Universidade Federal de Goiás (UFG)
Instituto de Matemática e Estatística (IME)
Programa de Pós-Graduação em Matemática

Júlio Cesar Pereira França

Desigualdade de Trudinger-Moser em Variedades Riemannianas Completas e Não Compactas

Goiânia
2024

UNIVERSIDADE FEDERAL DE GOIÁS
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA

TERMO DE CIÊNCIA E DE AUTORIZAÇÃO (TECA) PARA DISPONIBILIZAR VERSÕES ELETRÔNICAS DE TESES

E DISSERTAÇÕES NA BIBLIOTECA DIGITAL DA UFG

Na qualidade de titular dos direitos de autor, autorizo a Universidade Federal de Goiás (UFG) a disponibilizar, gratuitamente, por meio da Biblioteca Digital de Teses e Dissertações (BDTD/UFG), regulamentada pela Resolução CEPEC nº 832/2007, sem ressarcimento dos direitos autorais, de acordo com a Lei 9.610/98, o documento conforme permissões assinaladas abaixo, para fins de leitura, impressão e/ou download, a título de divulgação da produção científica brasileira, a partir desta data.

O conteúdo das Teses e Dissertações disponibilizado na BDTD/UFG é de responsabilidade exclusiva do autor. Ao encaminhar o produto final, o autor(a) e o(a) orientador(a) firmam o compromisso de que o trabalho não contém nenhuma violação de quaisquer direitos autorais ou outro direito de terceiros.

1. Identificação do material bibliográfico

[X] Dissertação [ ] Tese [ ] Outro*:_____________

*No caso de mestrado/doutorado profissional, indique o formato do Trabalho de Conclusão de Curso, permitido no documento de área, correspondente ao programa de pós-graduação, orientado pela legislação vigente da CAPES.

Exemplos: Estudo de caso ou Revisão sistemática ou outros formatos.

2. Nome completo do autor

Júlio Cesar Pereira França

3. Título do trabalho

Desigualdade de Trudinger-Moser em Variedades Riemannianas Completas e Não Compactas

4. Informações de acesso ao documento (este campo deve ser preenchido pelo orientador)

Concorda com a liberação total do documento [X] SIM [ ] NÃO[1]

[1] Neste caso o documento será embargado por até um ano a partir da data de defesa. Após esse período, a possível disponibilização ocorrerá apenas mediante:
a) consulta ao(à) autor(a) e ao(à) orientador(a);
b) novo Termo de Ciência e de Autorização (TECA) assinado e inserido no arquivo da tese ou dissertação.
O documento não será disponibilizado durante o período de embargo.
Casos de embargo:
- Solicitação de registro de patente;
- Submissão de artigo em revista científica;
- Publicação como capítulo de livro;
- Publicação da dissertação/tese em livro.

Obs. Este termo deverá ser assinado no SEI pelo orientador e pelo autor.

sei! assinatura eletrônica

Documento assinado eletronicamente por **Abiel Costa Macedo**, **Professor do Magistério Superior**, em 02/07/2024, às 13:54, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no § 3º do art. 4º do Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020 .

Documento assinado eletronicamente por **Júlio Cesar Pereira França**, **Discente**, em 02/07/2024, às 15:42, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no § 3º do art. 4º do Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020.

A autenticidade deste documento pode ser conferida no site https://sei.ufg.br/sei/controlador_externo.php?acao=documento_conferir&id_orgao_acesso_externo=0, informando o código verificador **4639664** e o código CRC **CE08ABF0**.

Referência: Processo nº 23070.011558/2024-78 SEI nº 4639664

JÚLIO CESAR PEREIRA FRANÇA

Desigualdade de Trudinger-Moser em Variedades Riemannianas Completas e Não Compactas

Dissertação apresentada ao Programa de Pós–Graduação do Instituto de Matemática e Estatística (IME) da Universidade Federal de Goiás (UFG), como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Programa de Pós-Graduação do Instituto de Matemática e Estatística.

Área de concentração: Análise.

Orientador: Prof. Abiel Costa Macedo

Goiânia
2024

Ficha de identificação da obra elaborada pelo autor, através do
Programa de Geração Automática do Sistema de Bibliotecas da UFG.

França, Júlio Cesar Pereira
Desigualdade de Trudinger-Moser em Variedades Riemannianas Completas e Não Compactas [manuscrito] / Júlio Cesar Pereira França. - 2024.
93 f.

Orientador: Prof. Dr. Abiel Costa Macedo.
Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal de Goiás, Instituto de Matemática e Estatística (IME), Programa de Pós-Graduação em Matemática, Goiânia, 2024.
Bibliografia. Apêndice.

1. Análise não compacta. 2. Análise geométrica. 3. Desigualdade de Trudinger-Moser. 4. Variedades Riemannianas. 5. Variedades não compactas. I. Macedo, Abiel Costa, orient. II. Título.

CDU 512.7

UNIVERSIDADE FEDERAL DE GOIÁS

INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA

ATA DE DEFESA DE DISSERTAÇÃO

Ata nº **07** da sessão de Defesa de Dissertação de **Júlio Cesar Pereira França**, que confere o título de Mestre em **Matemática**, na área de concentração em **Análise**.

Ao/s **[15/03/2024] décimo quinto dia do mês de março de dois mil de vinte e quatro**, a partir das 15:00h, via Web Videoconferência, realizou-se a sessão pública de Defesa de Dissertação intitulada **"Desigualdade de Trudinger-Moser em Variedades Riemannianas Completas e Não Compactas"**. Os trabalhos foram instalados pelo Orientador, Professor Doutor **Abiel Costa Macedo - IME/UFG** com a participação dos demais membros da Banca Examinadora: Professor Doutor **Marcos Leandro Mendes Carvalho - IME/UFG**, membro titular interno; Professor Doutor **José Francisco Alves de Oliveira - CCN/UFPI**, membro titular externo. Durante a arguição os membros da banca **não fizeram** sugestão de alteração do título do trabalho . A Banca Examinadora reuniu-se em sessão secreta a fim de concluir o julgamento da Dissertação, tendo sido o candidato **aprovado** pelos seus membros. Proclamados os resultados pelo Professor Doutor **Abiel Costa Macedo - IME/UFG**, Presidente da Banca Examinadora, foram encerrados os trabalhos e, para constar, lavrou-se a presente ata que é assinada pelos Membros da Banca Examinadora, ao(s) **[15/03/2024] décimo quinto dia do mês de março de dois mil de vinte e quatro.**

TÍTULO SUGERIDO PELA BANCA

---

sei! assinatura eletrônica

Documento assinado eletronicamente por **Abiel Costa Macedo**, **Professor do Magistério Superior**, em 15/03/2024, às 16:44, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no § 3º do art. 4º do Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020 .

---

sei! assinatura eletrônica

Documento assinado eletronicamente por **José Francisco Alves de Oliveira**, **Usuário Externo**, em 15/03/2024, às 16:59, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no § 3º do art. 4º do Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020 .

---

sei! assinatura eletrônica

Documento assinado eletronicamente por **Marcos Leandro Mendes Carvalho**, **Professor do Magistério Superior**, em 15/03/2024, às 17:04, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no § 3º do art. 4º do Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020 .

A autenticidade deste documento pode ser conferida no site https://sei.ufg.br/sei/controlador_externo.php?acao=documento_conferir&id_orgao_acesso_externo=0, informando o código verificador **4455830** e o código CRC **BA4DBC00**.

Referência: Processo nº 23070.011558/2024-78 SEI nº 4455830

Todos os direitos reservados. É proibida a reprodução total ou parcial do trabalho sem autorização da universidade, do autor e do orientador(a).

Júlio Cesar Pereira França

Graduou-se em Bacharelado em Matemática na UFG. Durante sua graduação, participou de projetos de iniciação científica nas áreas de estatística, sistemas dinâmicos e geometria. Durante o mestrado na UFG - Universidade Federal de Goiás, foi bolsista da CAPES.

A minha mãe Marly Ferreira de França e ao meu pai Delubio Pereira Gonçalves.

Agradecimentos

Gostaria de expressar minha profunda gratidão a todos que contribuíram para a realização desta dissertação.

Primeiramente, agradeço a Deus por tornar possível essa tão desejada conquista em minha vida.

Expresso meu agradecimento a mim mesmo por perseverar e por depositar confiança na orientação divina de meu Deus, que me guia incansavelmente.

Agradeço ao meu orientador, Abiel Costa Macedo, pela orientação excepcional, suporte incansável e valiosas sugestões ao longo deste trabalho. Sua expertise e dedicação foram fundamentais para o desenvolvimento deste estudo. Além de tornar a jornada mais divertida e interessante.

Agradeço também aos membros da banca examinadora por dedicarem seu tempo e conhecimento na avaliação deste trabalho.

À minha família e amigos, agradeço pelo apoio inabalável, compreensão e encorajamento durante toda essa jornada acadêmica, expresso meu profundo apreço pela compreensão e paciência demonstrados durante este período desafiador. Principalmente a minha irmã Amanda e meu irmão Delubio pelo encorajamento em prosseguir.

Por fim, expresso minha gratidão à UFG e aos seus servidores por fornecer os recursos e ambiente propícios para a realização deste trabalho.

Cada um de vocês desempenhou um papel crucial no sucesso deste projeto, e estou sinceramente grato por cada contribuição.

À CAPES.

Pelo suporte financeiro.

Rendei graças ao Senhor, porque Ele é bom, porque a sua misericórdia dura para sempre.

Salmos 136:1,

.

Resumo

França, J. C. P.. **Desigualdade de Trudinger-Moser em Variedades Riemannianas Completas e Não Compactas**. Goiânia, 2024. 106p. Dissertação de Mestrado. Programa de Pós-Graduação em Matemática, Instituto de Matemática e Estatística (IME), Universidade Federal de Goiás (UFG).

No trabalho, abordaremos a validade da desigualdade de Trudinger-Moser em variedades riemannianas completas e não compactas. Mais precisamente, discutiremos as demonstrações realizadas por Yang [64] e por Li e Lu [32] que trataram dos casos subcrítico e crítico. O nosso estudo é fundamentado nas seguintes condições:
Consideremos (M,g) uma variedade riemanniana completa e não compacta de dimensão n ($n \geq 2$), com curvatura de Ricci limitada inferiormente, ou seja, $\mathrm{Rc}_{(M,g)} \geq \lambda g$ para algum $\lambda \in \mathbb{R}$ e $\mathrm{inj}_{(M,g)} \geq i_0$ para algum $i_0 > 0$. Provamos que existe uma constante positiva C dependendo apenas de n tal que

$$\sup_{u \in W^{1,n}(M), \|u\|_{1,\tau} \leq 1} \int_M \zeta_n(\alpha |u|^{\frac{n}{n-1}}) dv_g \leq C$$

onde $\zeta_n(t) = \sum_{i=n-1}^{\infty} \frac{t^i}{i!}$ e

$$\|u\|_{1,\tau} = \|\nabla u\|_n + \tau \|u\|_n,$$

para todo $0 < \alpha \leq \alpha_n = n\omega_{n-1}^{\frac{1}{n-1}}$, onde ω_{n-1} é a área da superfície da bola no $\mathbb{R}^n$. Além disso, as condições sobre a curvatura de Ricci e o raio injetivo são necessárias e suficientes.

Palavras–chave

Desigualdade de Trudinger-Moser, Variedades Riemannianas, Variedades não compactas, Análise Geométrica, Equações diferenciais parciais elípticas, Análise não compacta

Abstract

França, J. C. P.. **Trudinger-Moser Inequality on Complete Noncompact Riemannian Manifold**. Goiânia, 2024. 106p. MSc. Dissertation. Programa de Pós-Graduação em Matemática, Instituto de Matemática e Estatística (IME), Universidade Federal de Goiás (UFG).

In this work, we will address the validity of the Trudinger-Moser inequality on complete and non-compact Riemannian manifolds. More precisely, we will discuss the proofs provided by Yang [64] and by Li and Lu [32] for the subcritical and critical cases. Our study is grounded in the following conditions:
Let (M,g) be a complete and non-compact Riemannian manifold of dimension n $(n \geq 2)$, with Ricci curvature bounded from below, i.e., $\mathrm{Rc}\,(M,g) \geq \lambda g$ for some $\lambda \in \mathbb{R}$ and $\mathrm{inj}\,(M,g) \geq i_0$ for some $i_0 > 0$. We prove that there exists a positive constant C depending only on n such that

$$\sup_{u \in W^{1,n}(M), \|u\|_{1,\tau} \leq 1} \int_M \zeta_n(\alpha |u|^{\frac{n}{n-1}}) dv_g \leq C$$

where $\zeta_n(t) = \sum_{i=n-1}^{\infty} \frac{t^i}{i!}$ and

$$\|u\|_{1,\tau} = \|\nabla u\| + \tau \|u\|$$

for every $0 < \alpha \leq \alpha_n = n\omega_{n-1}^{\frac{1}{n-1}}$, where ω_{n-1} is the surface of the n-ball on $\mathbb{R}^n$. Moreover, the hypotheses about the Ricci curvature an injective radio are necessary and sufficient conditions.

Keywords

Trudinger-Moser Inequality, Riemannian Manifolds, Non-compact Manifolds, Geometric Analysis, Elliptic Partial Differential Equations, Non-compact Analysis

Sumário

Introdução

Este trabalho dedica-se ao estudo do caso crítico para o espaço de Sobolev, relativo a dimensão do domínio e o espaço de Lebesgue modelo, em variedades. A seguir, apresentamos um breve histórico do problema. Tomando $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $(n \geq 2)$ um conjunto aberto e limitado, Trudinger [57] (e idependentemente Pohozaev [53] e Yudovic [27]) observou que $W^{1,n}(\Omega)$ pode ser mergulhado em $L^p(\Omega)$ para todo $p \in [1, \infty)$ mas não em $L^\infty(\Omega)$. Nos trabalhos de [25] e [48] foi provado que o espaço com melhor crescimento em que $W^{1,n}(\Omega)$ está imerso continuamente é um espaço de Orlicz $L_{\phi_n}(\Omega)$ onde $\phi_n(t) = \exp\{\alpha|t|^{n/(n-1)}\} - 1$ para algum $\alpha > 0$.

Em seguida, Moser [48] demonstrou um resultado ainda mais preciso, o qual tem como consequência o resultado provado por Trudinger [57]. Mais precisamente, o seguinte resultado:

Teorema 0.1 *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, com $n \geq 2$, um aberto limitado. Então existe uma constante positiva C dependendo apenas de n tal que:*

$$\sup_{u \in W_0^{1,n}(\Omega), \|u\|_{W_0^{1,n}(\Omega)} \leq 1} \int_\Omega e^{\alpha|u|^{\frac{n}{n-1}}} dx \leq C|\Omega|. \tag{0-1}$$

Para qualquer $\alpha \leq \alpha_n$, onde $\alpha_n = n\omega_{n-1}^{\frac{1}{n-1}}$ e ω_{n-1} é a área da superfície da bola unitária em $\mathbb{R}^n$. Além disso, a constante α_n é sharp no sentido de que se α excede α_n, então a desigualdade acima não pode ser mantida com uma constante C de maneira uniforme.

Carleson e Chang [11] demonstraram que o supremo é atingido quando $\Omega = B_0(1)$, a bola unitária em $\mathbb{R}^n$. Struwe [56] estudou a existência de funções extremais para domínios não-simétricos, obtendo uma condição suficiente para a existência. Flucher introduziu o rearranjo conforme e derivou uma desigualdade isoperimétrica que implica a existência de funções extremais em domínios limitados em $\mathbb{R}^2$ [21]. Lin [39] obteve um resultado de existência geral para qualquer aberto limitado do $\mathbb{R}^n$.

Y. Li [35] mostrou a existência de funções extremais para variedades Riemannianas compactas, enquanto X. Li e Y. Yang [33] demonstraram a existência de funções extremais para a desigualdade de Trudinger-Moser singular em todo o espaço euclidiano.

Yang [59] demonstrou a existência de funções extremais para variedades compactas bidimensionais com fronteira, além de desigualdades de Trudinger–Moser do tipo Adimurthi–Druet em dimensão dois em [65]. Nguyen [49] demonstrou esse último tipo de desigualdade para o espaço de Sobolev $W^{1,n}(\mathbb{R}^n)$.

Posteriormente, Adams [2] generalizou o resultado obtido por Moser para o espaço de Sobolev de várias derivadas, obtendo:

Teorema 0.2 *(Adams) Seja Ω um domínio em $\mathbb{R}^n$ e m um inteiro positivo estritamente menor que n. Existe uma constante C, dependendo apenas de m e n, com a seguinte propriedade: Se $u \in C^m(\mathbb{R}^n)$ tem suporte compacto contido em Ω e $\|\nabla^m u\|_{n/m} \leq 1$, então*

$$\int_\Omega \exp\{\beta_0(m,n)|u(x)|^{n/(n-m)}\}dx \leq C|\Omega|, \tag{0-2}$$

onde $\beta_0 = \beta_0(m,n)$ é a melhor constante dependendo apenas de n e m, isto é

$$\beta_0(m,n) := \begin{cases} \dfrac{n}{\omega_{n-1}}\left[\dfrac{\pi^{n/2}2^m\Gamma((m+1)/2)}{\Gamma((n-m+1)/2)}\right]^{\frac{n}{n-m}} & \text{quando } m \text{ é ímpar,} \\ \dfrac{n}{\omega_{n-1}}\left[\dfrac{\pi^{n/2}2^m\Gamma(m/2)}{\Gamma((n-m)/2)}\right]^{\frac{n}{n-m}} & \text{quando } m \text{ é par.} \end{cases} \tag{0-3}$$

Para qualquer u o gradiente de ordem l é dado por

$$\nabla^l u = \begin{cases} \Delta^{l/2}u, & \text{se } l \text{ é par} \\ \nabla\Delta^{(l-1)/2}u, & \text{se } l \text{ é ímpar.} \end{cases} \tag{0-4}$$

Se $\beta_0(m,n)$ for substituído por qualquer número maior, a integral em (0-2) não pode ser limitada uniformemente por nenhuma constante.

