}{\sqrt{\xi}}\right) \right. \\
&, \left. \operatorname{sen}\left(-\frac{B}{\sqrt{|\xi|}}\right) \cos\left(u_2 + \frac{B}{\sqrt{\xi}}\right) + \cos\left(-\frac{B}{\sqrt{|\xi|}}\right) \operatorname{sen}\left(u_2 + \frac{B}{\sqrt{\xi}}\right), u_1 + \frac{A}{\sqrt{|c|}} \right) \\
&= \left( \cos\left(u_2 + \frac{B}{\sqrt{\xi}} - \frac{B}{\sqrt{|\xi|}}\right), \operatorname{sen}\left(u_2 + \frac{B}{\sqrt{\xi}} - -\frac{B}{\sqrt{|\xi|}}\right), u_1 + \frac{A}{\sqrt{|c|}} \right) \\
&= \left( \cos(u_2), \operatorname{sen}(u_2), u_1 + \frac{A}{\sqrt{|c|}} \right).
\end{aligned}$$

Anlagamente, temos que

$$\begin{aligned}
R \circ X_{u_1}(h) &= (0,0,1) = X_{u_1}, \\
R \circ X_{u_2}(h) &= (-\operatorname{sen}(u_2), \cos(u_2), 0) = X_{u_2}, \\
R \circ N(h) &= (-\cos(u_2), -\operatorname{sen}(u_2), 0) = N.
\end{aligned}$$

Portanto, temos

$$\begin{aligned}
R_{-\frac{B}{\sqrt{|\xi|}}} \circ X(h) = &\left( \cos(u_2), \operatorname{sen}(u_2), u_1 + \frac{A}{\sqrt{|c|}} \right) \\
&+ \frac{2(f+g)}{c[(2\gamma+1)g^2 - f^2]} (f' X_{u_1} + g' X_{u_2} - gN).
\end{aligned}$$

Fazendo a translação $T_{-\frac{A}{\sqrt{|c|}}}$ na última coordenda na equação acima, obtemos que

$$R_{-\frac{B}{\sqrt{\xi}}} \widetilde{X}_{c\gamma 00} \circ h + T_{-\frac{A}{\sqrt{|c|}}} = \widetilde{X}_{c\gamma},$$

mostrando que as surperfícies com diferente valores de $A, B$ são congruentes por movimentos rígidos. $\square$

Pode-se mostrar que a superfície regular $\widetilde{X}_{c\gamma}$, dada pelo teorema anterior é completa. Além disso, os parâmetros pertencem a uma região constituída por duas componentes conexas de $\mathbb{R}^2$. Uma destas componentes contêm curvas que fornecem surpefícies com $n$-bolhas que são 1-periódicas, tendo gênero zero e dois fins de índice geométrico finito. Pode-se mostrar também que sua curvatura total é nula, enquanto a curvatura total absoluta é $8\pi n$. A demonstranção destes fatos podem ser encontradas em [CFT1].

Agora, descreveremos uma família a um parâmetro de superfícies com curvatura média constante $H = \dfrac{1}{2}$ obtida a partir do cilindro por uma transformação de Ribaucour. A superfície está contida na classe de superfícies linear Weingarten descritas no Teorema 3.1, onde restrigimos $\gamma = 0$. Estas superfícies podem ser obtidas diretamente a partir do cilindro pela aplicação da transformação de Ribaucour como nos Corolários 2.16 e 2.17.

**Corolário 3.3.** *Excluindo o cilindro, qualquer superfície parametrizada com curvatura média constante $H = \dfrac{1}{2}$ localmente associada ao cilindro por uma transformação de Ribaucour como no Teorema 3.1 é dada, a menos de um movimento rígido de $\mathbb{R}^3$, por*

$$\widetilde{X}_c = X + \frac{2}{c(f-g)}(f' X_{u_1} + g' X_{u_2} - gN) \tag{3.13}$$

*onde $N$ é o campo de vetores normais interno ao cilindro parametrizado por (3.1), $c$ é uma constante real tal que $c < 0$ ou $c > 1$, e as funções $f(u_1)$ e $g(u_2)$ são dadas por*

$$\begin{aligned} f &= \varepsilon_1 \sqrt{\frac{c-1}{c}}\operatorname{sen}(\sqrt{c}\,u_1) \qquad e \qquad g = \cosh(\sqrt{c-1}u_2) \qquad se\ c > 1, & (3.14)\\ f &= \cosh(\sqrt{|c|}u_1) \qquad e \qquad g = \varepsilon_2 \sqrt{\frac{|c|}{1-c}}\operatorname{sen}(\sqrt{1-c}\,u_2) \qquad se\ c < 0, & (3.15)\end{aligned}$$

*onde $\varepsilon_i = \pm 1$.*

*Demonstração.* Considerando $\gamma = 0$ em (3.2)-(3.6), conseguimos o lado direito de (3.13), onde $f$ e $g$ são soluções de

$$f'' + cf = 0, \qquad g'' + (1-c)g = 0 \tag{3.16}$$

e as condições iniciais de $f$ e $g$ devem satisfazer

$$\left((f')^2 + (g')^2 + (1-c)g^2 + cf^2\right)(u_1^0, u_2^0) = 0. \tag{3.17}$$

Além disso, visto que esta última condição pode ser identificamente satisfeita por soluções não triviais das funções $f$ e $g$, concluímos que a constante $c \neq 0$ é tal que $c(1-c) \leq 0$, pois $c$ e $1-c$ não podem ser simultaneamente positivos, assim temos $c < 0$ ou $c \geq 1$. Portanto quando $c = 1$, segue de (3.17) que $g = b_2$ onde $b_2 \neq 0$ é uma constante real e $f \equiv 0$. Neste caso $\widetilde{X}$ reduz ao cilindro e portanto $c \neq 1$.

A partir de (3.3) temos que $\xi = 1 - c$. Portanto usando o Teorema 3.2, concluímos que se $c > 1$ então (3.11) se reduz a (3.14) e se $c < 0$ então (3.12) se reduz a (3.15), concluindo a demonstração do corolário. $\square$

## 3.2 Aplicações da Transformação de Ribaucour na Esfera

Nesta seção, construiremos uma família de superfícies com curvatura média constante localmente associadas ao toro plano $\mathbb{S}^3$ utilizando a transformação de Ribaucour como no Teorema 2.14. Como caso especial, obtemos uma nova família de superfície mínimas em $\mathbb{S}^3$.

**Teorema 3.4.** *Considere o toro $\mathbb{T}^2$ parametrizado por*

$$X(u_1, u_2) = (c_1 \cos(u_1), c_1 \operatorname{sen}(u_1), c_2 \cos(u_2), c_2 \operatorname{sen}(u_2)), \ (u_1, u_2) \in \mathbb{R}^2. \tag{3.18}$$

*como uma superfície de curvatura média constante $H$, onde $c_1, c_2$ são constantes positivas satisfazendo*

$$c_1^2 + c_2^2 = 1, \qquad e \qquad H = \frac{1}{2}\left(\frac{c_2}{c_1} - \frac{c_1}{c_2}\right). \tag{3.19}$$

*Uma superfície parametrizada $\widetilde{X}_c$ é uma superfície de curvatura média constante $H$ localmente associada a $X$ por uma transformação de Ribaucour como no Corolário 2.17 se, e somente se, $c \in \left(-\infty, -\frac{c_1}{c_2}\right] \cup \left[\frac{c_2}{c_1}, \infty\right)$ e $\widetilde{X}_c$ é um toro se $c \in \left\{-\frac{c_1}{c_2}, \frac{c_2}{c_1}\right\}$ ou*

$$\widetilde{X}_c = \left(1 - \frac{2c_1c_2(c_1^2 f - c_2^2 g)}{c(c_1^2 f - c_2^2 g)}\right) X - \frac{2c_1^2c_2^2}{c(c_1^2 f - c_2^2 g)}\left(\frac{1}{c_1c_2}(f' X_{u_1} - g' X_{u_2}) - (f+g)N\right) \tag{3.20}$$

*onde*

$$N = (-c_2 \cos(u_1), -c_2 \operatorname{sen}(u_1), c_1 \cos(u_2), c_1 \operatorname{sen}(u_2)), \tag{3.21}$$

*e $f(u_1)$ e $g(u_2)$ são soluções das equações*

$$f'' + \left(1 - c\frac{c_1}{c_2}\right) f = 0, \qquad g'' + \left(1 + c\frac{c_2}{c_1}\right) g = 0, \tag{3.22}$$

*satisfazendo a condição inicial*

$$\left[\left(\frac{1}{c_2}f'\right)^2 + \left(\frac{1}{c_1}g'\right)^2 + \frac{1}{c_2^2}\left(1 - c\frac{c_1}{c_2}\right) f^2 + \frac{1}{c_1^2}\left(1 + c\frac{c_2}{c_1}\right) g^2\right](u_1^0, u_2^0) = 0. \tag{3.23}$$

*Além disso, $\widetilde{X}_c$ é uma superfície regular definida sobre*

$$\widetilde{U} = \left\{(u_1, u_2) \in \mathbb{R}^2 \middle| \frac{c_1}{c_2} f(u_1) - \frac{c_2}{c_1} g(u_2) \neq 0\right\}. \tag{3.24}$$

*Demonstração.* Como $X$ é dado por (3.18), temos que

$$\begin{aligned} dX &= (-c_1 \operatorname{sen}(u_1)du_1, c_1 \cos(u_1)du_1, -c_2 \operatorname{sen}(u_2)du_2, c_2 \cos(u_2)du_2) \\ &= (-\operatorname{sen}(u_1), \cos(u_1), 0, 0)c_1du_1 + (0, 0, -\operatorname{sen}(u_2), \cos(u_2))c_2du_2. \end{aligned}$$

Fixando $e_1 = \dfrac{X_{u_1}}{|X_{u_1}|}$, $e_2 = \dfrac{X_{u_2}}{|X_{u_2}|}$, $e_4 = X$ e calculando

$$e_3 = \big( - c_2 \cos(u_1), -c_2 \operatorname{sen}(u_1), c_1 \cos(u_2), c_1 \operatorname{sen}(u_2)\big)$$

para que $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ seja um referencial ortonormal de $\mathbb{T}^2$, temos que o vetor unitário normal do Toro é dado por (3.21). A primeira forma fundamental é

$$ds^2 =< dX_p, dX_p >= c_1^2 du_1^2 + c_2^2 du_2^2, \tag{3.25}$$

implicando que $\omega_1 = c_1 du_1$ e $\omega_2 = c_2 du_2$.
A segunda forma fundamental é dada por

$$\mathbb{II} = c_1 c_2 (du_1^2 - du_2^2). \tag{3.26}$$

De fato, pois $\mathbb{II} = \omega_1\omega_{13} + \omega_2\omega_{23}$, e

$$\begin{aligned} de_1 &= \big( - \cos(u_1), - \operatorname{sen}(u_1), 0, 0\big)du_1, \\ de_2 &= \big(0, 0, - \cos(u_2), - \operatorname{sen}(u_2)\big)du_2, \\ de_3 &= \big( - c_2 \operatorname{sen}(u_1)du_1, -c_2 \cos(u_1)du_1, c_1 \operatorname{sen}(u_2)du_2, c_1 \cos(u_2)du_2\big). \end{aligned}$$

Donde

$$\begin{aligned} \omega_{12} &= < de_1, e_2 >= 0. \\ \omega_{13} &= < de_1, e_3 >= c_2 du_1. \\ \omega_{23} &= < de_2, e_3 >= -c_1 du_2. \end{aligned}$$

Portanto, obtemos (3.26).
Segue que as curvas coordendas de $\mathbb{T}^2$ são linhas de curvaturas e que

$$\lambda^1 = -\frac{c_2}{c_1},\ \lambda^2 = \frac{c_1}{c_2}.$$

Portanto, $\mathbb{T}^2$ tem curvatura Gaussiana nula e a curvatura média de $\mathbb{T}^2$ é dado por (3.19). Visto que $S = 2c\Omega(-H\Omega + W)$, temos pelo Corolário 2.16 que

$$\sum_{k=1}^{2}(\Omega_i)^2 + (W - c\Omega)^2 + (\overline{k} - c^2 + 2cH)\Omega^2 = 0.$$

o que implica em $1 - c^2 + 2cH \leq 0$, isto é, $c \geq \dfrac{c_2}{c_1}$ ou $c \leq -\dfrac{c_1}{c_2}$. Assim se $c \in \left(-\dfrac{c_1}{c_2}, \dfrac{c_2}{c_1}\right)$, $\widetilde{X}_c$ não existe.

Suponha agora que $c \in \left(-\infty, -\dfrac{c_1}{c_2}\right) \cup \left(\dfrac{c_2}{c_1}, \infty\right)$. Na ordem para obter a transformação de Ribaucour, precisamos resolver o seguinte sistema de equações diferenciais obtidas a partir de (2.4), (2.5) e (2.6):

$$\frac{\partial \Omega_i}{\partial u_j} = 0, \qquad i \neq j. \tag{3.27}$$

$$\frac{\partial \Omega}{\partial u_i} = c_i\Omega_i, \qquad i = 1, 2. \tag{3.28}$$

$$\frac{\partial W}{\partial u_1} = -c_1\lambda^1\Omega_1 = -c_1\left(-\frac{c_2}{c_1}\right)\Omega_1 = c_2\Omega_1. \tag{3.29}$$

$$\frac{\partial W}{\partial u_2} = -c_1\Omega_2. \tag{3.30}$$

com a condição algébrica adicional

$$(\Omega_1)^2 + (\Omega_2)^2 + \Omega^2 + W^2 = 2c\Omega(-H\Omega + W). \tag{3.31}$$

A partir de (3.27) e (3.29) sabemos que $\dfrac{\partial^2 W}{\partial u_1 u_2} = 0$ que implica que

$$W = f(u_1) + g(u_2), \tag{3.32}$$

onde $f$ e $g$ são funções de $u_1$ e $u_2$ respectivamente.

