Universidade Federal de Goiás
Instituto de Matemática e Estatística
Programa de Mestrado Profissional em
Matemática em Rede Nacional

Problemas de Otimização Envolvendo a Matemática do Ensino Médio

Alan Martins Rocha

Goiânia

2013

sibi
sistema de bibliotecas ufg

UFG

TERMO DE CIÊNCIA E DE AUTORIZAÇÃO PARA DISPONIBILIZAR AS TESES E DISSERTAÇÕES ELETRÔNICAS (TEDE) NA BIBLIOTECA DIGITAL DA UFG

Na qualidade de titular dos direitos de autor, autorizo a Universidade Federal de Goiás (UFG) a disponibilizar, gratuitamente, por meio da Biblioteca Digital de Teses e Dissertações (BDTD/UFG), sem ressarcimento dos direitos autorais, de acordo com a Lei nº 9610/98, o documento conforme permissões assinaladas abaixo, para fins de leitura, impressão e/ou *download*, a título de divulgação da produção científica brasileira, a partir desta data.

1. Identificação do material bibliográfico: **[X] Dissertação** **[ ] Tese**

2. Identificação da Tese ou Dissertação

Autor (a):	Alan Martins Rocha				
E-mail:	amrochy.mat@bol.com.br				
Seu e-mail pode ser disponibilizado na página? [x]Sim [ ] Não					
Vínculo empregatício do autor	Secretaria de Estado de Educação do Distrito Federal				
Agência de fomento:	Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior	Sigla:	CAPES		
País:	Brasil	UF:	GO	CNPJ:	00889834/0001-08
Título:	Problemas de Otimização Envolvendo a Matemática do Ensino Médio				
Palavras-chave:	Resolução de Problemas. Otimização. Matemática no Ensino Médio				
Título em outra língua:	Optimization problems involving the mathematics of secondary education.				
Palavras-chave em outra língua:	Optimization. Problem solving. Mathematics in Secondary Education.				
Área de concentração:	Matemática do Ensino Básico				
Data defesa: (dd/mm/aaaa)	22/03/2013				
Programa de Pós-Graduação:	PROFMAT				
Orientador (a):	Dr. Rogério de Queiroz Chaves				
E-mail:	rqchaves@gmail.com				
Co-orientador (a):*	-				
E-mail:	-				

*Necessita do CPF quando não constar no SisPG

3. Informações de acesso ao documento:

Concorda com a liberação total do documento [X] SIM [ ] NÃO[1]

Havendo concordância com a disponibilização eletrônica, torna-se imprescindível o envio do(s) arquivo(s) em formato digital PDF ou DOC da tese ou dissertação.

O sistema da Biblioteca Digital de Teses e Dissertações garante aos autores, que os arquivos contendo eletronicamente as teses e ou dissertações, antes de sua disponibilização, receberão procedimentos de segurança, criptografia (para não permitir cópia e extração de conteúdo, permitindo apenas impressão fraca) usando o padrão do Acrobat.

Alan Martins Rocha.
Assinatura do (a) autor (a)

Data: 22 / 04 / 2013

[1] Neste caso o documento será embargado por até um ano a partir da data de defesa. A extensão deste prazo suscita justificativa junto à coordenação do curso. Os dados do documento não serão disponibilizados durante o período de embargo.

Alan Martins Rocha

Problemas de Otimização Envolvendo a Matemática do Ensino Médio

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Instituto de Matemática e Estatística da Universidade Federal de Goiás, como parte dos requisitos para obtenção do grau de Mestre em Matemática.
Área de Concentração: Matemática do Ensino Básico
Orientador: Prof. Dr. Rogério de Queiroz Chaves

Goiânia

2013

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)
GPT/BC/UFG

R672p

Rocha, Alan Martins.
Problemas de otimização envolvendo a matemática do Ensino Médio [manuscrito] / Alan Martins Rocha. – 2013.
52 f. : il., figs.

Orientador: Prof. Dr. Rogério de Queiroz Chaves.
Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal de Goiás, Instituto de Matemática e Estatística, 2013.
Bibliografia.
Inclui lista de figuras.

1. Matemática – Ensino Médio. 2. Resolução de problemas. 3. Otimização. I. Título.

CDU: 51:373.5

Alan Martins Rocha

Problemas de Otimização Envolvendo a Matemática do Ensino Médio

Trabalho de Conclusão de Curso defendido no Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT/UFG, do Instituto de Matemática e Estatística da Universidade Federal de Goiás, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática, área de concentração Matemática do Ensino Básico, aprovado no dia 22 de março de 2013, pela Banca Examinadora constituída pelos professores:

Prof. Dr. Rogério de Queiroz Chaves
Instituto de Matemática e Estatística-UFG
Presidente da Banca

Prof. Dr. Flávio Raimundo de Souza
Membro/IFG/Goiânia

Profa. Dra. Marina Tuyako Mizukoshi
Instituto de Matemática e Estatística-UFG

Alan Martins Rocha graduou-se em Matemática pela UFG, durante a graduação foi bolsista de monitoria da disciplina Cálculo I e, posteriormente, bolsista do PIBIC orientado pelo prof. Dr. José Hilário da Cruz.

Dedico este trabalho a minha esposa Karen Núbia dos Santos Rocha, aos meus filhos Arthur Santos Rocha e Maria Eduarda Santos Rocha, ao meu pai Wilson Elias Rocha, e a minha mãe Maura Martins Regis Rocha.

Agradecimentos

Agradeço primeiramente a Deus que me deu força, sabedoria e paciência durante esta longa caminhada. Agradeço também a minha esposa, Karen, que de forma singular e carinhosa, me deu todo apoio nos momentos de maior dificuldade. Quero agradecer também ao meu filho Arthur e a minha filha Maria Eduarda, que, embora não tenham conhecimento disto, me incentivaram na busca de novos conhecimentos. Agradeço a todos os professores do curso que aceitaram o desafio da implantação deste mestrado e da melhor forma possível contribuíram para o nosso enriquecimento intelectual, em especial ao prof. Dr. Rogério de Queiroz Chaves, pela paciência na orientação, tornando possível a conclusão deste trabalho. Também agradeço a todos os meus colegas de sala que sempre que precisei não mediram esforços para me ajudar, em especial ao Dilermano que ao meu ver foi mais que um colega: “um irmão” (Maninho, como o chamamos), que por diversas vezes colocou sua casa e o seu raríssimo tempo à disposição para podermos estudar em grupo, o que contribuiu significativamente para a minha melhoria em matemática e em ensino de matemática, além de outras contribuições que levarei por toda minha vida. Agradeço de forma singela aos meus pais, Wilson e Maura, meus maiores incentivadores na busca deste sonho, e não deixando de agradecer a CAPES pelo suporte financeiro que muito ajudou neste programa de mestrado.

Resumo

A Matemática Aplicada é um ramo da matemática que trata da aplicação do conhecimento matemático a outros domínios, porém é pouco ou mal explorada nas atuais orientações curriculares para o Ensino Médio. A otimização, por exemplo, é uma de suas aplicações que auxilia na resolução de problemas ligados à economia, à administração, às engenharias, a problemas de logística e transporte, e às ciências, e que pode perfeitamente ser explorada, em um nível mais elementar, no Ensino Médio. Diante desta realidade, este trabalho tem como objetivo principal apresentar alguns métodos algébricos acessíveis ao estudante do Ensino Médio, para resolução de problemas simples de otimização. Dentre estes, destacam-se a otimização de funções quadráticas, funções discretas, algumas funções contínuas, além de aplicações da desigualdade das médias. A aplicação dos métodos apresentados é exemplificada por meio de vários problemas, escolhidos de maneira a mostrar uma ampla e significativa diversidade que permite a utilização dos métodos aqui desenvolvidos. Consequentemente, estes métodos podem apresentar alguns conteúdos do Ensino Médio de uma forma interessante, despertando o interesse dos alunos, pois, uma vez bem assimilados podem tornar-se poderosas ferramentas na solução de vários problemas, frequentemente encontrados no próprio cotidiano dos alunos e, inclusive, em olimpíadas de matemática, vestibulares e concursos.

Palavras-chave

Resolução de problemas. Otimização. Matemática no Ensino Médio.

Abstract

Applied Mathematics is the branch of mathematics which deals with the application of mathematical knowledge to solving problems in other areas and, in the current curricula for secondary education in Brazil, it has not been as adequately explored as it could be. Optimization, for instance, is one type of mathematical applications which allows solving problems related to economy, management, engineering, transport and logistics, among others and can be introduced, at a basic level, in secondary school. With that in view, this work aims to present a few algebraic tools, accessible to the secondary school student, that allow solving some interesting elementary optimization problems. These tools include optimization of quadratic functions, discrete functions, some continuous functions, as well as some applications of the inequality between arithmetic and geometric means. The use of these methods is illustrated through several examples, chosen in a way that shows the rich variety of problems that can be solved with the seemingly basic tools presented. With this we aim at presenting these topics, accessible to secondary education, in a novel and interesting way that is attractive to students and, once assimilated, they can become powerful tools for solving several problems, whether they come from the daily experience, from mathematical olympics, or from exams.

Keywords

Optimization; problem solving; mathematics in secondary education.

Lista de Figuras

1	Exemplo 4 - Caixa Planificada	28
2	Hipérbole xy=1	32
3	Problema 4	34
4	Problema 8	38
5	Problema 14 - Figura obtida em [10]	43

Sumário

Resumo **9**

Abstract **10**

Lista de Figuras **11**

1 Introdução **13**

2 Métodos Algébricos para a Otimização de Funções **20**

2.1 Máximos e Mínimos de Funções Quadráticas 20

2.2 A Desigualdade das Médias 22

2.3 Máximos e Mínimos de Funções Discretas 25

2.4 Máximos e Mínimos de Funções Contínuas 27

3 Aplicações **30**

4 Uma curiosidade sobre a utilização da Desigualdade das Médias **45**

Considerações Finais **47**

Referências **50**

PROBLEMAS DE OTIMIZAÇÃO ENVOLVENDO A MATEMÁTICA DO ENSINO MÉDIO

1 Introdução

As orientações curriculares de Matemática para a Educação Básica da Secretaria de Estado de Educação do Distrito Federal[4], de 2008, p.108, destacam a competência matemática como:

> "A capacidade do aluno para analisar, raciocinar e comunicar-se de maneira eficaz, quando enuncia, formula ou resolve problemas matemáticos numa variedade de domínios e situações. Além de compreender algumas ideias, notações e técnicas matemáticas, desenvolver competências e habilidades matemáticas envolve também extrair dos contextos e das circunstâncias particulares quando e como usar matemática e criticamente avaliar a sua utilização".

Diante desta realidade, cabe ao professor expor seus alunos a situações-problema que estimulem o desenvolvimento da competência matemática. No desenvolvimento desta competência, os problemas são fundamentais, pois permitem ao aluno colocar-se diante de situações que possibilitem o exercício do raciocínio lógico, pensando por si próprio, sem a utilização de regras e fórmulas padronizadas.