Existem várias extensões das desigualdades de Trudinger-Moser e Adams, sendo uma delas a extensão para todo o $\mathbb{R}^n$. Cao [10] conseguiu estender para todo o $\mathbb{R}^2$ por meio do argumento de rearranjo decrescente. Dessa forma, para todo $\alpha < 4\pi$ e $A > 0$, existe uma constante C que depende apenas de α e A, tal que, para todo $u \in W^{1,2}(\mathbb{R}^2)$ com $\|u\|_2 \leq 1$ e $\|\nabla u\|_2 \leq A$, vale a seguinte desigualdade:

$$\int_{\mathbb{R}^2}(e^{\alpha|u|^2}-1)dx \leq C.$$

Quanto à generalização para dimensão n qualquer das desigualdades, foram obtidas de forma independente por do Ó [19] e Panda [51].

Todas essas desigualdades em domínios ilimitados, até o momento, são subcríticas, uma vez que $\alpha < \alpha_n$. Ruf [55] foi quem provou o caso crítico em todo o $\mathbb{R}^2$ e demonstrou a existência de funções extremais. Mais tarde, Li e Ruf [38], usando a simetrização de

Schwartz combinada e análise de blow-up, generalizaram para a dimensão n. Adimurthi e Yang [66], por meio do argumento de rearranjo decrescente e da desigualdade de Young, alcançaram uma interpolação da desigualdade de Trudinger–Moser e a desigualdade de Hardy no $\mathbb{R}^n$, que pode ser vista como uma desigualdade de Trudinger-Moser singular.

A versão afim da desigualdade de Trudinger-Moser em domínios limitados foi estabelecida por Cianchi, Lutwak, Yang e Zhang [16], utilizando a norma afim do gradiente. Isso pode ser considerado como o caso limite das desigualdades afins de Sobolev e isoperimétricas de Lutwak, Yang e Zhang [45] [44], as quais desempenham um papel importante na geometria convexa.

Em outra direção, mas semelhante a desigualdade acima (0-1) com a melhor constante, Moser também demonstrou em [48] uma desigualdade análoga na esfera bidimensional $\mathbb{S}^2$. Essa afirmação estabelece que existe uma constante C_0 tal que 4π é a melhor constante para a seguinte desigualdade.

$$\int_{\mathbb{S}^2} \exp\left(4\pi|u(x)|^2\right) d\sigma \leq C_0,$$

para qualquer função suave u em $\mathbb{S}^2$ com $\int_{\mathbb{S}^2} |\nabla u|^2 d\sigma \leq 1$ e $\int_{\mathbb{S}^2} u d\sigma = 0$ onde $d\sigma$ é a medida de superfície e ∇ é o operador gradiente em $\mathbb{S}^2$.

Nessa mesma linha, Moser aplicou (0-1) ao problema da curvatura Gaussiana prescrita em $\mathbb{S}^2$ ao considerar o funcional:

$$G(u) = \log\left\{\frac{1}{4\pi}\int_{\mathbb{S}^2} K e^{2u} d\sigma\right\} - \frac{1}{4\pi}\int_{\mathbb{S}^2} |\nabla u|^2 d\sigma - \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{S}^2} u d\sigma.$$

Utilizando a desigualdade (0-1), Moser mostrou que existe uma constante positiva C tal que

$$\frac{1}{4\pi}\int_{\mathbb{S}^2} e^{2u} d\sigma \leq C \exp\left\{\frac{1}{4\pi}\int_{\mathbb{S}^2} |\nabla u|^2 d\sigma + \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{S}^2} u d\sigma\right\}. \tag{0-5}$$

Implicando que o funcional $G(u)$ é limitado superiormente. O caso sharp da desigualdade (0-5) em $\mathbb{S}^2$ foi estabelecida por Onofri [50], utilizando resultados de Aubin [5], e afirma que a seguinte desigualdade é verdadeira:

$$\frac{1}{4\pi}\int_{\mathbb{S}^2} e^{2u} d\sigma \leq \exp\left\{\frac{1}{4\pi}\int_{\mathbb{S}^2} (2u + |\nabla u|^2) d\sigma\right\},$$

com igualdade se e somente se $e^{2u}g_0$ é isométrico a g_0. A desigualdade de Onofri também foi provada de forma independente por Hong [26]. Também destacamos a desigualdade de Moser-Onofri na esfera de dimensão superior $\mathbb{S}^n$, estabelecida por Beckner [7], e a desigualdade de Trudinger-Moser em superfícies com singularidade cônica por Chen [14].

A desigualdade de Onofri no plano euclidiano é dada por:

$$\frac{1}{16\pi}\int_{\mathbb{R}^2}|\nabla u|^2\,dx \geq \log\left(\int_{\mathbb{R}^2} e^u\,d\mu\right) - \int_{\mathbb{R}^2} u\,d\mu, \tag{0-6}$$

onde, $d\mu = \mu(x)\,dx$ denota a medida de probabilidade definida por $\mu(x) = \frac{1}{\pi}(1+|x|^2)^{-2}, x \in \mathbb{R}^2$.

Outra extensão do problema é estabelecer a desigualdade de Trudinger-Moser e a desigualdade de Adams em variedades Riemannianas compactas (M,g). Aubin em [4] abordou esse problema e mostrou que, para $u \in W^{1,n}(M)$,

$$\exp\left(\alpha|u|^{n/(n-1)}\|u\|_{W^{1,n}(M)}^{-n/(n-1)}\right),$$

é integrável para $\alpha > 0$ suficientemente pequeno, o qual não depende de u. Seja $\tilde{\alpha}$ o supremo dos α mencionados acima. Cherrier em [15] demonstrou que $\tilde{\alpha} = \alpha_n$ e obteve resultados semelhantes para $u \in W^{m,n/m}(M)$. Seguindo as linhas de Adams, Fontana [22] obteve a desigualdade crítica de Adams em (M,g).

Utilizando o método de análise de blow-up, Ding et al. [18] estabeleceram a desigualdade de Trudinger-Moser em superfícies Riemannianas compactas e a aplicaram com sucesso para lidar com o problema da curvatura gaussiana prescrita. Adaptando o argumento de Ding et al., Li [34], [35] e Li e Liu [36] provaram a existência de funções extremais para a desigualdade de Trudinger-Moser. Sua ideia também foi utilizada por Yang em [58], [61], [62], para encontrar funções extremais para várias desigualdades do tipo Trudinger-Moser. Em fibrados vetoriais sobre uma variedade Riemanniana compacta de dimensão 2, Li, Liu e Yang obtiveram várias desigualdades de Trudinger-Moser em [37].

Dentre outras contribuições, citamos também a seguinte. Novamente pelo método de blow-up, Adimurthi e Druet [3] provaram que, quando $0 < \alpha < \lambda_1(\Omega)$, vale

$$\sup_{u \in W_0^{1,2}(\Omega), \|\nabla u\|_2 \leq 1} \int_\Omega e^{4\pi u^2(1+\alpha\|u\|_2^2)}\,dx < \infty,$$

onde $\lambda_1(\Omega)$ é o primeiro autovalor do Laplaciano em $\Omega \subset \mathbb{R}^2$, um domínio suave e limitado. Além disso, o supremo é infinito quando $\alpha > \lambda_1(\Omega)$. Mais tarde este resultado foi generalizado por Yang [60] e Lu e Yang [41], [42], [43].

Até agora, consideramos a desigualdade de Trudinger-Moser em domínios Ω em espaços euclidianos $\mathbb{R}^n$ com $|\Omega| < \infty$, em variedades Riemannianas compactas M, na esfera $\mathbb{S}^n$, em fibrados tangentes de variedade compacta bidimensional, nos casos subcrítico e crítico, e também a existência de funções extremais. Houve generalizações da desigualdade de Trudinger-Moser para domínios Ω em espaços euclidianos $\mathbb{R}^n$ com

$|\Omega| = \infty$. A desigualdade de Trudinger-Moser subcrítica foi estabelecida por Adachi e Tanaka em [1], tendo como resultado o seguinte teorema.

Teorema 0.3 *Para qualquer $\alpha < \alpha_n$, existe uma constante positiva $C_{n,\alpha}$ tal que para todo u em $W^{1,n}(\mathbb{R}^n)$, temos $\|\nabla u\|_{L^n(\mathbb{R}^n)} \leq 1$:*

$$\int_{\mathbb{R}^n} \zeta_n(\alpha|\nabla u|^{\frac{n}{n-1}})dx \leq C_{n,\alpha}\|u\|^n_{L^n(\mathbb{R}^n)},$$

onde

$$\zeta_n(t) = e^t - \sum_{j=0}^{n-2} \frac{t^j}{j!}.$$

A constante α_n é sharp no sentido de que o supremo é infinito quando $\alpha \geq \alpha_n$.

Observamos que este tipo de desigualdade é exclusivamente subcritica, já que no caso crítico o supremo se torna infinito. Porém existe uma relação entre as duas, que foi observada primeiramente por D. Cassani, F. Sani, C. Tarsi em [12] e posteriormente, para o caso de ordem superior, por N. Lam, G Lu. e L. Zhang [30], Zhan e Chen [67] e N. Lam [28]. Os autores provam que a desigualdade crítica de [55] é equivalente a uma desigualdade que é apenas subcritica.

Guozhen Lu e Hanli Tang em [40] estabeleceram a constante sharp para a desigualdade de Trudinger-Moser no espaço hiperbólico, $\mathbb{H}^n$, $n \geq 2$.

Teorema 0.4 *Seja $\Omega \subset \mathbb{H}^n$ um domínio aberto com $|\Omega| = \int_\Omega dV < +\infty$, $0 \leq \beta < n$, e $0 \leq \alpha \leq \alpha_n(1-\frac{\beta}{n})$, onde $\alpha_n = n\omega_{n-1}^{\frac{1}{n-1}}$. Então, existe uma constante $C_\beta > 0$ tal que para todo $u \in C_0^\infty(\Omega)$,*

$$\sup_{u\in C_0^\infty(\Omega), \|\nabla u\|_{n,\Omega}\leq 1} \int_\Omega \frac{\exp(\alpha|\nabla u|^{n/(n-1)})}{d(0,x)^\beta} dV \leq C_\beta \int_\Omega \frac{dV}{d(0,x)^\beta},$$

O resultado é sharp no sentido de que se $\alpha > \alpha_n(1-\frac{\beta}{n})$, então o supremo se torna infinito.

Li e Lu [32], em sua demonstração do caso crítico, optaram por subdividir a variedade não compacta em uma parte compacta e outra não compacta. No entanto, essa abordagem resulta na formação de bordo, a partir da qual foi possível dar continuidade ao raciocínio, utilizando os resultados de variedades compactas com bordo de Yang [62].

Neste trabalho consideraremos (M,g) uma variedade Riemanniana completa e não compacta de dimensão n ($n \geq 2$), com curvatura de Ricci limitada inferiormente, ou seja, $\mathrm{Rc}_{(M,g)} \geq \lambda g$ para algum $\lambda \in \mathbb{R}$ e $\mathrm{inj}_{(M,g)} \geq i_0$ para algum $i_0 > 0$. Provamos, seguindo os resultados Li e Lu [32] e [64], que existe uma constante positiva C dependendo apenas de n tal que

$$\sup_{u\in W^{1,n}(M), \|u\|_{1,\tau}\leq 1} \int_M \zeta_n(\alpha|u|^{\frac{n}{n-1}})dv_g \leq C \tag{0-7}$$

onde $\zeta_n(t) = \sum_{i=n-1}^{\infty} \frac{t^i}{i!}$ e

$$\|u\|_{1,\tau} = \|\nabla u\|_n + \tau\|u\|_n, \tag{0-8}$$

para todo $0 < \alpha \leq \alpha_n = n\omega_{n-1}^{\frac{1}{n-1}}$, onde ω_{n-1} é a área da superfície da bola no $\mathbb{R}^n$.

No Capítulo 1, introduzimos as definições e teoremas básicos de Geometria Riemanniana. Também enunciamos alguns resultados de Análise Variacional que serão utilizados ao longo do trabalho. Por fim, demonstraremos que as condições sobre a curvatura de Ricci e o raio injetivo são necessárias e suficientes.

No Capítulo 2, abordamos o resultado subcrítico conforme discutido no trabalho de Yang [64]. Observamos que a desigualdade é subcrítica, mas a técnica empregada não permite verificar sua validade no caso crítico.

No Capítulo 3, apresentamos o caso exclusivamente subcrítico abordado no trabalho de Li e Lu [32], destancando o fato de ser sharp.

No Capítulo 4, tratamos do caso crítico no mesmo trabalho de Li e Lu [32].

No Capítulo 5, apresentamos aplicações em dois problemas elípticos, garantindo soluções não triviais para ambos.

CAPÍTULO 1

Preliminares

Iniciaremos com definições básicas de variedades Riemanniana que são primordiais ao longo do trabalho. Para mais detalhes veja nas seguintes referências [31], [52], [13] e [8].

Definição 1.1 *Um espaço topológico M é dito ser uma variedade quando:*

- *M é um espaço de Hausdorff: para cada par de pontos distintos $p, q \in M$, existem subconjuntos abertos disjuntos $U, V \subset M$ tal que $p \in U$ e $q \in V$.*
- *Existe uma base enumerável para a topologia de M.*
- *M é localmente Euclidiano de dimensão n: cada elemento p de M possui uma vizinhança U que é homeomorfa a um subconjunto aberto V de $\mathbb{R}^n$, $\phi : U \subset M \to V \subset \mathbb{R}^n$ é um homeomorfismo.*

Observação 1.1 *Denotamos por $\mathcal{X}(M)$ o campo de vetores de uma variedade M. Utilizaremos aqui a*

Definição 1.2 *Uma carta coordenada em M é um par (U, ϕ), onde U é um subconjunto aberto de M e $\phi : U \to V \subseteq \mathbb{R}^n$ é um homeomorfismo de U para um subconjunto aberto V de $\mathbb{R}^n$. Por definição de uma variedade topológica, cada ponto $p \in M$ está contido no domínio de algum gráfico (U, ϕ). Se $\phi(p) = 0$, dizemos que o gráfico está centrado em p.*

Definição 1.3 *Com as cartas coordenadas formamos um atlas $\{(U_i, \Phi_i)\}$ que consiste em uma família de homeomorfismos $\{\Phi_i : U_i \to V_i\}$ (onde os V_i são subconjuntos abertos de $\mathbb{R}^n$), de modo que para qualquer i e j em I, o homeomorfismo $\Phi_j \circ \Phi_i^{-1}$ (função de transição) é, na verdade, um difeomorfismo C^∞ de $\Phi_i(U_i \cap U_j)$ para $\Phi_j(U_i \cap U_j)$.*

Definição 1.4 *Uma variedade Riemanniana é um par (M, g), onde:*

- *M é uma variedade diferenciável suave de dimensão finita.*
- *g é uma métrica Riemanniana definida em M, ou seja, para cada ponto p em M, g_p é uma forma bilinear simétrica definida positiva no espaço tangente T_pM.*

A métrica Riemanniana g atribui a cada ponto da variedade um produto interno suave nos vetores tangentes ao espaço da variedade nesse ponto.

Definição 1.5 *Seja M uma variedade Riemanniana. Definimos a conexão em vetores no T_pM pelo operador ∇ que satisfaz as seguintes condições, sejam X, Y e $Z \in \mathcal{X}(\mathcal{M})$ e $f, g \in C^\infty(M)$ então $\nabla : \mathcal{X}(\mathcal{M}) \times \mathcal{X}(\mathcal{M}) \times \mathcal{X}(\mathcal{M}) \to \mathcal{X}(\mathcal{M})$:*

(i) $\nabla_{fX+gY}Z = f\nabla_X Z + g\nabla_Y Z$

(ii) $\nabla_X fY = X(f)Y + \nabla_X Y$

(iii) $\nabla_X(Y+Z) = \nabla_X Y + \nabla_X Z$

Se ∇ é compatível com a métrica Riemanniana e é simétrica dizemos que ∇ é a conexão de Levi-Civita.

Definição 1.6 *A derivada covariante de um (1, r)-tensor T é um (1, $r+1$)-tensor ∇T dado por*

$$\nabla T(X, Y_1, \ldots, Y_r) = \nabla_X(T(Y_1, \ldots, Y_r)) - T(\nabla_X Y_1, \ldots, Y_r) - \ldots - T(Y_1, \ldots, \nabla_X Y_r). \quad (1\text{-}1)$$

Para cada $X \in \mathcal{X}(M)$, define-se a derivada covariante $\nabla_X T$ de T em relação a X como um tensor de mesma ordem que T dado por

$$\nabla_X T(Y_1, \ldots, Y_r) := \nabla T(X, Y_1, \ldots, Y_r). \quad (1\text{-}2)$$

Analogamente, a derivada covariante de um (0, r)-tensor T é um (0, $r+1$)-tensor ∇T dado por (1-1).