Tomando a derivada de (3.31) em relação a $u_1$ e usando o sistema de equações acima, conseguimos

$$\begin{aligned} 2\Omega_1\frac{\partial \Omega_1}{\partial u_1} + 2W\frac{\partial W}{\partial u_1} + 2\Omega\frac{\partial \Omega}{\partial u_1} - 2c\frac{\partial \Omega}{\partial u_1}(W - H\Omega) + 2c\Omega\left(\frac{\partial W}{\partial u_1} - H\frac{\partial \Omega}{\partial u_1}\right) &= 0; \\ \Omega_1\frac{\partial \Omega_1}{\partial u_1} + Wc_2\Omega_1 + \Omega c_1\Omega_1 - cc_1\Omega_1 W + cc_1\Omega_1 H\Omega - c\Omega c_2\Omega_1 + cH\Omega c_1\Omega_1 &= 0; \end{aligned}$$

$$\frac{\partial \Omega_1}{\partial u_1} + c_2W + (1 + 2cH)c_1\Omega - cc_1W - cc_2\Omega = 0. \tag{3.33}$$

Analogamente, só que derivando (3.31) em relação a $u_2$ conseguimos

$$\frac{\partial \Omega_2}{\partial u_2} - c_1 W + (1+2cH)c_2\Omega - cc_2 W + cc_1\Omega = 0. \tag{3.34}$$

As equações (3.29) e (3.30) implicam em

$$\Omega_1 = \frac{1}{c_2}\frac{\partial W}{\partial u_1} = \frac{1}{c_2}f', \qquad \Omega_2 = -\frac{1}{c_1}\frac{\partial W}{\partial u_2} = -\frac{1}{c_1}g' \tag{3.35}$$

e

$$\frac{\partial \Omega_1}{\partial u_1} = \frac{1}{c_2}f''. \qquad \frac{\partial \Omega_2}{\partial u_2} = -\frac{1}{c_1}g''. \tag{3.36}$$

Por outro lado, multiplicando as equações (3.33) e (3.34) por $c_1$ e $c_2$ respectivamente, somando ambas as equações e usando o fato que $c_1^2 + c_2^2 = 1$ deduzimos que

$$c_1\frac{\partial \Omega_1}{\partial u_1} + c_2\frac{\partial \Omega_2}{\partial u_2} + (1+2cH)\Omega - cW = 0. \tag{3.37}$$

Por um cálculo análogo obtemos

$$c_2\frac{\partial \Omega_1}{\partial u_1} - c_1\frac{\partial \Omega_2}{\partial u_2} - c\Omega + W = 0. \tag{3.38}$$

Isolando $\Omega$ em (3.37) e (3.38) temos

$$\begin{aligned} \Omega &= \left(-c_1\frac{\partial \Omega_1}{\partial u_1} - c_2\frac{\partial \Omega_2}{\partial u_2} + cW\right)\frac{1}{(1+2cH)}. \\ \Omega &= \left(c_2\frac{\partial \Omega_1}{\partial u_1} - c_1\frac{\partial \Omega_2}{\partial u_2} + W\right)\frac{1}{c}. \end{aligned}$$

Eliminando $\Omega$ a partir das equações acima obtemos

$$\begin{aligned} & cc_1\frac{\partial \Omega_1}{\partial u_1} + cc_2\frac{\partial \Omega_2}{\partial u_2} + (1+2cH-c^2)W \\ & +(1+2cH)\left(c_2\frac{\partial \Omega_1}{\partial u_1} - c_1\frac{\partial \Omega_2}{\partial u_2}\right) = 0. \end{aligned} \tag{3.39}$$

Substituindo $W = f + g$ e (3.36) na equação acima, temos

$$cc_1\left(\frac{1}{c_2}f''\right) + cc_2\left(-\frac{1}{c_1}g''\right) + (1+2cH-c^2)(f+g) + (1+2cH)\left(c_2\frac{1}{c_2}f'' + c_1 - \frac{1}{c_1}g''\right) = 0.$$

Portanto,

$$\begin{aligned} & \left((1+2cH) + c\frac{c_1}{c_2}\right)f'' + \big((1+2cH) - c^2\big)f \\ = & \left(c\frac{c_1}{c_2} - (1+2cH)\right)g'' + \big(c^2 - (1+2cH)\big)g = d. \end{aligned} \tag{3.40}$$

onde $d$ é constante.

A partir do Corolário 2.16 sabemos que $1+2cH-c^2<0$. Segue de (3.40) que

$$\widetilde{f}=f-\frac{d}{1+2cH-c^2},\qquad \widetilde{g}=g+\frac{d}{1+2cH-c^2}. \tag{3.41}$$

onde $\widetilde{f}$ e $\widetilde{g}$ são soluções de (3.22), respectivamente. De fato, vamos denotar $\alpha=\left((1+2cH)+c\dfrac{c_1}{c_2}\right)$ e $\beta=\left((1+2cH)-c^2\right)$. Logo, por (3.40) temos $\alpha f''+\beta f=d$ e como $\widetilde{f}=f-\dfrac{d}{\beta}$ obtemos

$$\alpha\widetilde{f}''+\beta\widetilde{f}=\alpha f''+\beta f-d=0.$$

Portanto $\alpha\widetilde{f}''+\beta\widetilde{f}=0$ que é equivalente a $\widetilde{f}''+\dfrac{\beta}{\alpha}\widetilde{f}=0$. Portanto para $\widetilde{f}$ ser solução de (3.22) basta mostrar que $\dfrac{\beta}{\alpha}=1-c\dfrac{c_1}{c_2}$. Com efeito, temos

$$\alpha=\left((1+2cH)+c\frac{c_1}{c_2}\right)=1+c\left(\frac{c_2}{c_1}-\frac{c_1}{c_2}\right)+c\frac{c_1}{c_2}=\frac{c_1+cc_2}{c_1}.$$

Analogamente, temos

$$\beta=\frac{c_1c_2+cc_2^2-cc_1^2-c^2c_1c_2}{c_1c_2}.$$

Portanto temos

$$\begin{aligned}\frac{\beta}{\alpha} &= \left(\frac{c_1c_2+cc_2^2-cc_1^2-c^2c_1c_2}{c_1c_2}\right)\frac{c_1+cc_2}{c_1}\\ &= \frac{c_1c_2+cc_2^2}{c_1c_2+cc_2^2}-\frac{cc_1(c_1+cc_2)}{c_2(c_1+cc_2)}=1-c\frac{c_1}{c_2}.\end{aligned}$$

Analogamente, $\widetilde{g}$ é solução de (3.22).

Agora temos que

$$W=\widetilde{f}+\widetilde{g}=f+g,\qquad \Omega_1=\frac{1}{c_2}\widetilde{f}',\qquad \Omega_2=-\frac{1}{c_1}\widetilde{g}'. \tag{3.42}$$

A partir de (3.32), (3.36), (3.38) podemos calcular $\Omega$.

$$\begin{aligned}\Omega &= \frac{1}{c}\left(c_2\frac{\partial\Omega_1}{\partial u_1}-c_1\frac{\partial\Omega_2}{\partial u_2}+W\right)=\frac{1}{c}\left(c_2\frac{1}{c_2}f''+c_1\frac{1}{c_1}g''+f+g\right)\\ &= \frac{1}{c}(f''+g''+f+g)=\frac{1}{c}(\widetilde{f}''+\widetilde{g}''+\widetilde{f}+\widetilde{g}).\end{aligned} \tag{3.43}$$

Assim, a partir da expressão de $\widetilde{X}_c$, podemos supor, sem perda de generalidade, que $d = 0$. Usando (3.22) encontramos

$$\Omega = \left( f\frac{c_1}{c_2} - g\frac{c_2}{c_1} \right). \tag{3.44}$$

Segue do Corolário 2.17 que $\widetilde{X}_c$ é dado por

$$\widetilde{X} = \left(1 - \frac{\Omega}{c(W - H\Omega)}\right) X - \frac{1}{c(W - H\Omega)} \left( \sum_{i=1}^{2} \Omega_i e_i - WN \right).$$

Mas,

$$\begin{aligned}
\frac{\Omega}{c(W - H\Omega)} &= \frac{f\dfrac{c_1}{c_2} - g\dfrac{c_2}{c_1}}{c\left( f + g - \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{c_2}{c_1} - \dfrac{c_1}{c_2}\right)\left(\dfrac{c_1}{c_2}f - \dfrac{c_2}{c_1}g\right)\right)} = \frac{\dfrac{1}{c_1c_2}\left(c_1^2 f - c_2^2 g\right)}{c\left(\dfrac{f}{2} + \dfrac{g}{2} + \dfrac{c_2^2 g}{2c_1^2} + \dfrac{c_1^2 f}{2c_2^2}\right)} \\
&= \frac{\dfrac{1}{c_1c_2}\left(c_1^2 f - c_2^2 g\right)}{\dfrac{c}{2c_1^2c_2^2}(fc_1^2 + gc_2^2)} = \frac{2c_1c_2(fc_1^2 - gc_2^2)}{c(fc_1^2 + gc_2^2)}.
\end{aligned}$$

Analogamente temos que

$$\frac{1}{(W - H\Omega)} = \frac{2c_1^2c_2^2}{(fc_1^2 + gc_2^2)}. \tag{3.45}$$

Observe que:

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{2} \Omega_i e_i &= \Omega_1 e_1 + \Omega_2 e_2 = \frac{1}{c_2} f'(e_1) - \frac{1}{c_1} g'(e_2) \\
&= \frac{1}{c_1c_2}\left(f' X_{u_1} - g' X_{u_2}\right).
\end{aligned}$$

Portanto substituindo a equação obtida acima e usando (3.45) e (3.32) concluímos que $\widetilde{X}_c$ é dado por (3.20).

Substituindo (3.32), (3.35) e (3.44) em (3.31), obtemos (3.23). De fato, calculando o lado esquerdo da igualdade de (3.31) temos

$$\begin{aligned}
(\Omega_1)^2 + (\Omega_2)^2 + \Omega^2 + W^2 &= \left(\frac{1}{c_2}f'\right)^2 + \left(\frac{1}{c_1}g'\right)^2 + (f+g)^2 + \left(f\frac{c_1}{c_2} - g\frac{c_2}{c_1}\right)^2 \\
&= \left(\frac{1}{c_2}f'\right)^2 + \left(\frac{1}{c_1}g'\right)^2 + f^2\left(1 + \frac{c_1^2}{c_2^2}\right) + g^2\left(1 + \frac{c_2^2}{c_1^2}\right).
\end{aligned}$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned} 2c\Omega(-H\Omega+W) &= 2c\left[\left(f\frac{c_1}{c_2}-g\frac{c_2}{c_1}\right)(f+g)-\frac{1}{2}\left(\frac{c_2}{c_1}-\frac{c_1}{c_2}\right)\left(\frac{c_2^2}{c_1^2}f^2-2fg+\frac{c_1^2}{c_2^2}g^2\right)\right] \\ &= f^2c\frac{c_1}{c_2}\left(1+\frac{c_1^2}{c_2^2}\right)-g^2c\frac{c_2}{c_1}\left(1+\frac{c_2^2}{c_1^2}\right). \end{aligned}$$

Igualando os dois lados obtidos acima conseguimos

$$\left(\frac{1}{c_2}f'\right)^2+\left(\frac{1}{c_1}g'\right)^2+\left(1+\frac{c_1^2}{c_2^2}\right)\left(f^2-f^2c\frac{c_1}{c_2}\right)+\left(1+\frac{c_2^2}{c_1^2}\right)\left(g^2+g^2c\frac{c_2}{c_1}\right)=$$

$$\left(\frac{1}{c_2}f'\right)^2+\left(\frac{1}{c_1}g'\right)^2+\frac{1}{c_2^2}\left(1-c\frac{c_1}{c_2}\right)f^2+\frac{1}{c_1^2}\left(1+c\frac{c_2}{c_1}\right)g^2.$$

que é a equação (3.23). A partir do Teorema 2.14, sabemos que $\widetilde{X}_c$ é definido sobre $\widetilde{U}=\{(u_1,u_2)\in U : T^2+2TQH+Q^2(K-1)\neq 0\}$. Visto que $\alpha=-H$, $\beta=1$ e $\gamma=0$, temos que $T=-H\Omega^2$ e $Q=\Omega^2$. Logo

$$T^2+2TQH+Q^2(K-1)=H^2\Omega^4-2\Omega^4H^2-\Omega^2=\Omega^2(-\Omega^2H^2-1)\neq 0,$$

que implica em $\Omega\neq 0$. Portanto temos que $\widetilde{U}$ é dado por (3.24).
Se $1+2cH-c^2=0$, isto é, $c=-\dfrac{c_1}{c_2}$ ou $c=\dfrac{c_2}{c_1}$, então $\widetilde{X}_c$ é um toro. De fato, vamos considerar primeiro o caso que $c=-\dfrac{c_1}{c_2}$. Segue de (3.40) que $g''=0$, pois verifica-se facilmente que $c^2-(1+2cH)=0$. Deste modo

$$g(u_2)=au_2+b. \tag{3.46}$$

onde $a$ e $b$ são constantes. A partir de (3.35) temos

$$\frac{\partial\Omega}{\partial u_2}=c_2\Omega_2=-\frac{c_2}{c_1}g'=-\frac{c_2}{c_1}a.$$

Sabemos que

$$\Omega=l(u_1)-\frac{c_2}{c_1}au_2+\widetilde{b},\ \widetilde{b}\in\mathbb{R}. \tag{3.47}$$

Usando $\dfrac{c_1}{c_2}f'=\dfrac{\partial\Omega}{\partial u_1}=l'(u_1)$, temos $l(u_1)=\dfrac{c_1}{c_2}f(u_1)+\widetilde{d}$, que fornece

$$\Omega=\frac{c_1}{c_2}f(u_1)-\frac{c_2}{c_1}au_2+(\widetilde{b}+\widetilde{d}). \tag{3.48}$$

Assim, a partir de (3.36), (3.38) e (3.48), obtemos

$$f'' + f + g + \frac{c_1}{c_2}\left(\frac{c_1}{c_2}f(u_1) - \frac{c_2}{c_1}au_2 + (\widetilde{b} + \widetilde{d})\right) = 0, \tag{3.49}$$

que implica que

$$f'' + \frac{c_2^2}{c_2^2}f + au_2 + b + \frac{c_1^2}{c_2^2}f - au_2 + \frac{c_1}{c_2}(\widetilde{b} + \widetilde{d}) = 0.$$

