

Sumário

1	Introdução	12
2	Matrizes	13
2.1	Elementos de uma Matriz:	13
2.2	Matriz Generalizada	13
2.3	Classificação de Matrizes	14
2.3.1	Matrizes Especiais	14
2.3.2	Operações com Matrizes	15
2.3.3	Determinantes:	17
3	Diagonalização de Matrizes	21
4	Raiz Quadrada de uma Matriz de Ordem 3	29
5	Raiz Quadrada de uma Matriz de Ordem N	36
6	Raiz n-ésima de uma Matriz Quadrada	39
7	Considerações Finais	41



Universidade Federal de Goiás
Instituto de Matemática e Estatística
Programa de Mestrado Profissional em
Matemática em Rede Nacional



Raiz Quadrada de Matrizes de Ordem $n \times n$

Ronaldo Caetano de Mendonça Junior

Goiânia

2014

Esta Página é a do “Termo de Ciência e de Autorização para publicação eletrônica do TCC pela Biblioteca da UFG”, a qual deve ser encadernada no VERSO da página anterior O Formulário desse Termo de Ciência está em anexo.

Ronaldo Caetano de Mendonça Junior

Raiz Quadrada de Matrizes de Ordem $n \times n$

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Instituto de Matemática e Estatística da Universidade Federal de Goiás, como parte dos requisitos para obtenção do grau de Mestre em Matemática.

Área de Concentração: Matemática do Ensino Básico

Orientador: Prof. Dr. Mário José de Souza

Goiânia
2014

Esta é a Página da Ficha de Catalogação com os dados internacionais de Catalogação, fornecidos pela Biblioteca da UFG”. OBS. ESTA PÁGINA DEVE SER ENCADERNADA NO VERSO DA PÁGINA ANTERIOR. OBS: O aluno deve pegar esta Ficha no site da Biblioteca, <http://www.bc.ufg.br>, preenche-la, e enviar para a Biblioteca (Tel. (62) 3521-1229), juntamente com Sumário, Resumo, e Folha de rosto do TCC. Posteriormente a Biblioteca envia de volta a Ficha com todos os dados.

“OBS: Página de aprovação do Trabalho, com as assinaturas dos Membros da Banca”

Todos os direitos reservados. É proibida a reprodução total ou parcial deste trabalho sem a autorização da universidade, do autor e do orientador.

Ronaldo Caetano de Mendonça Junior, graduou-se em Matemática pela **Universidade Federal de Goiás**.

Dedico este trabalho à minha amada esposa Patrícia e
aos meus queridos filhos, Igor e Davi.

Agradecimentos

Agradeço à Deus, a Universidade Federal de Goiás, na pessoa do Prof. Jesus Mota, ao meu orientador Prof. Mário José, pela paciência, cordialidade e profissionalismo durante os encontros de orientação, aos meus grandes amigos Neydwan e Rogério Sullivan, à CAPES pelo apoio financeiro e a minha Família, que sempre me apoiaram em todos os momentos.

Resumo

Os tópicos são apresentados com a preocupação de tornar menos abstrato determinados conteúdos não familiares para alunos do ensino médio. Para isso, criamos uma cronologia das operações e condições, que permitem e precedem o cálculo da Raiz Quadrada de Matrizes de Ordem $n \times n$.

Inicialmente é feito um resumo de matrizes, no Capítulo 3, diagonalização de matrizes, se cria o ambiente inicial das condições para se calcular as raízes de matrizes, no Capítulo 4, é definida e calculada a raiz quadrada de uma matriz de ordem 3, afim de que pelo exemplo número 12, oferecermos maior materialidade ao leitor, já no Capítulo 5 é iniciado o trabalho de generalização, onde definimos e calculamos a raiz quadrada de uma matriz de ordem n . Finalmente o Capítulo 6 aborda todos os conceitos construídos nas seções anteriores para a definição e apresentação da metodologia para o cálculo da raiz n -ésima de uma matriz quadrada.

Palavras – chave

Matriz, Raiz N -ésima, Quadrada

Abstract

The topics are presented in the interest of making it less abstract certain unfamiliar content to middle school students . To do this , create a chronology of operations and conditions that precede and enable the calculation of the nth Root of a Square Matrix .

Initially a brief summary is made of arrays in Chapter 3 , diagonalization of matrices , creates this environment of initial conditions to calculate the roots of matrices , in Chapter 4 , is defined and calculated the square root of a matrix of order 3 , in order that by example number 13 , bring greater materiality to the reader , as in Chapter 5 started the work of generalization , where we define and calculate the square of a matrix of order n root . Finally Chapter 6, covers all concepts constructed in the previous sections for definition and presentation of the methodology for calculating the nth root of a square matrix .

Keywords

Matrix, N-Root, Square.

1 Introdução

O trabalho que se segue tem o propósito de aprofundar os estudos de matrizes e de responder a seguinte questão:

Sabemos que no corpo dos números reais, \mathbb{R} , as operações de adição, subtração, multiplicação e divisão dão origem à potenciação e radiciação. Será que no anel das matrizes as operações fundamentais poderiam também dar origem às operações com potências de números inteiros (potenciação) e ou com potências de números racionais (radiciação)?

O presente trabalho é estruturado em capítulos. O Capítulo 2 destina-se aos conceitos iniciais de matrizes. No Capítulo 3, nos concentramos aos cálculos de autovalores, o de autovetores e matrizes semelhantes a fim de definirmos a diagonalização de matrizes.

O Capítulo 4 é destinado ao cálculo de raiz quadrada da matriz de ordem 3, em seguida, no Capítulo 5, generalizamos para raiz quadrada de uma matriz de ordem N . No Capítulo 6 concluímos o trabalho com a generalização do conceito onde é apresentada a metodologia para o cálculo da raiz n -ésima de uma matriz quadrada, respondendo positivamente a questão principal do presente trabalho.