Definição 1.7 *Uma geodésica em uma variedade Riemanniana M é uma curva parametrizada $\gamma : I \to M$, onde I é um intervalo em $\mathbb{R}$, tal que a métrica Riemanniana g ao longo da curva é estacionária em relação a variações da curva. Isso é expresso pela equação das geodésicas:*

$$\nabla_{\dot\gamma}\dot\gamma = 0,$$

onde $\dot\gamma$ representa a derivada em relação ao parâmetro t, e ∇ é a conexão de Levi-Civita associada a métrica Riemanniana.

Definição 1.8 *Uma variedade Riemanniana é dita ser geodesicamente completa quando para cada ponto $p \in M$ a função exponencial $\exp_p : T_pM \to M$ está definida para todo $v \in T_pM$. Lembrando que, $\exp_p(0) = p \, \exp_p(tv) = q \in M$.*

Definição 1.9 *Um espaço topólogico M é dito ser compacto se dada uma coleção qualquer de abertos $\mathcal{A} = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda$ que cobre totalmente M, admite uma subcobertura finita.*

Definição 1.10 *Seja* (M,μ) *um espaço de medida. O espaço de Lebesgue* $L^p(M)$ *com* $1 \leq p < \infty$ *é definido por:*

$$L^p(M) = \{f : M \to \mathbb{R} \mid \int_M |f|^p d\mu < +\infty\}.$$

A norma em $L^p(M)$*,* $1 \leq p < \infty$ *é definida por* $\|f\|_{L^p(M)} = \left(\int_M |f|^p d\mu\right)^{1/p}$*.*

Já o espaço L^∞ *é definido por*

$$L^\infty(M) = \{f : M \to \mathbb{R} : \exists C > 0 \text{ e } N \subset M \text{ com } \mu(N) = 0 \text{ satisfazendo } |f(x)| \leq C, \forall x \notin N\}.$$

Com norma definida por

$$\|f\|_\infty = \inf\{C > 0 : \exists N \subset M \text{ com } \mu(N) = 0 \text{ satisfazendo } |f(x)| \leq C, \forall x \notin N\}.$$

Definição 1.11 *Seja* (M,μ) *um espaço de medida. O espaço de Sobolev* $W^{1,p}(M)$ *é definido por*

$$W^{1,p}(M) = \{f \in L^p(M) \mid \int_M |\nabla f|^p d\mu < \infty\}.$$

A norma em $W^{1,p}(M)$ *é definida por* $\|f\|_{W^{1,p}(M)} = \left(\int_M |\nabla f|^p d\mu + \int_M |f|^p d\mu\right)^{1/p}$*.*

Definição 1.12 *O espaço de Sobolev em variedades Riemannianas é definido da seguinte forma: Primeiramente, denotamos a forma de volume como* $dv_g = |g|\, dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n$*, onde* $|g|$ *é o determinante da matriz* $(g_{ij})_{n\times n}$*. Em seguida, a norma* L^p *de* ∇u *é definida como*

$$\|\nabla u\|_{L^p(M)} = \left(\int_M |g_{ij}\nabla_i u \nabla_j u|^{p/2} dv_g\right)^{1/p}.$$

Definição 1.13 *Seja* M *uma variedade Riemanniana, considere uma partição da unidade* γ_α *e uma cobertura* $\{U_\alpha\}$ *de* M*, subordinada a esta partição.*

Considere uma função $f : M \to \mathbb{R}$*. A integral de* f *sobre* M *pode ser expressa em termos das coordenadas locais como:*

$$\int_M f\, dV = \sum_\alpha \int_{U_\alpha} (f \circ \gamma_\alpha^{-1}) \sqrt{\det(g_{ij})}\, dx^1 \ldots dx^n, \tag{1-3}$$

onde $dV = \sqrt{\det(g_{ij})} dx^1 \ldots dx^n$ *é o elemento de volume.*

Em uma variedade completa M é possível fazer a sua parametrização com apenas uma carta (U,ϕ). Para isto, tome $p \in M$ e considere o plano tangente T_pM, como a exponencial está definida para todo $v \in T_pM$ segue que tomando $U \subset T_pM$ e $\phi = \exp_p$ de modo que $\exp_p(U) = M$, obtemos o desejado.

Note então que (1-3) simplifica e se torna,

$$\int_M f\,dV = \int_U (f \circ \exp_p)\sqrt{\det(g_{ij})}\,dx^1 \dots dx^n.$$

Definição 1.14 *A maior raio ε para o qual*

$$\exp_p : B(0,\varepsilon) \to B(p,\varepsilon),$$

é um difeomorfismo é chamado de raio de injetividade $\mathrm{inj}(p)$ *em* p*. Definimos o raio de injetividade* $\mathrm{inj}_{(M,g)}$ *em toda variedade Riemanniana por*

$$\mathrm{inj}_{(M,g)} = \inf_{p\in M}\{\mathrm{inj}(p)\}.$$

Definição 1.15 *Dizemos que o espaço de Sobolev está imerso continuamente no espaço de Lebesgue quando*

(i) $W^{1,p}(M)$ *é subespaço de* $L^p(M)$*;*

(ii) *Existe uma constante* $C > 0$ *tal que* $\|f\|_{L^p(M)} \leq C\|f\|_{W^{1,p}(M)}$.

Quando isto ocorre denotamos por $W^{1,p}(M) \hookrightarrow L^p(M)$.

Definição 1.16 *Seja* M *uma variedade Riemanniana. O tensor curvatura de Riemann é o (1, 3)-tensor* $\mathrm{Rm} : \mathcal{X}(M) \times \mathcal{X}(M) \times \mathcal{X}(M) \to \mathcal{X}(M)$ *dado por*

$$\mathrm{Rm}(X,Y)Z = \nabla_X\nabla_Y Z - \nabla_Y\nabla_X Z - \nabla_{[X,Y]}Z.$$

Definição 1.17 *Já o tensor de Ricci,* Rc*, é definido como sendo o traço do tensor* Rm*. Ao considerarmos uma base* $\{E_i\}_{i=1}^n$ *ortonormal para o* T_pM*, então*

$$\begin{aligned}\mathrm{Rc}(X,Y) &= tr(Z \to \mathrm{Rm}(X,Z)Y)\\ &= \sum_{i=1}^n \langle \mathrm{Rm}(X,E_i)Y, E_i\rangle.\end{aligned}$$

A partir de um sistema de coordenadas, podemos concluir a seguinte relação quando definimos $\mathrm{R}_{ij} := \mathrm{Rc}(X_i,X_j)$*, os coeficientes do tensor de Ricci:*

$$\mathrm{R}_{ij} = \sum_{k,l=1}^n \mathrm{Rm}_{ikjl}\,g^{kl} = \sum_{k=1}^n \mathrm{Rm}_{ikj}^k.$$

Definição 1.18 *Seja* (M,g) *uma variedade Riemanniana suave de dimensão* n*, e seja* $x \in M$*. Dado* $Q > 1$*,* $k \in \mathbb{N}$ *e* $\alpha \in (0,1)$*, definimos o raio harmônico* $C^{k,\alpha}$ *em* x *como o maior número* $r_H = r_H(Q,k,\alpha)(x)$ *tal que na bola geodésica* $B_r(x)$ *com centro em* x *e raio* r*, existe uma carta coordenada harmônica na qual o tensor métrico é* $C^{k,\alpha}$

controlado nessas coordenadas. Ou seja, se g_{ij}*,* $i,j = 1,\dots,n$*, são as componentes de* g *nessas coordenadas, então*

1. $Q^{-1}\delta_{ij} \leq g_{ij} \leq Q\delta_{ij}$ *como formas bilineares;*
2. $\sum_{1\leq|\beta|\leq k} r_H^{|\beta|} \sup_y |\partial_\beta g_{ij}(y)| + \sum_{|\beta|=k} r_H^{k+\alpha} \sup_{y\neq z} \frac{\partial_\beta g_{ij}(z)-\partial_\beta g_{ij}(y)}{d_g(y,z)^\alpha} \leq Q-1$

onde d_g *é a distância associada para* g*, e* δ_{ij} *é o delta de Kronecker. Agora, definimos o raio harmônico (global)* $r_H(Q,k,\alpha)(M)$ *de* (M,g) *como*

$$r_H(Q,k,\alpha)(M) = \inf_{x\in M} r_H(Q,k,\alpha)(x),$$

onde $r_H(Q,k,a)(x)$ *é como definido anteriormente.*

1.2 Resultados de Geometria Riemanniana

Os resultados de Geometria Riemanniana utilizados são os referidos abaixo, dentre eles se destaca o Lema da Cobertura de Gromov que é fundamental para a obtenção dos resultados. Para mais detalhes veja nas seguintes referências [52], [13], [23] e [24].

Lema 1.3 *Seja* M *uma variedade Riemanniana completa e suponhamos que, para* λ *constante,* $\mathrm{Rc}(g) \geq (n-1)\lambda g$*. Então, Vol*$(B_r(p)) \leq$ *Vol*(B_r^λ) *onde* B_r^λ *é uma bola geodésica de raio* r *na forma espacial de curvatura seccional constante* λ*.*

Lema 1.4 ***(Cobertura de Gromov)*** *Seja* (M,g) *uma variedade Riemanniana suave e completa de dimensão* n*, com curvatura de Ricci limitada inferiormente por algum valor real* λ*, e seja* $\rho > 0$ *dado. Existe uma sequência* (x_i) *de pontos em* M *tal que, para qualquer* $r \geq \rho$*:*

(i) a família $(B_{x_i}(r))$ *é uma cobertura uniformemente localmente finita de* M*, e há um limite superior para* N *em termos de* n,ρ,r *e* k*;*

(ii) para qualquer $i \neq j$*,* $B_{x_i}(\delta/2) \cap B_{x_j}(\delta/2) = \emptyset$*, onde, para* $x \in M$ *e* $r > 0$*,* $B_x(r)$ *representa a bola geodésica de centro* x *e raio* r*.*

Teorema 1.5 *(Teorema 1.3 em [24]) Sejam* $\alpha \in (0,1)$*,* $Q > 1$*,* $\delta > 0$*. Seja* (M,g) *uma variedade Riemanniana e* Ω *um subconjunto aberto de* M*. Defina*

$$\Omega(\delta) = \{x \in M \mid d(x,\Omega) < \delta\}.$$

Suponha que para algum $\lambda \in \mathbb{R}$ *e* $i_0 > 0$*, temos que para todo* $x \in \Omega(\delta)$*,*

$$\mathrm{Rc}_{(M,g)} \geq \lambda g \text{ e } \mathrm{inj}_{(M,g)} \geq i_0.$$

Então existe uma constante positica $C = C(n, Q, \alpha, \delta, \lambda, i_0)$ *tal que para qualquer* $x \in \Omega$, $r_H(Q, \delta, \alpha)(x) \geq C$.

Teorema 1.6 *(Forma Volume) Seja* $B_x(r)$ *uma bola geodésica centrada em* x *e raio* r *em* M*. Então,*

$$\mathrm{Vol}(B_x(r)) = \frac{\omega_{n-1}^{\frac{1}{n-1}}}{n}\left(1 - \frac{1}{6(n+2)}s(x)r^2 + o(r^2)\right), \tag{1-4}$$

onde $s(x)$ *é a curvatura escalar em* x*. Além disso, em coordenadas geodésicas normal em uma vizinhança de* x*, a forma volume de* M *é*

$$dv(\tilde{x}) = r^{n-1}\left(1 - \frac{1}{3}\mathrm{Rc}(\theta)r^2 + o(r^2)\right)d\theta dr, \tag{1-5}$$

onde $\tilde{x} = \exp_x(r\theta)$, $\theta \in \mathbb{S}^{n-1}$ *e* $d\theta$ *é a medida de área padrão em* $\mathbb{S}^{n-1}$. $\mathrm{Rc}(\theta)$ *é a curvatura de Ricci avaliada no vetor* θ.

Teorema 1.7 *(H. Hopf-Rinow, 1931) As seguintes afirmações são equivalentes:*

- M *é geodesicamente completo, ou seja, todas as geodésicas estão definidas para todo o tempo;*
- M *é geodesicamente completo em* p*, ou seja, todas as geodésicas que passam por* p *estão definidas para todo o tempo;*
- M *satisfaz a propriedade de Heine-Borel, ou seja, todo conjunto fechado e limitado é compacto;*
- M *é completo no sentido métrico, isto é, toda sequência de Cauchy converge.*

1.8 Teorema de Análise Variacional

Aqui enunciaremos os resultados utilizados de Análise Variacional que são utilizados para o Capítulo de Aplicações. Para mais detalhes veja nas seguintes referências [20], [17] e [6].

Teorema 1.9 *(Lema de Fatou) Seja* $\{f_n\}$ *uma sequência de funções não negativas integráveis em relação a* μ*, convergindo para uma função* f *quase em todo lugar. Suponha que*

$$\sup_n \int_X f_n(x)\, d\mu(x) \leq K < \infty.$$

Então, a função f *é integrável em relação a* μ *e*

$$\int_X f(x) d\mu(x) \leq K.$$

Além disso,

$$\int_X f(x)\,d\mu(x) \leq \liminf_{n\to\infty} \int_X f_n(x)\,d\mu(x).$$

Teorema 1.10 *(Lema de Brézis-Lieb) Seja $\{f_j\}$ uma sequência de funções em (Ω,Σ,μ) que converge pontualmente para uma função f, que é mensurável. Assuma que as f_j's são uniformemente somáveis à p-ésima potência, para algum $p \in (1,\infty)$ fixado, isto é,*

$$\int_\Omega |f_j(x)|^p\,d\mu(x) < \infty, \quad \forall j \in \mathbb{N}.$$

Então,

$$\lim_{j\to\infty} \int_\Omega \big||f_j(x)|^p - |f_j(x) - f(x)|^p + |f(x)|^p\big|\,d\mu(x) = 0.$$

Definição 1.19 *(Condição de Palais-Smale) Seja $\varphi \in \mathcal{C}^1(X,\mathbb{R})$, dizemos que φ satisfaz a condição de Palais-Smale quando:*

Para qualquer sequência (u_n) tal que $\varphi(u_n)$ é limitado e $\varphi'(u_n) \to \infty$, existe uma subsequência convergente.

Teorema 1.11 *(Teorema do Passo da Montanha) Seja H um espaço de Banach. Suponha que $J \in \mathcal{C}^1(H,\mathbb{R})$ satisfaz a condição de Palais-Smale. Suponha também que*

- $J(0) = 0$*;*
- *existem constantes $r, a > 0$ tais que $|J(u)| \geq a$ se $\|u\| = r$;*
- *existe um elemento $v \in H$ com $\|v\| > r$, $|J(v)| \leq 0$.*

Defina,

$$\Gamma := \{\gamma \in C([0,1];H) \mid \gamma(0) = 0, \gamma(1) = v\}.$$

Então,

$$c = \inf_{\gamma\in\Gamma} \max_{t\in[0,1]} |J(\gamma(t))|$$

é um valor crítico de J.

1.12 Teoremas Auxiliares

O seguintes teoremas são suporte para nossas demonstrações no caso crítico, que será apresentado no Capítulo 3. Ressaltamos aqui que Li e Lu [32] utilizaram de um recorte na variedade de modo a obterem uma parte compacta e uma outra não compacta. Na parte não compacta foi feita uma majoração na integral de maneira uniforme. Para a parte compacta a limitação é obtida por meio destes teoremas em ambos os casos desta variedade compacta possuir bordo ou não.

Teorema 1.13 *Seja M uma variedade Riemanniana compacta sem bordo e de dimensão n e m um inteiro positivo menor estrito que n. Então existe uma constante $C = C(n,m,M)$ tal que para todo $u \in C^m(M)$ com $\int_M u dv = 0$ e $\int_M |\nabla^m u|^{n/m} dv \leq 1$, temos:*

(1) *A seguinte desigualdade uniforme vale*

$$\int_M \exp\{\beta(n,m)|u|^{\frac{n}{n-m}}\}dv(x) \leq C = C(n,m,M), \tag{1-6}$$

onde a constante $\beta(n,m)$ é a constante de Adams conforme (0-3) e é sharp no mesmo sentido.

(2) *A constante $C = C(n,m,M)$ depende continuamente do volume de M de tal forma que é monotonicamente crescente em relação ao volume de M.*

Teorema 1.14 *Seja M uma variedade Riemanniana compacta com bordo de dimensão n e m um inteiro positivo estritamente menor que n. Então, existe uma constante $C = C(n,m,M)$ tal que, para todo $u \in C_0^m(M)$ e $\int_M |\nabla^m u|^{n/m} dV \leq 1$, temos:*

(1) *A seguinte desigualdade uniforme vale*

$$\int_M \exp\{\beta(n,m)|u|^{\frac{n}{n-m}}\}dv(x) \leq C = C(n,m,M), \tag{1-7}$$

onde a constante $\beta(n,m)$ é a constante de Adams e é sharp no mesmo sentido.

(2) *A constante $C = C(n,m,M)$ depende continuamente do volume de M de tal forma que é monotonicamente crescente em relação ao volume de M.*

O fato de a constante $C(n,m,M)$ da desigualdade local de Trudinger-Moser ser contínua e monotonicamente crescente em relação ao volume da variedade compacta M é crucial para a conclusão do caso crítico. Os Teoremas 1.13 e 1.14 são derivados dos resultados a seguir.