Portanto,

$$f'' + \frac{f}{c_2^2} = -\frac{c_1}{c_2}(\widetilde{b} + \widetilde{d}) - b \equiv d_1. \tag{3.50}$$

Logo

$$f = b_1 \cos\left(\frac{u_1}{c_2}\right) + b_2 \operatorname{sen}\left(\frac{u_1}{c_2}\right) + c_2^2 d_1. \tag{3.51}$$

De (3.50) temos que $(\widetilde{b} + \widetilde{d}) = -\dfrac{c_2}{c_1}(b + d_1)$. Logo

$$\begin{aligned} \Omega &= \frac{c_1}{c_2}f(u_1) - \frac{c_2}{c_1}au_2 + (\widetilde{b} + \widetilde{d}) \\ &= \frac{c_1}{c_2}f - \frac{c_2}{c_1}(g + d_1). \end{aligned} \tag{3.52}$$

Portanto, $\Omega$ satisfaz (3.27). Por outro lado, deduzimos a partir da condição algébrica (2.37) que $a = b_1 = b_2 = 0$. Com efeito, segue de (3.35) que $\Omega_2 = -\dfrac{1}{c_1}g' = -\dfrac{1}{c_1}a$, pois $g = au_2 + b$. Calculando $S$ e usando a equação (3.52), temos

$$\begin{aligned} S &= (\Omega_1)^2 + (\Omega_2)^2 + \Omega^2 + W^2 \\ &= \left(\frac{1}{c_2}f'\right)^2 + \left(-\frac{1}{c_1}a\right)^2 + f^2 + 2fg + g^{2+}\frac{c_1^2}{c_2^2}f - 2fg - 2fd_1 + \frac{c_2^2}{c_1^2}(g^2 + 2gd_1 + d_1^2) \\ &= \left(\frac{1}{c_2}f'\right)^2 + \left(-\frac{a}{c_1}\right)^2 + f^2\left(1 + \frac{c_1^2}{c_2^2}\right) + g^2\left(1 + \frac{c_2^2}{c_1^2}\right) - 2fd_1 + \frac{c_2^2}{c_1^2}(2gd_1 + d_1^2). \end{aligned}$$

Além disso,

$$\begin{aligned}
2c\Omega(W-H\Omega) &= 2c\Omega\left(f+g-\frac{1}{2}\left(\frac{c_2}{c_1}-\frac{c_1}{c_2}\right)\Omega\right)\\
&= 2c\Omega\left(\frac{f}{2}+\frac{g}{2}-\frac{d_1}{2}+\frac{c_2^2}{2c_1^2}(g+d_1)+\frac{c_1^2}{2c_2^2}f\right)\\
&= -\frac{c_1^2}{c_2^2}f^2-\frac{c_1^2}{c_2^2}fg+\frac{c_1^2}{c_2^2}fd_1-f(g+d_1)-\frac{c_1^4}{c_2^4}f^2+f(g+d_1)\\
&+\ g^2+gd_1-gd_1-d_1^2+\frac{c_2^2}{c_1^2}(g+d_1)^2+\frac{c_1^2}{c_2^2}f(g+d_1)\\
&= -\frac{c_1^2}{c_2^2}f^2\left(1+\frac{c_1^2}{c_2^2}\right)+2\frac{c_1^2}{c_2^2}fd_1+g^2-d_1^2+\frac{c_2^2}{c_1^2}(g+d_1)^2.
\end{aligned}$$

Igualando $S=2c\Omega(W-H\Omega)$, obtemos:

$$\begin{aligned}
\left(\frac{1}{c_2}f'\right)^2 &+ \left(-\frac{a}{c_1}\right)^2+f^2\left(\frac{1}{c_2^2}\right)\left(1+\frac{c_1^2}{c_2^2}\right)+g^2\left(1+\frac{c_2^2}{c_1^2}\right)-2fd_1+\frac{c_2^2}{c_1^2}2gd_1\\
&= 2\frac{c_1^2}{c_2^2}fd_1+g^2\left(1+\frac{c_2^2}{c_1^2}\right)+2gd_1\frac{c_2^2}{c_1^2}-d_1^2;\\
\left(\frac{1}{c_2}f'\right)^2 &+ \left(-\frac{a}{c_1}\right)^2+f^2\left(\frac{1}{c_2^4}\right)-2fd_1\left(\frac{1}{c_2^2}\right)+d_1^2=0;\\
\left(\frac{1}{c_2}f'\right)^2 &+ \left(-\frac{a}{c_1}\right)^2+\left(f^2\frac{1}{c_2^2}-d_1^2\right)=0.
\end{aligned}$$

Substituindo $f$ dado por (3.51) na última equação conseguimos

$$\begin{aligned}
&\left[\frac{1}{c_2^2}\left(-b_1\,\mathrm{sen}\left(\frac{u_1}{c_2}\right)+b_2\cos\left(\frac{u_1}{c_2}\right)\right)\right]^2+\left(-\frac{a}{c_1}\right)^2\\
&\qquad+\left[\frac{1}{c_2^2}\left(b_1\cos\left(\frac{u_1}{c_2}\right)+b_2\,\mathrm{sen}\left(\frac{u_1}{c_2}\right)\right)\right]^2=0.
\end{aligned}$$

Portanto, como $c_1$, $c_2$ são não nulos e o $\mathrm{sen}\left(\frac{u_1}{c_2}\right)$ e $\cos\left(\frac{u_1}{c_2}\right)$ não se anulam simultaneamente, só podemos ter $a=b_1=b_2=0$. Este fato nos fornece que $f=c_2^2d_1$ e $g=b$. Assim, por (3.32) e (3.52) implica que

$$W=c_2^2d_1+b,\qquad \Omega=-\frac{c_2^3}{c_1^2}d_1-\frac{c_2}{c_1}b.$$

Portanto, obtemos

$$\widetilde{X}_c=(r_1\cos(u_1),r_1\,\mathrm{sen}(u_1),r_2\cos(u_2),r_2\,\mathrm{sen}(u_2)), \tag{3.53}$$

onde
$$r_i = \left(1 - \frac{\Omega}{c(W - H\Omega)}\right) c_i + (-1)^i \frac{Wc_j}{c(W - H\Omega)}, \qquad i \neq j, \tag{3.54}$$
são constantes. De fato, calculando
$$\widetilde{X}_c = \left(1 - \frac{\Omega}{c(W - H\Omega)}\right) X - \frac{1}{c(W - H\Omega)} \left(\sum_{i=1}^{2} \Omega_i e_i - WN\right),$$
onde $X$ e $N$ são dados por (3.18) e (3.21) respectivamente. Como $f' = g' \equiv 0$, segue que $\sum_{i=1}^{2} \Omega_i e_i = \frac{1}{c_1 c_2}(f' X_{u_1} - g' X_{u_2}) = 0$. Para facilitar os cálculos vamos denotar
$$\rho = \left(1 - \frac{\Omega}{c(W - H\Omega)}\right), \qquad \tau = \frac{W}{c(W - H\Omega)}.$$
Logo
$$\begin{aligned}
\widetilde{X}_c &= \rho X - \tau N \\
&= \rho(c_1 \cos(u_1), c_1 \operatorname{sen}(u_1), c_2 \cos(u_2), c_2 \operatorname{sen}(u_2)) \\
&+ \tau(-c_2 \cos(u_1), -c_2 \operatorname{sen}(u_1), c_1 \cos(u_2), c_1 \operatorname{sen}(u_2)) \\
&= \big((\rho c_1 - \tau c_2) \cos(u_1), (\rho c_1 - \tau c_2) \operatorname{sen}(u_1), (\rho c_2 + \tau c_1) \cos(u_2), (\rho c_2 + \tau c_1) \operatorname{sen}(u_2)\big) \\
&= (r_1 \cos(u_1), r_1 \operatorname{sen}(u_1), r_2 \cos(u_2), r_2 \operatorname{sen}(u_2)).
\end{aligned}$$
onde $r_1$, $r_2$ é dado por (3.54). Consequentemente, $\widetilde{X}_c$ é um toro. Do mesmo modo, podemos provar que quando $c = \frac{c_2}{c_1}$, $\widetilde{X}_c$ é também um toro. □

**Teorema 3.5.** *As superfícies $\widetilde{X}_c$ obtida no Teorema anterior são superfícies de curvatura média constante $H$ completas contidas na esfera unitária $\mathbb{S}^3$. Excluindo o Toro e a menos de uma isometria de $\mathbb{S}^3$, $\widetilde{X}_c$ é dada por (3.20) onde $c > \frac{c_2}{c_1}$,*
$$f = \delta \frac{c_2}{c_1} \sqrt{\frac{\nu}{-\eta}} \cosh(\sqrt{-\eta}\, u_1), \qquad g = \operatorname{sen}(\sqrt{\nu}\, u_2), \tag{3.55}$$
*onde*
$$\eta(c) = 1 - c\frac{c_1}{c_2}, \qquad \nu(c) = 1 + c\frac{c_2}{c_1}, \qquad \delta \pm 1, \qquad (u_1, u_2) \in \mathbb{R}. \tag{3.56}$$

*Demonstração.* As funções $f$ e $g$ descritas por (3.20) são dadas por

$$\begin{aligned} f &= a_1\cos(\sqrt{\eta}u_1) + b_1\,\mathrm{sen}(\sqrt{\eta}u_1), \\ g &= a_2\cosh(\sqrt{-\nu}u_2) + b_2\,\mathrm{senh}(\sqrt{-\nu}u_2), \qquad se\ c < -\frac{c_1}{c_2}, \end{aligned} \tag{3.57}$$

$$\begin{aligned} f &= a_1\cosh(\sqrt{-\eta}u_1) + b_1\,\mathrm{senh}(\sqrt{-\eta}u_1), \\ g &= a_2\cos(\sqrt{\nu}u_2) + b_2\,\mathrm{sen}(\sqrt{\nu}u_2), \qquad se\ c > \frac{c_2}{c_1}. \end{aligned} \tag{3.58}$$

onde $\eta$ e $\nu$ são funções de $c$ definidas por (3.56), pois $f$ e $g$ são soluções das equações dadas por (3.22).

A partir de condição inicial dada por (3.23) segue que as constantes $a_i, b_i, i = 1, 2$ satisfazem as seguintes condições:

$$\frac{1}{c_2^2}\eta(a_1^2 + b_1^2) + \frac{1}{c_1^2}\nu(a_2^2 - b_2^2) = 0, \qquad se\ c < -\frac{c_1}{c_2}, \tag{3.59}$$

$$\frac{1}{c_2^2}\nu(b_1^2 - a_1^2) + \frac{1}{c_1^2}\eta(a_2^2 + b_2^2) = 0, \qquad se\ c > \frac{c_2}{c_1} \tag{3.60}$$

Provaremos a equação (3.59), sendo (3.60) análoga. Seja

$$\begin{aligned} f' &= -a_1\sqrt{\eta}\,\mathrm{sen}(\sqrt{\eta}u_1) + b_1\sqrt{\eta}\cos(\sqrt{\eta}u_1), \\ g' &= a_2\sqrt{-\nu}\,\mathrm{senh}(\sqrt{-\nu}u_2) + b_2\sqrt{-\nu}\cosh(\sqrt{-\nu}u_2). \end{aligned}$$

Substituindo $f', g', f$ e $g$ na condição (3.23), obtemos

$$\left(\frac{1}{c_2}\right)^2\eta(-a_1\,\mathrm{sen}(\sqrt{\eta}u_1) + b_1\cos(\sqrt{\eta}u_1))^2 + \left(\frac{1}{c_1}\right)^2(-\nu)(a_2\,\mathrm{senh}(\sqrt{-\nu}u_2) + b_2\cosh(\sqrt{-\nu}u_2))^2$$
$$+\left(\frac{1}{c_2}\right)^2\eta(a_1\cos(\sqrt{\eta}u_1) + b_1\,\mathrm{sen}(\sqrt{\eta}u_1))^2 + \left(\frac{1}{c_1}\right)^2\nu(a_2\cosh(\sqrt{-\nu}u_2) + b_2\,\mathrm{senh}(\sqrt{-\nu}u_2))^2 = 0$$

que implica que

$$\frac{1}{c_2^2}\eta(a_1^2 + b_1^2) + \frac{1}{c_1^2}\nu(a_2^2 - b_2^2).$$

Considere o caso $c < -\frac{c_1}{c_2}$. Se $a_1 = b_1 = 0$, então $f$ e $g$ são dados por

$$f = 0, \qquad g = a_2(\cosh(\sqrt{-\nu}u_2) \pm \mathrm{senh}(\sqrt{-\nu}u_2)). \tag{3.61}$$

A partir de (3.20) temos que

$$\widetilde{X}_c = (c_1\cos(u_1), c_1\operatorname{sen}(u_1), c_2\cos(u_2 \pm A), c_2\operatorname{sen}(u_2 \pm A)),$$

que implica que $\widetilde{X}_c$ é um toro. De fato, por (3.61) a parametrização de $\widetilde{X}_c$ dada por (3.20) se reduz a

$$\begin{aligned}\widetilde{X}_c &= \left(1+\frac{2c_1c_2}{c}\right)X - \frac{2c_1^2}{cg}\left(-\frac{1}{c_1c_2}g'X_{u_2} - gN\right)\\ &= \left(1+\frac{2c_1c_2}{c}\right)X + \frac{2c_1}{cc_2}\epsilon\sqrt{-\nu}X_{u_2} + \frac{2c_1^2}{c}N,\end{aligned}$$

onde $\epsilon = \pm 1$. Substituindo $X$ e $N$ dados por (3.18) e (3.21) respectivamente na equação acima e sabendo que $X_{u_2} = (0,0,-c_2\operatorname{sen}(u_2), c_2\cos(u_2))$ obtemos

$$\begin{aligned}\widetilde{X}_c =& \left(1+\frac{2c_1c_2}{c}\right)(c_1\cos(u_1), c_1\operatorname{sen}(u_1), c_2\cos(u_2), c_2\operatorname{sen}(u_2))\\ &+ \frac{2c_1}{cc_2}\epsilon\sqrt{-\nu}(0,0,-c_2\operatorname{sen}(u_2), c_2\cos(u_2)) + \frac{2c_1^2}{c}(-c_2\cos(u_1), -c_2\operatorname{sen}(u_1), c_1\cos(u_2), c_1\operatorname{sen}(u_2))\\ =& \left(c_1\cos(u_1), c_1\operatorname{sen}(u_1), c_2\left(\cos(u_2) + \frac{2c_1c_2}{c}\cos(u_2) + \frac{2c_1}{cc_2}\epsilon\sqrt{-\nu}\operatorname{sen}(u_2)\right.\right.\\ &\left.\left. + \frac{2c_1^3}{cc_2}\cos(u_2)\right), c_2\left(\frac{2c_1c_2}{c}\operatorname{sen}(u_2) + \operatorname{sen}(u_2) + \frac{2c_1}{cc_2}\epsilon\sqrt{-\nu}\cos(u_2) + \frac{2c_1^3}{cc_2}\operatorname{sen}(u_2)\right)\right).\end{aligned}$$