2 Matrizes

Neste capítulo são apresentados os principais tópicos de matrizes abordados no ensino médio. Para isto usamos a referência DANTE, LUIZ ROBERTO. *Contexto e Aplicações, Vol. 02*, Editora Àtica, 2010 e IEZZI, GELSON, HAZZAN, SAMUEL. Fundamentos de Matemática Elementar 4. Atual Editora, 1997.

Definição 1:

Denominamos matriz do tipo $m \times n$ ($m \in \mathbb{N}^*$ e $n \in \mathbb{N}^*$) a toda tabela composta por $(m \times n)$ elementos dispostos em m linhas e n colunas.

2.1 Elementos de uma Matriz:

Os elementos de uma matriz genérica A são localizados de acordo com a linha e coluna que compõem esta referida matriz. Desta forma foi adotada a letra minúscula a para designar o elemento e i e j para localizar a linha e coluna respectivamente, sendo i e j números naturais diferentes de zero. Logo, dada a matriz A , temos:

$$A = (a_{ij})_{m \times n},$$

Sendo:

- A = Matriz A .
- a_{ij} = elemento situado na linha i e coluna $j \in \mathbb{N}^*$.
- $m \times n$ = ordem da matriz.

2.2 Matriz Generalizada

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

Lê-se : Matriz A dos elementos a_{ij} de ordem $m \times n$.

Observações

- Podemos também escrever $A = (a_{ij})_{m \times n}$, como $A = [a_{ij}]_{m \times n}$, e $A = \|a_{ij}\|_{m \times n}$.
- Sendo $A = (a_{ij})$, sendo a_{ij} é um elemento genérico de A, devemos ter $1 \leq i \leq m$ e $1 \leq j \leq n$.

2.3 Classificação de Matrizes

- a) **Matriz Linha:** São todas as matrizes da do tipo $1 \times n$.
- b) **Matriz Coluna :** São todas as matrizes do tipo $m \times 1$.
- c) **Matriz Nula ($O_{m \times n}$):** São todas as matrizes A, $m \times n$, onde qualquer a_{ij} é sempre igual a zero.
- d) **Matriz Retângular:** São todas as matrizes A, $m \times n$, onde $m \neq n$.
- e) **Matriz Quadrada:** São todas as matrizes A, $m \times n$, onde $m = n$, neste caso dizemos que a matriz é de ordem n .

2.3.1 Matrizes Especiais

- a) **Matriz Diagonal:** A matriz $A = (a_{ij})_{m \times n}$, é tal que $a_{ij} = 0$ para todo $i \neq j$, ou seja é aquela que tem todos os elementos nulos fora da diagonal principal.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$

b) Matriz Unidade ou Identidade : Matriz quadrada de orden n , indicada por $I_n = (a_{ij})_{n \times n}$, de modo que os elementos da diagonal principal ($i = j$) são iguais a 1 (unidade) e todos os demais são nulos, ou seja ;

$$I_n = (a_{ij})_{n \times n} = \begin{cases} 1, & \text{se } i = j \\ 0, & \text{se } i \neq j \end{cases}$$

2.3.2 Operações com Matrizes

Adição de Matrizes: Sejam duas matrizes, $A = (a_{ij})_{m \times n}$, e $B = (b_{ij})_{m \times n}$, a soma destas matrizes resulta em uma matriz $C = (c_{ij})_{m \times n}$, dado por $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$, para todo $1 \leq i \leq m$ e $1 \leq j \leq n$.

Assim, temos;

$$C = A + B$$

Propriedades da Adição de Matrizes:

Sendo A , B e C matrizes de mesmo tipo ($m \times n$), temos as seguintes propriedades da soma de matrizes.

a) **Comutatividade:**

$$A + B = B + A$$

b) **Associatividade:**

$$(A + B) + C = A + (B + C)$$

c) **Elemento Neutro:**

$$O + A = A + O = A$$

d) **Elemento Oposto:**

$$A + (-A) = (-A) + A = O$$

Multiplicação de um número real por uma matriz:

Dado um número real k e uma matriz A do tipo $m \times n$, o produto de k por A é uma matriz B , do tipo $m \times n$, obtida pela multiplicação de cada elemento de A por k , ou seja, $b_{ij} = ka_{ij}$.

$$B = k \cdot A$$

Exemplo 1. :

$$2 \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 7 & 6 & 5 \\ 6 & 5 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 8 \\ 14 & 12 & 10 \\ 12 & 10 & 2 \end{bmatrix}$$

Multiplicação de Matrizes: Dadas duas matrizes $A = (a_{ij})_{m \times n}$, e $B = (b_{jk})_{n \times p}$, a multiplicação de A por B , resulta na matriz $C = (c_{ik})_{m \times p}$, de modo que cada elemento

$$c_{ik} = a_{i1} \cdot b_{1k} + a_{i2} \cdot b_{2k} + a_{i3} \cdot b_{3k} + \dots + a_{in} \cdot b_{nk} = \sum_{j=1}^n a_{ij} \cdot b_{jk}, \text{ assim}$$

$$C = A \cdot B$$

Exemplo 2. : Sejam $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}$, determine a matriz $C = A \cdot B$

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 1 \cdot (-1) + 2 \cdot 3 & 1 \cdot 3 + 2 \cdot (-2) \\ 2 \cdot (-1) + 3 \cdot 3 & 2 \cdot 3 + 3 \cdot (-2) \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 5 & -1 \\ 7 & 0 \end{bmatrix}$$

Propriedades da multiplicação de matrizes:

Associativa: $A \cdot (B \cdot C) = (A \cdot B) \cdot C$.

Distributiva da Multiplicação com relação à adição: $A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C$.

Elemento Neutro : $A \cdot I_n = I_n \cdot A = A$, sendo I_n é a matriz identidade de ordem n .

Matriz Inversa: Dada uma matriz A quadrada, de ordem n , se existir um matriz A^{-1} , de mesma ordem, tal que $A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = I_n$. Então A^{-1} é a matriz inversa de A .

Observação: Só existe a inversa de A (A^{-1}) quando o determinante de A é diferente de zero ($\det(A) \neq 0$).