Teorema 1.15 *(O' Neil) Seja M uma variedade Riemanniana compacta e T o operador definido por $Tf(P) = \int_M K(P,\tilde{P})f(\tilde{P})dV(\tilde{P})$, onde $K(P,\tilde{P}) = d(P,\tilde{P})^{\alpha-n}(1 + ad(P,\tilde{P})^{\beta})$, $a \geq 0$, $\beta > 0$, $0 < \alpha < n$. Temos as seguintes conclusões:*

(1) *Existe $C = C(\alpha,\beta,a,M)$ tal que*

$$\sup_{f \in L^{n/\alpha}(M), \|f\|_{L^{n/\alpha}} \leq 1} \int_M \exp\{\frac{n}{\omega_{n-1}}|Tf(P)|^{\frac{n}{n-\alpha}}\}dv(P) \leq C, \tag{1-8}$$

onde ω_{n-1} é a área da esfera unitária em $\mathbb{R}^n$. Além disso, $\frac{n}{\omega_{n-1}}$ é sharp.

(2) *A constante $C = C(\alpha,\beta,a,M)$ depende do volume de M de maneira que é contínua e monotonicamente crescente com relação ao volume de M.*

Para provar o Teorema 1.15, relembramos alguns lemas necessários para a prova. O primeiro é o lema de O'Neil sobre a rearranjo da convolução, que é encontrado em [22, Lema 3.1].

Lema 1.16 *Para todo $t > 0$, $f \geq 0$, existe uma constante B tal que*

$$(Tf)^{**} \leq \frac{\omega_{n-1}}{\alpha}\left(\frac{nt}{\omega_{n-1}}\right)^{\alpha/n}(1+Bt^{\beta/n})f^{**}t + \int_t^{\infty} f^*(s)\left(\frac{ns}{\omega_{n-1}}\right)^{\frac{\alpha-n}{n}}(1+Bs^{\beta/n})ds, \tag{1-9}$$

onde T, α, β são definidos no Teorema 1.15, f^* é o rearranjo usual não-decrescente de $|f|$ e f^{**} é definido por $f^{**}(t) = \frac{1}{t}\int_0^t f^*(s)ds$.

Prova. (Teorema 1.15). Seja $t_1 = \mathrm{Vol}(M)$. Então, usando $f^* \leq f^{**}$, temos

$$\begin{aligned}\int_M \exp\left\{\frac{n}{\omega_{n-1}}|Tf(P)|^{\frac{n}{n-\alpha}}\right\}dv(P) &= \int_0^{t_1}\exp\{\frac{n}{\omega_{n-1}}|(Tf)^*(t)|^{\frac{n}{n-\alpha}}\}dt\\ &\leq \int_0^{t_1}\exp\{\frac{n}{\omega_{n-1}}|(Tf)^{**}(t)|^{\frac{n}{n-\alpha}}\}dt.\end{aligned}$$

Aplicando o Lema 1.16, obtemos

$$(Tf)^{**} \leq \frac{\omega_{n-1}}{\alpha}\left(\frac{nt}{\omega_{n-1}}\right)^{\frac{\alpha}{n}}(1+Bt^{\beta/n})f^{**}(t) + \int_t^{\infty} f^*(s)\left(\frac{ns}{\omega_{n-1}}\right)^{\frac{\alpha-n}{n}}(1+Bs^{\beta/n})ds.$$

Tomando $\alpha = 1$ e $\beta = 1$,

$$\begin{aligned}(Tf)^{**} &\leq \omega_{n-1}\left(\frac{nt}{\omega_{n-1}}\right)^{\frac{1}{n}}(1+Bt^{1/n})\frac{1}{t}\int_0^t f^*(s)ds\\ &\quad + \int_t^{\infty} f^*(s)\left(\frac{ns}{\omega_{n-1}}\right)^{\frac{1-n}{n}}(1+Bs^{1/n})ds\\ &\leq \omega_{n-1}\left(\frac{n}{\omega_{n-1}}\right)^{\frac{1}{n}}(1+Bt_1^{1/n})t^{\frac{1-n}{n}}\int_0^t f^*(s)ds\\ &\quad + \left(\frac{\omega_{n-1}}{n}\right)^{\frac{n-1}{n}}\int_t^{t_1} f^*(s)s^{\frac{1-n}{n}}(1+Bs^{1/n})ds.\end{aligned}$$

Definindo $C_1 = \omega_{n-1}\left(\frac{n}{\omega_{n-1}}\right)^{\frac{1}{n}}(1+Bt_1^{1/n})$

$$(Tf)^{**} \leq C_1 t^{\frac{1-n}{n}}\int_0^t f^*(s)ds + \left(\frac{\omega_{n-1}}{n}\right)^{\frac{n-1}{n}}\int_t^{t_1} f^*(s)s^{\frac{1-n}{n}}(1+Bs^{1/n})ds.$$

Então, temos

$$\int_M \exp\left\{\frac{n}{\omega_{n-1}}|Tf(P)|^{\frac{n}{n-1}}\right\}dv(P)$$
$$\leq \int_0^{t_1}\exp\left\{\frac{n}{\omega_{n-1}}\left[C_1 t^{\frac{1-n}{n}}\int_0^t f^*(s)ds+\left(\frac{\omega_{n-1}}{n}\right)^{\frac{n-1}{n}}\int_t^{t_1} f^*(s)s^{\frac{1-n}{n}}(1+Bs^{1/n})ds\right]^{\frac{n}{n-1}}\right\}dt.$$

Em seguida, definimos

$$\begin{aligned}
x &= \log(1/s) \Rightarrow s = e^{-x} \Rightarrow ds = -e^{-x}dx\\
y &= \log(1/t) \Rightarrow t = e^{-y} \Rightarrow dt = -e^{-y}dy\\
y_1 &= \log(1/t_1)\\
C_2 &= \left(\frac{n}{\omega_{n-1}}\right)^{\frac{n-1}{n}} C_1\\
\phi(x) &= f^*(e^{-x})e^{-\frac{x}{n}}.
\end{aligned}$$

Então,

$$\begin{aligned}
&\int_M \exp\left\{\frac{n}{\omega_{n-1}}|Tf(P)|^{\frac{n}{n-1}}\right\}dv(P)\\
&\quad\leq \int_\infty^{y_1}\exp\left\{\left[C_2(e^{-y})^{\frac{1-n}{n}}\int_\infty^{y} f^*(e^{-x})(-e^{-x})dx\right.\right.\\
&\quad\left.\left.+\int_y^{y_1} f^*(e^{-x})(e^{-x})^{\frac{1-n}{n}}(1+B(e^{-x})^{1/n})(-e^{-x})dx\right]^{\frac{n}{n-1}}\right\}(-e^{-y})dy\\
&\quad= \int_{y_1}^{\infty}\exp\left\{\left[C_2\int_y^\infty f^*(e^{-x})e^{-\frac{x}{n}+\frac{x}{n}-\frac{nx}{n}-\frac{y(1-n)}{n}}dx+\int_{y_1}^{y}(1+B(e^{-x/n}))\phi(x)dx\right]^{\frac{n}{n-1}}-y\right\}dy\\
&\quad= \int_{y_1}^{\infty}\exp\left\{\left[C_2\int_y^\infty \phi(x)e^{-\frac{(x-y)(n-1)}{n}}dx+\int_{y_1}^{y}(1+B(e^{-x/n}))\phi(x)dx\right]^{\frac{n}{n-1}}-y\right\}dy.
\end{aligned}$$

Definindo,

$$g(x,y)=\begin{cases}1+Be^{-x/n}, & y_1\leq x\leq y\\ C_2 e^{\frac{(x-y)(n-1)}{n}}, & y_1<y<x<\infty,\end{cases} \tag{1-10}$$

e

$$F(y)=y-\left(\int_{y_1}^{\infty} g(x,y)\phi(x)dx\right)^{\frac{n}{n-1}}. \tag{1-11}$$

Então

$$\int_{y_1}^{\infty} \exp\left\{\left[C_2\int_y^{\infty} \phi(x)e^{-\frac{(x-y)(n-1)}{n}}dx+\int_{y_1}^{y}(1+B(e^{-x/n}))\phi(x)dx\right]^{\frac{n}{n-1}}-y\right\}dy$$
$$=\int_{y_1}^{\infty}\exp\left\{\left[\int_{y_1}^{\infty} g(x,y)\phi(x)dx\right]^{\frac{n}{n-1}}-y\right\}dy$$
$$=\int_{y_1}^{\infty}\exp\{-F(y)\}dy.$$

Como $f\in L^n(M)$ e $\|f\|_{L^n(M)}\leq 1$, vale

$$1\geq\int_M|f|^n dv=\int_0^{t_1}(f^*)^n(s)ds=\int_{y_1}^{\infty}\phi(y)^n dy.$$

Então a demonstração do Teorema 1.15 e, portanto, a dependência da constante C em relação a Vol(M) em (1-8), é reduzida a prova do seguinte lema.

Lema 1.17 *Suponha que* $\phi:[y_1,\infty)\to\mathbb{R}^+$ *satisfaça* $\int_{y_1}^{\infty}\phi(x)^n\leq 1$. *Sejam* g *e* F *como definidos acima envolvendo* C_2. *Então*

$$\int_{y_1}^{\infty} e^{-F(y)}dy\leq C_3<\infty, \tag{1-12}$$

onde C_3 *depende de* y_1, C_2, *mas não de* ϕ.

Aplicando este lema, o Teorema 1.15 é demonstrado. Além disso, a constante $C(n,1,M)$ é, na verdade, C_3 no Lema 1.17. Assim, precisamos encontrar a relação entre C_3, y_1 e C_2.

Prova. (Lema 1.17) Primeiramente,

$$\sup_{y\geq y_1}\left(\int_y^{\infty} g(x,y)^{\frac{n}{n-1}}\right)^{\frac{n-1}{n}} = \sup_{y\geq y_1}\left(\int_y^{\infty}(C_2e^{-\frac{(n-1)(x-y)}{n}})^{\frac{n}{n-1}}\right)^{\frac{n-1}{n}}$$
$$=\sup_{y\geq y_1}C_2\left(\int_y^{\infty}e^{-(x-y)}dx\right)^{\frac{n-1}{n}}$$
$$=C_2.$$

Note que

$$\int_y^{\infty}e^{-(x-1)}dx=-e^{-x+y}|_y^{\infty}=e^{-x+y}|_{\infty}^{y}=e^{y-y}-\lim_{x\to\infty}e^{-x+y}=1.$$

Defina $E_\lambda=\{y\geq y_1:F(y)\leq\lambda\}$. Então

$$|E_\lambda|=\int_{y_1}^{\infty}\chi_{\{F\leq\lambda\}}(t)dt.$$

E assim,

$$\int_{-\infty}^{\infty}\left(\int_{y_1}^{\infty}\chi_{\{F\leq\lambda\}}(t)dt\right)e^{-\lambda}d\lambda = \int_{y_1}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\chi_{\{F\leq\lambda\}}(t)e^{-\lambda}d\lambda dt$$
$$= \int_{y_1}^{\infty}\int_{F(t)}^{\infty}e^{-\lambda}d\lambda dt$$
$$= \int_{y_1}^{\infty}e^{-F(t)}dt.$$

De onde concluímos que

$$\int_{y_1}^{\infty}e^{-F(y)}dy = \int_{-\infty}^{\infty}|E_\lambda|e^{-\lambda}d\lambda. \tag{1-13}$$

□

A prova do Lema 1.17 ainda não foi concluída e para este fim utilizaremos de resultados auxiliares, que estão a seguir.

Lema 1.18 *Existe uma constante positiva C_4 tal que se $E_\lambda \neq \varnothing$, então $\lambda \geq -C_4$.*

Prova. (Lema 1.18) Pela definição de E_λ, temos $F(y)\leq\lambda$, então

$$y-\lambda \leq \left(\int_{y_1}^{\infty}g(x,y)\phi(x)dx\right)^{\frac{n}{n-1}}$$
$$= \left(\int_{y_1}^{y}\phi(x)(1+Be^{-x/n})dx + \int_{y}^{\infty}\phi(x)C_2e^{\frac{(y-x)(n-1)}{n}}dx\right)^{\frac{n}{n-1}}$$
$$\leq \left\{\left(\int_{y_1}^{y}\phi(x)^n dx\right)^{1/n}\left(\int_{y_1}^{y}(1+Be^{-x/n})^{\frac{n}{n-1}}dx\right)\right.$$
$$\left. + \left(\int_{y}^{\infty}\phi(x)^n dx\right)^{1/n}\left(\int_{y}^{\infty}(C_2e^{\frac{(y-x)(n-1)}{n}})^{\frac{n}{n-1}}dx\right)^{\frac{n-1}{n}}\right\}^{\frac{n}{n-1}}.$$

Estimamos

$$
\begin{aligned}
\left(\int_{y_1}^{y}(1+e^{-x/n})^{\frac{n-1}{n}}dx\right)^{\frac{n-1}{n}} &\leq \left(\int_{y_1}^{y}(1+Be^{-x/n})dx\right)^{\frac{n-1}{n}} \\
&\leq \left(\int_{y_1}^{y}1+2Be^{-x/n}+B^2e^{-2x/n}dx\right)^{\frac{n-1}{n}} \\
&= \left\{(x-2Bne^{-x/n}-\frac{B^2n}{2}e^{-2x/n})|_{y_1}^{y}\right\}^{\frac{n-1}{n}} \\
&= \Big\{(y-y_1)+(-2nBe^{-y/n}+2nBe^{-y_1/n}) \\
&\qquad +(-\frac{n}{2}B^2e^{-2y/n}+\frac{n}{2}B^2e^{-2y_1/n})\Big\}^{\frac{n-1}{n}} \\
&= \{y+C_5\}^{\frac{n-1}{n}},
\end{aligned}
$$

onde

$$C_5=-y_1+(-2nBe^{-y/n}+2nBe^{-y_1/n})+(-\frac{n}{2}B^2e^{-2y/n}+\frac{n}{2}B^2e^{-2y_1/n}).$$

Seja $L(y)=(\int_y^{\infty}\phi^n dx)^{1/n}\leq 1$. Então,

$$\int_{y_1}^{\infty}\phi^n dx=\int_{y_1}^{y}\phi^n dx+\int_{y}^{\infty}\phi^n dx=\int_{y_1}^{y}\phi^n dx+L^n(y)\leq 1.$$

Assim,

$$\int_{y_1}^{y}\phi^n dx\leq 1-L^n(y).$$

Portanto, usando as desigualdades (6.5) e (6.6), segue que

$$
\begin{aligned}
y-\lambda &\leq \{(1-L^n(y))^{1/n}(y+C_5)^{\frac{n-1}{n}}+C_2L(y)\}^{\frac{n}{n-1}} \\
&\leq (y+C_5)(1-L^n(y))^{\frac{1}{n-1}} \\
&\qquad +\frac{n}{n-1}2^{\frac{1}{n-1}}\left\{(y+C_5)^{1/n}(1-L^n(y))^{\frac{1}{n(n-1)}}C_2L(y)+(C_2L(y))^{\frac{n}{n-1}}\right\} \\
&\leq (y+C_5)(1-\frac{1}{n-1}L^n(y))+\frac{n}{n-1}2^{\frac{1}{n-1}}(y+C_5)^{1/n}C_2L(y)+\frac{n}{n-1}2^{\frac{1}{n-1}}C_2^{\frac{n}{n-1}} \\
&= y+C_5-\frac{1}{n-1}((y+C_5)^{1/nL(y)})^n+\frac{n}{n-1}2^{\frac{1}{n-1}}(y+C_5)^{1/n}C_2L(y)+\frac{n}{n-1}2^{\frac{1}{n-1}}C_2^{\frac{n}{n-1}}.
\end{aligned}
$$

Definimos,

$$\sigma=(y+C_5)^{1/n}L(y),\quad C_6=\frac{n}{n-1}2^{\frac{1}{n-1}}C_2,\quad C_7=\frac{n}{n-1}2^{\frac{1}{n-1}}C_2^{\frac{n}{n-1}}.$$

Então,

$$y-\lambda\leq y+C_5-\frac{1}{n-1}\sigma^n+C_6\sigma+C_7. \tag{1-14}$$

Isso implica,

$$\lambda \geq \frac{1}{n-1}\sigma^n - C_6\sigma - C_5 - C_7. \tag{1-15}$$

Considere a função $f(\sigma) = \frac{1}{n-1}\sigma^n - C_6\sigma$. Resolvendo $f' = 0$,

$$f'(\sigma) = \frac{n}{n-1}\sigma^{n-1} - C_6 = 0 \Rightarrow \sigma^{n-1} = C_6\frac{n-1}{n} \Rightarrow \sigma = \left(C_6\frac{n-1}{n}\right)^{\frac{1}{n-1}},$$

e,

$$f\left(\left(C_6\frac{n-1}{n}\right)^{\frac{1}{n-1}}\right) = \frac{1}{n-1}\left(C_6\frac{n-1}{n}\right)^{\frac{n}{n-1}} - \left(C_6^n\frac{n-1}{n}\right)^{\frac{1}{n-1}}.$$

Observe que, $f''(\sigma) = n\sigma^{n-2}$ e

$$f''\left(\left(C_6\frac{n-1}{n}\right)^{\frac{1}{n-1}}\right) = n\left(\frac{C_6(n-1)}{n}\right)^{\frac{n-2}{n-1}} > 0.$$