Desenvolvendo a terceira coordenada da equação acima, verificamos que ela é igual à

$$\begin{aligned}&= c_2\left[\cos(u_2)\left(1+\frac{2c_1c_2}{c} + \frac{2c_1^3}{cc_2}\right) + \frac{2c_1}{cc_2}\epsilon\sqrt{-\nu}\operatorname{sen}(u_2)\right]\\ &= c_2\left[\cos(u_2)\left(\frac{cc_2+2c_1}{cc_2}\right) + \frac{2c_1}{cc_2}\epsilon\sqrt{-\nu}\operatorname{sen}(u_2)\right].\end{aligned}$$

Agora calculando $\left(\dfrac{cc_2+2c_1}{cc_2}\right)^2 + \left(\dfrac{2c_1}{cc_2}\epsilon\sqrt{-\nu}\right)^2$, vemos que

$$\frac{c^2c_2^2 + 4cc_1c_2 + 4c_1^2}{c^2c_2^2} + \left[\frac{4c_1^2}{c^2c_2^2}\left(-1 - c\frac{c_2}{c_1}\right)\right] = 1.$$

Logo temos que

$$\left(\frac{cc_2+2c_1}{cc_2}\right) = \cos(A), \qquad \left(\frac{2c_1}{cc_2}\epsilon\sqrt{-\nu}\right) = \operatorname{sen}(A).$$

Portanto a terceira coordenada obtida é dada por

$$c_2(\cos(u_2)\cos(A) \pm \operatorname{sen}(u_2)\operatorname{sen}(A)) = c_2\cos(u_2 \pm A).$$

Analogamente a quarta coordenada é dada por $c_2\operatorname{sen}(u_2 \pm A)$, mostrando que $\widetilde{X}_c$ é um toro. Portanto, excluindo o toro, podemos assumir que $a_1^2 + b_1^2 \neq 0$. Neste caso, usando (3.58) e (3.59) podemos ver que

$$f = \operatorname{sen}(\sqrt{\eta}u_1 + A_1), \qquad g = \delta\frac{c_1}{c_2}\sqrt{\frac{\eta}{-\nu}}\cosh(\sqrt{-\nu}u_2 + B_1), \tag{3.62}$$

onde

$$\begin{aligned} \operatorname{sen}(A_1) &= \frac{a_1}{\sqrt{a_1^2+b_1^2}}, &\qquad \cos(A_1) &= \frac{b_1}{\sqrt{a_1^2+b_1^2}},\\ \cosh(B_1) &= \frac{\delta a_2}{\sqrt{a_2^2-b_2^2}}, &\qquad \operatorname{senh}(B_1) &= \frac{\delta b_2}{\sqrt{a_2^2-b_2^2}}, \end{aligned}$$

e $\delta = \pm 1$, de modo que $\delta a_2 > 0$. De fato, por (3.58) temos que

$$\begin{aligned} f &= a_1\cos(\sqrt{\eta}u_1) + b_1\operatorname{sen}(\sqrt{\eta}u_1)\\ &= \sqrt{a_1^2+b_1^2}\Bigg(\frac{a_1}{\sqrt{a_1^2+b_1^2}}\cos(\sqrt{\eta}u_1) + \frac{b_1}{\sqrt{a_1^2+b_1^2}}\operatorname{sen}(\sqrt{\eta}u_1)\Bigg). \end{aligned}$$

Como

$$\left(\frac{a_1}{\sqrt{a_1^2+b_1^2}}\right)^2 + \left(\frac{b_1}{\sqrt{a_1^2+b_1^2}}\right)^2 = 1,$$

temos

$$\begin{aligned} f &= \sqrt{a_1^2+b_1^2}\Big(\operatorname{sen}(A_1)\cos(\sqrt{\eta}u_1) + \cos(A_1)\operatorname{sen}(\sqrt{\eta}u_1)\Big)\\ &= \sqrt{a_1^2+b_1^2}\operatorname{sen}(\sqrt{\eta}u_1 + A_1). \end{aligned}$$

Como $a_1^2 + b_1^2 \neq 0$, temos por (3.59) que $a_2^2 - b_2^2 \neq 0$ e deste modo

$$\begin{aligned} g &= a_2\cosh(\sqrt{-\nu}u_2) + b_2\operatorname{senh}(\sqrt{-\nu}u_2)\\ &= \sqrt{a_2^2-b_2^2}\Bigg(\frac{\delta a_2}{\sqrt{a_2^2-b_2^2}}\cosh(\sqrt{-\nu}u_2) + \frac{\delta b_2}{\sqrt{a_2^2-b_2^2}}\operatorname{senh}(\sqrt{-\nu}u_2)\Bigg). \end{aligned}$$

Logo,

$$\left(\frac{\delta a_2}{\sqrt{a_2^2-b_2^2}}\right)^2 - \left(\frac{\delta b_2}{\sqrt{a_2^2-b_2^2}}\right)^2 = 1.$$

Portanto

$$\begin{aligned} g &= \sqrt{a_2^2-b_2^2}\Big(\cosh(B_1)\cosh(\sqrt{-\nu}u_2)+\operatorname{senh}(B_1)\operatorname{senh}(\sqrt{-\nu}u_2)\Big)\\ &= \sqrt{a_2^2-b_2^2}\cosh(\sqrt{-\nu}u_2+B_1). \end{aligned}$$

As constantes $\sqrt{a_1^2+b_1^2}$ e $\sqrt{a_2^2-b_2^2}$ não alteram a parametrização $\widetilde{X}_c$ e fazendo $\sqrt{a_1^2+b_1^2}=1$ e calculando $\sqrt{a_2^2-b_2^2}$ em (3.59), conseguimos

$$\frac{1}{c_1^2}\nu(a_2^2-b_2^2)=-\frac{1}{c_2^2}\eta,$$

que implica que

$$\sqrt{a_2^2-b_2^2}=\delta\frac{c_1}{c_2}\sqrt{\frac{\eta}{-\nu}},$$

onde podemos concluir que $f$ e $g$ são dadas por (3.62).

Agora suponha que $c>\dfrac{c_2}{c_1}$. Pelo mesmo argumento usado anteriormente, sabemos que quando $a_2=b_2=0$, $\widetilde{X}_c$ é um toro e quando $a_2^2+b_2^2\neq 0$, temos

$$f=\delta\frac{c_2}{c_1}\sqrt{\frac{\nu}{-\eta}}\cosh(\sqrt{-\eta}u_1+A_2),\qquad g=\operatorname{sen}(\sqrt{\nu}u_2+B_2), \tag{3.63}$$

e $\delta=\pm 1$, de modo que $\delta a_1>0$.

Segue de (3.44) e da expressão de $f$ e $g$ que, para qualquer $c\in\left(-\infty,-\dfrac{c_1}{c_2}\right)\cup\left(\dfrac{c_2}{c_1},\infty\right)$, $\widetilde{U}=\mathbb{R}^2$, onde $\widetilde{U}$ é dado por (3.24), isto é, $\widetilde{X}_c$ é definido sobre todo o plano.

Observe que quando $c<-\dfrac{c_1}{c_2}$, temos

$$\widetilde{X}_{c,A_1,B_1}(u_1,u_2)=R_{\left(\frac{-A_1}{\sqrt{\eta}},\frac{-B_1}{\sqrt{-\nu}}\right)}\circ\widetilde{X}_{c,0,0}\circ h(u_1,u_2),$$

onde

$$h(u_1,u_2)=\left(u_1+\frac{A_1}{\sqrt{\eta}},u_2+\frac{B_1}{\sqrt{-\nu}}\right),$$

e $R_{(\theta,\phi)}:\mathbb{R}^4\to\mathbb{R}^4$ é dado por

$$\begin{aligned} R_{(\theta,\phi)}:(x_1,x_2,x_3,x_4)\to(&x_1\cos(\theta)-x_2\operatorname{sen}(\theta),x_1\operatorname{sen}(\theta)+x_2\cos(\theta),\\ &x_3\cos(\phi)-x_4\operatorname{sen}(\phi),x_3\operatorname{sen}(\phi)+x_4\cos(\phi)). \end{aligned}$$

A demonstração desse fato se faz analogamente como no Teorema 3.2.

Portanto, todas as superfícies de curvatura média constante $\widetilde{X}_{c,A_1,B_1}$, $c\in\left(-\infty,-\dfrac{c_1}{c_2}\right)$

com diferentes valores de $A_1, B_1$ são congruentes. Analogamente, as superfícies com curvatura média constante $\widetilde{X}_{c,A_2,B_2}$, $c \in \left(\frac{c_2}{c_1}, \infty\right)$ com diferentes valores de $A_2, B_2$ também são congruentes.
Portanto, sem perda de generalidade podemos considerar em (3.62) e (3.63)

$$A_1 = B_1 = A_2 = B_2 = 0. \tag{3.64}$$

Agora provaremos que as superfícies $\widetilde{X}_c$ e $\widetilde{X}_{2H-c}$ são congruentes. A partir da Observação 2.15, a métrica de $\widetilde{X}_c$ é dada por

$$ds_c^2 = \widetilde{\omega}_1^2 + \widetilde{\omega}_2^2 = \sum_{i=1}^{2} \frac{1}{P^2}[\gamma W^2 - \alpha\Omega^2 + (\beta\Omega + 2\gamma W)\Omega\lambda^i]^2(|X_{u_i}|du_i)^2.$$

Onde

$$\alpha = -H = -\frac{1}{2}\left(\frac{c_2}{c_1} - \frac{c_1}{c_2}\right), \qquad \beta = 1,\ \gamma = 0,$$

$$P = \alpha\Omega^2 + \Omega W = -H\Omega^2 + \Omega W.$$

Portanto, deduzimos de $\lambda^1 = -\frac{c_2}{c_1}$, $\lambda^2 = \frac{c_1}{c_2}$, que

$$ds_c^2 = \frac{(c_1^2 f_c - c_2^2 g_c)^2}{(c_1^2 f_c + c_2^2 g_c)^2}(c_1^2 du_1^2 + c_2^2 du_2^2) \equiv \psi_c^2(c_1^2 du_1^2 + c_2^2 du_2^2), \tag{3.65}$$

onde $f_c$ e $g_c$ são dado por (3.62), (3.63), com (3.64). De fato,

$$ds_c^2 = \frac{1}{(W - H\Omega)^2}\Omega^2[(H + \lambda^1)^2(|X_{u_1}|du_1)^2 + (H + \lambda^2)^2(|X_{u_2}|du_2)^2].$$

Mas,

$$(H + \lambda^1)^2 = \left(\frac{1}{2}\left(\frac{c_2}{c_1} - \frac{c_1}{c_2}\right) - \frac{c_2}{c_1}\right)^2 = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{c_1^2 c_2^2}\right).$$

Analogamente $(H + \lambda^2)^2 = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{c_1^2 c_2^2}\right)$.

Segue de (3.45) que

$$\frac{1}{(W - H\Omega)} = \frac{2c_1^2 c_2^2}{(fc_1^2 + gc_2^2)}.$$

Como $|X_{u_i}| = c_i$ temos

$$
\begin{aligned}
ds_c^2 &= \left(\frac{2c_1^2c_2^2}{fc_1^2+gc_2^2}\right)^2\left(\frac{c_1}{c_2}f-\frac{c_2}{c_1}g\right)^2\frac{1}{4c_1^2c_2^2}[c_1^2du_2^2+c_2^2du_2^2] \\
&= \frac{(c_1^2f_c-c_2^2g_c)^2}{(c_1^2f_c+c_2^2g_c)^2}(c_1^2du_1^2+c_2^2du_2^2) \equiv \psi_c^2(c_1^2du_1^2+c_2^2du_2^2).
\end{aligned}
$$

Observe que $c > \dfrac{c_2}{c_1}$ se, e somente se, $2H - c < -\dfrac{c_1}{c_2}$. De fato,

$$
\left(\frac{c_2}{c_1}-\frac{c_1}{c_2}\right)-c<-\frac{c_1}{c_2}
$$

é equivalente a $c > \dfrac{c_2}{c_1}$. Além disso,

$$
\begin{aligned}
\eta(2H-c) &= 1-(2H-c)\left(\frac{c_1}{c_2}\right) \\
&= 1-\left(\left(\frac{c_2}{c_1}-\frac{c_1}{c_2}\right)-c\right)\left(\frac{c_1}{c_2}\right) \\
&= \frac{c_1^2}{c_2^2}\left(1+c\frac{c_2}{c_1}\right)=\frac{c_1^2}{c_2^2}\nu(c).
\end{aligned}
$$

Analogamente $\nu(2H-c) = \dfrac{c_2^2}{c_1^2}\eta(c)$.