2.3.3 Determinantes:

Neste capítulo é apresentado o conceito de determinantes necessário para o desenvolvimento do trabalho .

Classe de uma permutação

Uma permutação das letras a, b e c do nosso alfabeto é a própria ordem

$$a \quad b \quad c$$

Definição 2: *Seja $S = \{1, 2, \dots, n\}$ o conjunto de inteiros de 1 a n , ordenados de maneira ascendente. A reordenação $j_1 j_2 \dots j_n$ dos elementos de S é chamada de permutação de S . Podemos considerar uma permutação de S como sendo uma função bijetora de S em si mesmo.*

Podemos colocar qualquer um dos n elementos de S na primeira posição, qualquer um dos $n - 1$ elementos remanescentes na segunda posição, qualquer um dos $n - 2$ elementos remanescentes na terceira posição, e assim até a $n - \text{ésima}$ posição, que pode ser preenchida pelo último elemento. Dessa maneira, há $n(n - 1)(n - 2) \dots 2 \cdot 1 = n!$ permutações de S . Representamos o conjunto de todas as permutações de S por S_n . Diz-se que dois elementos de uma permutação formam uma inversão se estão em ordem inversa à da permutação principal. Assim, na permutação dada acb , os elementos c e b formam uma inversão. Daí, uma permutação é de classe par ou de classe ímpar, conforme apresente um número par ou ímpar de inversões. Portanto, acb é de classe ímpar, pois possui apenas uma inversão. Se uma permutação é de classe par atribuiremos a ela o sinal de $+$ e se ela for de classe ímpar o sinal de $-$.

Exemplo 3. S_1 tem apenas uma permutação, logo é par pois não há inversões.

Exemplo 4. Na permutação de 4321 em S_4 , 4 precede 3, 4 precede 1, 4 precede 2, 3 precede 1 e 3 precede 2 e 2 precede 1. Dessa maneira, o número de inversões nessa permutação é 6, que é par.

Tabelas de permutações

Tabela referente às permutações dos números 1 e 2

O total de permutações dos números 1 e 2 é $P_2 = 2! = 2$. Logo, podemos formar a Tabela 1.

Tabela referente às permutações dos números 1, 2 e 3

Permutação Principal	Permutação	Inversões	Classe	Sinal
12	12	0	par	+
12	21	1	ímpar	-

Tabela 1: Permutações dos números 1 e 2.

O total de permutações dos números 1, 2 e 3 é $P_3 = 3! = 6$. Logo, podemos formar a Tabela 2.

Permutação Principal	Permutação	Inversões	Classe	Sinal
123	123	0	par	+
123	132	1	ímpar	-
123	312	2	par	+
123	213	1	ímpar	-
123	231	2	par	+
123	321	3	ímpar	-

Tabela 2: Permutações dos números 1, 2 e 3.

Chama-se determinante de uma matriz quadrada à soma algébrica dos produtos que se obtém efetuando todas as permutações dos segundos índices dos elementos da diagonal principal da matriz, fixados os primeiros, e fazendo-se preceder os produtos

do sinal $+$ ou $-$, conforme a permutação dos segundos índices seja de classe par ou de classe ímpar. De maneira formal, temos

Seja $A = [a_{ij}]$ uma matriz quadrada de ordem n . Define-se o determinante de A por

$$\text{Det}(A) = \sum (\pm) a_{1j_1} a_{2j_2} \dots a_{nj_n}$$

em que o somatório envolve todas as permutações $j_1 j_2 \dots j_n$ do conjunto $S = \{1, 2, \dots, n\}$. O sinal de $(a_{1j_1} a_{2j_2} \dots a_{nj_n})$ é $+$ ou $-$ conforme a permutação $j_1 j_2 \dots j_n$ é par ou ímpar.

Exemplo 5. Se A é a matriz de ordem 1, $A = [a_{11}]$, teremos somente a permutação principal. Assim, $\text{Det}(A) = a_{11}$.

Exemplo 6. Se A é a matriz de ordem 2, $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$, temos duas permutações em $S_2 : j_1$ e j_2 , sendo que a primeira é par e a segunda é ímpar, conforme a Tabela 1. Assim, vamos proceder da seguinte forma:

1º) Escrever os elementos que compõem a diagonal principal, um após o outro, somente com os primeiros índices (deixando lugar para colocar depois os segundos índices), tantas vezes quantas forem as permutações dos números 1 e 2 conforme Tabela 1.

$$a_1 \ a_2 \qquad a_1 \ a_2$$

2º) Colocar nas duas expressões anteriores, como segundos índices, as permutações 12 e 21, uma permutação em cada expressão e não necessariamente nessa ordem.

$$a_{11} \ a_{22} \qquad a_{12} \ a_{21}$$

3º) Fazer preceder cada um dos dois produtos assim formados dos sinais $+$ ou $-$, conforme a permutação dos segundos índices for de classe par ou de classe ímpar de acordo com a Tabela 1.

$$+a_{11} \ a_{22} \qquad - \ a_{12} \ a_{21}$$

4º) Efetuar a soma algébrica dos produtos assim obtidos, onde se terá:

$$\text{Det}(A) = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

Exemplo 7. Se A é a matriz de ordem 3, $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$, temos seis permutações em $S_3 : j_1, j_2, j_3, j_4, j_5, j_6$, com seus respectivos sinais, conforme a Tabela 2. Procedendo de forma análoga ao exemplo anterior, temos:

1º) Escrever os elementos que compõem a diagonal principal, um após o outro, somente com os primeiros índices (deixando lugar para colocar depois os segundos índices), tantas vezes quantas forem as permutações dos números 1, 2 e 3 conforme Tabela 2.

$$\begin{array}{ccc} a_1 & a_2 & a_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \end{array} \quad \begin{array}{ccc} a_1 & a_2 & a_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \end{array} \quad \begin{array}{ccc} a_1 & a_2 & a_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \end{array}$$

2º) Colocar, nas seis expressões anteriores, como segundos índices, as permutações 123, 132, 312, 213, 231 e 321, uma permutação em cada expressão e não necessariamente nessa ordem.