Portanto,

$$\begin{aligned}
\lambda &\geq \frac{1}{n-1}\left(\frac{C_6(n-1)}{n}\right)^{\frac{n}{n-1}} - C_6\left(\frac{C_6(n-1)}{n}\right)^{\frac{1}{n-1}} - C_5 - C_7 \\
&\geq -\left(\frac{n-1}{n}\right)^{\frac{1}{n-1}} C_6 - C_5 - C_7 \\
&\geq C_6^{\frac{n}{n-1}} - C_5 - C_7 = -C_4.
\end{aligned}$$

□

Lema 1.19 *Existem constantes positivas C_8 e C_9 tais que $|E_\lambda| \leq C_8|\lambda| + C_9$.*

Prova. (Lema 1.19) De

$$y - \lambda \leq y + C_5 - \frac{1}{n-1}\sigma^n + C_6\sigma + C_7, \tag{1-16}$$

segue, da Desigualdade de Young, Proposição 6.11, com n e n', $\frac{1}{n} + \frac{1}{n'} = 1$,

$$\begin{aligned}
\frac{1}{n-1}\sigma^n &\leq \lambda + C_5 + C_6\lambda + C_7 \\
&\leq \lambda + C_5 + C_7 + \frac{\sigma^n}{n} + \frac{C_6^{\frac{n}{n-1}}}{n/(n-1)}.
\end{aligned} \tag{1-17}$$

Assim,

$$\frac{\sigma^n}{n-1} - \frac{\sigma^n}{n} = \frac{\sigma^n}{n(n-1)}.$$

Então temos

$$\sigma^n \le n(n-1)\lambda + n(n-1)\left(C_5 + C_7 + \frac{n-1}{n} C_6^{\frac{n}{n-1}}\right), \tag{1-18}$$

o que implica

$$\sigma \le (n(n-1))^{\frac{1}{n}} |\lambda|^{\frac{1}{n}} + \left(n(n-1)(C_5 + C_7 + \frac{n-1}{n} C_6^{\frac{n}{n-1}})\right)^{\frac{1}{n}}. \tag{1-19}$$

Ao definir

$$C_{10} = (n(n-1))^{1/n} \text{ e } C_{11} = \left(n(n-1)(C_5 + C_7 + \frac{n-1}{n} C_6^{\frac{n}{n-1}})\right)^{\frac{1}{n}},$$

podemos simplificar a desigualdade acima como

$$\sigma \le C_{10}|\lambda|^{1/n} + C_{11}. \tag{1-20}$$

Seja R um número positivo arbitrário tal que $E_\lambda \cap [R, \infty) \neq \emptyset$. Tome $r_1, r_2 \in E_\lambda \cap [R, \infty)$, $r_1 < r_2$, então

$$\begin{aligned}
r_2 - \lambda &\le \left\{\int_{y_1}^{r_1} g(s, r_2)\phi(s)ds + \int_{r_1}^{r_2} g(s, r_2)\phi(s)ds + C_2 L(r_1)\right\}^{\frac{n}{n-1}} \\
&\le \left\{\left(\int_{y_1}^{r_1} g^{\frac{n}{n-1}} ds\right)^{\frac{n-1}{n}} \left(\int_{y_1}^{r_1} \phi^n ds\right)^{\frac{1}{n}} + \left(\int_{r_1}^{r_2} g^{\frac{n}{n-1}} ds\right) L(r_1) + C_2 L(r_1)\right\}^{\frac{n}{n-1}} \\
&\le \left\{(r_1 + C_5)^{\frac{n-1}{n}} + ((r_2 - r_1 + C_5)^{\frac{n-1}{n}} + C_2) L(r_1)\right\}^{\frac{n}{n-1}} \\
&\le r_1 + C_5 + \frac{n}{n-1} 2^{\frac{1}{n-1}} \left\{(r_1 + C_5)^{\frac{1}{n}}((r_2 - r_1 + C_5)^{\frac{n-1}{n}} + C_2) L(r_1)\right. \\
&\left. + ((r_2 - r_1 + C_5)^{\frac{n-1}{n}} + C_2)^{\frac{n}{n-1}} L(r_1)^{\frac{n}{n-1}}\right\} \\
&\le r_1 + C_5 + \frac{n}{n-1} 2^{\frac{1}{n-1}} \left\{((r_2 - r_1 + C_5)^{\frac{n-1}{n}} + C_2)\sigma + C(n)((r_2 - r_1 + C_5) + C_2^{\frac{n}{n-1}}) L(r_1)^{\frac{n}{n-1}}\right\}.
\end{aligned}$$

Seja $\delta = r_2 - r_1$, então

$$\begin{aligned}
\delta \le \lambda + C_5 + \frac{n}{n-1} 2^{\frac{1}{n-1}} ((\delta + C_5)^{\frac{n-1}{n}} + C_2)\sigma \\
+ \frac{n}{n-1} 2^{\frac{1}{n-1}} C(n)(\delta + C_5) L(r_1)^{\frac{n}{n-1}} + \frac{n}{n-1} 2^{\frac{1}{n-1}} C(n) C_2^{\frac{n}{n-1}}.
\end{aligned}$$

Definindo,

$$C_{12} = C_5 + \frac{n}{n-1} 2^{\frac{1}{n-1}} C(n) C_2^{\frac{n}{n-1}} + \frac{n}{n-1} 2^{\frac{1}{n-1}} C(n) C_5 L(r_1)^{\frac{n}{n-1}},$$

e aplicando em (1-20), temos

$$
\begin{aligned}
\delta \leq \lambda &+ \frac{n}{n-1}2^{\frac{1}{n-1}}((\delta + C_5)^{\frac{n-1}{n}} + C_2)[C_{10}|\lambda|^{\frac{1}{n}} + C_{11}] \\
&+ \frac{n}{n-1}2^{\frac{1}{n-1}}C(n)(\delta + C_5)L(r_1)^{\frac{n}{n-1}} + \frac{n}{n-1}2^{\frac{1}{n-1}}C(n)C_2^{\frac{n}{n-1}} + C_5 \\
= \lambda &+ \frac{n}{n-1}2^{\frac{1}{n-1}}C_{10}(\delta + C_5)^{\frac{n-1}{n}}|\lambda|^{\frac{1}{n}} + \frac{n}{n-1}2^{\frac{1}{n-1}}C_{11}(\delta + C_5)^{\frac{n-1}{n}} + \frac{n}{n-1}2^{\frac{1}{n-1}}C_2C_{10}|\lambda|^{\frac{1}{n}} \\
&+ \frac{n}{n-1}2^{\frac{1}{n-1}}C_2C_{11} + \frac{n}{n-1}2^{\frac{1}{n-1}}C(n)C_2^{\frac{n}{n-1}} + C_5 + \frac{n}{n-1}2^{\frac{1}{n-1}}C(n)\delta L(r_1)^{\frac{n}{n-1}} \\
&+ \frac{n}{n-1}2^{\frac{1}{n-1}}C(n)C_5L(r_1)^{\frac{n}{n-1}}.
\end{aligned}
$$

Observe que:

$$
\begin{aligned}
(\delta + C_5)^{\frac{n}{n-1}}|\lambda|^{\frac{1}{n}}\varepsilon^{1-1} &\leq \frac{(\delta + C_5)\varepsilon^{\frac{n}{n-1}}}{n/(n-1)} + \frac{|\lambda|}{n\varepsilon^n} \\
(\delta + C_5)^{\frac{n}{n-1}}\varepsilon^{1-1} &\leq \frac{(\delta + C_5)\varepsilon^{\frac{n}{n-1}}}{n/(n-1)} + \frac{1}{n\varepsilon^n} \\
|\lambda|^{\frac{1}{n}} \cdot 1 &\leq \frac{|\lambda|}{n} + \frac{1}{n/(n-1)}.
\end{aligned}
$$

Colocando esses valores na desigualdade acima e após algumas simplificações, temos a seguinte estimativa:

$$
\begin{aligned}
\delta \leq \lambda &+ \frac{n}{n-1}2^{\frac{1}{n-1}}C_{10}\left[\frac{\delta + C_5}{n/(n-1)}\varepsilon^{\frac{n}{n-1}} + \frac{|\lambda|}{n\varepsilon^n}\right] + \frac{n}{n-1}2^{\frac{1}{n-1}}C_{11}\left[\frac{\delta + C_5}{n/(n-1)}\varepsilon^{\frac{n}{n-1}} + \frac{1}{n\varepsilon^n}\right] \\
&+ \frac{n}{n-1}2^{\frac{1}{n-1}}C(n)\delta L(r_1)^{\frac{n}{n-1}} + C_{12} \\
= \lambda &+ 2^{\frac{1}{n-1}}C_{10}\delta\varepsilon^{\frac{n}{n-1}} + 2^{\frac{1}{n-1}}C_{10}C_5\varepsilon^{\frac{n}{n-1}} + \frac{1}{n-1}2^{\frac{1}{n-1}}C_{10}|\lambda|\varepsilon^{-n} + 2^{\frac{1}{n-1}}C_{11}\delta\varepsilon^{\frac{n}{n-1}} \\
&+ 2^{\frac{1}{n-1}}C_{11}C_5\varepsilon^{\frac{n}{n-1}} + \frac{1}{n-1}2^{\frac{1}{n-1}}C_{11}\varepsilon^{-n} + \frac{1}{n-1}2^{\frac{1}{n-1}}C_2C_{10}|\lambda| + 2^{\frac{1}{n-1}}C_2C_{10} \\
&+ \frac{n}{n-1}2^{\frac{1}{n-1}}C_2C_{11} + \frac{n}{n-1}2^{\frac{1}{n-1}}C(n)\delta L(r_1)^{\frac{n}{n-1}} + C_{12}.
\end{aligned}
$$

De onde obtemos,

$$
\begin{aligned}
\delta(1 - 2^{\frac{1}{n-1}}C_{10}\varepsilon^{\frac{n}{n-1}} - 2^{\frac{1}{n-1}}C_{11}\varepsilon^{\frac{n}{n-1}} - \frac{n}{n-1}2^{\frac{1}{n-1}}C(n)L(r_1)^{\frac{n}{n-1}}) \\
\leq |\lambda|(1 + \frac{1}{n-1}2^{\frac{1}{n-1}}C_{10}\varepsilon^{-n} + \frac{1}{n-1}2^{\frac{1}{n-1}}C_2C_{10}) \\
+ (2^{\frac{1}{n-1}}C_{10}C_5\varepsilon^{\frac{n}{n-1}} + 2^{\frac{1}{n-1}}C_{11}C_5\varepsilon^{\frac{n}{n-1}} + \frac{1}{n-1}2^{\frac{1}{n-1}}C_{11}\varepsilon^{-n} \\
+ 2^{\frac{1}{n-1}}C_2C_{10} + \frac{n}{n-1}2^{\frac{1}{n-1}}C_2C_{11} + C_{12}).
\end{aligned}
$$

Fazemos $R = O(\lambda)$ conforme $\lambda \to +\infty$, de modo que $\frac{n}{n-1}2^{\frac{1}{n-1}}C(n)L(r_1)^{\frac{n}{n-1}} \leq \frac{1}{2}$. Note que com $R = O(\lambda)$ conforme $\lambda \to \infty$, $L(r_1) \to 0$, então podemos considerar a desigualdade

$$\delta\left(\frac{1}{2} - 2^{\frac{1}{n-1}} C_{10} \varepsilon^{\frac{n}{n-1}} - 2^{\frac{1}{n-1}} C_{11} \varepsilon^{\frac{n}{n-1}}\right)$$
$$\leq \delta\left(1 - 2^{\frac{1}{n-1}} C_{10} \varepsilon^{\frac{n}{n-1}} - 2^{\frac{1}{n-1}} C_{11} \varepsilon^{\frac{n}{n-1}} - \frac{n}{n-1} 2^{\frac{1}{n-1}} C(n) L(r_1)^{\frac{n}{n-1}}\right).$$

Definindo

$$C_8 = \frac{1 + \frac{1}{n-1} 2^{\frac{1}{n-1}} C_{10} \varepsilon^{-n} + \frac{1}{n-1} 2^{\frac{1}{n-1}} C_2 C_{10}}{\frac{1}{2} - 2^{\frac{1}{n-1}} C_{10} \varepsilon^{\frac{n}{n-1}} - 2^{\frac{1}{n-1}} C_{11} \varepsilon^{\frac{n}{n-1}}},$$

$$C_9 = \frac{2^{\frac{1}{n-1}} C_{10} C_5 \varepsilon^{\frac{n}{n-1}} + 2^{\frac{1}{n-1}} C_{11} C_5 \varepsilon^{\frac{n}{n-1}} + \frac{1}{n-1} 2^{\frac{1}{n-1}} C_{11} \varepsilon^{-n} + 2^{\frac{1}{n-1}} C_2 C_{10} + \frac{n}{n-1} 2^{\frac{1}{n-1}} C_2 C_{11} + C_{12}}{\frac{1}{2} - 2^{\frac{1}{n-1}} C_{10} \varepsilon^{\frac{n}{n-1}} - 2^{\frac{1}{n-1}} C_{11} \varepsilon^{\frac{n}{n-1}}},$$

com isso concluímos a prova. □

Prova. (Continuação da prova do Lema 1.17). Pelos Lemas 1.18 e 1.19, temos

$$\begin{aligned}
\int_{y_1}^{\infty} e^{-F(y)} dy &= \int_{-\infty}^{\infty} |E_\lambda| e^{-\lambda} d\lambda \\
&\leq \int_{-C_4}^{\infty} (C_8|\lambda| + C_9) e^{-\lambda} d\lambda \\
&= C_8 \int_{-C_4}^{\infty} |\lambda| e^{-\lambda} d\lambda + C_9 \int_{-C_4}^{\infty} e^{-\lambda} d\lambda \\
&= C_8 \int_{-C_4}^{0} -\lambda e^{-\lambda} d\lambda + C_8 \int_{0}^{\infty} \lambda e^{-\lambda} d\lambda + C_9(-e^{-\lambda})|_{-C_4}^{\infty} \\
&= -C_8 \left[-\lambda e^{-\lambda}|_{-C_4}^{0} + \int_{-C_4}^{0} e^{-\lambda} d\lambda\right] + C_8 \left[-\lambda e^{-\lambda}|_0^\infty + \int_0^\infty e^{-\lambda} d\lambda\right] + C_9 e^{C_4} \\
&= -C_8 \left[-C_4 e^{C_4} + (-e^{-\lambda})|_{-C_4}^{0}\right] + C_8 \left[-e^{-\lambda}|_0^\infty\right] + C_9 e^{C_4} \\
&= C_8 C_4 e^{C_4} + C_8 - C_8 e^{C_4} + C_8 + C_9 e^{C_4} \\
&= C_8[C_4 e^{C_4} + 2 - e^{C_4}] + C_9 e^{C_4} \\
&\leq C_8[C_4 e^{C_4} + 2] + C_9 e^{C_4} = C_3.
\end{aligned}$$

Assim, concluímos a prova do Lema 1.17. □

O interesse real reside na relação entre a constante $C(n,1,M)$ e $\mathrm{Vol}(M)$, o volume de M. A partir da demonstração do Teorema 1.15, constatamos que essa constante, identificada, de acordo com as provas dos Lemas 1.18 e 1.19, como C_3 no Lema 1.17, fornece bases muito sólidas para tal análise. Ao examinarmos as definições de todas as constantes introduzidas durante a prova do Lema 1.17, concluímos que C_3 é uma função crescente em relação à Vol(M).

Observação 1.20 *Para nosso propósito de estabelecer desigualdades de Trudinger-Moser críticas sharp na variedade em questão, damos apenas a prova detalhada da dependência de $C(n,1,M)$ em Vol(M). No entanto, não é difícil estender a prova acima para $C(n,m,M)$ com quase nenhuma alteração. Na verdade, considerando fórmulas de representação de ordem superior usadas em [22, Lema 3.2], a única diferença será na prova do Lema 1.17, onde n deve ser substituído por $\frac{n}{m}$.*

1.21 Condições Necessárias e Suficientes

Nesta seção, apresentamos condições essenciais para a validação do teorema de Trudinger-Moser, ressaltando que a restrição sobre a curvatura de Ricci não é necessária. Esses resultados indicam que, para nossas demonstrações, a hipótese relacionada ao raio de injetividade não pode ser dispensada. Dessa forma, as hipóteses, quando consideradas em conjunto, são condições necessárias para a nossa abordagem.

Lema 1.20 *Seja (M,g) uma variedade Riemanniana n-dimensional completa. Suponha que existam constantes $q>n$, $A>0$ e $\tau>0$ tais que, para todo $u\in W^{1,n}(M)$, tenhamos*

$$\left(\int_M |u|^q dv_g\right)^{\frac{1}{q}} \leq A\|u\|_{1,\tau}, \tag{1-21}$$

onde $\|u\|_{1,\tau}$ é definido por (0-8). Então, para qualquer $r>0$, existe uma constante positiva ϵ dependendo apenas de A,n,q,τ e r tal que, para todo $x\in M$, Vol$_g(B_x(r))\geq\epsilon$.