Portanto se $c > \dfrac{c_2}{c_1}$, temos

$$
f_{2H-c}(u_1) = g_c(\widetilde{u}_2), \qquad g_{2H-c}(u_2) = \frac{c_1^4}{c_2^4}f_c(\widetilde{u}_1),
$$

onde $\widetilde{u}_1 = \dfrac{c_2}{c_1}u_2$ e $\widetilde{u}_2 = \dfrac{c_1}{c_2}u_1$. De fato, usando as equações (3.62), (3.63) e (3.64) temos

$$
\begin{aligned}
g_{2H-c}(u_2) &= \delta\frac{c_1}{c_2}\sqrt{\frac{\eta(2H-c)}{-\nu(2H-c)}}\cosh\left(\sqrt{-\nu(2H-c)}u_2\right) \\
&= \delta\frac{c_1}{c_2}\sqrt{\frac{\nu(c)}{-\eta(c)}\frac{c_1^4}{c_2^4}}\cosh\left(\frac{c_2}{c_1}\sqrt{-\eta(c)}u_2\right) \\
&= \delta\frac{c_1^4}{c_2^4}\frac{c_2}{c_1}\sqrt{\frac{\nu(c)}{-\eta(c)}}\cosh\left(\frac{c_2}{c_1}\sqrt{-\eta(c)}u_2\right) \\
&= \delta\frac{c_1^4}{c_2^4}f_c(\widetilde{u}_1),
\end{aligned}
$$

onde $\widetilde{u}_1 = \dfrac{c_2}{c_1}u_2$. Analogamente $f_{2H-c}(u_1) = g_c(\widetilde{u}_2)$, onde $\widetilde{u}_2 = \dfrac{c_1}{c_2}u_1$. Portanto concluímos que $\widetilde{X}_c(u_1, u_2)$ e $\widetilde{X}_{2H-c}\left(\dfrac{c_2}{c_1}u_2, \dfrac{c_1}{c_2}u_1\right)$ têm as mesmas primeira e segunda forma fundamental. Portanto, $\widetilde{X}_c$ e $\widetilde{X}_{2H-c}$ são congruentes por uma isometria em $S^3$.

Vamos mostrar agora que cada $\widetilde{X}_c$ é completa. Somente precisamos considerar $c > \dfrac{c_2}{c_1}$. neste caso, segue de (3.63) e (3.65) que

$$\begin{aligned}\left|\frac{c_1^2 f_c - c_2^2 g_c}{c_1^2 f_c + c_2^2 g_c}\right| &\geq \frac{c_1^2|f_c| - c_2^2|g_c|}{c_1^2|f_c| + c_2^2|g_c|} \geq 1 - \frac{2c_2^2|g_c|}{c_1^2|f_c| + c_2^2|g_c|}\\ &\geq 1 - \frac{2c_2^2}{c_2^2 + \frac{c_2}{c_1}\sqrt{\frac{\nu(c)}{-\eta(c)}}} > 0.\end{aligned}$$

Portanto, existe um $r > 0$ tal que $\psi_c(u_1, u_2) \geq r, \forall (u_1, u_2) \in \mathbb{R}^2$. Precisamos mostrar que qualquer curva divergente na superfície $\widetilde{X}_c$ tem comprimento infinito. Tal curva é da forma $\alpha(t) = \widetilde{X}_c(u_1(t), u_2(t))$, onde $\lim_{t\to\infty}(u_1^2(t) + u_2^2(t)) = \infty$. Podemos supor que $\alpha$ é parametrizada pelo comprimento de arco, isto é $(u_1')^2 + (u_2')^2 = 1$. O comprimento da curva $\alpha$ é

$$I(\alpha) = \int_0^\infty \psi(\alpha(t)\sqrt{c_1^2(u_1')^2 + c_2^2(u_2')^2}dt \geq \int_0^\infty min\{c_1, c_2\}\cdot rdr = \infty.$$

Isto mostra que $\widetilde{X}_c$ é completa. $\square$

Se nos Teoremas 3.4 e 3.5 $c_1 = c_2 = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$, temos uma família de surpefícies mínimas em $\mathbb{S}^3$ localmente associada ao toro de Clifford por uma Transformação de Ribaucour. Mais precisamente, temos o seguinte resultado:

**Corolário 3.6.** *Considere o toro de Clifford $\mathbb{T}^2$ em $\mathbb{S}^3$ parametrizado por*

$$X(u_1, u_2) = \frac{1}{\sqrt{2}}(\cos(u_1), \operatorname{sen}(u_1), \cos(u_2), \operatorname{sen}(u_2)),\ (u_1, u_2) \in \mathbb{R}^2.$$

*Excluindo o toro de Clifford e a menos de uma isometria de $\mathbb{S}^3$, uma superfície parametrizada $\widetilde{X}_c$, onde $c \neq 0$, é uma superfície mínima localmente associada à $X$ por uma Transformação de Ribaucour se, e somente se, $c > 1$ e $\widetilde{X}_c$ é dado por*

$$\begin{aligned}\widetilde{X}_c = \left(1 - \frac{f-g}{c(f+g)}\right)X - \frac{2}{c(f+g)}(f'X_{u_1} - g'X_{u_2})\\ +\frac{1}{\sqrt{2}c}(-\cos(u_1), -\operatorname{sen}(u_1), \cos(u_2), \operatorname{sen}(u_2)),\end{aligned}$$

*onde*

$$f = \delta\sqrt{\frac{c+1}{c-1}}\cosh(\sqrt{c-1}u_1), \qquad g = \operatorname{sen}(\sqrt{c+1}u_2),$$

$\delta = \pm 1,\ (u_1, u_2) \in \mathbb{R}^2$. *Cada superfície da família* $\widetilde{X}_c$ *é uma superfície mínima completa em* $\mathbb{S}^3$.

## 3.3 Aplicações da Transformações de Ribaucour no Espaço Hiperbólico

Nesta seção, aplicando a teoria da Seção 2 do Capítulo 2, construiremos uma família de superfícies completas em $\mathbb{H}^3$, com curvatura média constante $H = 1$ (cmc-1). As superfícies encontradas são localmente associada à prima da superfície de Enneper obtida na última seção do Capítulo 1.

**Teorema 3.7.** *Considere $M$ a prima da superfície de Enneper em $\mathbb{H}^3$ parametrizada por*

$$X(u_1,u_2) = \frac{\sqrt{2}}{2}\bigg(\frac{|z|^2+6}{4}\cosh(u_1) - u_1\,\mathrm{senh}(u_1), \frac{|z|^2+6}{4}\,\mathrm{senh}(u_1) \tag{3.66}$$
$$-u_1\cosh(u_1), \frac{2-|z|^2}{4}\,\mathrm{sen}(u_2) - u_2\cos(u_2), \frac{|z|^2-2}{4}\cos(u_2) - u_2\,\mathrm{sen}(u_2)\bigg),$$

*onde $z = (u_1,u_2) \in \mathbb{R}^2$. Uma superfície parametrizada $\widetilde{X}_c$ com curvatura média constante 1 em $\mathbb{H}^3$ está localmente associada a $X$ por uma transformação de Ribaucour como no Corolário 2.17 se, e somente se, excluindo a superfície $M$,*

$$\widetilde{X}_c = \left(1-\frac{1}{c}\right)X + \frac{1}{c(W-\Omega)}\left(WY - \sum_{i=1}^{2}\Omega_i e_i\right), \tag{3.67}$$

*onde $e_i = \dfrac{X_{u_i}}{|X_{u_i}|}$ e $c \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$,*

$$\Omega = -\frac{\sqrt{2}}{4}\cdot\frac{1}{c-1}\big(R(u_1) - u_1R'(u_1) - G(u_2) + u_2G'(u_2)\big) \tag{3.68}$$
$$+\frac{\sqrt{2}}{16}\phi\big(R(u_1)+G(u_2)\big),$$

$$\Omega_1 = \frac{u_1\big(G(u_2)-R(u_1)\big)}{\phi} + \frac{R'(u_1)}{2}, \tag{3.69}$$

$$\Omega_2 = \frac{u_2\big(R(u_1)-G(u_2)\big)}{\phi} + \frac{G'(u_2)}{2}, \tag{3.70}$$

$$W = \Omega + \frac{\sqrt{2}\big(G(u_2)-R(u_1)\big)}{\phi}, \tag{3.71}$$

$$Y = \frac{2\sqrt{2}}{|z|^2+2}(\cosh(u_1), \operatorname{senh}(u_1), \operatorname{sen}(u_2), -\cos(u_2)), \quad (3.72)$$

$$\phi = |z|^2 + 2. \quad (3.73)$$

$$R(u_1) = \operatorname{sen}(\sqrt{c-1}u_1 + A_1), \qquad G(u_2) = \delta \cosh(\sqrt{c-1}u_2 + A_2), \quad (3.74)$$

*quando* $c > 1$,

$$R(u_1) = \delta \cosh(\sqrt{1-c}u_2 + B_2), \qquad G(u_2) = \operatorname{sen}(\sqrt{1-c}u_2 + B_2), \quad (3.75)$$

*quando* $c < 1$, $c \neq 0$, *onde* $\delta = \pm 1$ *e* $A_1, A_2, B_1$ *e* $B_2$ *são constantes,* $\Omega, \Omega_1, \Omega_2$ *e* $W$ *satisfazem a condição inicial*

$$\Omega_1^2 + \Omega_2^2 + W^2 - 2c\Omega W + (2c-1)\Omega^2 = 0. \quad (3.76)$$

*Além disso,* $\widetilde{X}_c$ *é uma superfície regular definida sobre*

$$\widetilde{U} = \{(u_1, u_2) \in \mathbb{R}^2 | [\Omega(\Omega - W)](u_1, u_2) \neq 0\}. \quad (3.77)$$

*Demonstração.* Segue de (1.20) que o campo de vetor unitário $N$ de $M$ é dado por

$$N = -X + Y, \quad (3.78)$$

onde $X$ e $Y$ são dados por (3.67) e (3.72), respectivamente e a primeira forma fundamental de $M$ é dada por

$$ds^2 = < dX, dX > = \frac{\phi^2}{32}(du_1^2 + du_2^2).$$

Agora calcularemos a segunda forma fundamental, que é obtida a partir de

$$\begin{aligned} II &= - < dX, dN > = < dX, dX > - < dX, dY > \\ &= \frac{\phi^2}{32}(du_1^2 + du_2^2) - < dX, dY > . \end{aligned}$$

Bastando calcular $< dX, dY >$, logo

$$< dX, dY > = < X_{u_1}, Y_{u_1} > du_1^2 + (< X_{u_2}, Y_{u_1} > + < X_{u_1}, Y_{u_2} >) du_1 du_2 + < X_{u_2}, Y_{u_2} > du_2^2,$$

onde

$$
\begin{aligned}
X_{u_1} &= \frac{\sqrt{2}}{2}\bigg( -\frac{u_1}{2}\cosh(u_1) + \Big(\frac{|z|^2+6}{4} - 1\Big)\operatorname{senh}(u_1), -\frac{u_1}{2}\operatorname{senh}(u_1) \\
&+ \Big(\frac{|z|^2+6}{4} - 1\Big)\cosh(u_1), -\frac{u_1}{2}\operatorname{sen}(u_2), \frac{u_1}{2}\cos(u_2)\bigg), \\
X_{u_2} &= \frac{\sqrt{2}}{2}\bigg(\frac{u_2}{2}\cosh(u_1), \frac{u_2}{2}\operatorname{senh}(u_1), \frac{u_2}{2}\operatorname{sen}(u_2) + \Big(\frac{2-|z|^2}{4} - 1\Big)\cos(u_2), \\
&- \frac{u_2}{2}\cos(u_2) + \Big(\frac{2-|z|^2}{4} - 1\Big)\operatorname{sen}(u_2)\bigg), \\
Y_{u_1} &= \bigg( -\frac{2u_1}{\phi^2}\cosh(u_1) + \frac{2\sqrt{2}}{\phi}\operatorname{senh}(u_1), -\frac{2u_1}{\phi^2}\operatorname{senh}(u_1) + \frac{2\sqrt{2}}{\phi}\cosh(u_1), \\
&- \frac{2u_1}{\phi^2}\operatorname{sen}(u_2), \frac{2u_1}{\phi^2}\cos(u_2)\bigg),
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
Y_{u_2} = &\bigg( -\frac{2u_1}{\phi^2}\cosh(u_1), -\frac{2u_2}{\phi^2}\operatorname{senh}(u_1), -\frac{2u_2}{\phi^2}\operatorname{sen}(u_2) + \frac{2\sqrt{2}}{\phi}\cos(u_2), \frac{2u_2}{\phi^2}\cos(u_2) \\
&+ \frac{2\sqrt{2}}{\phi}\operatorname{sen}(u_2)\bigg).
\end{aligned}
$$

Logo, temos que

$$
\begin{aligned}
< X_{u_1}, Y_{u_1} > &= \frac{\sqrt{2}}{2}\bigg( -\frac{2\sqrt{2}}{\phi} + \frac{\sqrt{2}|z|^2}{2\phi} + \frac{6\sqrt{2}}{2\phi}\bigg) \\
&= \bigg( -\frac{2}{\phi} + \frac{|z|^2}{2\phi} + \frac{3}{\phi}\bigg) \\
&= \bigg(\frac{2+|z|^2}{2\phi}\bigg) = \frac{1}{2}.
\end{aligned}
$$

Analogamente $< X_{u_2}, Y_{u_2} >= -\frac{1}{2}$. Um cálculo fácil mostra que

$$
< X_{u_2}, Y_{u_1} > + < X_{u_1}, Y_{u_2} >= 0.
$$

Portanto, temos $- < dX, dY >= -\frac{1}{2}du_1^2 + \frac{1}{2}du_2^2$. Logo

$$
\begin{aligned}
II &= \frac{\phi^2}{32}(du_1^2 + du_2^2) - < dX, dY > \\
&= \bigg( -\frac{1}{2} + \frac{\phi^2}{32}\bigg)du_1^2 + \bigg(\frac{1}{2} + \frac{\phi^2}{32}\bigg)du_2^2,
\end{aligned}
$$

onde $\phi$ é dado por (3.73). As curvas coordenadas de $M$ são linhas de curvaturas. Portanto,

$$e_i = \sqrt{\frac{32}{\phi^2}} X_{u_i} = \frac{4\sqrt{2}X_{u_i}}{\phi},$$

onde $i = 1, 2$. Logo $\{e_1 = \dfrac{4\sqrt{2}X_{u_1}}{\phi},\ e_2 = \dfrac{4\sqrt{2}X_{u_2}}{\phi}\}$ é uma base ortonormal de direções principais. $\{\omega_1 = \dfrac{\phi}{4\sqrt{2}}du_1,\ \omega_2 = \dfrac{\phi}{4\sqrt{2}}du_2\}$ é a base dual de $\{e_1, e_2\}$. As formas de conexão de $M$ são dadas por (1.8).