O Ensino da Matemática deve, dentre os principais objetivos, desafiar os alunos e incitar a curiosidade através da apresentação de problemas compatíveis com os conhecimentos destes. Assim, o professor deve auxiliá-los por meio de indagações estimulantes que objetivem o desenvolvimento de um pensamento crítico e autônomo. Mais do que o "simples" dever de ensinar, o professor encontra-se diante de um novo contexto sócio-cultural em que o aluno possui fácil acesso à informação, tornando-se desafiador mostrar e ressaltar a importância da Matemática. Utilizar problemas desafiadores que instiguem a curiosidade e o raciocício-lógico pode ser uma maneira de aumentar o interesse pela Matemática.

Segundo Polya[12], alguns dos mais importantes deveres do professor são o de instigar e o de desafiar os seus alunos, o que não é fácil, pois exige tempo, prática, dedicação e princípios firmes. Atualmente o trabalho docente é marcado pela frustração: os professores têm a sensação de estar forçando os alunos a participarem de ações que visivelmente não os atraem.

É praticamente impossível tratar do assunto "resolução de problemas" sem nos referir a George Polya, matemático húngaro que trabalhou em uma variedade de tópicos, incluindo séries, teoria dos números, combinatória e teoria de probabilidade, mais tarde escreveu três livros sobre a resolução de problemas, dentre os quais destaca-se a sua obra mais conhecida, "A arte de resolver problemas". Nesta obra, Polya divide a solução de um problema em quatro fases, na seguinte ordem: compreensão do problema, estabelecimento de um plano, execução do plano e, finalmente, um retrospecto da resolução completa, revendo-a e discutindo-a. O autor deixa bem claro que cada uma destas fases tem uma importância indiscutível no desenvolvimento do raciocínio-lógico que tornarão o aluno um bom solucionador de problemas.

A forma de o professor questionar o aluno deve levá-lo a uma melhor compreensão do problema que consequentemente abre as portas para que o mesmo estabeleça uma boa estratégia de resolução. Assim, a escolha de bons problemas é fundamental para o sucesso do processo ensino-aprendizagem, estes devem ser desafiadores e interessantes, mas não tão complexos ao ponto de desmotivar os alunos. Logo, cabe ao professor estabelecer corretamente o nível de dificuldade dos problemas para seus alunos, pois, caso contrário, isto pode tornar-se mais um obstáculo no processo ensino-aprendizagem. A motivação está presente com mais naturalidade em problemas reais e, em grande parte, ligados a situações físicas, como, por exemplo, as ligadas ao espaço e ao tempo. De acordo com Polya[12]:

> "Sabemos, naturalmente, que é difícil ter uma boa ideia se conhecemos do assunto e que é impossível tê-la se dele nada sabemos. As boas ideias são baseadas na experiência passada e em conhecimentos previamente adquiridos. Para uma boa ideia, não basta a simples recordação, mas não podemos ter nenhuma ideia boa sem relembrar alguns fatos pertinentes".

A resolução de problemas como método de ensino em Matemática tem como objetivo principal colocar o aluno diante de questionamentos que possibilitem o mesmo exercitar o raciocínio e desenvolver uma autonomia que o ajudará em outras situações na sua vida cotidiana e não simplesmente reproduzir conhecimentos repassados, que tornam o ensino da matemática pouco prazeroso e improdutivo. É importante ressaltar a diferença entre exercício e problema. O exercício sustenta-se num procedimento padrão, onde o aluno coloca em prática um conhecimento adquirido ou memorizado. O problema expõe o aluno a uma situação imprevisível, uma dificuldade que deve ser superada com maior ou menor complexidade.

Segundo Pozo[13], ao ensinar a resolver problemas, não só é necessário "dotar os alunos de habilidades e estratégias eficazes", mas também é preciso "criar neles o hábito e a atitude de enfrentar a dificuldade de aprendizagem com um problema para o qual deve ser encontrado uma resposta".

Dentre as diversas áreas onde a resolução de problemas pode ser exercitada de forma eficaz, destaca-se a *Matemática Aplicada*, ramo da matemática que tem-se desenvolvido muito devido às necessidades em diversas áreas como a administração, a economia, as ciências, dentre outras, nas quais o conhecimento matemático ajuda a resolver diversos tipos de problemas. Destacam-se neste ramo algumas aplicações como o cálculo numérico, a programação linear, a teoria de jogos, a probabilidade e a estatística, a criptografia e a otimização que é o principal tema de estudo deste trabalho. O tratamento dos conceitos de máximos e mínimos tem origem nos estudos de Pierre de Fermat que, no século XVII, resolveu o importante problema do traçado de uma tangente à uma curva plana qualquer. Posteriormente, Newton, Leibniz e Riemann desenvolveram novas teorias de Cálculo e Geometria Analítica que impulsionaram a Matemática. Segundo Eves[5]:

> "A linha divisória entre a matemática pura e a matemática aplicada deverá se enevoar cada vez mais. Por outro lado, como assinalou certa feita G.H. Hardy, a matemática pura é a verdadeira matemática aplicada , pois o que realmente importa em matemática é a técnica e esta se adquire em matemática pura. Aliás, como ilustra bem a aplicação da teoria da secções cônicas dos gregos antigos à mecânica celeste, a matemática toda é matemática

> aplicada - a aplicação é, às vezes, uma questão de tempo".

A escolha dos problemas de otimização como objetivo de estudo deste trabalho deu-se pelo crescente desenvolvimento deste ramo e a diversidade de suas áreas de aplicação, além do fato que tais problemas apresentados neste trabalho tem como foco despertar a vontade do aluno em conhecer e investigar a utilizaçao de determinados conteúdos estudados no Ensino Médio como, por exemplo, as noções de estatística e as funções quadráticas em situações que envolvem outros domínios promovendo assim atividades contextualizadas e/ou interdisciplinares. Tais problemas ajudam a responder algumas indagações feitas constantemente por alunos da Educação Básica como, por exemplo: "Para que estudar função quadrática?" "Por que estudar médias?". Além disso, podem contribuir significativamente para a formação do educando, auxiliando-o para uma melhor compreensão e aprendizagem.

A rotina do processo ensino-aprendizagem de Matemática quase sempre segue o modelo: definição, exemplos e exercícios de fixação. Porém, os problemas de aplicação devem ser usados como uma motivação para aprender determinado conteúdo, pois diversas vezes o ensino está se desenvolvendo muito abstratamente, sem exibir a relevância dos conceitos introduzidos. A utilização de problemas de aplicação, normalmente é feita ao final do estudo de determinado conteúdo, diante desta realidade alguns autores de livros didáticos de Matemática para o Ensino Médio, como, por exemplo, Dante[3] e Iezzi[7] tem procurado inovar em seus livros didáticos iniciando os conteúdos com situações-problema interessantes, contextualizadas e/ou interdisciplinares que propiciem a vontade nos alunos de aprender determinados conteúdos. Segundo Polya[12]:

> "Vez ou outra, deve-se oferecer à classe um problema importante, rico em conteúdo e que possa servir de abertura para um capítulo inteiro de Matemática. E a classe deveria trabalhar com tal problema de pesquisa, sem pressa e de modo que , segundo o princípio do ensino ativo, os alunos possam descobrir (ou sejam levados a descobrir) a solução e possam explorar sozinhos algumas consequências da solução".

A escolha da abordagem do tema *Problemas de Otimização envolvendo a Matemática do Ensino Médio* configura-se como uma oportunidade de revisar e aplicar determinados conteúdos estudados no Ensino Médio como: Função Quadrática, Médias(Estatística) e Geometria Euclidiana Plana, além de introduzir algumas ideias atuais e importantes da Matemática Aplicada, ramo ao qual pertence a otimização. Assim, os problemas aqui apresentados devem ser acessíveis aos estudantes do Ensino Médio, levando-se em conta o grau de dificuldade e os pré-requisitos necessários para sua compreensão.

Um dos principais objetivos deste trabalho, que não pode deixar de ser mencionado é mostrar uma ideia a respeito do tema escolhido, que possa ser inovadora e ter impacto na prática didática em sala de aula, uma vez que os conteúdos explorados neste trabalho geralmente são mal e/ou pouco explorados no Ensino Médio, que é o caso principalmente do conteúdo *Médias*, cuja abordagem quase sempre se restringe ao seu cálculo propriamente dito o que não auxilia no desenvovimento do raciocínio lógico-matemático.

A forma de apresentação deste trabalho tem início na exibição de alguns conceitos e demonstrações de algumas propriedades, que diferem das aulas rotineiras, uma vez que, devido à grande quantidade de conteúdos exigidos pelas orientações curriculares nacionais e à pequena carga horária disponível no Ensino Médio para as aulas de matemática, geralmente os professores simplesmente fazem uso de determinados resultados (proposições, teoremas, fórmulas, etc) sem demonstrá-los. Tais propriedades, serão posteriormente utilizadas como ferramentas na resolução de vários problemas aqui expostos. Em seguida, serão apresentados alguns problemas de otimização cujas soluções observarão as quatro fases descritas por Polya[12] já comentadas anteriormente, e os passos para solução de um problema de otimização segundo Hoffmann[6] e Stewart[14].

Na Educação Básica, este tema geralmente é intitulado como *Problemas de Máximos e Mínimos*, assim diante deste contexto tem-se um "novo" termo para este assunto, *Otimização*. Segundo um dos mais conceituados dicionários de Língua Portuguesa, o Aurélio, otimização é:

1) Ato, processo ou efeito de otimizar.

2) Determinação do valor ótimo de uma grandeza.

3) O conjunto de técnicas algoritmicas e de programação usadas para buscar o ponto

ótimo de funções matemáticas.

Fazendo uma busca nos sites de pesquisa sobre Otimização, destaca-se a definição apresentada por uma enciclopédia livre e colaborativa, a *Wikipédia*, que define este termo da seguinte forma:

> "Em Matemática, o termo otimização refere-se ao estudo de problemas em que se busca minimizar ou maximizar uma função através da escolha sistemática dos valores de variáveis reais ou inteiras dentro de um conjunto viável".

Observa-se que em diversas áreas do conhecimento humano existem problemas ou situações nas quais o principal objetivo é determinar o ponto "ótimo" de uma função. Problemas como este possuem uma grande aplicabilidade em situações cotidianas. Minimizar gastos, maximizar lucro, obter a melhor maneira de se programar um dispositivo eletrônico qualquer, como, por exemplo, um elevador para reduzir o tempo e o consumo de energia em seu deslocamento, distribuir adequadamente água, luz e esgoto a uma região habitacional reduzindo os gastos, são alguns exemplos de situações cotidianas em que a otimização é o ramo da matemática responsável por estudá-las.