Prova. Seja $r>0$, $x\in M$ e $\phi\in W^{1,n}(M)$ tal que $\phi=0$ em $M\backslash B_x(r)$. Pela desigualdade de Hölder,

$$\begin{aligned}
\left(\int_M |\phi|^n dv_g\right)^{\frac{1}{n}} &= \left(\int_{B_x(r)} |\phi|^n\cdot 1 dv_g\right)^{\frac{1}{n}}\\
&\leq \left[\left(\int_{B_x(r)} |\phi|^q dv_g\right)^{\frac{n}{q}}\left(\int_{B_x(r)} 1 dv_g\right)^{1-\frac{n}{q}}\right]^{\frac{1}{n}}\\
&= \left[\mathrm{Vol}_g(B_x(r))^{1-\frac{n}{q}}\left(\int_{B_x(r)} |\phi|^q dv_g\right)^{\frac{n}{q}}\right]^{\frac{1}{n}}\\
&= \mathrm{Vol}_g(B_x(r))^{\frac{1}{n}-\frac{1}{q}}\left(\int_{B_x(r)} |\phi|^q dv_g\right)^{\frac{1}{q}}.
\end{aligned}$$

Isso, juntamente com (1-21), resulta em

$$\begin{aligned}\left(\int_M |\phi|^q dv_g\right)^{\frac{1}{q}} &\leq A\|\phi\|_{1,\tau}\\ &= A\left[\left(\int_M |\nabla\phi|^n dv_g\right)^{\frac{1}{n}} + \tau\left(\int_M |\phi|^n dv_g\right)^{\frac{1}{n}}\right]\\ &\leq A\left[\left(\int_M |\nabla\phi|^n dv_g\right)^{\frac{1}{n}} + \tau \mathrm{Vol}_g(B_x(r))^{\frac{1}{n}-\frac{1}{q}}\left(\int_{B_x(r)} |\phi|^q dv_g\right)^{\frac{1}{q}}\right].\end{aligned}$$

Então,

$$\left(1 - A\tau\mathrm{Vol}_g(B_x(r))^{\frac{1}{n}-\frac{1}{q}}\right)\left(\int_M |\phi|^q dv_g\right)^{\frac{1}{q}} \leq A\left(\int_M |\nabla\phi|^n dv_g\right)^{\frac{1}{n}}. \tag{1-22}$$

Fixe $x \in M$ e $R > 0$. Desta forma, ou

$$1 - \tau A\mathrm{Vol}_g(B_x(R))^{\frac{1}{n}-\frac{1}{q}} < \frac{1}{2},$$

ou

$$1 - \tau A\mathrm{Vol}_g(B_x(R))^{\frac{1}{n}-\frac{1}{q}} \geq \frac{1}{2}.$$

Isto é,

$$\frac{1}{2} < \tau A\mathrm{Vol}_g(B_x(R))^{\frac{1}{n}-\frac{1}{q}} \Rightarrow \mathrm{Vol}_g(B_x(r)) > \left(\frac{1}{2\tau A}\right)^{\frac{nq}{q-n}}, \tag{1-23}$$

ou

$$\frac{1}{2} \geq \tau A\mathrm{Vol}_g(B_x(R))^{\frac{1}{n}-\frac{1}{q}} \Rightarrow \mathrm{Vol}_g(B_x(r)) \leq \left(\frac{1}{2\tau A}\right)^{\frac{nq}{q-n}}. \tag{1-24}$$

Se (1-24) for satisfeito, então, para todo $r \in (0, R]$ e todo $\phi \in W^{1,n}(M)$ com $\phi = 0$ em $M\backslash B_x(r)$,

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\left(\int_M |\phi|^q dv_g\right)^{\frac{1}{q}} &\leq \left(1 - A\tau\mathrm{Vol}_g(B_x(r))^{\frac{1}{n}-\frac{1}{q}}\right)\left(\int_M |\phi|^q dv_g\right)^{\frac{1}{q}}\\ &\leq A\left(\int_M |\nabla\phi|^n dv_g\right)^{\frac{1}{n}}.\end{aligned}$$

Então,

$$\left(\int_M |\phi|^q dv_g\right)^{\frac{1}{q}} \leq 2A\left(\int_M |\nabla\phi|^n dv_g\right)^{\frac{1}{n}}. \tag{1-25}$$

Agora, definimos

$$\phi(x) = \begin{cases} r - d_g(x,y), & \text{quando } d_g(x,y) \leq r \\ 0, & \text{quando } d_g(x,y) > r. \end{cases}$$

Note que

$$\begin{aligned}
\int_M (|\nabla \phi|^n + |\phi|^n) dv_g &= \int_{B_x(r)} 1 + |\phi|^n dv_g \\
&\leq \mathrm{Vol}_g(B_x(r)) + \int_{B_x(r)} r^n dv_g \\
&= (1 + r^n)\mathrm{Vol}_g(B_x(r)) \\
&< \infty.
\end{aligned}$$

Portanto, $\phi \in W^{1,n}(M)$, $\phi = 0$ em $M \backslash B_x(r)$, $\phi \geq r/2$ em $B_x(r/2)$, e $|\nabla \phi| = 1$ q.t.p. em $B_x(r)$. Segue então de (1-25) que

$$\begin{aligned}
\left(\int_{B_x(\frac{r}{2})} \left| \frac{r}{2} \right|^q dv_g \right)^{\frac{1}{q}} &\leq \left(\int_{B_x(\frac{r}{2})} |\phi|^q dv_g \right)^{\frac{1}{q}} \\
&\leq 2A \left(\int_{B_x(r)} |\nabla \phi|^n dv_g \right)^{\frac{1}{n}} \\
&= 2A \left(\int_{B_x(r)} 1 dv_g \right)^{\frac{1}{n}} = 2A\mathrm{Vol}_g(B_x(r))^{\frac{1}{n}}.
\end{aligned}$$

Equivalentemente,

$$\frac{r}{2}\mathrm{Vol}_g\left(B_x\left(\frac{r}{2}\right)\right)^{\frac{1}{q}} \leq 2A\mathrm{Vol}_g(B_x(r))^{\frac{1}{n}}.$$

E,

$$\mathrm{Vol}_g(B_x(r)) \geq \left(\frac{r}{4A}\right)^n \mathrm{Vol}_g\left(B_x\left(\frac{r}{2}\right)\right)^{\frac{n}{q}}, \text{para } r \leq R.$$

Usando o mesmo argumento para $B_x(\frac{r}{2})$ e $B_x(\frac{r}{4})$, onde $\phi \geq \frac{r}{2}$ em $B_x(\frac{r}{2})$ e $\phi \geq \frac{r}{4}$ em $B_x(\frac{r}{4})$, temos

$$\begin{aligned}
\left(\int_{B_x(\frac{r}{4})} \left| \frac{r}{4} \right|^q dv_g \right)^{\frac{1}{q}} &\leq \left(\int_{B_x(\frac{r}{4})} |\phi|^q dv_g \right)^{\frac{1}{q}} \\
&\leq 2A \left(\int_{B_x(\frac{r}{2})} |\nabla \phi|^n dv_g \right)^{\frac{1}{n}} \\
&= 2A\mathrm{Vol}_g\left(B_x\left(\frac{r}{2}\right)\right)^{\frac{1}{n}}.
\end{aligned}$$

Então,

$$\frac{r}{4}\mathrm{Vol}_g\left(B_x\left(\frac{r}{4}\right)\right)^{\frac{1}{q}} \leq 2A\mathrm{Vol}_g\left(B_x\left(\frac{r}{2}\right)^{\frac{1}{n}}\right).$$

Segue que,

$$\mathrm{Vol}_g\left(B_x\left(\frac{r}{2}\right)\right) \geq \left(\frac{r}{8A}\right)^n \mathrm{Vol}_g\left(B_x\left(\frac{r}{4}\right)\right)^{\frac{n}{q}} = \left(\frac{r}{2A}\right)^n \left(\frac{1}{2}\right)^{2n} \mathrm{Vol}_g\left(B_x\left(\frac{r}{4}\right)\right)^{\frac{n}{q}}.$$

E assim,

$$
\begin{aligned}
\mathrm{Vol}_g(B_x(r)) &\geq \left(\frac{r}{2A}\right)^n \left(\frac{1}{2}\right)^n \mathrm{Vol}_g\left(B_x\left(\frac{r}{2}\right)\right)^{\frac{n}{q}} \\
&\geq \left(\frac{r}{2A}\right)^n \left(\frac{1}{2}\right)^n \left[\left(\frac{r}{2A}\right)^n \left(\frac{1}{2}\right)^{2n} \mathrm{Vol}_g\left(B_x\left(\frac{r}{2^2}\right)\right)^{\frac{n}{q}}\right]^{\frac{n}{q}} \\
&= \left(\frac{r}{2A}\right)^{n+\frac{n^2}{q}} \left(\frac{1}{2}\right)^{n+\frac{2n^2}{q}} \mathrm{Vol}_g\left(B_x\left(\frac{r}{2^2}\right)\right)^{\left(\frac{n}{q}\right)^2}.
\end{aligned}
$$

De modo análogo com $B_x(\frac{r}{4})$ e $B_x(\frac{r}{8})$ obtemos

$$
\mathrm{Vol}_g\left(B_x\left(\frac{r}{4}\right)\right) \geq \left(\frac{r}{16A}\right)^n \mathrm{Vol}_g\left(B_x\left(\frac{r}{8}\right)\right)^{\frac{n}{q}} = \left(\frac{r}{2A}\right)^n \left(\frac{1}{2}\right)^{3n} \mathrm{Vol}_g\left(B_x\left(\frac{r}{2^3}\right)\right)^{\frac{n}{q}}.
$$

o que implica que

$$
\begin{aligned}
\mathrm{Vol}_g(B_x(r)) &\geq \left(\frac{r}{2A}\right)^{n+\frac{n^2}{q}} \left(\frac{1}{2}\right)^{n+\frac{2n^2}{q}} \mathrm{Vol}_g\left(B_x\left(\frac{r}{2^2}\right)\right)^{\left(\frac{n}{q}\right)^2} \\
&\geq \left(\frac{r}{2A}\right)^{n+\frac{n^2}{q}} \left(\frac{1}{2}\right)^{n+\frac{2n^2}{q}} \left[\left(\frac{r}{2A}\right)^n \left(\frac{1}{2}\right)^{3n} \mathrm{Vol}_g\left(B_x\left(\frac{r}{2^3}\right)\right)^{\frac{n}{q}}\right]^{\frac{n}{q}} \\
&= \left(\frac{r}{2A}\right)^{n+\frac{n^2}{q}+\frac{n^3}{q^2}} \left(\frac{1}{2}\right)^{n+\frac{2n^2}{q}+\frac{3n^3}{q^2}} \mathrm{Vol}_g\left(B_x\left(\frac{r}{2^3}\right)\right)^{\left(\frac{n}{q}\right)^3}.
\end{aligned}
$$

Em geral, para $B_x(\frac{r}{2^{m-1}})$ e $B_x(\frac{r}{2^m})$ temos que

$$
\mathrm{Vol}_g\left(B_x\left(\frac{r}{2^{m-1}}\right)\right) \geq \left(\frac{r}{2^{m+1}A}\right)^n \mathrm{Vol}_g\left(B_x\left(\frac{r}{2^m}\right)\right)^{\frac{n}{q}} = \left(\frac{r}{2A}\right)^n \left(\frac{1}{2}\right)^{mn} \mathrm{Vol}_g\left(B_x\left(\frac{r}{2^m}\right)\right)^{\frac{n}{q}},
$$

de onde podemos concluir

$$
\mathrm{Vol}_g(B_x(r)) \geq \left(\frac{r}{2A}\right)^{n\alpha(m)} \left(\frac{1}{2}\right)^{n\beta(m)} \mathrm{Vol}_g\left(B_x\left(\frac{2}{2^m}\right)\right)^{\left(\frac{n}{q}\right)^m}, \qquad \text{(1-26)}
$$

onde, $\alpha(m) = \sum_{i=0}^{m-1}\left(\frac{n}{q}\right)^i$ e $\beta(m) = \sum_{i=0}^{m} i\left(\frac{n}{q}\right)^{i-1}$. Pelo Teorema 1.6 equação (1-4) sabemos que $\mathrm{Vol}_g(B_x(r)) = \frac{\omega_{n-1}}{n}r^n(1+o(r))$, onde ω_{n-1} é a área da esfera unitária euclidiana em $\mathbb{R}^n$, e $o(r) \to 0$ conforme $r \to 0$. Pode-se ver sem dificuldade que

$$
\lim_{m\to\infty} \mathrm{Vol}_g\left(B_x\left(\frac{R}{2^m}\right)\right)^{\left(\frac{n}{q}\right)^m} = 1.
$$

Basta notarmos que

$$\begin{aligned}
&\lim_{m\to\infty} \ln\left[\left(\frac{\omega_{n-1}}{n}\left(\frac{R}{2^m}\right)^n\left(1+o\left(\frac{R}{2^m}\right)\right)\right)\right]^{\left(\frac{n}{q}\right)^m} \\
&= \lim_{m\to\infty}\left(\frac{n}{q}\right)^m \ln\left(\frac{\omega_{n-1}}{n}\left(\frac{R}{2^m}\right)^n\left(1+o\left(\frac{R}{2^m}\right)\right)\right) \\
&= \lim_{m\to\infty}\frac{\ln\left(\frac{\omega_{n-1}}{n}\left(\frac{R}{2^m}\right)^n\left(1+o\left(\frac{R}{2^m}\right)\right)\right)}{\left(\frac{q}{n}\right)^m},
\end{aligned}$$

aplicando a Regra de L'Hôpital,

$$\ldots = \lim_{m\to\infty}\frac{\left(\frac{\omega_{n-1}}{n}(\frac{R}{2^m})^n \ln 2^{-n}(1+o(\frac{R}{2^m}))\right) + \frac{\omega_{n-1}}{n}(\frac{R}{2^m})^n o'(\frac{R}{2^m})2^{-m}\ln 2^{-1}}{\frac{\omega_{n-1}}{n}(\frac{R}{2^m})^n(1+o(\frac{R}{2^m}))\left(\frac{q}{n}\right)^m \ln(\frac{q}{n})}$$

$$= \lim_{m\to\infty}\left(\frac{\ln 2^{-n} + \frac{o'(\frac{R}{2^m})2^{-m}\ln 2^{-1}}{1+o(\frac{R}{2^m})}}{\left(\frac{q}{n}\right)^m \ln(\frac{q}{n})}\right) = 0.$$

Então

$$\begin{aligned}
&\lim_{m\to\infty} \ln\left[\left(\frac{\omega_{n-1}}{n}\left(\frac{R}{2^m}\right)^n\left(1+o\left(\frac{R}{2^m}\right)\right)\right)\right]^{\left(\frac{n}{q}\right)^m} = 0 \\
&\Rightarrow e^{\lim_{m\to\infty}\ln\left[\left(\frac{\omega_{n-1}}{n}\left(\frac{R}{2^m}\right)^n\left(1+o\left(\frac{R}{2^m}\right)\right)\right)\right]^{\left(\frac{n}{q}\right)^m}} = e^0 = 1 \\
&\Rightarrow \lim_{m\to\infty}\left[\left(\frac{\omega_{n-1}}{n}\left(\frac{R}{2^m}\right)^n\left(1+o\left(\frac{R}{2^m}\right)\right)\right)\right]^{\left(\frac{n}{q}\right)^m} = 1.
\end{aligned}$$

Por outro lado, temos

$$\lim_{m\to\infty}\alpha(m) = \sum_{j=1}^{\infty}\left(\frac{n}{q}\right)^{j-1} = \frac{q}{q-n},$$

e usando que

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}, \text{ quando } |x| < 1,$$

obtemos

$$\begin{aligned}
\left(1+\sum_{n=1}^{\infty} x^n\right)' &= \left(\frac{1}{1-x}\right)' \\
\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} n x^{n-1} &= \frac{1}{(1-x)^2}.
\end{aligned}$$

Assim
$$\lim_{m\to\infty} \beta(m) = \sum_{j=1}^{\infty} j\left(\frac{n}{q}\right)^{j-1} = \frac{q^2}{(q-n)^2}.$$
Portanto, passando o limite $m \to \infty$ em (1-26), concluímos que
$$\begin{aligned}\mathrm{Vol}_g(B_x(R)) &\geq \lim_{m\to\infty} \left(\frac{R}{2A}\right)^{n\alpha(m)} \left(\frac{1}{2}\right)^{n\beta(m)} \mathrm{Vol}_g\left(B_x\left(\frac{2}{2^m}\right)\right)^{\left(\frac{n}{q}\right)^m} \\ &= \left(\frac{R}{2A}\right)^{\frac{nq}{q-n}} \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{nq^2}{(q-n)^2}} \cdot 1 \\ &= \left(\frac{R}{A2^{\frac{2q-n}{q-n}}}\right)^{\frac{nq}{q-n}}.\end{aligned}$$
Isso, juntamente com (1-23) e (1-24), implica que
$$\mathrm{Vol}_g(B_x(R)) \geq \min\left\{\frac{1}{2\tau A}, \frac{R}{A2^{\frac{2q-n}{q-n}}}\right\}^{\frac{nq}{q-n}},$$
o que completa a prova do lema. □

Observação 1.22 *Note que a condição (1-21) implica que $W^{1,n}(M)$ está continuamente imerso em $L^q(M)$ para algum $q > n$. A seguinte desigualdade de interpolação é utilizada para provarmos que se a desigualdade de Trudinger-Moser vale em nossa variedade então obtemos a imersão contínua para todo $q \geq n$.*

Lema 1.23 *Seja τ qualquer número real positivo. Suponha que existam constantes positivas q_1, q_2, A_1 e A_2 tais que $q_2 > q_1 > 0$ e*
$$\left(\int_M |u|^{q_i} dv_g\right)^{\frac{1}{q_i}} \leq A_i \|u\|_{1,\tau}, \tag{1-27}$$
para todo $u \in W^{1,n}(M)$, $i = 1, 2$. Então, para todo $q : q_1 < q < q_2$, existe uma constante positiva $A = A(A_1, A_2, q_1, q_2)$ tal que
$$\left(\int_M |u|^{q} dv_g\right)^{\frac{1}{q}} \leq A \|u\|_{1,\tau}, \tag{1-28}$$
para todo $u \in W^{1,n}(M)$.