$$\begin{array}{ccc} a_{11} & a_{22} & a_{33} \\ a_{12} & a_{21} & a_{33} \end{array} \quad \begin{array}{ccc} a_{11} & a_{23} & a_{32} \\ a_{12} & a_{23} & a_{31} \end{array} \quad \begin{array}{ccc} a_{13} & a_{21} & a_{32} \\ a_{13} & a_{22} & a_{31} \end{array}$$

3º) Fazer preceder cada um dos seis produtos assim formados dos sinais + ou -, conforme a permutação dos segundos índices for de classe par ou de classe ímpar de acordo com a Tabela 2.

$$\begin{array}{ccc} +a_{11} & a_{22} & a_{33} \\ -a_{12} & a_{21} & a_{33} \end{array} \quad \begin{array}{ccc} -a_{11} & a_{23} & a_{32} \\ +a_{12} & a_{23} & a_{31} \end{array} \quad \begin{array}{ccc} +a_{13} & a_{21} & a_{32} \\ -a_{13} & a_{22} & a_{31} \end{array}$$

4º) Efetuar a soma algébrica dos produtos assim obtidos, onde se terá:

$$Det(A) = +a_{11}a_{22}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} - a_{13}a_{22}a_{31}$$

que pode ser escrita como

$$Det(A) = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{13}a_{21}a_{32} + a_{12}a_{23}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31}$$

3 Diagonalização de Matrizes

Uma relação entre matrizes que é muito importante no estudo de operadores lineares e também no estudo de autovalores é relação de semelhança de matrizes.

Definição 3 : Sejam A e B matrizes $n \times n$. Dizemos que B é semelhante a A , se existe uma matriz invertível P tal que $B = PAP^{-1}$.

Definição 4 : Uma matriz $A_{n \times n}$ é dita diagonalizável se for semelhante a uma matriz diagonal.

Sgue da definição 4, uma matriz $A_{n \times n}$ é diagonalizável se existem matrizes $P_{n \times n}$ (invertível) e $D_{n \times n}$ (diagonal) tais que $A = PDP^{-1}$.

$$P = [v_1 \ v_2 \ \cdots \ v_n] \quad \text{e} \quad D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_n \end{bmatrix}$$

como,

$$A = PDP^{-1}$$

multiplicando P em ambos os lados, teremos

$$AP = PDP^{-1}P$$

como,

$$P^{-1}P = I$$

e I é o elemento neutro da multiplicação de matrizes, temos

$$AP = PD$$

$$A \cdot [v_1 \ v_2 \ \cdots \ v_n] = [v_1 \ v_2 \ \cdots \ v_n] \cdot \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_n \end{bmatrix}$$

$$[Av_1 \ Av_2 \ \cdots \ Av_n] = [\lambda_1 v_1 \ \lambda_2 v_2 \ \cdots \ \lambda_n v_n]$$

igualando,

$$\begin{aligned} Av_1 &= \lambda_1 v_1 \\ Av_2 &= \lambda_2 v_2 \\ &\vdots \\ Av_n &= \lambda_n v_n \end{aligned}$$

Dada uma matriz $A_{n \times n}$, um escalar λ é chamado autovalor e um vetor não nulo $v \in R^n$ é chamado autovetor de A se $Av = \lambda v$.

Assim, mostramos que se uma matriz $A_{n \times n}$ é diagonalizável, ou seja, se existem matrizes P e D tal que $A = PDP^{-1}$ então as colunas de P são autovetores linearmente independentes (LI), pois P é invertível, associados aos autovalores λ_n , que são os elementos da diagonal de D .

Portanto, para determinar se uma matriz A é diagonalizável, precisamos determinar primeiramente seus autovalores e isso pode ser feito da seguinte maneira:

Resolver a equação

$$Av = \lambda v$$

que é equivalente a,

$$Av = \lambda Iv$$

ou ainda,

$$Av - \lambda Iv = 0 \Rightarrow (A - \lambda I)v = 0.$$

Assim, λ será um autovalor de A , se e somente se, o sistema homogêneo $(A - \lambda I)X = 0$ possuir soluções não triviais. Mas isso acontecerá, quando, $\det(A - \lambda I) = 0$, que é um polinômio de grau n em λ .

Logo como os autovalores de A são exatamente as raízes deste polinômio, também conhecido por polinômio característico de A , o qual denotamos por $P_A(x)$.

Teorema 1 : *Sejam A e B matrizes semelhantes. Então A e B têm o mesmo polinômio característico e, conseqüentemente, os mesmos autovalores.*

Demonstração: *Sendo A e B matrizes semelhantes, isto é existe uma matriz invertível P tal que $B = PAP^{-1}$.*

Assim,

$$\begin{aligned}P_B(x) &= \det(xI - B), \text{ com } I = PP^{-1} \\ &= \det(xPIP^{-1} - PAP^{-1}) \\ &= \det(P(xI - A)(P^{-1})) \\ &= \det(P) \det(xI - A) \det(P^{-1}) \\ &= \det(xI - A) \\ &= P_A(x).\end{aligned}$$

Sendo os polinômios característicos iguais e como os autovalores são as raízes desse polinômio, segue que A e B têm os mesmos autovalores. O conceito de diagonalização de matrizes, será usado mais a frente para cálculo de potências de matrizes.

Exemplo 8. . *Vamos determinar os autovalores da matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -4 & 1 \end{bmatrix}$.*

Solução: *Para essa matriz o polinômio característico é*

$$p(\lambda) = \det(A - \lambda I_2) = \det \begin{bmatrix} 1 - \lambda & -1 \\ -4 & 1 - \lambda \end{bmatrix} = (1 - \lambda)^2 - 4 = \lambda^2 - 2\lambda - 3.$$

Como os autovalores de A são as raízes de $p(\lambda)$, teremos $p(\lambda) = 0 \Rightarrow \lambda^2 - 2\lambda - 3 = 0$ então os autovalores de A são: $\lambda_1 = 3$ e $\lambda_2 = -1$.