No final dos anos 50 e começo dos anos 60, houve uma significativa mudança no Ensino de Matemática nas escolas brasileiras, reflexo do que acontecia no exterior. O nome do movimento era *Matemática Moderna*, e uma de suas consequências foi a "retirada" de alguns conteúdos dos programas de ensino, como o Cálculo e a Geometria. Segundo Ávila[1]:

> "A ideia de que os programas de matemática são extensos e não comportavam a inclusão do Cálculo é um equívoco. Os atuais programas estão, isto sim, mal estruturados".

Como o Cálculo Diferencial, mais especificamente a derivada, é muito utilizada em problemas de máximos e mínimos como, por exemplo, problemas de crescimento populacional e decaimento radioativo ligados às funções exponencial e logarítmica. Uma vez "retirado" o Cálculo dos programas de ensino, tem-se uma menor quantidade de problemas que podem ser resolvidos e explorados usando a Matemática ensinada na Educação Básica. Entretanto, existem alguns métodos que podem ser aplicados a problemas muito interessantes e perfeitamente adequados ao atual currículo do Ensino Médio, alguns destes métodos serão explorados na próxima seção, e, em seguida, serão apresentados alguns problemas que podem ser resolvidos usando tais técnicas.

2 Métodos Algébricos para a Otimização de Funções

No Ensino Fundamental há um contato inicial dos alunos com as ideias de máximos e mínimos em situações discretas envolvendo, basicamente, o uso de mínimo múltiplo comum $(m.m.c)$ e máximo divisor comum $(m.d.c)$ como nos seguintes problemas:

1) Dois ciclistas largam juntos numa pista, percorrendo-a com velocidade constante. Um deles, completa cada volta em 18 minutos, e o outro, leva 22 minutos em cada volta. Quanto tempo depois os dois cruzarão juntos pela primeira vez o ponto de largada?

2) Um terreno retangular mede 75m de comprimento por 45m de largura, o mesmo deve ser dividido em lotes quadrados iguais, cujo lado seja o maior possível. Quantos metros terá cada lado do lote?

A seguir serão apresentados alguns métodos algébricos para solução de problemas de otimização, dentre eles, destacam-se os que envolvem funções discretas e contínuas e a desigualdade das médias, que praticamente não são explorados no Ensino Médio.

2.1 Máximos e Mínimos de Funções Quadráticas

Nas atuais orientações curriculares para o Ensino Médio, os problemas de máximos e mínimos usualmente explorados quase sempre estão ligados às funções quadráticas. Nestes, a tarefa mais difícil é achar a função que modela o problema, feito isso, resolver o problema resume se a encontrar as coordenadas do vértice do gráfico da função. A seguir será apresentada uma breve análise da forma canônica destas funções com o objetivo de encontrar as coordenadas do vértice, consequentemente, o seu valor máximo ou o seu valor mínimo.

Dada a função quadrática $f(x) = ax^2 + bx + c$ com a, b e c números reais e $a \neq 0$, note que valem as seguintes igualdades:

$$
\begin{aligned}
f(x) &= ax^2 + bx + c \\
&= a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right) \\
&= a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2} - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a}\right) \\
&= a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2}\right) - a\left(\frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a}\right) \\
&= a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{b^2 - 4ac}{4a}\right).
\end{aligned}
$$

Como $x \in I\!R$, o primeiro termo na expressão anula-se apenas para $x = -b/2a$. Logo, conclui-se que:

i) Se $a > 0$, o menor valor de *f(x)* ocorre quando $x = \dfrac{-b}{2a}$.

ii) Se $a < 0$, o maior valor de *f(x)* ocorre quando $x = \dfrac{-b}{2a}$.

Observe um exemplo onde este resultado pode ser usado:

Exemplo 1: Os alunos de uma escola alugaram, para uma festa de formatura, um salão de eventos com capacidade para 150 pessoas. Cada aluno comprometeu-se, de início, a pagar R$10,00. Caso a lotação do estabelecimento não fosse atingida, o gerente propôs que cada aluno que comparecesse pagasse um adicional de R$0,50 por lugar vazio. Qual deve ser a quantidade de alunos presentes a festa de formatura para que a receita seja máxima?

Solução: Seja x o número alunos na festa, tem-se que a receita(R) é dada, em reais, pela função:

$$R(x) = x[10 + 0,5(150 - x)] = -0,5x^2 + 85x.$$

Logo, a solução do problema se resume a determinar o valor de x para que a função atinja seu maior valor, isto ocorre quando $x = -85/2 \cdot (-0,5)$, ou seja, quando $x = 85$. Portanto, o número de alunos que devem estar presentes na festa para que a receita seja máxima é 85, neste caso a receita será igual a R$ 3612,50.

Nos cursos superiores de Matemática ou áreas afins os problemas de otimização costumam ser resolvidos com o uso de derivadas, já no Ensino Médio a maioria destes problemas conduzem a uma função quadrática, cuja solução foi analisada nesta seção. Porém, existe uma ampla quantidade de problemas que podem ser resolvidos usando outros recursos algébricos, tipicamente expressos por meio de desigualdades. Algumas destas serão discutidas a seguir.

2.2 A Desigualdade das Médias

A *desigualdade das médias*, por exemplo, mostra-se muito útil na solução de alguns problemas de otimização. Geralmente, no Ensino Médio, estas médias são tratadas no conteúdo de Noções de Estatística, onde as aplicações restringem-se ao seu simples cálculo com base em informações dadas em gráficos ou tabelas. A definição destas médias será apresentada a seguir:

Definição 1: Sejam $a_1, a_2, ..., a_n$ números reais positivos. Define-se:

i) A *média aritmética* (m_a) de $a_1, a_2, ..., a_n$ como o número $\dfrac{a_1 + a_2 + ... + a_n}{n}$.

ii) A *média geométrica* (m_g) de $a_1, a_2, ..., a_n$ como o número $\sqrt[n]{a_1 a_2 ... a_n}$.

iii) A *média harmônica* (m_h) de $a_1, a_2, ..., a_n$ como o número $\dfrac{n}{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + ... + \frac{1}{a_n}}$.

iv) A *média quadrática* (m_q) de $a_1, a_2, ..., a_n$ como o número $\sqrt{\dfrac{a_1^2 + a_2^2 + ... + a_n^2}{n}}$.

Uma vez definidas, existe uma importante relação entre estas médias, apresentada no seguinte teorema:

Teorema 1: (*Desigualdade das Médias*) Para toda coleção de números reais positivos $a_1, a_2, ..., a_{n-1}$ e a_n verificam-se as seguintes desigualdades:

$$m_h(a_1, a_2, ..., a_n) \ \leq \ m_g(a_1, a_2, ..., a_n) \ \leq \ m_a(a_1, a_2, ..., a_n) \ \leq \ m_q(a_1, a_2, ..., a_n).$$

Além disso, em cada caso a igualdade ocorre se, e somente se, $a_1 = a_2 = ... = a_n$.

Várias e interessantes demonstrações destas desigualdades para n números podem ser encontradas em Oliveira[11]. Porém a demonstração aqui apresentada será restrita ao caso que envolve apenas dois números reais positivos, sendo perfeitamente acessível aos alunos do Ensino Médio.

Demonstração: Sejam a_1 e a_2 dois números reais positivos quaisquer. Para mostrar que $m_g \leq m_a$, basta observar que

$$m_a - m_g = \frac{a_1 + a_2}{2} - \sqrt{a_1 a_2} = \frac{a_1 + a_2 - 2\sqrt{a_1 a_2}}{2} = \frac{(\sqrt{a_1} - \sqrt{a_2})^2}{2} \geq 0.$$

Como $m_a - m_g$ é não negativo, segue que $m_g \leq m_a$ para quaisquer $a_1 \neq a_2$ e a igualdade ocorre quando $a_1 = a_2$.

Para mostrar que $m_a \leq m_q$, observa-se que

$$\begin{aligned}(a_1 - a_2)^2 \geq 0 &\Longleftrightarrow a_1^2 - 2a_1a_2 + a_2^2 \geq 0 \Longleftrightarrow 2a_1^2 + 2a_2^2 \geq a_1^2 + 2a_1a_2 + a_2^2 \\ &\Longleftrightarrow \frac{a_1^2 + a_2^2}{2} \geq \left(\frac{a_1 + a_2}{2}\right)^2 \Longleftrightarrow \sqrt{\frac{a_1^2 + a_2^2}{2}} \geq \frac{a_1 + a_2}{2}.\end{aligned}$$

Observe que esta última implicação é válida porque a_1 e a_2 são números positivos, nota-se também que a igualdade ocorre quando $a_1 = a_2$.

E, finalmente, para mostrar que $m_h \leq m_g$, aplica-se a desigualdade $m_g \leq m_a$ aos números positivos $1/a_1$ e $1/a_2$, de onde tem-se que

$$\sqrt{\frac{1}{a_1} \cdot \frac{1}{a_2}} \leq \frac{\dfrac{1}{a_1} + \dfrac{1}{a_2}}{2} \Longleftrightarrow \frac{1}{\sqrt{a_1 a_2}} \leq \frac{a_1 + a_2}{2a_1a_2} \Longleftrightarrow \frac{2a_1a_2}{a_1 + a_2} \leq \sqrt{a_1 a_2},$$

que completa a demonstração, pois

$$\frac{2a_1a_2}{a_1 + a_2} = \frac{2}{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2}}.$$

□

O exemplo a seguir mostra uma aplicação da desigualdade das médias.

Exemplo 2: Uma lata cilíndrica é feita para receber 1 litro de óleo. Encontre as dimensões que minimizarão o custo do metal para produzir a lata.

Solução: A ideia é tentar exprimir uma função de acordo com a situação proposta pelo problema, e, se possível, colocá-la em função de uma única variável dependente.

Finalmente, escolhe-se um método algébrico que permita minimizar a função encontrada.

O volume da lata cilíndrica é fixo e igual a 1 litro, ou seja, $1000\,\mathrm{cm}^3$. A expressão que determina o volume do cilindro é $V = \pi R^2 h$, onde R representa o raio da base e h a altura do cilindro. Consequentemente,

$$\pi R^2 h \;=\; 1000. \tag{1}$$

Por outro lado, a área da superfície cilíndrica é dada por:

$$A \;=\; 2\pi R^2 + 2\pi R h, \tag{2}$$

assim isolando h na equação (1) e substituindo em (2), tem-se

$$\begin{aligned} A(R) &= 2\pi R^2 + 2\pi R \cdot \frac{1000}{\pi R^2} \\ &= 2\pi R^2 + \frac{2000}{R} \\ &= 2(\pi R^2 + \frac{1000}{R}), R > 0. \end{aligned}$$

Logo, o objetivo é determinar o valor de R que minimiza $\pi R^2 + 1000/R$, que pode ser adaptada para uma aplicação da desigualdade das médias geométrica e aritmética, observando que

$$\pi R^2 + \frac{1000}{R} \;=\; \pi R^2 + \frac{500}{R} + \frac{500}{R}.$$

Assim,

$$\frac{\pi R^2 + \frac{500}{R} + \frac{500}{R}}{3} \;\geq\; \sqrt[3]{\pi R^2 \cdot \frac{500}{R} \cdot \frac{500}{R}} \iff \pi R^2 + \frac{1000}{R} \;\geq\; 150\sqrt[3]{2\pi},$$

e a igualdade, que minimiza a expressão, vale exatamente quando os três termos são iguais, ou seja, $\pi R^2 = 500/R$. Daí,

$$\pi R^3 \;=\; 500 \iff R^3 \;=\; \frac{500}{\pi} \iff R \;=\; \sqrt[3]{\frac{500}{\pi}}.$$

Substituindo o valor de R encontrado em (1) e simplificando, encontra-se $h = 2\sqrt[3]{500/\pi}$, ou seja, a altura do cilindro deve ser o dobro da medida do raio da base para que a área da superfície cilíndrica seja mínima e igual a $300\sqrt[3]{2\pi}$.