Logo, temos que

$$\begin{aligned}
\omega_{12} &= \frac{64}{2\phi^2}\Big( -\frac{\sqrt{2}}{8}2u_2\frac{\phi}{4\sqrt{2}}du_1 + \frac{\sqrt{2}}{8}2u_1\frac{\phi}{4\sqrt{2}}du_2\Big) \\
&= \frac{2}{\phi}(-u_2du_1 + u_1du_2).
\end{aligned}$$

Considere $\lambda^1, \lambda^2$ as curvaturas principais de $M$, então

$$-\lambda^1 = 1 - \frac{16}{\phi^2}, \qquad -\lambda^2 = 1 + \frac{16}{\phi^2}. \tag{3.79}$$

Ou seja, $M$ tem curvatura média constante igual a 1.

Para encontrar superfícies com curvatura média constantes 1 localmente associada a $M$ por uma transformação de Ribaucour com respeito às direções principais, precisamos resolver o seguinte sistema obtido a partir de (2.33), (2.34) e (2.35):

$$\frac{\partial \Omega_1}{\partial u_2} = \Omega_2\frac{\phi_{u_1}}{\phi}, \tag{3.80}$$

$$\frac{\partial \Omega_2}{\partial u_1} = \Omega_1\frac{\phi_{u_2}}{\phi}, \tag{3.81}$$

$$\frac{\partial \Omega}{\partial u_i} = \frac{\sqrt{2}\phi\Omega_i}{8}, \tag{3.82}$$

$$\frac{\partial W}{\partial u_i} = \frac{\sqrt{2}\lambda^i\phi\Omega_i}{8}, \tag{3.83}$$

$$\frac{\partial \Omega_i}{\partial u_i} = -\Omega_j\frac{\phi_{u_j}}{\phi} - \frac{\phi}{4\sqrt{2}}[(2c-1)\Omega - cW + (c\Omega - W)\lambda^i],\ i \neq j, \tag{3.84}$$

com a condição incial satisfazendo (3.76) onde, pelo Corolário 2.17 a constante $c$ não se anula.

Considerando a derivada de (3.80) com respeito a $u_1$ e usando (3.81), temos

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2\Omega_1}{\partial u_2\partial u_1} &= \frac{\partial\Omega_2}{\partial u_1}\frac{\phi_{u_1}}{\phi} + \Omega_2\frac{\partial}{\partial u_1}\left(\frac{\phi_{u_1}}{\phi}\right)\\
&= \Omega_1\frac{\phi_{u_2}}{\phi}\frac{\phi_{u_1}}{\phi} + \frac{\partial\Omega_1}{\partial u_2}\frac{\phi}{\phi_{u_1}}\left(\frac{2\phi-\phi_{u_1}2u_1}{\phi^2}\right)\\
&= \Omega_1\frac{\phi_{u_2}\phi_{u_1}}{\phi^2} + \frac{\partial\Omega_1}{\partial u_2}\frac{1}{u_1} - \frac{\partial\Omega_1}{\partial u_2}\frac{\phi_{u_1}}{\phi}\\
&= \Omega_1\frac{\phi_{u_2}\phi_{u_1}}{\phi^2} + \left(\frac{1}{u_1} - \frac{\phi_{u_1}}{\phi}\right)\frac{\partial\Omega_1}{\partial u_2}.
\end{aligned}$$

Portanto, obtemos

$$\frac{\partial^2\Omega_1}{\partial u_2\partial u_1} + \left(\frac{\phi_{u_1}}{\phi} - \frac{1}{u_1}\right)\frac{\partial\Omega_1}{\partial u_2} - \Omega_1\frac{\phi_{u_2}\phi_{u_1}}{\phi^2} = 0. \tag{3.85}$$

A equação (3.85) pode ser resolvida explicitamente. De fato, vamos reduzir a equação acima por

$$\frac{\partial^2\Omega_1}{\partial u_2\partial u_1} + A\frac{\partial\Omega_1}{\partial u_2} - B\Omega_1 = 0,$$

onde

$$A = \left(\frac{\phi_{u_1}}{\phi} - \frac{1}{u_1}\right), \qquad B = \frac{\phi_{u_2}\phi_{u_1}}{\phi^2}.$$

Temos que $\dfrac{\partial A}{\partial u_2} = B$. Logo

$$\frac{\partial^2\Omega_1}{\partial u_2\partial u_1} + A\frac{\partial\Omega_1}{\partial u_2} - \frac{\partial A}{\partial u_2}\Omega_1 = 0,$$

que implica que

$$\frac{\partial}{\partial u_2}\left(\frac{\partial\Omega_1}{\partial u_1}\right) + \frac{\partial}{\partial u_2}(A\Omega_1) = \frac{\partial}{\partial u_2}\left(\frac{\partial\Omega_1}{\partial u_1} + A\Omega_1\right) = 0.$$

Portanto temos $\dfrac{\partial\Omega_1}{\partial u_1} + A\Omega_1 = f(u_1)$. Se $\Omega_1$ é do tipo $\Omega_1 = h\exp\left(-\int Adu_1\right)$ temos que

$$\frac{\partial\Omega_1}{\partial u_1} = h_{u_1}\exp\left(-\int Adu_1\right) - Ah\exp\left(-\int Adu_1\right) = h_{u_1}\exp\left(-\int Adu_1\right) - A\Omega_1,$$

isto é, $\dfrac{\partial\Omega_1}{\partial u_1} + A\Omega_1 = h_{u_1}\exp\Big(-\displaystyle\int A du_1\Big)$, ou seja $h_{u_1}\exp\Big(-\displaystyle\int A du_1\Big) = f(u_1)$. Mas $A = \left(\dfrac{\phi_{u_1}}{\phi} - \dfrac{1}{u_1}\right)$ e integrando $A$ obtemos

$$\begin{aligned}\int A du_1 &= \int \frac{\phi_{u_1}}{\phi}du_1 - \int \frac{1}{u_1}du_1\\ &= \ln(\phi) - \ln(u_1) - \ln(g(u_2))\\ &= \ln\left(\frac{\phi}{u_1}\right) + \ln(g(u_2)).\end{aligned}$$

Portanto, temos

$$h_{u_1}\exp\Big(-\int A du_1\Big) = h_{u_1}\exp\Big(-\ln\left(\frac{\phi}{u_1}\right) - \ln(g(u_2))\Big) = h_{u_1}\Big(\frac{u_1}{\phi}\cdot\frac{1}{g(u_2)}\Big).$$

Logo, conseguimos que $h_{u_1}\Big(\dfrac{u_1}{\phi}\cdot\dfrac{1}{g(u_2)}\Big) = f(u_1)$ ou seja $h_{u_1} = \dfrac{\phi}{u_1}g(u_2)f(u_1)$. Integrando a última equação obtemos

$$h = g(u_2)\int \phi F(u_1)du_1,$$

onde $F(u_1) = \dfrac{f(u_1)}{u_1}$. E como $\Omega_1 = h\exp\Big(-\displaystyle\int A du_1\Big)$ conseguímos

$$\begin{aligned}\Omega_1 &= \frac{u_1}{\phi}\cdot\frac{1}{g(u_2)}\cdot g(u_2)\int \phi F(u_1)du_1\\ &= \frac{u_1}{\phi}\int \phi F(u_1)du_1.\end{aligned}$$

Portanto, a solução geral da (3.85) é dada por

$$\Omega_1 = \frac{u_1}{\phi}\Big(G(u_2) + \int \phi F(u_1)du_1\Big), \tag{3.86}$$

onde $G(u_2) = \dfrac{1}{g(u_2)}$ e temos que $F(u_1)$ (respectivamente $G(u_2)$) é uma função árbitraria de $u_1$ (respectivamente $u_2$).

Analogamente, temos que

$$\Omega_2 = \frac{u_2}{\phi}\Big(R(u_1) + \int \phi Q(u_2)du_2\Big), \tag{3.87}$$

onde $R(u_1)$ (respectivamente $Q(u_2)$) é uma função árbitraria de $u_1$ (respectivamente $u_2$).

A partir de (3.82) conseguímos

$$\frac{\partial(\phi\Omega_1)}{\partial u_2} = \frac{\partial(\phi\Omega_2)}{\partial u_1}. \tag{3.88}$$

Substituindo (3.86) e (3.87) em (3.88) temos

$$u_1\bigg(G'(u_2) + 2u_2 \int F(u_1)du_1\bigg) = u_2\bigg(R'(u_1) + 2u_1 \int Q(u_2)du_2\bigg). \tag{3.89}$$

Assim,

$$\frac{G'(u_2)}{u_2} - 2\int Q(u_2)du_2 = \frac{R'(u_1)}{u_1} - 2\int F(u_1)du_1 \equiv d, \tag{3.90}$$

onde $d$ é uma constante. Sem perda de generalidade, podemos supor que $d = 0$.

Portanto, temos

$$\begin{aligned} \frac{G'(u_2)}{u_2} &= 2\int Q(u_2)du_2 \\ G(u_2) &= 2\int u_2\bigg(\int Q(u_2)du_2\bigg)du_2. \end{aligned} \tag{3.91}$$

Analogamente

$$R(u_1) = 2\int u_1\bigg(\int F(u_1)du_1\bigg)du_1. \tag{3.92}$$

Usando integração por partes as equações (3.91) e (3.92) resultam em

$$\begin{aligned} \int \phi Q(u_2)du_2 &= \frac{\phi G'(u_2)}{2u_2} - G(u_2), \\ \int \phi F(u_1)du_1 &= \frac{\phi R'(u_1)}{2u_1} - R(u_1). \end{aligned} \tag{3.93}$$

Segue de (3.86) e (3.87) que

$$\phi\Omega_1 = u_1\big(G(u_2) - R(u_1)\big) + \frac{\phi R'(u_1)}{2}, \tag{3.94}$$

$$\phi\Omega_2 = u_2\big(R(u_1) - G(u_2)\big) + \frac{\phi G'(u_2)}{2}. \tag{3.95}$$

Integrando os dois lados da igualdade a equação (3.94) temos

$$\int \phi\Omega_1 du_1 = \bigg(\frac{u_1^2}{2} + m\bigg)G(u_2) + \frac{\phi}{2}R(u_1) - 2\int u_1 R(u_1)du_1,$$

onde $m$ é uma constante. Derivando a equação anterior em relação a $u_2$, obtemos:

$$\frac{\partial}{\partial u_2}\int \phi\Omega_1 du_1 = \Big(\frac{u_1^2}{2}+m\Big)G'(u_2) + u_2R(u_1),$$

subtraindo a equação (3.95) com a equação anterior, conseguímos

$$\phi\Omega_2 - \frac{\partial}{\partial u_2}\int \phi\Omega_1 du_1 = \Big(1+\frac{u_2^2}{2}-m\Big)G'(u_2) - u_2G(u_2). \tag{3.96}$$

Assim, deduzimos a partir de (3.82) que

$$\begin{aligned}\Omega &= \frac{\sqrt{2}}{8}\int \phi\Omega_1 du_1 + \frac{\sqrt{2}}{8}\int\Big(\phi\Omega_2 - \frac{\partial}{\partial u_2}\int\phi\Omega_1 du_1\Big)du_2\\ &= \frac{\sqrt{2}}{16}\phi\big(R(u_1)+G(u_2)\big) - \frac{\sqrt{2}}{4}\Big(\int u_1R(u_1)du_1 + \int u_2G(u_2)du_2\Big). \end{aligned}\tag{3.97}$$

De fato, temos que $\dfrac{\partial\Omega}{\partial u_1} = \dfrac{\sqrt{2}\phi\Omega_1}{8}$ que implica que $\Omega = \dfrac{\sqrt{2}}{8}\displaystyle\int \phi\Omega_1 du_1 + f(u_2)$ e derivando $\Omega$ em relação a $u_2$ obtemos

$$\frac{\partial\Omega}{\partial u_2} = \frac{\partial\Omega}{\partial u_2}\Big(\frac{\sqrt{2}}{8}\int\phi\Omega_1 du_1\Big) + \frac{\partial}{\partial u_2}f(u_2),$$

que é equivalente a

$$\frac{\partial}{\partial u_2}f(u_2) = \frac{\sqrt{2}}{8}\Big(\phi\Omega_2 - \frac{\partial}{\partial u_2}\int\phi\Omega_1 du_1\Big).$$

Logo

$$f(u_2) = \frac{\sqrt{2}}{8}\int\Big(\phi\Omega_2 - \frac{\partial}{\partial u_2}\int\phi\Omega_1 du_1\Big)du_2,$$

Portanto,

$$\Omega = \frac{\sqrt{2}}{8}\int\phi\Omega_1 du_1 + \frac{\sqrt{2}}{8}\int\Big(\phi\Omega_2 - \frac{\partial}{\partial u_2}\int\phi\Omega_1 du_1\Big)du_2.$$

Agora, temos que

$$\begin{aligned}\Omega = {}& \frac{\sqrt{2}}{8}\Big(\Big(\frac{u_1^2}{2}+m\Big)G(u_2) + \frac{\phi}{2}R(u_1) - 2\int u_1R(u_1)du_1\Big) + \frac{\sqrt{2}}{8}\Big[\Big(\frac{u_2^2}{2}+m\Big)R(u_1)\\ &+ \frac{\phi}{2}G(u_2) - 2\int u_2G(u_2)du_2 - \Big(\frac{u_1^2}{2}+m\Big)G(u_2) - \Big(\frac{u_2^2}{2}+m\Big)R(u_1)\Big]\\ ={}& \frac{\sqrt{2}}{16}\phi\big(R(u_1)+G(u_2)\big) - \frac{\sqrt{2}}{4}\Big(\int u_1R(u_1)du_1 + \int u_2G(u_2)du_2\Big).\end{aligned}$$