Uma vez encontrados os autovalores da matriz, para encontrar os autovetores basta resolver o sistema linear homogêneo $(A - \lambda I)X = 0$. Assim,

para $\lambda_1 = 3$ temos

$$\begin{aligned} \left(\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -4 & 1 \end{bmatrix} - 3 \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right) \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\ \left(\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -4 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \right) \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ -4 & -2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} -2x - y \\ -4x - 2y \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

equivalente ao sistema linear;

$$\begin{cases} -2x - y = 0 \\ -4x - 2y = 0 \end{cases}$$

cuja solução geral é

$$v_1 = \{(\alpha, -2\alpha); \alpha \in \mathbb{R}^*\}.$$

que é o conjunto de todos os autovetores associados a $\lambda_1 = 3$. Analogamente, fazendo o mesmo para $\lambda_2 = -1$, encontramos $v_2 = \{(\alpha, 2\alpha); \alpha \in \mathbb{R}^*\}$, que é o conjunto de todos os autovetores associados a $\lambda_2 = -1$.

Agora que já sabemos encontrar os autovalores e os autovetores de uma matriz, podemos enunciar o seguinte teorema.

Teorema 2 : Se uma matriz $A_{n \times n}$ tem n autovalores distintos, então ela é diagonalizável.

E vale lembrar que a matriz diagonal

$$D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_n \end{bmatrix}$$

é formada pelos autovalores λ_n de A em sua diagonal principal e a matriz

$$P = [v_1 \ v_2 \ \cdots \ v_n]$$

é formada pelos autovetores associados aos autovalores λ_n .

Exemplo 9. . Mostre que a matriz $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 9 & 4 & 6 \\ -8 & 0 & -3 \end{bmatrix}$ é diagonalizável.

Solução: Vamos verificar se a matriz A tem três autovalores distintos, que pela definição 4, permite a matriz A ser diagonalizável. .

Seu polinômio característico é dado por

$$p(\lambda) = \det(A - \lambda I_3) = \det \begin{bmatrix} 2 - \lambda & -1 & 0 \\ 9 & 4 - \lambda & 6 \\ -8 & 0 & -3 - \lambda \end{bmatrix} = -\lambda^3 + 3\lambda^2 + \lambda - 3$$

Assim,

$$\det(A - \lambda I_3) = 0 \Rightarrow -\lambda^3 + 3\lambda^2 + \lambda - 3 = 0$$

resolvendo a equação, teremos

$$\lambda_1 = -1, \lambda_2 = 1 \text{ e } \lambda_3 = 3$$

que são os autovalores distintos da matriz A . Logo pela definição 3 a matriz A é diagonalizável e a matriz diagonal é dada por

$$D = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

Para obtermos a matriz P tal que $A = PDP^{-1}$, precisamos encontrar os autovetores,

para $\lambda_1 = -1$, teremos:

$$\left(\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 9 & 4 & 6 \\ -8 & 0 & -3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \right) \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 9 & 5 & 6 \\ -8 & 0 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

resolvendo o sistema, encontramos a solução geral $v = \{(\alpha, 3\alpha, -4\alpha); \alpha \in \mathbb{R}^*\}$.

Logo, um autovetor associado ao autovalor $\lambda_1 = -1$ é $v_1 = (1, 3, -4)$. Analogamente, para $\lambda_2 = 1$ e $\lambda_3 = 3$ encontramos respectivamente os autovetores $u = \{(\alpha, \alpha, -2\alpha); \alpha \in \mathbb{R}^*\}$ e $w = \{(\alpha, -\alpha, \frac{-4\alpha}{3}); \alpha \in \mathbb{R}^*\}$ e assim um autovetor associado ao autovalor $\lambda_2 = 1$ será $u_1 = (1, 1, -2)$ e um autovetor associado ao autovalor $\lambda_3 = 3$ será $w_1 = (3, -3, -4)$.

Então teremos, que a matriz invertível é dada por

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & -3 \\ -4 & -2 & -4 \end{bmatrix}.$$

Portanto a matriz A é diagonalizável e $A = PDP^{-1}$.

O Teorema 2, nos garante que se uma matriz $A_{n \times n}$ tem n autovalores distintos, então ela é diagonalizável. E se esses autovalores não forem distintos? A resposta está no seguinte teorema.

Teorema 3 : Uma matriz $A_{n \times n}$ é diagonalizável, se e somente se, a matriz A tem n autovetores linearmente independentes (LI).

Exemplo 10. . Verifique que a matriz $A = \begin{bmatrix} -3 & 0 & 2 \\ -2 & -1 & 2 \\ -4 & 0 & 3 \end{bmatrix}$ é diagonalizável.

Solução: Vamos determinar os autovalores de A . Seu polinômio característico é dado por

$$p(\lambda) = \det(A - \lambda I_3) = \det \begin{bmatrix} -3 - \lambda & 0 & 2 \\ -2 & -1 - \lambda & 2 \\ -4 & 0 & 3 - \lambda \end{bmatrix} = -\lambda^3 - \lambda^2 + \lambda + 1.$$

Assim,

$$\det(A - \lambda I_3) = 0 \Rightarrow -\lambda^3 - \lambda^2 + \lambda + 1 = 0 \Rightarrow \lambda = \pm 1.$$

Logo, os autovalores são: $\lambda_1 = \lambda_2 = -1$ (com multiplicidade 2) e $\lambda_3 = 1$. Agora, vamos encontrar os autovetores, para isso basta resolver $(A - \lambda I)X = 0$.

Para $\lambda_1 = -1$, teremos:

$$\left(\begin{bmatrix} -3 & 0 & 2 \\ -2 & -1 & 2 \\ -4 & 0 & 3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \right) \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -2 & 0 & 2 \\ -2 & 0 & 2 \\ -4 & 0 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

daí,

$$\begin{cases} -2x + 2z = 0 \\ -2x + 2z = 0 \\ -4x + 4z = 0 \end{cases}$$

resolvendo o sistema, encontramos a solução geral

$$v = \{(\beta, \alpha, \beta) = \alpha(0, 1, 0) + \beta(1, 0, 1); \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}.$$

Logo $v_1 = (1, 0, 1)$ e $v_2 = (0, 1, 0)$ são vetores linearmente independentes (LI)

associados ao autovalor $\lambda_1 = -1$.