Algumas indagações são pertinentes, com base nesta solução, como: Quando podemos usar a desigualdade entre as médias para resolver problemas com funções como a encontrada neste problema? Qual é a relação, na expressão que precisava ser minimizada, entre a divisão de um dos termos em n partes e o grau do outro termo, para que seja possível usar a desigualdade das médias? Dentre as características do problema tem alguma condição que contradiz o teorema da desigualdade das médias?

Diante do exemplo anterior, é importante observar que a desigualdade das médias aritmética e geométrica é muito útil para estudar funções que envolvem somas de potências positivas e negativas de x com coeficientes positivos. Neste caso, pode ser conveniente decompor um mesmo termo em duas ou mais parcelas de modo que o produto de todas as parcelas resulte em uma constante. Observe esta ideia na seguinte função:

$$f(x) = x^3 + x^2 + \frac{2}{x^2} + \frac{1}{x}, \text{ para } x > 0.$$

Para que o produto dos termos seja independente de x, escreve-se

$$x^3 + x^2 + \frac{2}{x^2} + \frac{1}{x} = x^3 + x^2 + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x},$$

de onde tem-se, pela desigualdade das médias aritmética e geométrica, que

$$\frac{x^3 + x^2 + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x}}{5} \geq \sqrt[5]{x^3 \cdot x^2 \cdot \frac{1}{x^2} \cdot \frac{1}{x^2} \cdot \frac{1}{x}} = 1.$$

Consequentemente, $f(x) = 5$ é o valor mínimo da função, que ocorre quando

$$x^3 = x^2 = \frac{1}{x^2} = \frac{1}{x},$$

ou seja, quando $x = 1$.

2.3 Máximos e Mínimos de Funções Discretas

Vários problemas interessantes envolvem funções calculadas apenas sobre o conjunto dos números naturais. Uma maneira de determinar um ponto onde uma função assume valor máximo ou mínimo, é pelo estudo das regiões onde a função é crescente ou decrescente. Por exemplo, se uma função é decrescente para $x < x_0$ e crescente para

$x > x_0$, isto sugere que a função atinja um valor mínimo em x_0, o que pode ser verificado de alguma forma no caso de cada função específica. Esta ideia é particularmente útil em situações que envolvem funções discretas, ou seja, definidas sobre $\mathbb{N}$. Neste caso, a função é crescente para os valores de n tais que $f(n+1) > f(n)$. Se $f(n) > 0$, pode ser interessante substituir esta última desigualdade por $f(n+1)/f(n) > 1$, e uma análise semelhante pode ser feita para verificar onde a função é decrescente. Observe esta ideia no seguinte exemplo:

Exemplo 3: Um certo lago tem uma grande quantidade de peixes, 300 deles são capturados, aleatoriamente, marcados e soltos novamente. Após eles se dispersarem, novamente 300 peixes são capturados. Entre estes últimos há 66 que haviam sido marcados na primeira captura. Estime a população de peixes neste lago.

Solução: Um dos métodos utilizados para estimar a população, conhecido como *método de máxima verossimilhança*, consiste em determinar o tamanho n, da população que maximiza a probabilidade de que em uma captura de 300 peixes, 66 venham marcados. Assim, se a população for n, sendo 300 marcados e $n - 300$ não marcados, a probabilidade de que, em uma captura de 300, 66 venham marcados é:

$$P(66) = \frac{\binom{300}{66}\binom{n-300}{234}}{\binom{n}{300}} = \frac{\left(\dfrac{300!}{234!}\right)^2}{66!} \cdot \frac{[(n-300)!]^2}{n!(n-534)!}.$$

Portanto, para maximizar $P(66)$, é suficiente maximizar

$$f(n) = \frac{[(n-300)!]^2}{n!(n-534)!}.$$

Para identificar os valores de n em que $f(n)$ é crescente, é mais interessante determinar n tal que $\frac{f(n+1)}{f(n)} > 1$, ou seja,

$$\frac{\dfrac{[(n-299)!]^2}{(n+1)!(n-533)!}}{\dfrac{[(n-300)!]^2}{n!(n-534)!}} > 1.$$

Simplificando, obtem-se

$$\frac{n^2 - 598n + 299^2}{n^2 - 533n + n - 533} > 1 \iff 598n - 532n < 299^2 + 533 \iff n < 1362,63.$$

Analogamente, mostra-se que $f(n)$ é decrescente para $n > 1362,63$. Portanto, a função $f(n)$ atinge valor máximo para $n = 1363$ e, consequentemente, estima-se que neste lago há 1363 peixes.

2.4 Máximos e Mínimos de Funções Contínuas

A ideia de estudar as regiões de crescimento e decrescimento de uma função, apresentada na seção anterior, pode ser estendida a funções definidas sobre o conjunto dos números reais. Aqui, um tratamento mais rigoroso envolveria considerações sobre a continuidade das funções, porém como as funções de uma variável real exploradas no Ensino Médio geralmente são contínuas, no intervalo de interesse, esse tipo de considerações pode ser omitido sem grandes prejuízos para o desenvolvimento do método. Ainda assim, é necessário o cuidado de verificar que a função em questão esteja definida, e seja limitada no intervalo considerado para o problema. Neste caso, tem-se que $f(x)$ é crescente em x_0, se para um pequeno acréscimo $h > 0$ na variável x tem-se $f(x_0 + h) > f(x_0)$. Analogamente, $f(x)$ é decrescente em x_0 se, para um pequeno acréscimo $h > 0$ na variável x tem-se $f(x_0 + h) < f(x_0)$. Esta ideia é útil na resolução de alguns problemas, particularmente os que envolvem funções cúbicas, como no exemplo a seguir.

Exemplo 4: A partir de uma chapa metálica retangular de $1\,\mathrm{m} \times 1\,\mathrm{m}$ deseja-se contruir uma caixa sem tampa, removendo quadrados de lado x dos quatro cantos da chapa e dobrando as abas resultantes em ângulo reto como indica a figura a seguir. Qual é o valor de x para que a caixa tenha volume máximo?

Solução: Observando a figura 1, conclui-se que o volume da caixa, em metros cúbicos, é dado pela função:

$$V(x) = x(1 - 2x)^2 = 4x^3 - 4x^2 + x, \text{ para } 0 < x < 1/2.$$

Neste caso, é mais conveniente determinar para quais valores de x a função

$$V(x) = 4x^3 - 4x^2 + x,$$

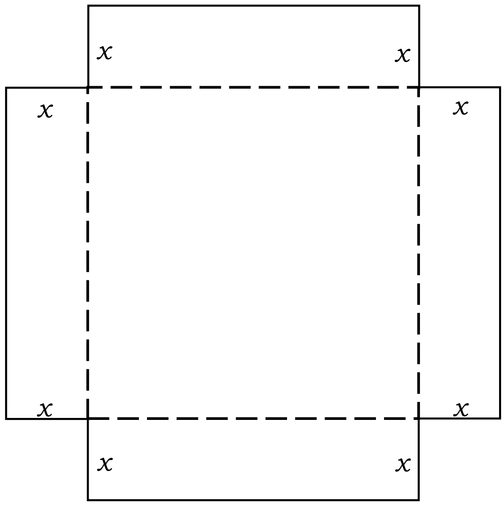

Figura 1: Exemplo 4 - Caixa Planificada

é crescente analisando a desigualdade $V(x+h) - V(x) > 0$, para $h > 0$. Logo, tem-se

$$\begin{aligned}
V(x+h) - V(x) &= 4(x+h)^3 - 4(x+h)^2 + (x+h) - 4x^3 + 4x^2 - x \\
&= 4(x^3 + 3x^2h + 3xh^2 + h^3) - 4(x^2 + 2xh + h^2) \\
&\quad + (x+h) - 4x^3 + 4x^2 - x \\
&= 4x^3 + 12x^2h + 12xh^2 + 4h^3 - 4x^2 - 8xh - 4h^2 \\
&\quad + x + h - 4x^3 + 4x^2 - x \\
&= h[4h^2 + (12x-4)h + 12x^2 - 8x + 1],
\end{aligned}$$

e, como $h > 0$, para que $V(x+h) - V(x) > 0$, deve-se ter

$$4h^2 + (12x-4)h + 12x^2 - 8x + 1 > 0,$$

por menor que seja h. Para isso, é necessário que, $12x^2 - 8x + 1 > 0$, que ocorre para $x < 1/6$ ou $x > 1/2$, pois neste caso, é sempre possível escolher h pequeno o bastante para que $|h(4h + 12x - 4)| < 12x^2 - 8x + 1$. Para determinar onde $V(x)$ é decrescente, o desenvolvimento é análogo, invertendo-se apenas a desigualdade, ou seja, para que $V(x+h) - V(x) < 0$, por menor que seja h, deve-se ter $1/6 < x < 1/2$ (intervalo entre as raízes de uma função quadrática). Portanto, como $V(0) = V(1/2) = 0$ e, $V(x)$ cresce para $x < 1/6$ ou $x > 1/2$ e decresce para $1/6 < x < 1/2$, conclui-se que o corte nos cantos desta chapa deve ser de $1/6\,\text{m}$, ou aproximadamente $16,7\,\text{cm}$ para que o volume da caixa seja máximo, e aproximadamente igual a 74 litros.

Outra solução: Como foi observado na solução anterior o volume da caixa, em metros cúbicos, é dado pela expressão:

$$V(x) = x(1-2x)^2 = x(1-2x)(1-2x).$$

Logo, é possível usar a desigualdade entre as médias aritmética e geométrica, de forma conveniente para maximizar a expressão que determina o volume, daí:

$$\sqrt[3]{4x(1-2x)(1-2x)} \;\leq\; \frac{4x+1-2x+1-2x}{3}.$$

Como deseja-se maximizar o volume, usa-se a igualdade que ocorre quando $4x = 1-2x$, ou seja, quando $x = 1/6$, consequentemente o volume máximo será $2/27\ m^3$, que equivale a aproximadamente 74 litros.