Prova. Para qualquer $u \in W^{1,n}(M)\backslash\{0\}$, definimos $\tilde{u} = u/\|u\|_{1,\tau}$. Segue-se de (1-27) que
$$\left(\int_M |\tilde{u}|^{q_i} dv_g\right)^{\frac{1}{q_i}} \leq A_i, \quad i = 1, 2. \tag{1-29}$$

Tomando q tal que $q_1 < q < q_2$. Temos que $|\tilde{u}|^q \leq |\tilde{u}|^{q_1} + |\tilde{u}|^{q_2}$, então

$$\int_M |\tilde{u}|^q dv_g \leq \int_M |\tilde{u}|^{q_1} dv_g + \int_M |\tilde{u}|^{q_2} dv_g \leq A_1^{q_1} + A_2^{q_2}. \tag{1-30}$$

Portanto,

$$\int_M \frac{|u|^q}{\|u\|_{1,\tau}^q} dv_g \leq A_1^{q_1} + A_2^{q_2} \Rightarrow \left(\int_M |u|^q dv_g\right)^{\frac{1}{q}} \leq (A_1^{q_1} + A_2^{q_2})^{\frac{1}{q}} \|u\|_{1,\tau}. \tag{1-31}$$

Escolhemos $A = \max\{(A_1^{q_1} + A_2^{q_2})^{\frac{1}{q_1}}, (A_1^{q_1} + A_2^{q_2})^{\frac{1}{q_2}}\}$. Assim, (1-28) segue imediatamente. □

Proposição 1.24 *Seja (M,g) uma variedade Riemanniana completa de dimensão n. Suponha que a desigualdade de Trudinger-Moser vale em (M,g), ou seja, existem constantes positivas α, τ e β tais que (0-7) é verdadeira. Então, o espaço de Sobolev $W^{1,n}(M)$ está imerso continuamente em $L^q(M)$ para qualquer $q \geq n$. Além disso, para qualquer $r > 0$, existe uma constante positiva ϵ dependendo apenas de n, α, τ, β e r tal que $Vol_g(B_x(r)) \geq \epsilon$ para todo $x \in M$, onde $B_x(r)$ denota a bola geodésica centrada em x com raio r.*

Prova. Suponha que existam constantes positivas α, τ e β tais que (0-7) seja verdadeira. Para qualquer $u \in W^{1,n}(M) \backslash \{0\}$, definimos $\tilde{u} = u / \|u\|_{1,\tau}$. Segue-se de (0-7) que

$$\int_M \sum_{k=n-1}^{\infty} \frac{\alpha^k |\tilde{u}|^{\frac{nk}{n-1}}}{k!} dv_g \leq \beta.$$

Particularmente, para qualquer inteiro $k \geq n-1$, temos

$$\int_M \frac{\alpha^k |\tilde{u}|^{\frac{nk}{n-1}}}{k!} dv_g \leq \beta,$$

e assim

$$\int_M \frac{\alpha^k |u|^{\frac{nk}{n-1}}}{\|u\|1,\tau^{\frac{nk}{n-1}}} dv_g \leq k!\beta \Rightarrow \int_M |u|^{\frac{nk}{n-1}} dv_g \leq \frac{k!\beta \|u\|_{1,\tau}^{\frac{nk}{n-1}}}{\alpha^k}$$
$$\Rightarrow \left(\int_M |u|^{\frac{nk}{n-1}} dv_g\right)^{\frac{n-1}{nk}} \leq \left(\frac{k!\beta}{\alpha^k}\right)^{\frac{n-1}{nk}} \|u\|_{1,\tau}.$$

Para qualquer $q \geq n$, existe algum $k \geq n-1$ tal que

$$\frac{nk}{n-1} \leq q \leq \frac{n(k+1)}{n-1}.$$

Na verdade, podemos escolher $k = [(n-1)p/n]$, a parte inteira de $(n-1)p/n$. Pelo Lema

1.23, existe uma constante positiva A dependendo apenas de n, q, α e β tal que

$$\left(\int_M |u|^q dv_g\right)^{\frac{1}{q}} \leq A\|u\|_{1,\tau}.$$

Isso implica que $W^{1,n}(M) \hookrightarrow L^q(M)$ continuamente. Agora, fixamos algum $q > n$, digamos $q = n+1$. Então, pelo Lema 1.20, existe alguma constante $\epsilon > 0$ dependendo apenas de n, α, τ, β e r tal que, para todo $x \in M$, $\mathrm{Vol}_g(B_x(r)) \geq \epsilon$. $\square$

Pela Proposição 1.24, temos uma ideia de qual condição uma variedade deve satisfazer para que não seja válido Trudinger-Moser. Os seguinte Corolário demonstra a construção de tais variedades.

Corolário 1.25 *Para qualquer inteiro $n \geq 2$, existe uma variedade Riemanniana n-dimensional não compacta e completa na qual a desigualdade de Trudinger–Moser,* (0-7)*, não é válida.*

Prova. Para qualquer variedade Riemanniana não compacta e completa (M, g) de dimensão n, se a desigualdade de Trudinger-Moser for válida, então pela Proposição 1.24, deve existir uma constante $\epsilon > 0$ tal que $\mathrm{Vol}_g(B_x(r)) \geq \epsilon$ para todo $x \in M$. Portanto, se existir uma variedade Riemanniana não compacta e completa (M, g) tal que

$$\inf_{x\in M} \mathrm{Vol}_g(B_x(r)) = 0,$$

podemos concluir que a desigualdade de Trudinger-Moser não é válida para ela. Prosseguimos para a construção de tais variedades. Considere o produto torcido

$$M = \mathbb{R} \times N,\ g(t, \theta) = dt^2 + f(t)ds_N^2,$$

onde (N, ds_N^2) é uma variedade Riemanniana compacta de dimensão $(n-1)$, dt^2 é a métrica euclidiana de $\mathbb{R}$, e f é uma função suave satisfazendo $f(t) > 0$, $\forall t \in \mathbb{R}$ e $\lim_{t\to\infty} f(t) = 0$. Se $y = (t_1, m_1)$ e $z = (t_2, m_2)$ são dois pontos em M, então $d_g(y, z) \geq |t_2 - t_1|$. Isso, juntamente com a compacidade de N, implica que (M, g) é completa. Além disso, para qualquer $x = (t, m) \in M$, temos

$$B_x(1) \subset (t-1, t+1) \times N.$$

Portanto,

$$
\begin{aligned}
\mathrm{Vol}g(B_x(1)) &\leq \mathrm{Vol}g((t-1,t+1)\times N) \\
&\leq \mathrm{Vol}ds_N^2(N)\int_{t-1}^{t+1} f(t)dt \\
&= 2\mathrm{Vol}_{ds_N^2}(N)f(\xi) \\
&\to 0 \text{ conforme } t\to+\infty,
\end{aligned}
\tag{1-32}
$$

onde usamos o teorema do valor médio integral, e ξ é algum ponto em $(t-1,t+1)$. Isso fornece o resultado desejado. □

Proposição 1.26 *Para qualquer inteiro $n\geq 2$, existe uma variedade Riemanniana completa não compacta de dimensão n, cuja curvatura de Ricci tem uma cota inferior, tal que a desigualdade de Trudinger-Moser não é válida nela.*

Antes de provarmos a proposição, vamos relembrar algumas notações da geometria Riemanniana. Em qualquer carta, os símbolos de Christoffel da conexão de Levi-Civita são dados por

$$\Gamma_{ij}^k = \frac{1}{2}g^{mk}(\partial_i g_{mj}+\partial_j g_{mi}+\partial_m g_{ij}), \tag{1-33}$$

onde g_{ij} são os componentes de g, (g^{ij}) denota a matriz inversa de (g_{ij}). Aqui e a seguir, adotamos a convenção de somatório de Einstein. Denotamos a curvatura Riemanniana de (M,g), um campo tensorial de tipo $(4,0)$, por $\mathrm{Rm}_{(M,g)}$. Os componentes de $\mathrm{Rm}_{(M,g)}$ são dados pela relação

$$R_{ijkl} = g_{i\alpha}(\partial_k\Gamma_{jl}^\alpha - \partial_l\Gamma_{jk}^\alpha + \Gamma_{k\beta}^\alpha\Gamma_{jl}^\beta - \Gamma_{l\beta}^\alpha\Gamma_{jk}^\beta). \tag{1-34}$$

Da mesma forma, os componentes da curvatura de Ricci, $\mathrm{Rc}_{(M,g)}$, de (M,g) são dados pela relação

$$\mathrm{R}_{ij} = g^{\alpha\beta}R_{i\alpha j\beta}. \tag{1-35}$$

Prova. (Proposição 1.26) Em vista da proposição 1.24, é suficiente construir uma variedade Riemanniana completa não compacta (M,g) de dimensão n tal que sua curvatura de Ricci tenha uma cota inferior e satisfaça

$$\inf_{x\in M}\mathrm{Vol}_g(B_x(1)) = 0.$$

Novamente, consideramos o produto torcido

$$M=\mathbb{R}\times N,\ g(x,\theta)=dx^2+f(x)ds_N^2,$$

onde (N, ds_N^2) é uma variedade Riemanniana compacta de dimensão $(n-1)$, dx^2 é a métrica euclidiana de $\mathbb{R}$ e f é uma função suave satisfazendo $f(x) > 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$. A seguir, calculamos a curvatura de Ricci de (M, g). Em uma carta de produto $(\mathbb{R} \times U, Id \times \phi)(x, y^2, ..., y^n)$, temos $g_{11} = 1$, $g_{1\alpha} = 0$, $g_{\alpha\beta} = fh_{\alpha\beta}$, $g^{11} = 1$, $g_{1\alpha} = 0$, e $g_{\alpha\beta} = f^{-1}h^{\alpha\beta}$. Equivalentemente,

$$g = dx^2 + f(x)h_{\alpha\beta}dy^\alpha dy^\beta,$$

onde $(h_{\alpha\beta})$ denota os componentes da métrica ds_N^2. Aqui e a seguir, todos os índices α, β, μ, ν e γ variam de 2 a n. Em vista de (1-33), os símbolos de Christoffel da conexão de Levi-Civita são calculados da seguinte forma:

$$\Gamma_{11}^1 = \Gamma_{11}^\alpha = \Gamma_{1\alpha}^1 = 0,\ \Gamma_{1\alpha}^\beta = \frac{1}{2}g^{\mu\beta}\partial_1 g_{\mu\alpha} = \frac{f'}{2f}\delta_\alpha^\beta$$
$$\Gamma_{\alpha\beta}^1 = -\frac{1}{2}\partial_1 g_{\alpha\beta} = -\frac{f'}{2}h_{\alpha\beta},\ \Gamma_{\alpha\beta}^\gamma = \tilde{\Gamma}_{\alpha\beta}^\gamma,$$

onde δ_α^β é igual a 1 quando $\alpha = \beta$, e 0 quando $\alpha \neq \beta$, $\tilde{\Gamma}_{\alpha\beta}^\gamma$ são os componentes dos símbolos de Christoffel da conexão de Levi-Civita em (N, ds_N^2). Temos por (1-34) que os componentes da curvatura Riemanniana são dados por:

$$\begin{aligned}
R_{1\alpha1\beta} &= g_{11}\partial_1\Gamma_{\alpha\beta}^1 \\
&= \frac{f'^2 - 2ff'}{4f}h_{\alpha\beta} \\
R_{1\alpha\beta\gamma} &= g_{11}(\partial_\beta\Gamma_{\alpha\gamma}^1 - \partial_\gamma\Gamma_{\alpha\beta}^1 + \Gamma_{\beta k}^1\Gamma_{\alpha\gamma}^k - \Gamma_{\gamma k}^1\Gamma_{\alpha\beta}^k) \\
&= \frac{f'}{2}(-\partial_\beta h_{\alpha\gamma} + \partial_\gamma h_{\alpha\beta} - h_{\beta\mu}\tilde{\Gamma}_{\alpha\gamma}^\mu + h_{\gamma\mu}\tilde{\Gamma}_{\alpha\beta}^\mu) \\
R_{\alpha\beta\gamma\mu} &= g_{\alpha\lambda}(\partial_\gamma\Gamma_{\beta\mu}^\lambda - \partial_\mu\Gamma_{\beta\gamma}^\lambda + \Gamma_{\gamma k}^\lambda\Gamma_{\beta\mu}^k - \Gamma_{\mu k}^\lambda\Gamma_{\beta\gamma}^k) \\
&= f\tilde{R}_{\alpha\beta\gamma\mu} + g_{\alpha\lambda}(\Gamma_{\gamma1}^\lambda\Gamma_{\beta\mu}^1 - \Gamma_{\mu1}^\lambda\Gamma_{\beta\gamma}^1) \\
&= f\tilde{R}_{\alpha\beta\gamma\mu} + \frac{f'^2}{4}(h_{\alpha\mu}h_{\beta\gamma} - h_{\alpha\gamma}h_{\beta\mu}),
\end{aligned}$$

onde $\tilde{R}_{\alpha\beta\gamma\mu}$ denotam os componentes da curvatura Riemanniana de (N, ds_N^2). Em vista de

(1-35), obtemos os componentes da curvatura de Ricci da seguinte forma

$$\begin{aligned}
R_{11} &= g^{\alpha\beta} R_{1\alpha1\beta} \\
&= (n-1)\frac{f'^2 - 2ff'}{4f^2} \\
R_{1\alpha} &= g^{\beta\gamma} R_{1\beta\alpha\gamma} \\
&= \frac{f'}{2f} h^{\beta\gamma}(-\partial_\alpha h_{\beta\gamma} + \partial_\gamma h_{\alpha\beta} - h_{\alpha\mu}\tilde{\Gamma}^{\mu}_{\beta\gamma} + h_{\gamma\mu}\tilde{\Gamma}^{\mu}_{\alpha\beta}) \\
R_{\alpha\beta} &= g^{11} R_{\alpha1\beta1} + g^{\mu\nu} R_{\alpha\mu\beta\nu} \\
&= \frac{f'^2 - 2ff'}{4f} h_{\alpha\beta} + \tilde{R}_{\alpha\beta} + \frac{f'^2}{4f} h^{\mu\nu}(h_{\alpha\nu}h_{\mu\beta} - h_{\alpha\beta}h_{\mu\nu}) \\
&= \frac{(2-n)f'^2 - 2ff'}{4f} h_{\alpha\beta} + \tilde{R}_{\alpha\beta},
\end{aligned}$$

onde $\tilde{R}_{\alpha\beta}$ são os componentes da curvatura de Ricci de (N, ds_N^2). Se assumirmos que as funções f, f'/f e f''/f são todas limitadas, então na carta $(\mathbb{R} \times U, Id \times \phi)$, os autovalores da matriz (R_{jl}) e da matriz (g_{jl}) são uniformemente limitados. Assim, existe uma constante $\lambda_1 \in \mathbb{R}$ tal que $(\mathrm{R}_{jl}) \geq \lambda_1(g_{jl})$. Note que (N, ds_N^2) é compacto. Existe uma constante $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que $\mathrm{Rc}_{(M,g)} \geq \lambda g$ como formas bilineares. Se assumirmos ainda $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$, então por (1-32), temos $\mathrm{Vol}_g(B_y(1)) \to 0$ conforme $x \to +\infty$, onde $y = (x, m) \in \mathbb{R} \times N$. Pode-se verificar que as seguintes funções satisfazem todas as condições acima para f.