Analogamente, para $\lambda_3 = 1$, encontraremos a solução geral

$$w = \{(\alpha, \alpha, 2\alpha) = \alpha(1, 1, 2); \alpha \in \mathbb{R}\}$$

Assim, $w_1 = (1, 1, 2)$ é um autovetor associado ao autovalor $\lambda_3 = 1$.

Portanto, a matriz A é diagonalizável e as matrizes

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad D = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

são tais que, $A = PDP^{-1}$.

4 Raiz Quadrada de uma Matriz de Ordem 3

Nesta seção calcularemos a raiz quadrada de uma matriz de ordem 3, para posteriormente generalizarmos a raiz n-ésima de uma matriz quadrada.

Sabemos que nem todo número real admite uma raiz quadrada em \mathbb{R} . De modo semelhante, podemos afirmar o mesmo sobre uma matriz, isto é, nem toda matriz admite uma raiz quadrada com entradas em \mathbb{R} .

Se A e B são matrizes quadradas de ordem 3, tais que $B = A^2$, então em $\det(B) = (\det(A))^2$.

Tal resultado é importante, para concluirmos que se uma matriz A possui raiz quadrada, então o seu determinante deve ser um número real não-negativo.

Teorema 4 .: Seja A uma matriz diagonal de ordem 3

$$A = \begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{bmatrix}$$

Se todos os elementos da diagonal principal são números reais não-negativos, então a raiz quadrada de A, denotada por \sqrt{A} , é uma das matrizes.

$$\begin{aligned}
\sqrt{A} &= \begin{bmatrix} \sqrt{a} & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{b} & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{c} \end{bmatrix} \text{ ou } \sqrt{A} = \begin{bmatrix} -\sqrt{a} & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{b} & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{c} \end{bmatrix} \text{ ou} \\
\sqrt{A} &= \begin{bmatrix} \sqrt{a} & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{b} & 0 \\ 0 & 0 & -\sqrt{c} \end{bmatrix} \text{ ou } \sqrt{A} = \begin{bmatrix} \sqrt{a} & 0 & 0 \\ 0 & -\sqrt{b} & 0 \\ 0 & 0 & -\sqrt{c} \end{bmatrix} \text{ ou} \\
\sqrt{A} &= \begin{bmatrix} -\sqrt{a} & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{b} & 0 \\ 0 & 0 & -\sqrt{c} \end{bmatrix} \text{ ou } \sqrt{A} = \begin{bmatrix} \sqrt{a} & 0 & 0 \\ 0 & -\sqrt{b} & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{c} \end{bmatrix} \text{ ou} \\
\sqrt{A} &= \begin{bmatrix} -\sqrt{a} & 0 & 0 \\ 0 & -\sqrt{b} & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{c} \end{bmatrix} \text{ ou } \sqrt{A} = \begin{bmatrix} -\sqrt{a} & 0 & 0 \\ 0 & -\sqrt{b} & 0 \\ 0 & 0 & -\sqrt{c} \end{bmatrix}.
\end{aligned}$$

Demonstração: *Nesta demonstração será utilizada a primeira matriz;*

$$\begin{aligned}
\sqrt{A} \cdot \sqrt{A} &= \begin{bmatrix} \sqrt{a} & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{b} & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{c} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \sqrt{a} & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{b} & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{c} \end{bmatrix} \\
\sqrt{A} \cdot \sqrt{A} &= \begin{bmatrix} (\sqrt{a}) \cdot (\sqrt{a}) & 0 & 0 \\ 0 & (\sqrt{b}) \cdot (\sqrt{b}) & 0 \\ 0 & 0 & (\sqrt{c}) \cdot (\sqrt{c}) \end{bmatrix} \\
\sqrt{A} \cdot \sqrt{A} &= \begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{bmatrix} = A.
\end{aligned}$$

A demonstração para as demais matrizes acontece de maneira análoga.

Exemplo 11. :Seja a matriz diagonal $A = \begin{bmatrix} 9 & 0 & 0 \\ 0 & 16 & 0 \\ 0 & 0 & 49 \end{bmatrix}$, determine \sqrt{A} .

O determinante da matriz acima é positivo, logo a matriz tem raiz quadrada.

$$\sqrt{A} = \begin{bmatrix} \sqrt{9} & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{16} & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{49} \end{bmatrix}$$

Logo, as soluções são:

$$\begin{aligned} \sqrt{A} &= \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{bmatrix} \text{ ou } \sqrt{A} = \begin{bmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{bmatrix} \text{ ou } \sqrt{A} = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{bmatrix} \text{ ou} \\ \sqrt{A} &= \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & -7 \end{bmatrix} \text{ ou } \sqrt{A} = \begin{bmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{bmatrix} \text{ ou } \sqrt{A} = \begin{bmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & -7 \end{bmatrix} \text{ ou} \\ \sqrt{A} &= \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & -7 \end{bmatrix} \text{ ou } \sqrt{A} = \begin{bmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & -7 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Teorema 5 : Seja A uma matriz nula de ordem 3, então há infinitas matrizes que são raízes quadradas da matriz A .

Seja $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ e $\sqrt{A} = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix}$, sendo os elementos de \sqrt{A} , são números reais. Como $A = \sqrt{A} \cdot \sqrt{A}$, temos;

$$\sqrt{A} \cdot \sqrt{A} = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix}$$

$$\sqrt{A} \cdot \sqrt{A} = \begin{bmatrix} a^2 + bd + cg & ab + be + ch & ac + bf + ci \\ ad + ed + fg & db + e^2 + fh & dc + ef + fi \\ ga + hd + ig & gb + he + ih & gc + hf + i^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Depois de alguns cálculos, não complicados mas extensos, observa-se que o produto $\sqrt{A} \cdot \sqrt{A}$, fornece um sistema linear homogêneo de infinitas soluções.