3 Aplicações

São apresentados, a seguir, outros exemplos de problemas de otimização que permitem aplicar os métodos desenvolvidos nas seções anteriores. Tais problemas podem servir como material didático de apoio para tratar deste assunto em turmas do Ensino Médio.

Problema 1: (UE-PI) Um agricultor tem 140 metros de cerca para construir dois currais: um deles, quadrado, e o outro, retangular, com comprimento igual ao triplo da largura. Se a soma das áreas dos currais deve ser a menor possível, qual é a área do curral quadrado?

Solução: Seja x o lado do quadrado, logo para construir o curral retangular restaram $(140-4x)$ metros de cerca, ou seja, o comprimento será $3(140-4x)/8$ e a largura $(140-4x)/8$. Assim a função $A(x)$ que determina a soma das áreas dos dois currais é dada por:

$$A(x) = x^2 + \frac{3}{8}(140-4x)\cdot\frac{1}{8}(140-4x).$$

Logo,

$$\begin{aligned} A(x) &= x^2 + \frac{3}{64}(19600 - 1120x + 16x^2) \\ &= x^2 + \frac{3}{4}x^2 - \frac{105}{2}x + \frac{3675}{4} \\ &= \frac{7x^2 - 210x + 3675}{4} \\ &= \frac{7}{4}(x^2 - 30x + 525) \\ &= \frac{7}{4}(x-15)^2 + 525. \end{aligned}$$

Assim analisando a forma canônica de $A(x)$ observamos que a função é mínima quando $x = 15$. Portanto, a área do curral quadrado é $225\ m^2$.

Neste problema algumas indagações são relevantes: Por que minimizar e não maximizar a área como seria o objetivo de uma situação real? Quando é possível utilizar este procedimento em algum outro problema?

Problema 2: Um pedaço de arame com comprimento l será dobrado para formar um círculo ou um quadrado ou ambos, dividindo-se o arame em dois pedaços. Determine como dividir o arame para que a área das figuras contornadas pelo arame seja:

$a)$ mínima;

$b)$ máxima.

Solução: Deseja-se cortar um fio, formando duas figuras: um círculo e um quadrado, com objetivo de minimizar e maximizar a soma das duas áreas. Uma maneira de tentar resolver este problema é transformar a situação descrita em uma função que possa ser otimizada. Sejam l_1 e l_2, respectivamente, os comprimentos dos fios utilizados para formar o círculo e o quadrado. Assim, temos que $l_1 + l_2 = l$, consequentemente:

$$A(l_1) = \frac{l_1^2}{4\pi} \text{ e } A(l_2) = \frac{l_2^2}{16},$$

onde $A(l_1)$ e $A(l_2)$, são respectivamente, as áreas do círculo e do quadrado obtidos pelo corte do fio. Logo,

$$\begin{aligned} A(l) &= A(l_1) + A(l_2) \\ &= \frac{l_1^2}{4\pi} + \frac{l_2^2}{16} \\ &= \frac{4l_1^2 + \pi l_2^2}{16\pi} \\ &= \frac{4(l - l_2)^2 + \pi l_2^2}{16\pi} \\ &= \frac{4l^2 - 8ll_2 + 4l_2^2 + \pi l_2^2}{16\pi} \\ &= \frac{(4+\pi)l_2^2 - 8ll_2 + 4l^2}{16\pi}. \end{aligned}$$

Como l é um número real positivo fixado, observa-se na expressão anterior que trata-se de uma função quadrática na variável l_2, sendo positivo o coeficiente do termo quadrático, consequentemente o valor mínimo ocorre quando

$$l_2 = \frac{8l}{2(4+\pi)} = \frac{4l}{4+\pi}.$$

Consequentemente, $l_1 = \pi l/(4+\pi)$, de onde conclui-se a resposta do item (a), ou seja, o fio deve ser cortado em dois pedaços medindo $\pi l/(4+\pi)$ e $4l/(4+\pi)$, onde com o primeiro pedaço forma-se o círculo e com o segundo pedaço o quadrado.

Já para responder o item (b), observa-se que $A(l)$ pode ser colocado na forma

$$A(l) = \frac{l_2[(4+\pi)l_2 - 8l] + 4l^2}{16\pi}.$$

Analisando o sinal de $(4+\pi)l_2 - 8l$, tem-se que o mesmo é negativo pois $(4+\pi)l_2 < 8l_2 < 8l$. como no item(b) deseja-se maximizar $A(l)$ então deve-se ter $l_2 = 0$ para que $A(l)$ seja máxima, consequentemente, o fio deve ser usado somente com um círculo de raio $l/2\pi$ para que a área seja máxima, ou seja, o fio não deve ser dividido.

Problema 3: Determinar o ponto P, situado sobre a hipérbole de equação $xy = 1$, que está mais próximo da origem.

Solução: Pretende-se encontrar o(s) ponto(s) sobre o gráfico da função $y = 1/x$ mais próximo(s) da origem dos eixos, ou seja, do ponto $(0,0)$. Observando o gráfico da função $y = 1/x$, conforme a figura 2, aparentemente os pontos $(1,1)$ e $(-1,-1)$ são os pontos sobre o gráfico da hipérbole em questão, mais próximos à origem. Assim, falta mostrar a veracidade desta afirmação, que caso seja possível resolve o problema.

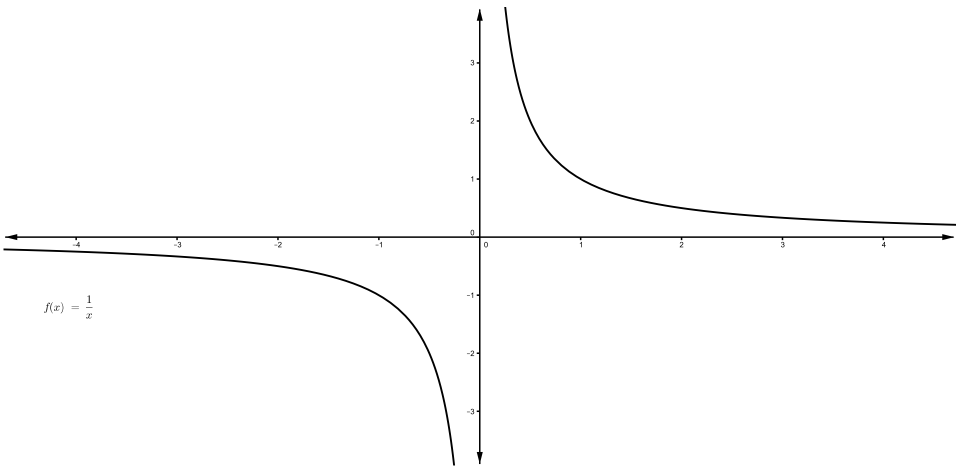

Figura 2: Hipérbole xy=1

A solução pode ser abreviada mostrando que todos os pontos da função situados no primeiro quadrante estão mais distantes da origem do que o ponto $(1, 1)$, uma vez que o gráfico desta função é simétrico em relação a origem ($f(-x) = -f(x)$), portanto o raciocínio é análogo para o ponto $(-1, -1)$.

Assim, seja $(1+a)$ a abscissa de um ponto P da hipérbole $xy = 1$, consequentemente, a ordenada deste ponto é $1/(1 + a)$. Logo, seja d a distância do ponto P a origem, tem-se

$$\begin{aligned}
d^2 = &\ (1+a)^2 + \left(\frac{1}{1+a}\right)^2 \\
= &\ \frac{(1+a)^4 + 1}{(1+a)^2} \\
= &\ \frac{a^4 + 4a^3 + 6a^2 + 4a + 1 + 1}{(1+a)^2} \\
= &\ \frac{a^4 + 4a^3 + 4a^2 + 2a^2 + 4a + 2}{(1+a)^2} \\
= &\ \frac{a^4 + 4a^3 + 4a^2}{(1+a)^2} + \frac{2(1+a)^2}{(1+a)^2} \\
= &\ \frac{a^2(a^2 + 4a + 4)}{(1+a)^2} + 2 \\
= &\ \frac{a^2(a+2)^2}{(1+a)^2} + 2.
\end{aligned}$$

Daí, conclui-se que $d^2 > 2$ para qualquer a não-nulo. Logo, os demais pontos do gráfico da hipérbole $xy = 1$ estão mais distantes da origem do que o ponto $(1, 1)$, uma vez que a distância deste à origem é $\sqrt{2}$.

Outra solução: A desigualdade das médias permite obter esta solução de uma maneira muito simples e elegante. Observe que o ponto $(a, 1/a)$ com $a \neq 0$, pertence à hipérbole $xy = 1$. Consequentemente, a distância d, deste ponto à origem é tal que

$$d^2 = a^2 + \frac{1}{a^2}\cdot$$

Por outro lado, usando a desigualdade entre as médias aritmética e geométrica, tem-se que

$$\frac{a^2 + \frac{1}{a^2}}{2} \geq \sqrt{a^2 \cdot \frac{1}{a^2}} \implies a^2 + \frac{1}{a^2} \geq 2.$$

Consequentemente, o menor valor de d^2 é 2, que ocorre quando $a^2 = 1/a^2$, ou seja, $a = \pm 1$. Portanto os pontos da hipérbole $xy = 1$, mais próximos da origem são $(1,1)$ e $(-1,-1)$ uma vez que o gráfico desta hipérbole é simétrico em relação a origem.

Problema 4: Para $x > 0$, qual é o valor mínimo de $y = x^2 + \dfrac{1}{x}$?

Solução:

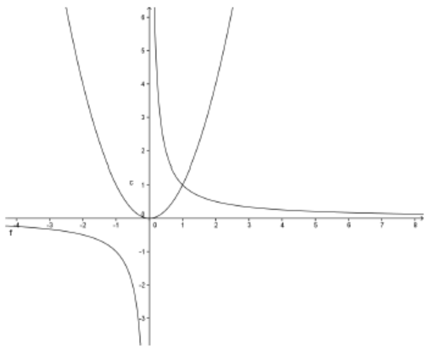

Figura 3: Problema 4

A desigualdade entre as médias aritmética e geométrica pode se mostrar eficiente na solução deste problema uma vez que não se trata de uma função quadrática já que a incógnita x aparece no denominador, porém temos uma soma de potências positivas e negativas de x com coeficientes positivos. Outra ideia interessante talvez seja analisar os gráficos das funções $y = x^2$ e $y = 1/x$ em um mesmo sistema de eixos para imaginar como seria a função que representa a soma desta duas funções, ver figura 3.

Tem-se

$$y = x^2 + \frac{1}{x} = x^2 + \frac{1}{2x} + \frac{1}{2x}$$

e, usando a desigualdade entre as médias aritmética e geométrica($m_a \geq m_g$), obtem-se

$$\frac{x^2 + \frac{1}{2x} + \frac{1}{2x}}{3} \geq \sqrt[3]{x^2 \cdot \frac{1}{2x} \cdot \frac{1}{2x}} = \sqrt[3]{\frac{1}{4}}.$$

Portanto: $y \geq 3/\sqrt[3]{4}$, onde a igualdade só ocorre quando $x^2 = 1/2x$, ou seja, quando $x = 1/\sqrt[3]{2}$.