Vamos considerar a notação $A = -\lambda^1\Omega_1\phi$, $B = -\lambda^2\Omega_2\phi$, então

$$\begin{aligned}\int Adu_1 &= -\int \lambda^1\Omega_1\phi = \int \Big(1 - \frac{16}{\phi^2}\Big)\Omega_1\phi du_1\\ &= \Big(\frac{u_1^2}{2} + m\Big)G(u_2) + \frac{8\big(G(u_2) - R(u_1)\big)}{\phi}\\ &+ \frac{\phi R(u_1)}{2} - 2\int u_1 R(u_1)du_1,\end{aligned}$$

e obtemos que

$$\frac{\partial}{\partial u_2}\int Adu_1 = \Big(\frac{u_1^2}{2} + m\Big)G'(u_2) + u_2R + \frac{8\big(\phi G' - 2u_2(G - R)\big)}{\phi^2},$$

concluindo que

$$B - \frac{\partial}{\partial u_2}\int Adu_1 = (1 + \frac{u_2^2}{2} - m)G'(u_2) - u_2G(u_2). \tag{3.98}$$

De fato,

$$\begin{aligned}B - \frac{\partial}{\partial u_2}\int Adu_1 &= \Big(1 + \frac{16}{\phi^2}\Big)\Omega_2\phi - \frac{\partial}{\partial u_2}\int Adu_1\\ &= \Big(1 + \frac{16}{\phi^2}\Big)\Big(u_2\big(R(u_1) - G(u_2)\big) + \frac{\phi G'(u_2)}{2}\Big) - \frac{\partial}{\partial u_2}\int Adu_1\\ &= \Big(\frac{\phi - u_1^2}{2} - m\Big)G'(u_2) - u_2G(u_2)\\ &= (1 + \frac{u_2^2}{2} - m)G'(u_2) - u_2G(u_2).\end{aligned}$$

Deste modo, obtemos de (3.83) que $\dfrac{\partial W}{\partial u_1} = -\dfrac{\sqrt{2}\lambda^1\phi\Omega_1}{8} = \dfrac{\sqrt{2}}{8}A$. Logo $W = \dfrac{\sqrt{2}}{8}\displaystyle\int Adu_1 +$ $f(u_2)$, portanto

$$\begin{aligned}\frac{\partial W}{\partial u_2} &= \frac{\sqrt{2}}{8}\frac{\partial}{\partial u_2}\int Adu_1 + \frac{\partial}{\partial u}f(u_2);\\ \frac{\partial}{\partial u}f(u_2) &= \frac{\sqrt{2}}{8}\Big(B - \frac{\partial}{\partial u_2}\int Adu_1\Big).\end{aligned}$$

que dará

$$f(u_2) = \frac{\sqrt{2}}{8}\int \Big(B - \frac{\partial}{\partial u_2}\int Adu_1\Big)du_2.$$

Logo,

$$W = \frac{\sqrt{2}}{8}\Big[\int Adu_1 + \int\Big(B - \frac{\partial}{\partial u_2}\int Adu_1\Big)du_2\Big].$$

Agora calculando $W$ temos que

$$\begin{aligned}
W &= \frac{\sqrt{2}}{8}\Big\{\Big(\frac{u_1^2}{2}+m\Big)G(u_2) + \frac{8\big(G(u_2)-R(u_1)\big)}{\phi} + \frac{\phi R(u_1)}{2}\\
&- 2\int u_1R(u_1)du_1 + \int\Big[(1+\frac{u_2^2}{2}-m)G'(u_2) - u_2G(u_2)\Big]du_2\Big\}\\
&= \frac{\sqrt{2}}{8}\Big\{\Big(\frac{u_1^2}{2}+m\Big)G(u_2) + \frac{8\big(G(u_2)-R(u_1)\big)}{\phi} + \frac{\phi R(u_1)}{2}\\
&- 2\int u_1R(u_1)du_1 + G(u_2) - mG(u_2) + \frac{u_2^2}{2}G(u_2) - 2\int u_2G(u_2)du_2\Big\}\\
&= \frac{\sqrt{2}\big(G(u_2)-R(u_1)\big)}{\phi} + \frac{\sqrt{2}}{8}\Big\{\frac{\phi}{2}G(u_2) + \frac{\phi R(u_1)}{2} - 2\int u_1R(u_1)du_1 - 2\int u_2G(u_2)du_2\Big\}\\
&= \frac{\sqrt{2}\big(G(u_2)-R(u_1)\big)}{\phi} + \Omega.
\end{aligned}$$

Verifica-se que as funções $\Omega_1, \Omega_2, \Omega$ e $W$ dadas por (3.94), (3.95), (3.97) e (3.71) satisfazem o sistema de equações dados por (3.80)-(3.83). Vamos determinar $R$ e $G$ usando a condição (3.76).

A partir de (3.84) temos

$$\frac{1}{\phi}\frac{\partial\Omega_1}{\partial u_1} + \Omega_2\frac{2u_2}{\phi^2} - \frac{\sqrt{2}}{8}(\lambda^1+c)W + \frac{\sqrt{2}}{8}(2c-1+c\lambda^1)\Omega = 0. \tag{3.99}$$

$$\frac{1}{\phi}\frac{\partial\Omega_2}{\partial u_2} + \Omega_1\frac{2u_1}{\phi^2} - \frac{\sqrt{2}}{8}(\lambda^2+c)W + \frac{\sqrt{2}}{8}(2c-1+c\lambda^2)\Omega = 0. \tag{3.100}$$

Tomando a derivada de (3.94) com respeito a $u_1$, conseguímos

$$\phi\frac{\partial\Omega_1}{\partial u_1} + 2u_1\Omega_1 = \big(G(u_2)-R(u_1)\big) + \frac{\phi R''(u_1)}{2}. \tag{3.101}$$

De fato, por (3.94)

$$\frac{\partial\Omega_1}{\partial u_1} = \frac{\big((G(u_2)-R(u_1)) - u_1R'(u_1)\big)\phi - 2u_1\big(u_1(G(u_2)-R(u_1))\big)}{\phi^2} + \frac{R''(u_1)}{2}.$$

que implica que

$$\begin{aligned}
\phi\frac{\partial\Omega_1}{\partial u_1} &= (G(u_2)-R(u_1)) - u_1R'(u_1) - \frac{2u_1^2(G(u_2)-R(u_1))}{\phi} + \frac{\phi R''(u_1)}{2}\\
&= (G(u_2)-R(u_1)) - 2u_1\Omega_1 + \frac{\phi R''(u_1)}{2}.
\end{aligned}$$

De modo análogo, só que derivando (3.95) com respeito a $u_2$, obtemos

$$\phi\frac{\partial\Omega_2}{\partial u_2}+2u_2\Omega_2=\big(R(u_1)-G(u_2)\big)+\frac{\phi G''(u_2)}{2}. \tag{3.102}$$

Somando as equações (3.99) e (3.100) temos que

$$\frac{1}{\phi}\frac{\partial\Omega_1}{\partial u_1}+\frac{1}{\phi}\frac{\partial\Omega_2}{\partial u_2}+\Omega_1\frac{2u_1}{\phi^2}+\Omega_2\frac{2u_2}{\phi^2}=\frac{\sqrt{2}}{4}(c-1)(W-\Omega).$$

Dividindo as equações (3.101) e (3.102) por $\phi^2$ e depois somando ambas obtemos que

$$\frac{1}{\phi}\frac{\partial\Omega_1}{\partial u_1}+\frac{1}{\phi}\frac{\partial\Omega_2}{\partial u_2}+\Omega_1\frac{2u_1}{\phi^2}+\Omega_2\frac{2u_2}{\phi^2}=\frac{R''}{2\phi}+\frac{G''}{2\phi}.$$

Portanto, a partir das duas equações obtidas anteriormente concluímos que

$$\frac{R''+G''}{\phi}=\frac{\sqrt{2}}{2}(c-1)(W-\Omega). \tag{3.103}$$

Substituindo (3.71) em (3.103), encontramos

$$\begin{aligned}\frac{R''+G''}{\phi} &= \frac{\sqrt{2}}{2}(c-1)(\Omega+\frac{\sqrt{2}\big(G(u_2)-R(u_1)\big)}{\phi}-\Omega)\\ &= (c-1)\frac{\big(G(u_2)-R(u_1)\big)}{\phi},\end{aligned}$$

que nos dá

$$R''+(c-1)R=-G''+(c-1)G=\nu, \tag{3.104}$$

onde $\nu$ é uma constante.

Observe que $R=\widetilde{R}+\dfrac{\nu}{(c-1)}$, $G=\widetilde{G}+\dfrac{\nu}{(c-1)}$, onde $\widetilde{R}$ e $\widetilde{G}$ são soluções das equações

$$\widetilde{R}''+(c-1)\widetilde{R}=0, \qquad \widetilde{G}''-(c-1)\widetilde{G}=0.$$

De fato, pois

$$\widetilde{R}''+(c-1)\widetilde{R}=R''+(c-1)R-\nu=0.$$

A partir das expressões de $\widetilde{X}_c, W, \Omega_1$ e $\Omega_2$, sem perda de generalidade, podemos supor que $\nu=0$. Assim, temos a partir de (3.104) que

$$R(u_1)=-\frac{R''(u_1)}{c-1}, \qquad G(u_2)=\frac{G''(u_2)}{c-1},$$

que implica em

$$\int u_1 R(u_1)du_1 + \int u_2 G(u_2)du_2 = \frac{1}{c-1}(R - u_1R' - G + u_2G') + m, \tag{3.105}$$

onde $m$ é uma constante. De fato, como

$$u_1R(u_1) = -\frac{u_1R''(u_1)}{c-1} \qquad e \qquad \int u_1R(u_1)du_1 = -\frac{1}{c-1}\int u_1R''(u_1)du_1.$$

Temos

$$\begin{aligned} \int u_1R''(u_1)du_1 &= u_1R'(u_1) - \int R'(u_1)du_1 \\ &= u_1R'(u_1) - R(u_1). \end{aligned}$$

Logo,

$$\int u_1R(u_1)du_1 = \frac{1}{c-1}(R(u_1) - u_1R'(u_1)) + c_1.$$

Analogamente temos

$$\int u_2G(u_2)du_2 = \frac{1}{c-1}(-G(u_2) + u_2G'(u_2)) + c_2.$$

Adicionando as duas integrais obtidas acima, obtemos a expressão (3.105). Assim, obtemos a partir de (3.97) e (3.105) que

$$\Omega = \frac{\sqrt{2}}{16}\phi\big(R(u_1) + G(u_2)\big) - \frac{\sqrt{2}}{4}\cdot\frac{1}{c-1}(R - u_1R' - G + u_2G') - \frac{\sqrt{2}}{4}m. \tag{3.106}$$

Substituindo (3.69), (3.70), (3.71) e (3.106) na condição algébrica (3.76), temos

$$\begin{aligned} 0 &= \Omega_1^2 + \Omega_2^2 + W^2 - 2c\Omega W + (2c-1)\Omega^2 \\ &= \frac{1}{\phi}(G-R)^2 + \frac{(R'^2 + G'^2)}{4} + \frac{(G-R)}{\phi}(u_1R' - u_2G') + \frac{2\sqrt{2}}{\phi}\Omega(G-R)(1-c) \\ &= \frac{1}{\phi}(G-R)^2 + \frac{(R'^2 + G'^2)}{4} + \frac{(G-R)}{\phi}(u_1R' - u_2G') + \frac{(G^2-R^2)(1-c)}{4} \\ &- \frac{(R-G)(R-G)}{\phi} - \frac{(R-G)}{\phi}(-u_1R' + u_2G') - (1-c)\frac{(G-R)}{\phi}m \\ &= \frac{G'^2 + R'^2 + (G^2-R^2)(1-c)}{4} - \frac{(G-R)m(1-c)}{\phi}. \end{aligned}$$

Portanto,

$$\frac{G'^2 + R'^2 + (G^2-R^2)(1-c)}{4} - (1-c)m\frac{(G-R)}{\phi} = 0. \tag{3.107}$$

Vamos considerar o caso $c > 1$. Neste caso, as funções $R$ e $G$ na superfície $\widetilde{X}_c$, descrita por (3.67), são dadas por

$$\begin{aligned} R(u_1) &= a_1 \cos(\sqrt{c-1}u_1) + b_1 \operatorname{sen}(\sqrt{c-1}u_1), \\ G(u_2) &= a_2 \cosh(\sqrt{c-1}u_2) + b_2 \operatorname{senh}(\sqrt{c-1}u_2), \end{aligned} \tag{3.108}$$

onde $a_1, a_2, b_1$ e $b_2$ são constantes.

Substituindo (3.108) em (3.107) e simplificando, obtemos que

$$\frac{(c-1)(a_1^2+b_1^2-a_2^2+b_2^2)}{4} - \frac{(1-c)m(G-R)}{\phi} = 0. \tag{3.109}$$

De fato, bastar calcular $G'^2 + R'^2 + (G^2 - R^2)(1-c)$. Logo

$$\begin{aligned} &(c-1)\Big[\big(-a_1 \operatorname{sen}(\sqrt{c-1}u_1) + b_1 \cos(\sqrt{c-1}u_1)\big)^2 + \big(a_2 \operatorname{senh}(\sqrt{c-1}u_2) + b_2 \cosh(\sqrt{c-1}u_2)\big)^2\Big] \\ &\quad - (c-1)\Big[\big(a_2 \cosh(\sqrt{c-1}u_2) + b_2 \operatorname{senh}(\sqrt{c-1}u_2)\big)^2 - \big(a_1 \cos(\sqrt{c-1}u_1) + b_1 \operatorname{sen}(\sqrt{c-1}u_1)\big)^2\Big] \\ &\quad = (c-1)(a_1^2+b_1^2-a_2^2+b_2^2). \end{aligned}$$

Portanto, temos a equação (3.109), que resulta em

$$a_1^2 + b_1^2 = a_2^2 - b_2^2 \ e \ m = 0. \tag{3.110}$$

Assim, $\Omega$ é dado por (3.68).