Teorema 6 : Se A , B e P são matrizes quadradas de ordem 3, onde $B = P \cdot A \cdot P^{-1}$, e $f(t)$, uma equação onde os autovalores de A são sua solução, então:

$$f(B) = P \cdot f(A) \cdot P^{-1}$$

Demonstração: Se as matrizes A e B são semelhantes, temos que elas possuem o mesmo polinômio característico. Assim, se $p(t)$ é uma interpolação polinomial para $f(t)$ para todos os autovalores da matriz A , que também passa a ser uma interpolação polinomial de $f(t)$ para todos os autovalores de B . Com isso temos que:

$$f(A) = p(A)$$

$$f(B) = p(B)$$

$$p(B) = P \cdot p(A) \cdot P^{-1}$$

Logo $f(B) = P \cdot f(A) \cdot P^{-1}$.

Exemplo 12. : Calcule a raiz quadrada da Matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$.

Para calcular os autovalores temos que $\det(A - \lambda I) = 0$

$$\det(A - \lambda \cdot I) = \left| \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix} \right| = 0$$

$$\begin{vmatrix} 1 - \lambda & 2 & 1 \\ 0 & 3 - \lambda & 1 \\ 2 & 1 & 1 - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$(1 - \lambda)^2 \cdot (3 - \lambda) - 2 \cdot (3 - \lambda) - (1 - \lambda) = 0$$

$$-\lambda^3 + 5\lambda^2 - 4\lambda = 0$$

$$(\lambda - 4)(\lambda - 1)\lambda = 0,$$

Portanto os autovalores são: $\lambda_1 = 4, \lambda_2 = 1$ e $\lambda_3 = 0$

Para calcular os autovetores, temos que, resolver $(A - \lambda I) \cdot X = 0$, para cada um dos autovalores encontrados;

$$X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

Para $\lambda = 4$, temos;

$$\begin{pmatrix} -3 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} -3x + 2y + z = 0 \\ -y + z = 0 \\ 2x + y + -3z = 0 \end{cases}$$

Resolvendo o sistema, obtém-se soluções do tipo (α, α, α) . Podemos portanto descrever o primeiro vetor como $(1, 1, 1)$.

Para $\lambda = 1$, temos;

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} 2y + z = 0 \\ 2x + y = 0 \end{cases}$$

Resolvendo o sistema, obtém-se soluções do tipo $(\alpha, -2\alpha, 4\alpha)$. Podemos portanto descrever o segundo vetor como $(1, -2, 4)$.

Para $\lambda = 0$, temos;

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} x + 2y + z = 0 \\ 3y + z = 0 \\ 2x + y + z = 0 \end{cases}$$

Resolvendo o sistema obtém-se soluções do tipo $(\alpha, \alpha, -3\alpha)$. Podemos portanto descrever o terceiro vetor como $(-1, -1, 3)$.

Logo a matriz P formada pelos seu autovetores será:

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & -1 \\ 1 & 4 & 3 \end{bmatrix} \text{ e } P^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{6} & \frac{7}{12} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{bmatrix}$$

A partir dos autovalores determinaremos a matriz $D = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

Logo pelo Teorema 6, temos que:

$$\sqrt{A} = P \cdot \sqrt{D} \cdot P^{-1}$$

$$\sqrt{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & -1 \\ 1 & 4 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{1}{6} & \frac{7}{12} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{bmatrix}$$

Logo, uma das raízes de A é, $\sqrt{A} = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & \frac{5}{6} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{3} & \frac{11}{6} & \frac{1}{2} \\ \frac{5}{3} & -\frac{1}{6} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$.

5 Raiz Quadrada de uma Matriz de Ordem N

Como mostramos nos capítulos anteriores, se A é uma matriz diagonalizável, então existe uma matriz P e sua inversa P^{-1} , tal que $P \cdot A \cdot P^{-1} = D$, sendo D é uma matriz diagonal de ordem n , isto é

$$P \cdot A \cdot P^{-1} = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 & \vdots & 0 \\ \vdots & 0 & \ddots & 0 & \vdots \\ 0 & \vdots & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & a_{nn} \end{bmatrix} = D$$

Desse modo,

$$\sqrt{A} = P \cdot \sqrt{D} \cdot P^{-1}.$$

De fato: Como $\sqrt{A} \cdot \sqrt{A} = (P \cdot \sqrt{D} \cdot P^{-1}) \cdot (P \cdot \sqrt{D} \cdot P^{-1})$, temos;

Parte I:

$$\begin{aligned} \sqrt{A} \cdot \sqrt{A} &= (P \cdot \sqrt{D} \cdot P^{-1})(P \cdot \sqrt{D} \cdot P^{-1}) = \\ &= P \cdot \sqrt{D} \cdot P^{-1} \cdot P \cdot \sqrt{D} \cdot P^{-1} \\ &= P \cdot \sqrt{D} \cdot \sqrt{D} \cdot I \cdot P^{-1} \\ &= P \cdot D \cdot P^{-1}. \end{aligned}$$

Parte II: Multiplicando P a direita e P^{-1} a esquerda temos:

$$\begin{aligned} P \cdot A \cdot P^{-1} &= D \\ P^{-1} \cdot P \cdot A \cdot P^{-1} \cdot P &= P^{-1} \cdot D \cdot P \\ I \cdot A \cdot I &= P^{-1} \cdot D \cdot P \\ A &= P^{-1} \cdot D \cdot P \end{aligned}$$

de I e II temos que $\sqrt{A} = P \cdot \sqrt{D} \cdot P^{-1}$.