Problema 5 (1ª prova de qualificação do PROFMAT - Turma 2011):

a) Dado um número $a > 0$ quanto medem os lados do retângulo de perímetro mínimo cuja área é a?

b) Justifique matematicamente por que não se pode responder a questão anterior se trocarmos "mínimo" por "máximo".

Solução: Deve-se encontrar medidas x e y respectivamente do comprimento e da largura de um retângulo com área fixa, que minimize o perímetro do mesmo. E, em seguida, mostrar que não é possível maximizar o perímetro de um retângulo de área fixa. A desigualdade entre as médias geométrica e aritmética pode ser usada para resolver este problema uma vez que para calcular a área de um retângulo usa-se o produto entre os seus lados e para calcular o perímetro usa-se o dobro da soma dos seus lados não opostos. Assim, isto conduz a ideia de usar a desigualdade entre as médias geométrica e aritmética.

a) Sejam x e y respectivamente as dimensões do comprimento e da largura do retângulo de área a. Daí, tem-se que $xy = a$, consequentemente $\sqrt{xy} = \sqrt{a}$. Aplicando a desigualdade entre as médias aritmética e geométrica aos números reais positivos x e y tem-se que

$$\frac{x+y}{2} \geq \sqrt{xy} = \sqrt{a}.$$

Como pretende-se minimizar o perímetro $P = 2x + 2y$, usa-se a igualdade, que ocorre quando $x = y$, ou seja,

$$\frac{x+x}{2} = \sqrt{a} \Longleftrightarrow x = \sqrt{a}.$$

Logo, o perímetro P é mínimo quando $x = y = \sqrt{a}$, ou seja, um quadrado de lado $\sqrt{a}$.

b) Precisa-se mostrar que não existe retângulo de perímetro máximo com área $a > 0$ fixada. Para isso basta observar, que se $xy = a$, multiplicando x por N tão grande quanto se queira e dividindo y pelo mesmo N, a área $A = Nx \cdot y/N$ é mantida igual a a, porém o perímetro $P = 2Nx + 2y/N$ pode tornar-se maior do que qualquer número fixado, ou seja, o perímetro não possui um valor máximo.

Problema 6 (AV2 da disciplina MA12 - PROFMAT - Turma 2011): Uma caixa retangular sem tampa tem dimensões x, y e z representando respectivamente o comprimento, a largura e a altura.

a) Exprima a área e o volume da caixa em função de x, y e z.

b) Use a desigualdade das médias para mostrar que, se o volume da caixa é igual a 32, então sua área é maior ou igual a 48.

c) Determine as medidas das arestas da caixa de área mínima com volume igual a 32.

Solução:

a) O volume da caixa é $V = xyz$ e a área total é $A = xy + 2xz + 2yz$.

b) Pela desigualdade entre as médias aritmética e geométrica tem-se

$$\frac{xy + 2xz + 2yz}{3} \geq \sqrt[3]{xy \cdot 2xz \cdot 2yz} = \sqrt[3]{4x^2y^2z^2},$$

como $xyz = 32$ (volume da caixa) conclui-se que:

$$\frac{xy + 2xz + 2yz}{3} \geq \sqrt[3]{4 \cdot 32^2} = \sqrt[3]{4096} = 16.$$

Consequentemente, $xy + 2xz + 2yz \geq 48$ como pretendia-se mostrar.

c) Como $xy + 2xz + 2yz \geq 48$ tem-se pela desigualdade das médias aritmética e geométrica que a igualdade só ocorre quando $xy = 2xz = 2yz$, ou seja, $x = y = 2z$. Fazendo $x = a$ obtem-se que $a \cdot a \cdot a/2 = 32$, consequentemente $a^3 = 64 \Rightarrow a = 4$. Portanto, as dimensões do comprimento, da largura e da altura que minimizam a área total da caixa são respectivamente iguais a 4, 4 e 2.

É importante ressaltar que as indústrias (principalmente do setor alimentício) fazem este tipo de cálculo para minimizar o custo das embalagens de determinados produtos. Pode-se utilizar esta ideia para minimizar o material gasto em alguma embalagem, por exemplo, uma caixa de leite, com volume fixo igual a $1l$ e fazer alguma indagações com base na resposta encontrada.

Problema 7: Mostre que entre todos os retângulos de mesmo perímetro o quadrado é o de área máxima.

Solução: Uma vez que o cálculo de área envolve produto e o de perímetro envolve soma, a desigualdade entre as médias geométrica e aritmética pode ajudar a mostrar que o quadrado determina área máxima dentre todos os retângulos de perímetro fixado. Outra alternativa é usar a ideia de função, pois caso a função associada a este problema seja a quadrática, por exemplo, pode-se maximizar a função sem o uso do Cálculo Diferencial.

Seja R um retângulo de dimensões x e y. Logo o perímetro é dado por $P = 2x + 2y$ e área da sua região é dada por $A_1 = xy$. O quadrado Q de mesmo perímetro que R tem lado medindo $(x + y)/2$, e sua área é dada por $A_2 = [(x + y)/2]^2$. Pretende-se mostrar que $A_2 \geq A_1$, isto é equivalente a mostrar que $A_2 - A_1$ é não-negativo. Usando a desigualdade entre as médias aritmética e geométrica tem-se que

$$\frac{x+y}{2} \geq \sqrt{xy} \Longleftrightarrow \left(\frac{x+y}{2}\right)^2 \geq xy \Longleftrightarrow \left(\frac{x+y}{2}\right)^2 - xy \geq 0 \Longleftrightarrow A_2 - A_1 \geq 0,$$

da última desigualdade conclui-se que $A_2 \geq A_1$, consequentemente o quadrado é o retângulo de maior área fixada.

Outra solução: Sendo R um retângulo de dimensões x e y seu perímetro é $P = 2x + 2y$ e a sua área é $A = xy$. Daí,

$$P = 2x + 2y \Longrightarrow y = \frac{P - 2x}{2} \quad \text{e,}$$

$$A = xy \Longrightarrow A(x) = x \cdot \left(\frac{P - 2x}{2}\right) = \frac{Px - 2x^2}{2} = \frac{-2x^2 + Px}{2} = -x^2 + \frac{P}{2}x \cdot$$

Observe que trata-se de uma função quadrática em que o coeficiente do termo quadrático é negativo, logo o máximo desta função ocorre em $-b/2a$. Como neste caso $b = P/2$ e $a = -1$ tem-se que $x = P/4$ é o ponto máximo de $A(x)$, ou seja, a área será máxima quando o retângulo for um quadrado.

As duas soluções apesar de usar ferramentas distintas levaram ao mesmo resultado, sempre que isto acontecer pode-se ter certeza quanto ao resultado encontrado? Qual a principal conclusão deste problema, ou seja, esta situação pode ser generalizada? Se a resposta for sim, em quais situações este resultado pode ser utilizado?

Problema 8: (UFG) Um quadrado de $4cm$ de lado é dividido em dois retângulos. Em um dos retângulos, coloca-se um círculo, de raio R, tangenciando dois de seus lados opostos, conforme a figura a seguir:

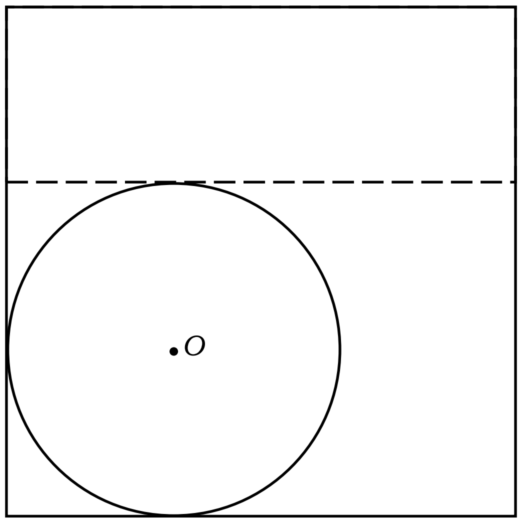

Figura 4: Problema 8

a) Escreva uma expressão que represente a soma das áreas do círculo e do retângulo, que não contém o círculo, em função de R.

b) Qual deve ser o raio do círculo, para que a área pedida no item anterior seja a menor possível?

Solução: Neste problema é importante observar que a figura é muito útil para compreender melhor a situação descrita pelo problema.

a) Seja A a soma das áreas do círculo e do retângulo que não o contém, e R o raio do círculo, tem-se que as dimensões do retângulo que não contém círculo são 4cm e $(4-2R)$cm. Consequentemente,

$$A(R) = \pi R^2 + 4 \cdot (4 - 2R) \Longrightarrow A(R) = \pi R^2 + 16 - 8R.$$

b) Como pelo item (a) foi obtida uma função quadrática em função de R, onde o coeficiente do termo quadrático é positivo, a mesma admite ponto de mínimo que ocorre quando $x = 4/\pi$.

Trata-se de um problema geométrico de otimização, porém pode foi possível resolve-lo usando ferramentas algébricas. Usando este problema e outros apresentados anteriormente que envolveram função quadrática, já é possível identificar quais as características deve ter um problema de otimização para que o mesmo seja resolvido com máximo ou mímimo de funções quadráticas? Se o mesmo for conduzido a alguma função polinomial com grau ($n > 2$), como pode-se determinar o seu máximo ou mínimo caso exista?

Problema 9: Qual o maior valor atingido pela função

$$f(x) = \sqrt{8x - x^2} \; - \; \sqrt{14x - x^2 - 48}$$

para quaisquer valores reais de x?

Solução: Apesar dos radicais, o problema se resume a uma situação na qual deve-se maximizar a função quadrática que aparece no primeiro radical e minimizar a do segundo radical, caso seja possível para um mesmo x no intervalo em que a função está definida. Pode-se utilizar a ideia de máximo e mínimo de função quadrática, pois minimizar/maximizar a raiz quadrada é equivalente a minimizar/maximizar o radicando. Não se pode esquecer que o intervalo onde a função está definida é a interseção dos intervalos onde cada um dos radicais é não-negativo.

Deve-se maximizar o primeiro radical e minimizar o segundo radical, de modo que a função esteja definida nos reais, ou seja, ambos os valores dos radicais devem ser não-negativos. Tem-se que $8x - x^2 = x(8 - x)$, ou seja, uma parábola com concavidade voltada para baixo que corta o eixo das abscissas nos pontos $x = 0$ e $x = 8$. Logo pela simetria da parábola, o máximo acontece em $x = 4$, sendo crescente em $[0, 4]$ e decrescente em $[4, 8]$. Por outro lado, $14x - x^2 - 48 = -(7 - x)^2 + 1$, logo observa-se que $f(x)$ está definida para $(7 - x)^2 \leq 1$, ou seja, $6 \leq x \leq 8$. Analisando $-(7 - x)^2 + 1$ tem-se novamente uma parábola com concavidade voltada para baixo que se anula para $x = 6$ e $x = 8$, sendo crescente no intervalo $[6, 7]$ e decrescente no intervalo $[7, 8]$. Logo precisa-se encontrar o valor de $x \in [6, 8]$ que maximiza $f(x)$, assim pelas análises feitas anteriormente neste intervalo, tem-se que $x = 6$ maximiza o valor do primeiro radical e minimiza o valor do segundo radical. Assim $f(x) = 2\sqrt{3}$ é o valor máximo da função, que ocorre quando $x = 6$.