Segue da Observação 2.15, que a métrica de $\widetilde{X}_c$ é dado por

$$\begin{aligned} d\widetilde{s}_c^2 &= \widetilde{\omega}_1^2 + \widetilde{\omega}_2^2 = \frac{1}{P^2}\big\{\big(\Omega^2(1+\lambda^1)\omega_1\big)^2 + \big(\Omega^2(1+\lambda^2)\omega_2\big)^2\big\} \\ &= \frac{1}{\big(\Omega(W-\Omega)\big)^2}\left\{\left(\Omega^2\left(1-1+\frac{16}{\phi^2}\right)\frac{\phi}{4\sqrt{2}}du_1\right)^2 + \left(\Omega^2\left(1-1-\frac{16}{\phi^2}\right)\frac{\phi}{4\sqrt{2}}du_2\right)^2\right\} \\ &= \frac{1}{\big(\Omega(W-\Omega)\big)^2}\left\{\left(\Omega^2\frac{2\sqrt{2}}{\phi}du_1\right)^2 + \left(-\Omega^2\frac{2\sqrt{2}}{\phi}du_2\right)^2\right\} \\ &= \frac{\Omega^2}{(W-\Omega)^2}\cdot\frac{8}{\phi^2}(du_1^2 + du_2^2). \end{aligned} \tag{3.111}$$

Se $(a_1, b_1) = (0, 0)$, então $R$ e $G$ são dados por

$$R(u_1) = 0, \qquad G(u_2) = a_2\big(\cosh(\sqrt{c-1}u_2) \pm \operatorname{senh}(\sqrt{c-1}u_2)\big).$$

A partir de (3.68), sabemos que

$$\Omega = \frac{\sqrt{2}}{4}\left(\frac{\phi}{4}G - \frac{1}{c-1}(-G \pm u_2\sqrt{c-1}G)\right).$$

Agora, de (3.71) temos

$$W - \Omega = \frac{\sqrt{2}G}{\phi},$$

que implica em

$$d\widetilde{s}_c^2 = \frac{\iota_\mp^2}{32}(du_1^2 + du_2^2),\ onde\ \iota_\mp = u_1^2 + \left(u_2 \pm \frac{2}{\sqrt{c-1}}\right)^2 + 2.$$

De fato, por (3.111), basta calcularmos $\dfrac{\Omega^2}{(W-\Omega)^2}\dfrac{8}{\phi^2}$, onde $(W-\Omega)^2 = \dfrac{2G^2}{\phi^2}$ e

$$\Omega^2 = \frac{2}{16}\left(\frac{\phi}{4}G - \frac{1}{c-1}(-G \pm u_2\sqrt{c-1}G)\right)^2.$$

Portanto

$$\begin{aligned}
\frac{\Omega^2}{(W-\Omega)^2}\frac{8}{\phi^2} &= \frac{8\Omega^2}{2G^2} = \frac{1}{2}\left(\frac{\phi}{4} + \frac{1}{c-1} \pm \frac{u_2}{\sqrt{c-1}}\right)^2 \\
&= \frac{1}{32}\left(u_1^2 + u_2^2 + 2 + \frac{4}{c-1} \pm \frac{4u_2}{\sqrt{c-1}}\right)^2 \\
&= \frac{1}{32}\left(u_1^2 + \left(u_2 \pm \frac{2}{\sqrt{c-1}}\right)^2 + 2\right)^2.
\end{aligned}$$

Sabemos que as curvaturas principais de $\widetilde{X}_c$ são dadas por

$$\widetilde{\lambda}_c^i = \frac{(2\alpha\Omega W + \beta W^2) + \lambda^i(\alpha\Omega^2 - \gamma W^2)}{(2\gamma\Omega W + \beta\Omega^2)\lambda^i - (\alpha\Omega^2 - \gamma W^2)}.$$

Logo

$$\begin{aligned}
\widetilde{\lambda}_c^1 &= \frac{-2\Omega W + W^2 - \lambda^1\Omega^2}{\lambda^1\Omega^2 + \Omega^2} = -1 + \frac{(W-\Omega)^2}{\Omega^2\left(-1 + \dfrac{16}{\phi^2} + 1\right)} \\
&= -1 + \frac{(W-\Omega)^2}{\Omega^2}\cdot\frac{\phi^2}{8}\cdot\frac{1}{2} = -1 + \frac{32}{\iota_\mp^2}\cdot\frac{1}{2} = -1 + \frac{16}{\iota_\mp^2}.
\end{aligned}$$

Analogamente, temos que

$$\widetilde{\lambda}_c^2 = -1 - \frac{16}{\iota_\mp^2}.$$

Combinando as curvaturas principais $\widetilde{\lambda}_c^1$, $\widetilde{\lambda}_c^2$ com o fato de que $\widetilde{X}_c$ é parametrizado por linhas de curvaturas, implica que a segunda forma fundamental de $\widetilde{X}_c$ é dado por

$$\begin{aligned} II &= -\widetilde{\lambda}_c^1 E du_1 - \widetilde{\lambda}_c^2 G du_2 \\ &= -\Big(-1 + \frac{16}{\iota_{\mp}^2}\Big)\frac{\iota_{\mp}^2}{32}du_1^2 - \Big(-1 - \frac{16}{\iota_{\mp}^2}\Big)\frac{\iota_{\mp}^2}{32}du_2^2 \\ &= \Big(-\frac{1}{2} + \frac{\iota_{\mp}^2}{32}\Big)du_1^2 + \Big(\frac{1}{2} + \frac{\iota_{\mp}^2}{32}\Big)du_2^2. \end{aligned}$$

Visto que $X(u_1, u_2)$ e $\widetilde{X}_c\Big(u_1, u_2 \pm \dfrac{2}{\sqrt{c-1}}\Big)$, possuem a mesma primeira e segunda formas fundamentais, concluímos que $X$ e $\widetilde{X}_c$ são congruentes.

Portanto, excluindo a prima da superfície de Enneper, podemos supor que $(a_1, b_1) \neq 0$, e neste caso, temos

$$\begin{aligned} R(u_1) &= \sqrt{a_1^2 + b_1^2}\,\mathrm{sen}(\sqrt{c-1}u_1 + A_1), \\ G(u_2) &= \sqrt{a_2^2 - b_2^2}\delta\cosh(\sqrt{c-1}u_2 + A_2), \end{aligned}$$

e $\delta = 1$ ou $-1$ de modo que $\delta a_2 > 0$. A demonstração desse fato se faz analogamente como no Teorema 3.2 e 3.5.

Visto que (3.110) vale, podemos supor a partir da expressão $\widetilde{X}_c$ que

$$R(u_1) = \mathrm{sen}(\sqrt{c-1}u_1 + A_1), \qquad G(u_2) = \delta\cosh(\sqrt{c-1}u_2 + A_2).$$

O caso $c < 1$ é analogo e será omitida.

Pelo Corolário 2.16, sabemos que $1 + c^2 - 2c > 0$, isto é, $c \neq 1$. A partir de (2.38) e (3.78), concluimos que $\widetilde{X}_c$ é dado por (3.67). De fato, temos que $S = 2c\Omega(W - \Omega)$, logo

$$\begin{aligned} \widetilde{X}_c &= \Big(1 + \frac{\Omega}{c(W-\Omega)}\Big)X - \frac{1}{c(W-\Omega)}\Big(\sum_{i=1}^{2}\Omega_i e_i - W(-X+Y)\Big) \\ &= \Big(1 + \frac{\Omega}{c(W-\Omega)} - \frac{W}{c(W-\Omega)}\Big)X + \frac{1}{c(W-\Omega)}\Big(WY - \sum_{i=1}^{2}\Omega_i e_i\Big) \\ &= \Big(1 - \frac{1}{c}\Big)X + \frac{1}{c(W-\Omega)}\Big(WY - \sum_{i=1}^{2}\Omega_i e_i\Big). \end{aligned}$$

A partir de (3.67), $\widetilde{X}_c$ é bem definido sobre

$$\widetilde{U} = \{(u_1, u_2) \in \mathbb{R}^2 | (W - \Omega)(u_1, u_2) \neq 0\}. \tag{3.112}$$

A partir do Teorema 2.14, $\widetilde{X}_c$ é uma superfície regular em

$$\widetilde{U} = \{(u_1, u_2) \in U | (T^2 + 2TQH + Q(K+1))(u_1, u_2) \neq 0\}.$$

Visto que $\alpha = -H, \beta = 1, \gamma = 0$, temos $T = \alpha\Omega^2 - \gamma W^2 = -\Omega^2$ e $Q = 2\gamma\Omega W + \beta\Omega^2 = \Omega^2$. Temos que $K = -\left[\dfrac{4}{\phi}\right]^4 \neq 0$. De fato,

$$\begin{aligned} K &= \widetilde{\lambda}^1\widetilde{\lambda}^2 - \overline{k} = \left(-1 + \frac{16}{\phi^2}\right)\left(-1 - \frac{16}{\phi^2}\right) - 1 \\ &= -\frac{16^2}{\phi^4} = -\left[\frac{4}{\phi}\right]^4. \end{aligned}$$

Logo

$$\begin{aligned} \widetilde{U} &= \{(u_1, u_2) \in U | [T^2 + 2TQH + Q(K+1)](u_1, u_2) \neq 0\} \\ &= \{(u_1, u_2) \in U | [\Omega^4 - 2\Omega^4 + \Omega^4(K+1)](u_1, u_2) \neq 0\} \\ &= \{(u_1, u_2) \in U | [\Omega^4 K](u_1, u_2) \neq 0\}. \end{aligned}$$

Portanto, concluímos que

$$\widetilde{U} = \{(u_1, u_2) \in U | [\Omega K](u_1, u_2) \neq 0\}.$$

E então segue a partir de $K = -\left[\dfrac{4}{\phi}\right]^4 \neq 0$ e (3.112) que

$$\widetilde{U} = \{(u_1, u_2) \in \mathbb{R}^2 | [\Omega(W - \Omega)](u_1, u_2) \neq 0\}.$$

Isto completa a demonstração de Teorema 3.7 □

As superfícies $\widetilde{X}_c$ obtidas no Teorema 3.7 para qualquer $c \neq 1, 0$ são superfícies regulares completas definidas sobre $\mathbb{R}^2 - \{p_k, k \in \mathbb{Z}\}$, onde

$$\begin{aligned} p_k &= \frac{1}{\sqrt{c-1}}(2k\pi + \delta\frac{\pi}{2} - A_1, A_2), \textit{ quando } c > 1, \\ p_k &= \frac{1}{\sqrt{1-c}}(-B_1, 2k\pi + \delta\frac{\pi}{2} - B_2), \textit{ quando } c < 1. \end{aligned}$$

Esta demonstração será omitida e pode ser encontrada em [WT2].

# Referências Bibliográficas


[Bi] L. Bianchi. *Le transformazioni di Ribaucour dei sistemi $n^{pli}$ ortogonali e il teorema generale di permutabilitá.* Annali di Matematica (3), **27** (1918), 183-253 e (3), **28** (1919), 187-233.

[Bo] A. I. Bobenko. *All constant mean curvature tori in $\mathbb{R}^3, \mathbb{S}^3, \mathbb{H}^3$ em termos de theta functions.* Math. Ann. **290** (1991), 209-245.

[CFT1] A. V. Corro, W. Ferreira, and K. Tenenblat. *Ribaucour transformation for constant mean curvature and linear Weingarten surfaces.* Pacific Journal of Mathematics, vol. **212**(2003), 256–296.

[CFT2] A. V. Corro, W. Ferreira, and K. Tenenblat. *On Ribaucour transformation for hypersurfaces.* Mat. Contemp. **17** (1999), 209-245.

[CFT3] A. V. Corro, W. Ferreira, and K. Tenenblat. *Minimal surfaces obtained by Ribaucour transformation.* Geom. Dedicata **96** (2003), 117-150.

[CFT4] A. V. Corro, W. Ferreira, and K. Tenenblat. *Ribaucour transformation revisited.* Comm. Anal. Geom **12** (2004), 1055-1082.

[DH] J. Dorfmeister and G. Haak. *Investigation and application of the dressing action on surfaces of constant mean curvature.* Quart J Math. **51** (2000), 57-73.

[dC1] M. P. do Carmo. *Differential Geometry of Curves and Surfaces.* New Jersey: Prentice Hall, 1976.

[dC2] M. P. do Carmo. *Formas Diferenciais e Aplicações.* 8º Colóquio Brasileiro de Matemática, IMPA, 1971.

[dC3] M. P. do Carmo. *O Metódo do Referencial Móvel.* 3º Escola Latino Americana de Matemática, IMPA, 1976.

[dC4] M. P. do Carmo. *Geometria Riemanniana.* Projeto Euclides, IMPA, 3º edição, 2005.

[GG] C. C. Góes and M. E. L. Galvão. *A Weierstrass type representation for surfaces in hyperbolic space with mean curvature one.* Note di Matemática Vol. **18**-n° 1, 43-61 (1998).

[K1] N. Kapouleas. *Complete constant mean curvature surfaces in Euclidean three spaces.* Ann. Math. **131** (1990), 239-330.

[K2] N. Kapouleas. *Complete constant mean curvature surfaces constructed by using Went tori.* Invent. Math. **119** (1995), 443-518.

[Ka] H. Karcher. *The triply periodic minimal surfaces of A. Sheon and their constant mean curvature companions.* Manuscripta Math. **64** (1989), 291-357.

[KMS] M. Kilan, I. McIntosh, and N. Schmitt. *New constant mean curvature surfaces.* Experiment. Math. **9** (2000), 595-611.

[La] B. Lawson. *Complete minimal surfaces em* $\mathbb{S}^3$. Ann. Math. **92**(1970), 335-374.

[PS] U. Pinkal and I. Sterling. *On classification of constant mean curvature tori* . Ann. Math. **130**(1989), 407-451.

[Te] K. Tenenblat. *Transformations of manifolds and applications to differential equations.* Pitman Monogr. Surveys Pure Appl. Math. **93**, Longman, Harlow, (1998).

[WT1] Q. Wang and K. Tenenblat. *Ribaucour transformation for linear Weingarten surfaces in space forms.* Pacific Journal of Mathematics, vol. **212** (2003), 256–296.

[WT2] Q. Wang and K. Tenenblat. *Constant mean curvature one surfaces in hyperbolic space obtained by Ribaucour transformation.* Preprint.