Ou seja, dada uma matriz diagonal,

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 & \vdots & 0 \\ \vdots & 0 & \ddots & 0 & \vdots \\ 0 & \vdots & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & a_{nn} \end{bmatrix}$$

Se $a_{nn} \geq 0$, para todo $n \in \{1, 2, \dots, n\}$ então a matriz,

$$\sqrt{A} = \begin{bmatrix} \sqrt{a_{11}} & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{a_{22}} & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & 0 & \ddots & 0 & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \sqrt{a_{nn}} \end{bmatrix}, \text{ é uma raiz quadrada da matriz } A.$$

Logo:

$$\sqrt{A} \cdot \sqrt{A} = \begin{bmatrix} \sqrt{a_{11}} & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{a_{22}} & 0 & \vdots & 0 \\ \vdots & 0 & \ddots & 0 & \vdots \\ 0 & \vdots & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \sqrt{a_{nn}} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \sqrt{a_{11}} & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{a_{22}} & 0 & \vdots & 0 \\ \vdots & 0 & \ddots & 0 & \vdots \\ 0 & \vdots & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \sqrt{a_{nn}} \end{bmatrix}$$

$$\sqrt{A} \cdot \sqrt{A} = \begin{bmatrix} \sqrt{a_{11}} \cdot \sqrt{a_{11}} & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{a_{22}} \cdot \sqrt{a_{22}} & 0 & \vdots & 0 \\ \vdots & 0 & \ddots & 0 & \vdots \\ 0 & \vdots & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \sqrt{a_{nn}} \cdot \sqrt{a_{nn}} \end{bmatrix}$$

$$A \equiv \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 & \vdots & 0 \\ \vdots & 0 & \ddots & 0 & \vdots \\ 0 & \vdots & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & a_{nn} \end{bmatrix} .$$

6 Raiz n-ésima de uma Matriz Quadrada

Neste capítulo calcularemos a raiz n-ésima de uma matriz de ordem n. Para isso consideraremos uma matriz A diagonalizável e todos os seus autovalores não negativos.

$$\sqrt[n]{A} = P \cdot \sqrt[n]{D} \cdot P^{-1}$$

De fato

$$\begin{aligned} (\sqrt[n]{A})^n &= (P \cdot \sqrt[n]{D} \cdot P^{-1})^n \\ &= (P \cdot \sqrt[n]{D} \cdot P^{-1}) \cdot \dots \cdot (P \cdot \sqrt[n]{D} \cdot P^{-1}) = \\ &= P \cdot [\sqrt[n]{D} \dots \sqrt[n]{D}] \cdot [(P^{-1} \cdot P) \dots (P^{-1} \cdot P)] \cdot P^{-1} = \\ &= P \cdot [(\sqrt[n]{D})^n] \cdot [I \dots I] \cdot P^{-1} = P \cdot D \cdot P^{-1}. \text{Logo;} \\ A &= P \cdot D \cdot P^{-1}. \end{aligned}$$

Para o caso em que o índice da raiz n é par será necessário que a_{nn} seja maior ou igual a zero, então a matriz:

$$\sqrt[n]{A} = \begin{bmatrix} \sqrt[n]{a_{11}} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt[n]{a_{22}} & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & 0 & \ddots & 0 & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \sqrt[n]{a_{nn}} \end{bmatrix}, \text{ é a raiz n-ésima da matriz A.}$$

De fato:

$$\begin{aligned} \sqrt[n]{A} \cdot \dots \cdot \sqrt[n]{A} &= \\ = \begin{bmatrix} \sqrt[n]{a_{11}} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt[n]{a_{22}} & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & 0 & \ddots & 0 & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \sqrt[n]{a_{nn}} \end{bmatrix} \cdot \dots \cdot \begin{bmatrix} \sqrt[n]{a_{11}} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt[n]{a_{22}} & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & 0 & \ddots & 0 & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \sqrt[n]{a_{nn}} \end{bmatrix} \\ &= \sqrt[n]{A} \cdot \dots \cdot \sqrt[n]{A} = \end{aligned}$$

$$= \begin{bmatrix} \sqrt[n]{a_{11}} \cdots \sqrt[n]{a_{11}} & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt[n]{a_{22}} \cdots \sqrt[n]{a_{22}} & 0 & \vdots & 0 \\ \vdots & 0 & \ddots & 0 & \vdots \\ 0 & \vdots & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \sqrt[n]{a_{nn}} \cdots \sqrt[n]{a_{nn}} \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 & \vdots & 0 \\ \vdots & 0 & \ddots & 0 & \vdots \\ 0 & \vdots & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & a_{nn} \end{bmatrix} .$$

Logo,

$$\sqrt[n]{A} = P \cdot \sqrt[n]{D} \cdot P^{-1}$$

7 Considerações Finais

Os estudos realizados para o desenvolvimento deste trabalho nos garantiram a obtenção de ganhos significativos relacionados à extração da raiz n -ésima de uma matriz de ordem n . Apresentam - nos a importância do desenvolvimento de métodos que possibilitam um professor de matemática a trabalhar com a raiz n -ésima de matriz, com auxílio da Álgebra Linear, oportunizando melhor entendimento por parte dos alunos do ensino médio e superior, uma vez que os mesmos encontram-se habituados com cálculos algébricos.

O processo de elaboração nos leva a acreditar que os conceitos foram construídos a fim de melhorar o entendimento dos alunos e portanto, podemos doar um tempo maior para o planejamento de atividades em que a aprendizagem seja efetiva.

Referências

- [1] BOLDRINI, JOSE LUIS. *Algebra Linear*. Editora Harbra, 1980.
- [2] DANTE, LUIZ ROBERTO. *Contexto e Aplicações, Vol. 02*, Editora Àtica, 2010.
- [3] GORDON, CRYSTAL. MONTERZ. *The Square Root Function of Matrix*. Georgia State University, 2007.
- [4] IEZZI, GELSON. HAZZAN, SAMUEL. *Fundamentos de Matemática Elementar 4*. Atual Editora, 1997.
- [5] LEITHOLD, LUIS. *O Cálculo com Geometria Analítica, Vol. 01*, Editora Harbra, 1977.
- [6] STEINBRUCH, ALFREDO, Winterle, Paulo, *Introdução a Álgebra Linear*. Pearson Educacion do Brasil, 1997.