É interessante ressaltar que, além de máximo e mínimo de função quadrática, a análise das funções foi muito importante para obter a solução da mesma. Se o máximo de uma função não coincidisse com o mínimo da outra, como poderíamos resolver uma questão deste tipo? Será que a utilização de derivada facilitaria a solução desta questão?

Problema 10: Prove que, de todos os triângulos de mesmo perímetro, o equilátero possui a maior área.

Solução: A desigualdade entre as médias aritmética e geométrica pode ajudar a resolver este problema, pois o perímetro envolve soma dos lados e a área envolve o produto entre estes (fórmula de Herón).

Sejam a, b e c os lados do triângulo e $p = \dfrac{a+b+c}{2}$, ou seja, p o semi-perímetro. Usando a fórmula de Héron para cálculo de área de triângulos tem-se

$$A = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} = \sqrt{p}.\sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)}.$$

como p é fixo, então A será máximo quando $(p-a)(p-b)(p-c)$ for máximo. Pela desigualdade entre as médias aritmética e geométrica tem-se

$$\sqrt[3]{(p-a)(p-b)(p-c)} \ \leq \ \frac{p-a+p-b+p-c}{3} = \frac{p}{3}$$

e, ainda mais, a igualdade só ocorre quando $p-a = p-b = p-c$, ou seja, $a = b = c$, como pretendia-se demonstrar. O resultado deste problema traz uma importante propriedade válida para triângulos, este resultado também já tinha sido observado para retângulos. Será que este resultado é válido para um polígono com n lados? Em caso afirmativo, é possível ser mostrado usando simplesmente a desigualdde das médias geométrica e aritmética?

Problema 11: Determinar as dimensões do paralelepípedo de menor diagonal possível, sabendo que a soma dos comprimentos de todas as suas arestas é 12.

Solução: A desigualdade entre as médias quadrática e aritmética pode ajudar a resolver o problema. Pois, o comprimento da diagonal de um paralelepípedo de dimensões a, b e c é dado por: $d = \sqrt{a^2+b^2+c^2}$, o que sugere o uso da média quadrática. Por outro lado, a soma de todas as arestas pode ser associada à média aritmética.

Sejam a, b e c as dimensões do paralelepípedo, logo pretende-se minimizar

$$d = \sqrt{a^2+b^2+c^2},$$

onde d representa o comprimento da diagonal do paralelepípedo. Por outro lado, tem-se

$$4a + 4b + 4c = 12 \iff a + b + c = 3.$$

Assim, usando a desigualdade das médias quadrática e aritmética tem-se que

$$\sqrt{\frac{a^2 + b^2 + c^2}{3}} \ \geq \ \frac{a + b + c}{3} \ = \ 1 \implies a^2 + b^2 + c^2 \ \geq \ 3.$$

Portanto, para minimizar d usa-se a igualdade que ocorre quando $a = b = c = 1$, ou seja, quando o paralelepipedo for um cubo de lado 1, a diagonal será mínima e igual a $\sqrt{3}$.

Algumas questões são pertinentes a respeito deste problema: Quando usar a desigualdade entre as médias quadrática e aritmética? É possível usar este mesmo resultado para outros poliedros regulares?

Problema 12: Sendo x e y números reais positivos, determinar o valor máximo de $E = xy(1 - x - y)$.

Solução: É suficiente considerar apenas os valores de x e y tais que $x + y < 1$, pois caso contrário, tem-se $1 - x - y \leq 0$, o que tornaria E negativo. No entanto, é fácil ver que E é positivo se $x + y < 1$. Portanto, pela desigualdade das médias aritmética e geométrica tem-se

$$\sqrt[3]{xy(1 - x - y)} \ \leq \ \frac{x + y + 1 - x - y}{3} \ \iff \ xy(1 - x - y) \ \leq \ \frac{1}{27}.$$

De onde conclui-se que o valor máximo de E é $1/27$, que ocorre quando $x = y = 1 - x - y$, ou seja, quando $x = y = 1/3$.

Problema 13: Encontre o menor valor assumido pela função $f(x) = 3x^3 - 6x^2 + 4$ para $x > 0$.

Solução: Uma possibilidade, ainda que um tanto obscura, para tentar resolver este problema é empregar a desigualdade entre as médias aritmética e geométrica envolvendo alguns dos termos da função. Tem-se que $3x^3 + 4 = x^3 + 2x^3 + 4$, logo, pela desigualdade entre as médias aritmética e geométrica,

$$\frac{x^3 + 2x^3 + 4}{3} \ \geq \ \sqrt[3]{x^3 \cdot 2x^3 \cdot 4} \ = \ 2x^2 \implies 3x^3 + 4 \geq 6x^2,$$

ou seja, $f(x)$ é não-negativa. Mas, como a igualdade entre os números positivos x^3, $2x^3$ e 4 não ocorre para nenhum valor de x, conclui-se que, apesar de $f(x) \geq 0$, o mínimo de $f(x)$ é obviamente maior do que zero. Assim, a desigualdade entre as médias não é suficiente para resolver o problema. Por outro lado, analisando os intervalos de crescimento e decrescimento de $f(x)$, pode-se concluir a solução. Por exemplo, $f(x)$ é decrescente em x se, para $h > 0$, $f(x+h) - f(x) < 0$, por menor que seja h. Mas

$$
\begin{aligned}
f(x+h) - f(x) &= 3(x+h)^3 - 6(x+h)^2 + 4 - 3x^3 + 6x^2 - 4 \\
&= 3x^3 + 9x^2h + 9xh^2 + 3h^3 - 6x^2 - 12xh - 6h^2 + 4 - 3x^3 + 6x^2 - 4 \\
&= 9x^2h + 9xh^2 + 3h^3 - 12xh - 6h^2 \\
&= 3h[h^2 + (3x-2)h + 3x^2 - 4x].
\end{aligned}
$$

Para que esta última igualdade seja negativa, por menor que seja h, deve-se ter

$$h^2 + (3x-2)h + 3x^2 - 4x < 0.$$

Para isso, é necessário que $3x^2 - 4x < 0$ que ocorre para $0 < x < 4/3$. Para determinar onde $f(x)$ é crescente, o desenvolvimento é análogo, invertendo-se apenas a desigualdade, ou seja, para que $f(x+h) - f(x) > 0$, por menor que seja h, deve-se ter $x < 0$ ou $x > 4/3$. Portanto, como $f(x)$ é decrescente para $x < 4/3$ é crescente para $x > 4/3$, conclui-se que $f(4/3) = 4/9$ é o menor valor atingido pela função.

Algumas conclusões não podem deixar de ser comentadas. A desigualdade das médias neste caso não resolveu o problema, pois o caso da igualdade, que maximiza ou minimiza dependendo da situação não faz sentido neste caso. Para resolver o problema foi feita uma análise dos intervalos de crescimento da função.

Problema 14: Suponha uma estátua de altura h sobre um pedestal de altura p. Um observador de altura m $(m < p)$ enxerga do pé ao topo da estátua sob um ângulo α, que varia de acordo com a distância d entre o observador e a base do pedestal, conforme figura 5. Determinar a distância d para que o ângulo de visão seja o maior possível.

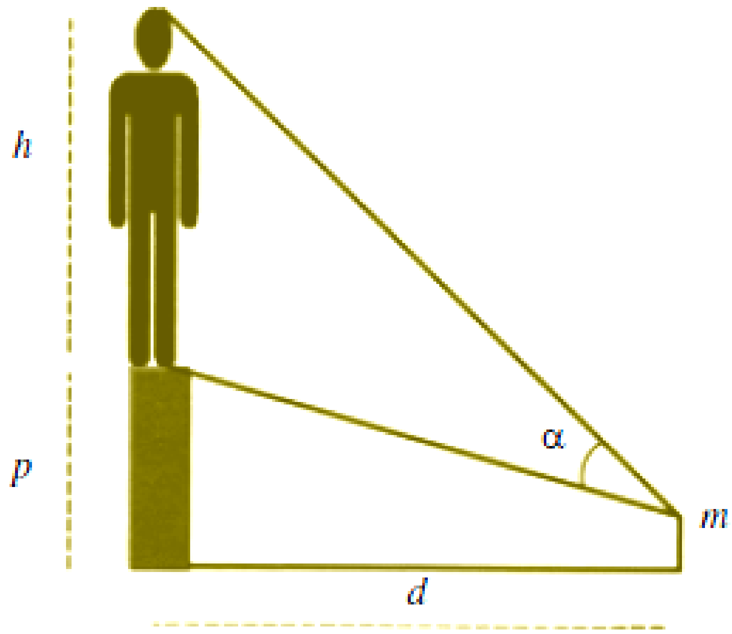

Figura 5: Problema 14 - Figura obtida em [10]

Solução: O observador vê a estátua sob o ângulo $\alpha = \theta_1 - \theta_2$ onde θ_1 e θ_2 são os ângulos entre a horizontal à altura do observador e os segmentos que ligam ao topo e ao pé da estátua, respectivamente. Logo tem-se

$$\operatorname{tg}(\alpha) \;=\; \operatorname{tg}(\theta_1 - \theta_2) \;=\; \frac{\operatorname{tg}(\theta_1) - \operatorname{tg}(\theta_2)}{1 + \operatorname{tg}(\theta_1) \cdot \operatorname{tg}(\theta_2)}.$$

Como d é a distância entre o observador e a estátua, tem-se

$$tg(\theta_1) = \frac{h+p-m}{d} \quad \text{e} \quad tg(\theta_2) = \frac{p-m}{d},$$

assim fazendo $H_1 = h + p - m$ e $H_2 = p - m$:

$$\begin{aligned} tg(\alpha) \;&=\; \frac{\frac{H_1}{d} - \frac{H_2}{d}}{1 + \frac{H_1 H_2}{d^2}} \\ &=\; \frac{H_1 - H_2}{d + \frac{H_1 H_2}{d}}. \end{aligned}$$

Sabe-se que $tg(\alpha)$ é crescente no intervalo $[0, \pi/2[$, portanto maximizar α é equivalente a maximizar $tg(\alpha)$. Por outro lado, para maximizar $tg(\alpha)$ deve-se minimizar a expressão $d + (H_1H_2)/d$ uma vez que $H_1 - H_2$ é constante. Para achar d que minimiza a expressão $d + (H_1H_2)/d$, basta usar a desigualdade entre as médias aritmética e geométrica.

Portanto:

$$\frac{d + \dfrac{H_1H_2}{d}}{2} \geq \sqrt{d \cdot \frac{H_1H_2}{d}} \Longleftrightarrow d + \frac{H_1H_2}{d} \geq 2\sqrt{H_1H_2}.$$

Assim $d + (H_1H_2)/d$ é sempre maior do que ou igual a $2\sqrt{H_1H_2}$, a igualdade só ocorre quando $d = (H_1H_2)/d$, ou seja, quando $d = \sqrt{H_1H_2}$. Daí conclui-se que o ângulo de visão α é máximo quando $d = \sqrt{(h + p - m)(p - m)}$.

Um fato histórico sobre este problema merece ser comentado. O problema foi proposto por Johann Müller(1436-1476), um dos maiores matemáticos do século XV, mais conhecido como *Regiomontannus*, uma latinização do nome de sua cidade natal. Segundo Mello[10], este problema data de 1471, sendo o primeiro problema de extremos na história da Matemática desde a antiguidade. O artigo Mello[10] traz uma solução usando métodos geométricos, logo foi possível mais uma vez mostrar a eficácia da *desigualdade das médias* na solução de problemas de otimização.

4 Uma curiosidade sobre a utilização da Desigualdade das Médias

Além de ser eficiente na resolução de alguns problemas de otimização, a desigualdade das médias tem outras aplicações, a seguir será apresentada uma delas. A ideia foi proposta por Carneiro[2], e, consiste basicamente em usar a desigualdade entre as médias para aproximar raízes quadradas.

Dados dois números positivos a e b, suas médias aritmética (m_a), geométrica (m_g) e harmônica (m_h) têm as seguintes propriedades:

i) $m_h = \dfrac{2ab}{a+b} \;\leq\; m_g = \sqrt{ab} \;\leq\; m_a = \dfrac{a+b}{2}$, sendo que a igualdade ocorre somente quando $a = b$.

ii) $\sqrt{m_h m_a} \;=\; m_g$.

A demonstração da primeira propriedade já foi apresentada no Teorema 1. Por outro lado, a afirmação (ii) resulta de cálculo direto, uma vez que

$$\sqrt{m_h m_a} \;=\; \sqrt{\frac{2ab}{a+b}\cdot\frac{a+b}{2}} \;=\; m_g.$$

É possível usar estas propriedades para calcular, por exemplo, aproximações racionais de $\sqrt{5}$. Primeiro, como $5 = 1 \cdot 5$, tem-se pela propriedade (i), que

$$\frac{5}{3} = \frac{2.1.5}{1+5} \;<\; \sqrt{5} \;<\; \frac{1+5}{2} = 3.$$

Como, pela propriedade (ii), a média geométrica destas duas novas frações continua sendo igual a $\sqrt{5}$, segue que

$$\frac{15}{7} \;=\; \frac{2\cdot\dfrac{5}{3}\cdot 3}{\dfrac{5}{3}+3} \;<\; \sqrt{\frac{5}{3}\cdot 3} \;<\; \frac{\dfrac{5}{3}+3}{2} \;=\; \frac{7}{3}.$$

Aplicando sucessivamente o mesmo procedimento:

$$\frac{105}{47} \;=\; \frac{2\cdot\dfrac{15}{7}\cdot\dfrac{7}{3}}{\dfrac{15}{7}+\dfrac{7}{3}} \;<\; \sqrt{\frac{15}{7}\cdot\frac{7}{3}} \;<\; \frac{\dfrac{15}{7}+\dfrac{7}{3}}{2} \;=\; \frac{47}{21}.$$

Observa-se que como $105/47 = 2,234042...$ e $47/21 = 2,238095...$, este método de aproximação é bastante eficiente, já que $\sqrt{5} \cong 2,236067$, significa que foi possível conseguir uma aproximação com duas casas decimais em apenas três iterações. É possível mostrar que este processo de aproximação coincide com o "método de Newton(1642-1727)"(ver **RPM** 21, pág 13). Logo Carneiro conclui:

> "Mais uma vez se constata que, ao estudar a história da Matemática, o professor pode extrair daí não somente episódios curiosos, mas também questões interessantes, que permitam a seus alunos investigar métodos diferentes dos usuais, e igualmente produtivos".

Considerações Finais

Este trabalho apresentou uma possibilidade da aplicação de alguns métodos algébricos na resolução de problemas de otimização, mostrou, por exemplo, que a desigualdade entre as médias aritmética e geométrica possibilita a determinação do valor "ótimo" das funções expressas por adição de potências positivas e negativas de uma determinada variável onde os coeficientes são positivos, e também, que o estudo dos intervalos de crescimento e decrescimento das funções contínuas pode ser aplicado a situações que envolvem funções cúbicas, uma vez que as mesmas serão reduzidas ao estudo de funções quadráticas. Para as funções discretas, valem as mesmas condições que para as contínuas (cúbicas definidas sobre o conjunto dos números inteiros, por exemplo, tem sua análise facilitada). Além disso o método é interessante no caso em que a função envolva produtos de potências ou fatoriais, uma vez que se pode analisar o quociente $f(n+1)/f(n)$ para obter onde a função é crescente ou decrescente.

A expectativa é que este material possa servir como referência ou apoio na construção de uma sequência didática inovadora e eficiente para a utilização de problemas de otimização em sala de aula em turmas do Ensino Médio, devido aos pré-requisitos necessários e o grau de amadurecimento intelectual dos alunos. O uso deste tipo de problema no Ensino Médio pode oferecer algumas vantagens, destacando-se uma ampla diversidade de problemas contextualizados e, em alguns casos, interdisciplinares, cujas aplicações estão próximas à realidade dos estudantes.

Não se pode deixar de destacar as ideias para solução de problemas propostas por Polya[12] que foram relatadas e utilizadas amplamente neste trabalho. Tais ideias bem compreendidas e aplicadas podem tornar-se um importante instrumento na solução e análise de diversos tipos de problemas, incluindo os problemas de otimização, além de preparar os alunos para melhor enfrentar situações adversas não só na sua vida "acadêmica", mas também na sua vida "pessoal".

Espera-se que este trabalho possa contribuir como um "pequeno" exemplo de como é possível despertar o interesse dos alunos e motivá-los a partir de uma mudança na abordagem de um determinado conteúdo, como é a proposta apresentada pelo conteúdo *Médias*. Tais mudanças de abordagem nos conteúdos de Matemática do Ensino Médio devem ter como objetivo principal despertar o prazer de estudar, aprender e pesquisar Matemática.

Outro importante fato, que não pode deixar de ser ressaltado, é que os *Problemas de Otimização* oferecem ao professor uma grande oportunidade de trabalhar a interdisciplinaridade, devido a sua relação natural com outras áreas do conhecimento como a Biologia, a Física, a Economia, o Transporte, a Administração, dentre outras não menos importantes.

Mais especificamente este trabalho mostra que a *"Desigualdade das Mé-*

dias" pode ser uma importante ferramenta capaz de resolver problemas de otimização ligados à Geometria Plana e ao Cálculo Diferencial, é claro que existem algumas particularidades que devem estar presentes no problema para que seja possível resolvê-lo usando tal ferramenta, algumas destas foram exploradas neste trabalho. A maioria dos problemas apresentados neste trabalho foram extraídos de livros conceituados de Cálculo Diferencial, e as suas soluções usando os métodos aqui expostos são perfeitamente compreensíveis pelos alunos do Ensino Médio, é claro que posteriormente as explicações de alguns conceitos e resultados imprescindíveis ao estudo deste tema, logo estes métodos podem servir como uma tentativa de suprir a ausência do Cálculo Diferencial nas atuais orientações curriculares para o Ensino Médio.

Referências

[1] **ÁVILA, Geraldo Severo de Souza**. *Revista do Professor de Matemática nº18*. Rio de Janeiro: pág.6, SBM, 1991.

[2] **CARNEIRO, José Paulo Q.**. *Revista do Professor de Matemática nº45*. Rio de Janeiro: págs. 21 à 28, SBM, 2001.

[3] **DANTE, Luiz Roberto**. *Matemática: contexto e aplicações. Volumes 1,2 e 3*. São Paulo: Editora Ática, 3ªEd., 2007.

[4] **DISTRITO FEDERAL, Secretaria de Estado de Educação. Subsecretaria da Educação Básica**. *Currículo Educação Básica - Ensino Médio*. Brasília: SEE/SUBEB, pág.109, 2008.

[5] **EVES, Howard**. *Introdução à História da Matemática. Tradução: Higyno H. Domingues*. Campinas: Editora da Unicamp, pág.695, 2004.

[6] **HOFFMANN, Laurence D.; BRADLEY, Geraldo L.**. *Cálculo: um curso moderno e suas aplicações. Tradução: Pedro P. de Lima e Silva*. Rio de Janeiro: LTC, 6ªEd., 1999.

[7] **IEZZI, Gelson; DOLCE, Osvaldo; DEGENSZAJN, David; PÉRIGO, Roberto; ALMEIDA, Nilze de**. *Matemática: Ciência

e Aplicações. Volumes 1, 2 e 3. São Paulo: Atual Editora, 2ªEd., 2004.

[8] **LIMA, Elon Lages; CARVALHO, Paulo Cezar Pinto; WAGNER, Eduardo; MORGADO, Augusto César**. *A Matemática do Ensino Médio. Volume 1.* Rio de Janeiro: SBM, 9ªEd., 2006.

[9] **LIMA, Elon Lages; CARVALHO, Paulo Cezar Pinto; WAGNER, Eduardo; MORGADO, Augusto César**. *A Matemática do Ensino Médio. Volume 2.* Rio de Janeiro: SBM, 9ªEd., 2006.

[10] **MELLO, Jose Luiz Pastore**. *Explorando o Ensino da Matemática. Artigos. Volume 1.* Brasília: Ministério da Educação, Secretaria de Educação Básica, págs.152 à 155, 2004.

[11] **OLIVEIRA, Krerley Irraciel Martins; FERNÁNDEZ, Adán José Corcho**. *Iniciação à Matemática: um curso com problemas e soluções.* Rio de Janeiro: SBM, 2012.

[12] **POLYA, George**. *A arte de resolver problemas.* Rio de Janeiro: Interciência, 2ªEd., 2006.

[13] **POZO, Juan Ignácio**. *A solução de problemas: aprender a resolver, resolver para aprender. Tradução: Beatriz Affonso Neves.* Porto Alegre: Artmed, 1998.

[14] **STEWART, James**. *Cálculo - Volume 1. Tradução: Antônio Carlos Moretti e Antônio Carlos Gilli Martins*. São Paulo: Pioneira Thomson Learning, 5ªEd., 2005.

[15] **WAGNER, Eduardo**. *Revista do Professor de Matemática nº18*. Rio de Janeiro: págs.43 à 47, SBM, 1991.