- f é uma função suave e positiva definida em $\mathbb{R}$ e satisfaz

$$f(x) = \begin{cases} (1+x^2)e^{-x+\operatorname{sen} x}, & \text{quando } x > 1 \\ 1, & \text{quando } x < 0 \end{cases}$$

- f é uma função suave e positiva definida em $\mathbb{R}$ e satisfaz

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\log x}, & \text{quando } x > 2 \\ 1, & \text{quando } x < 0. \end{cases}$$

Estas funções concedem o resultado desejado. □

O próximo resultado conclui que, de fato, a hipótese sobre a curvatura de Ricci não é necessária para que a variedade satisfaça Trudinger-Moser. Vejamos,

Proposição 1.27 *Para qualquer número inteiro $n \geq 2$, existe uma variedade Riemanniana de dimensão n não compacta e completa na qual a desigualdade de Trudinger-Moser é válida, mas sua curvatura de Ricci não tem cota inferior.*

Prova. Basta construirmos uma variedade Riemanniana de dimensão n não compacta na qual a desigualdade de Trudinger-Moser seja válida, mas sua curvatura de Ricci não tenha cota inferior. Para isto, consideramos a variedade Riemanniana $(\mathbb{R}^n, g)$, onde $\mathbb{R}^n$ é o espaço euclidiano e

$$g = dx_1^2 + f(x_1)dx_2^2 + ... + f(x_1)dx_n^2,$$

e f é uma função suave em $\mathbb{R}$ tal que $a \leq f \leq b$ para duas constantes positivas a e b. É claro que, $(\mathbb{R}^n, g)$ é completa e não compacta. Utilizando os resultados da desigualdade de Trudinger-Moser no espaço euclidiano padrão $\mathbb{R}^n$ [[15], [46], [48]], pode-se ver que se α for escolhido suficientemente pequeno, então o supremo

$$\sup_{u \in W^{1,n}(M), \|u\|_{W^{1,n}} \leq 1} \int_{\mathbb{R}^n} \zeta_n(\alpha |u|^{\frac{n}{n-1}}) dv_g < \infty,$$

ou seja, a desigualdade de Trudinger-Moser é válida na variedade $(\mathbb{R}^n, g)$, onde

$$\|u\|_{W^{1,n}} = \left(\int_{\mathbb{R}^n} (|\nabla_g u|^n + |u|^n) dv_g \right)^{1/n}.$$

A seguir, escolheremos f de forma que a curvatura de Ricci de $(\mathbb{R}^n, g)$ não tenha cota inferior. Pela equação (1-35),

$$\mathrm{R}_{11} = (n-1)\frac{f'^2 - 2ff'}{4f^2}. \tag{1-36}$$

Basta encontrar uma sequência de pontos $(x^{(m)})$ em $\mathbb{R}^n$ tal que $\mathrm{R}_{11}(x^{(m)}) \to -\infty$. Uma escolha possível para f é $f(t) = 2 + \operatorname{sen} t^2$. Nesse caso, temos

$$f'(x_1) = 2x_1 \cos x_1^2, \quad f''(x_1) = 2\cos x_1^2 4x_1^2 \operatorname{sen} x_1^2.$$

Assim, a equação (1-36) implica

$$\mathrm{R}_{11}(x) = (n-1)\frac{(2x_1 \cos x_1^2)^2 - 2(2 + \operatorname{sen} x_1^2)(2\cos x_1^2 - 4x_1^2 \operatorname{sen} x_1^2)}{4(2 + \operatorname{sen} x_1^2)^2}. \tag{1-37}$$

Escolhendo $x^{(m)} = (\sqrt{2m\pi + 3\pi/2}, 0, ..., 0)$, e notando que

$$\cos(2m\pi + 3\pi/2) = \cos(2m\pi)\cos(3\pi/2) - \operatorname{sen}(2m\pi)\operatorname{sen}(3\pi/2) = 0$$
$$\operatorname{sen}(2m\pi + 3\pi/2) = \operatorname{sen}(2m\pi)\cos(3\pi/2) + \cos(2m\pi)\operatorname{sen}(3\pi/2) = -1,$$

obtemos

$$\mathrm{R}_{11}(x^{(m)}) = (-4m\pi - 3\pi)\cdot(n-1) \to -\infty \text{ conforme } m \to \infty.$$

Outra escolha para f é $f(t) = e^{\operatorname{sen} t^2}$. Nesse caso, temos

$$f'(x_1) = 2x_1 e^{\operatorname{sen} x_1^2} \cos x_1^2, \quad f''(x_1) = e^{\operatorname{sen} x_1^2}(-4x_1^2 \operatorname{sen} x_1^2 + 4\cos^2 x_1^2 + 2\cos x_1^2).$$

Em vista da equação (1-37), obtemos

$$R_{11}(x) = (n-1)(2x_1^2 \operatorname{sen} x_1^2 + x_1^2 \cos^2 x_1^2 - 2x_1^2 \cos^2 x_1^2 - \cos x_1^2).$$

Novamente, escolhemos $x^m = (\sqrt{2m\pi + 3\pi/2}, 0, ..., 0)$ e assim podemos concluir que $R_{11}(x^m) \to -\infty$ conforme $m \to \infty$. $\square$

Desigualdade Subrítica de Trudinger-Moser 1ª Parte

Na presente seção, demonstraremos a validade da desigualdade de Trudinger-Moser no cenário subcrítico, conforme abordado por Yang em [64]. É relevante destacar que, na abordagem apresentada, foi possível estabelecer a demonstração apenas para o caso subcrítico, enquanto que, pela maneira abordada por Li e Lu [32], o caso crítico foi melhor estabelecido, conforme será discutido no Capítulo 4. Inicialmente, destacamos a seguinte observação, fundamental para nossos resultados:

Lema 2.1 *Seja $\mathbb{B}_0(\delta) \subset \mathbb{R}^n$ uma bola centrada em 0 com raio δ. Se $0 \leq \alpha \leq \alpha_n = n\omega_{n-1}^{\frac{1}{n-1}}$, então existe uma constante C dependendo apenas de n tal que, para todo $u \in W_0^{1,n}(\mathbb{B}_0(\delta))$ satisfazendo $\int_{\mathbb{B}_0(\delta)} |\nabla u|^n dx \leq 1$, temos*

$$\int_{\mathbb{B}_0(\delta)} \zeta_n(\alpha |u|^{\frac{n}{n-1}}) dx \leq C\delta^n \left(\frac{\alpha}{\alpha_n}\right)^{n-1} \int_{\mathbb{B}_0(\delta)} |\nabla u|^n dx. \tag{2-1}$$

Prova. Defina $\tilde{u} = u/\|\nabla u\|_{L^n(\mathbb{B}_0(\delta))}$. Como $\|\nabla u\|_{L^n(\mathbb{B}_0(\delta))} \leq 1$ e $0 \leq \alpha \leq \alpha_n \Rightarrow 0 \leq \frac{\alpha}{\alpha_n} \leq 1$, temos

$$\begin{aligned} \zeta_n(\alpha |u|^{\frac{n}{n-1}}) = \sum_{k=n-1}^{\infty} \frac{\alpha^k |u|^{\frac{nk}{n-1}}}{k!} &= \sum_{k=n-1}^{\infty} \left(\frac{\alpha}{\alpha_n}\right)^k \frac{\alpha_n^k |\tilde{u} \cdot \|\nabla u\||^{\frac{nk}{n-1}}}{k!} \\ &\leq \left(\frac{\alpha}{\alpha_n}\right)^{n-1} \|\nabla u\|^n \sum_{k=n-1}^{\infty} \frac{\alpha_n^k |\tilde{u}|^{\frac{nk}{n-1}}}{k!} \\ &= \left(\frac{\alpha}{\alpha_n}\right)^{n-1} \|\nabla u\|^n \zeta_n(\alpha_n |\tilde{u}|^{\frac{n}{n-1}}). \end{aligned} \tag{2-2}$$

Segue da desigualdade de Trudinger-Moser clássica ((0-1) com α_0 substituído por α_n) que

$$\int_{\mathbb{B}_0(\delta)} \zeta_n(\alpha_n |\tilde{u}|^{\frac{n}{n-1}}) dx \leq C\delta^n, \tag{2-3}$$

para alguma constante C dependendo apenas de n. Integrando (2-2) sobre $\mathbb{B}_0(\delta)$ vemos que,

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{B}_0(\delta)} \zeta_n(\alpha|u|^{\frac{n}{n-1}})dx &\leq \int_{\mathbb{B}_0(\delta)} \left(\frac{\alpha}{\alpha_n}\right)^{n-1} \|\nabla u\|^n_{L^n(\mathbb{B}_0(\delta))} \zeta_n(\alpha_n|\tilde{u}|^{\frac{n}{n-1}})dx \\ &\leq \left(\frac{\alpha}{\alpha_n}\right)^{n-1} \|\nabla u\|^n_{L^n(\mathbb{B}_0(\delta))} \int_{\mathbb{B}_0(\delta)} \zeta_n(\alpha_n|\tilde{u}|^{\frac{n}{n-1}})dx \\ &\leq C\delta^n \left(\frac{\alpha}{\alpha_n}\right)^{n-1} \|\nabla u\|^n_{L^n(\mathbb{B}_0(\delta))} \\ &= C\delta^n \left(\frac{\alpha}{\alpha_n}\right)^{n-1} \int_{\mathbb{B}_0(\delta)} |\nabla u|^n dx.\end{aligned}$$

De onde obtemos imediatamente (2-1) usando (2-3). Isso conclui o lema. □

Com as hipóteses sobre a curvatura de Ricci e o raio de injetividade na variedade Riemanniana, temos a seguinte versão local da desigualdade de Trudinger-Moser, que será extendida globalmente pela Cobertura de Gromov.

Lema 2.2 *Para qualquer $\alpha : 0 < \alpha < \alpha_n$, existe uma constante δ dependendo apenas de n, α, λ e i_0 tal que, para todo $x \in M$ e todo $u \in C_0^\infty(B_x(\delta))$ com $\|\nabla_g u\|_{L^n(B_x(\delta))} \leq 1$, temos*

$$\int_M \zeta_n(\alpha|u|^{\frac{n}{n-1}})dv_g \leq C \int_M |\nabla_g u|^n dv_g, \tag{2-4}$$

para alguma constante C dependendo apenas de n, α, λ e i_0.

Prova. Pelo [24, Teorema 1.3], sabemos que, para qualquer $\epsilon > 0$, existe uma constante positiva δ dependendo apenas de ϵ, n, λ e i_0 que satisfaz a seguinte propriedade: para qualquer $x \in M$, existe um gráfico coordenado harmônico $\phi : B_x(\delta) \to \mathbb{R}^n$ tal que $\phi(x) = 0$, e as componentes (g_{jl}) de g nesse gráfico satisfazem

$$e^{-\epsilon}\delta_{jl} \leq g_{jl} \leq e^{\epsilon}\delta_{jl},$$

como formas bilineares. Temos então que $\phi(B_x(\delta)) \subset \mathbb{B}_0(e^{\epsilon/2}\delta)$ devido a sua conformidade. Seja u uma função em $C_0^\infty(B_x(\delta))$ e $\|\nabla_g u\|_{L^n(B_x(\delta))} \leq 1$. Não é difícil ver que

$$\begin{aligned}\int_{B_x(\delta)} |\nabla_g u|^n dv_g &\geq \int_{\mathbb{B}_0(e^{\epsilon/2}\delta)} |\nabla_g(u \circ (e^{-\epsilon}) \cdot \phi^{-1})(x)|^n dx \\ &= e^{-\epsilon n} \int_{\mathbb{B}_0(e^{\epsilon/2}\delta)} |\nabla_g(u \circ \phi^{-1})(x)|^n dx,\end{aligned} \tag{2-5}$$

e,

$$
\begin{aligned}
\int_M \zeta_n(\alpha|u|^{\frac{n}{n-1}})dv_g &= \sum_{k=n-1}^{\infty}\int_{B_x(\delta)}\frac{\alpha^k|u|^{\frac{nk}{n-1}}}{k!}dv_g \\
&\leq \sum_{k=n-1}^{\infty}\int_{\mathbb{B}_0(e^{\epsilon/2}\delta)}\frac{\alpha^k|u\circ(e^{\epsilon/2}\cdot\phi^{-1})(x)|^{\frac{nk}{n-1}}}{k!}dx \qquad (2\text{-}6)\\
&= e^{n\epsilon/2}\int_{\mathbb{B}_0(e^{\epsilon/2}\delta)}\zeta_n(\alpha|(u\circ\phi^{-1})(x)|^{\frac{n}{n-1}})dx.
\end{aligned}
$$

Para qualquer α fixo tal que $0<\alpha<\alpha_n$, existe algum ϵ_0 dependendo apenas de n e α tal que quando $0<\epsilon\leq\epsilon_0$, segue de (2-5) e $\|\nabla_g u\|_{L^n(B_x(\delta))}\leq 1$ que

$$
\begin{aligned}
e^{-\epsilon n}\int_{\mathbb{B}_0(e^{\epsilon/2}\delta)}|\nabla_g(u\circ\phi^{-1})(x)|^n dx &\leq 1\\
\int_{\mathbb{B}_0(e^{\epsilon/2}\delta)}|\nabla_g(u\circ\phi^{-1})(x)|^n dx &\leq e^{n\epsilon}\\
\alpha\left(\int_{\mathbb{B}_0(e^{\epsilon/2}\delta)}|\nabla_g(u\circ\phi^{-1})(x)|^n dx\right)^{\frac{1}{n-1}} &\leq \alpha e^{\frac{n\epsilon}{n-1}}\leq\alpha e^{\frac{n\epsilon_0}{n-1}}<\alpha_0.
\end{aligned}
$$

Agora, escolhemos $\epsilon=\epsilon_0$ fixo e δ dependendo apenas de ϵ_0, n, λ e i_0 como escolhido acima. Pelo Lema 2.1, existe uma constante $C_1=C_1(n)$ dependendo apenas de n tal que

$$
\begin{aligned}
&\int_{\mathbb{B}_0(e^{\epsilon/2}\delta)}\zeta_n(\alpha|(u\circ\phi^{-1})(x)|^{\frac{n}{n-1}})dx\\
&\qquad\leq C_1(e^{\epsilon_0/2}\delta)^n\left(\frac{\alpha}{\alpha_n}\right)^{n-1}\int_{\mathbb{B}_0(e^{\epsilon/2}\delta)}|\nabla_g(u\circ\phi^{-1})(x)|^n dx\\
&\qquad\leq C_1 e^{n\epsilon_0/2}\delta^n\int_{\mathbb{B}_0(e^{\epsilon/2}\delta)}|\nabla_g(u\circ\phi^{-1})(x)|^n dx.
\end{aligned}
$$

Isso, junto com (2-5) e (2-6), implica que

$$
\begin{aligned}
\int_M \zeta_n(\alpha|u|^{\frac{n}{n-1}})dv_g &\leq e^{\frac{n\epsilon_0}{2}}\int_{\mathbb{B}_0(e^{\epsilon/2}\delta)}\zeta_n(\alpha|(u\circ\phi^{-1})(x)|^{\frac{n}{n-1}})dx\\
&\leq e^{\frac{n\epsilon_0}{2}}\left(C_1 e^{n\epsilon_0/2}\delta^n\int_{\mathbb{B}_0(e^{\epsilon/2}\delta)}|\nabla_g(u\circ\phi^{-1})(x)|^n\right)\\
&\leq C_1 e^{n\epsilon_0}\delta^n\left(e^{n\epsilon_0}\int_{B_x(\delta)}|\nabla_g u|^n dv_g\right)\\
&= C_1 e^{2n\epsilon_0}\delta^n\int_M|\nabla_g u|^n dv_g.
\end{aligned}
$$

Tomando $C=C_1 e^{2n\epsilon_0}\delta^n$, temos a dependência de C com n,α,λ e i_0. Por conseguinte, comprovamos (2-4). □

Com isto em mãos estamos aptos para demonstrar o caso subcrítico da desigualdade de Trudinger-Moser.

Teorema 2.3 *Seja* (M,g) *uma variedade Riemanniana de dimensão* n *completa e não compacta. Suponha que sua curvatura de Ricci tem uma cota inferior, ou seja,* $\mathrm{Rc}(M,g) \geq \lambda g$ *para alguma constante* $\lambda \in \mathbb{R}$*, e que seu raio de injetividade é estritamente positivo, ou seja,* $\mathrm{inj}_{(M,g)} \geq i_0$ *para alguma constante* $i_0 > 0$*. Então temos*

(i) para qualquer $0 \leq \alpha < \alpha_n = n\omega_{n-1}^{1/(n-1)}$*, existem constantes positivas* τ *e* β *dependendo apenas de* n, α, λ *e* i_0 *tais que* (0-7) *é válida. Como consequência,* $W^{1,n}(M)$ *está imerso em* $L^q(M)$ *continuamente para qualquer* $q \geq n$*;*

(ii) para qualquer $\alpha > \alpha_n$ *e qualquer* $\tau > 0$*, o supremo em* (0-7) *é infinito;*

(iii) para qualquer $\alpha > 0$ *e qualquer* $u \in W^{1,n}(M)$*, temos* $\zeta_n(\alpha|u|^{n/(n-1)}) \in L^1(M)$*.*

Prova. *(i)* Para qualquer $\alpha : 0 < \alpha < \alpha_n$, escolha $\delta = \delta(n,\alpha,\lambda,i_0)$ como no Lema 2.2. Além disso, pelo Lema da Cobertura de Gromov, podemos selecionar uma sequência (x_j) de pontos em M tal que

(a) $M = \cup_j B_{x_j}(\delta/2)$, e para qualquer $j \neq l$ temos $B_{x_j}(\delta/4) \cap B_{x_l}(\delta/4) = \varnothing$;

(b) existe N dependendo apenas de n, λ e δ tal que cada ponto em M tem um vizinhança que intersecta no máximo N dos $B_{x_j}(\delta)'s$.

Para qualquer j, tomamos uma função de suporte $\phi_j \in C_0^\infty(B_{x_j}(\delta))$ satisfazendo $0 \leq \phi_j \leq 1$, $\phi_j \equiv 1$ em $B_{x_j}(\delta/2)$, e $|\nabla_g \phi_j| \leq 4/\delta$. Segue que para todo j

$$|\nabla_g \phi_j^2| = |\nabla_g(\phi_j \cdot \phi_j)| = |2\phi_j \nabla_g \phi_j| = 2\phi_j |\nabla_g \phi_j| \leq 2\phi_j \frac{4}{\delta} = \frac{8}{\delta}\phi_j. \tag{2-7}$$

Pelas propriedades de cobertura (a) e (b), temos

$$1 \leq \sum_j \phi_j(x) \leq N \text{ para todo } x \in M. \tag{2-8}$$

Basta notar que x pertence a alguma vizinhança, então 1 limita por baixo, e pela propriedade de ser localmente finita a limitação superior é N.

Defina $\tau = 8/\delta$. Suponha que $u \in C_0^\infty(M)$ satisfaz

$$\|u\|_{1,\tau} = \left(\int_M |\nabla u|^n dv_g\right)^{\frac{1}{n}} + \tau\left(\int_M |u|^n dv_g\right)^{\frac{1}{n}} \leq 1.$$

Segue de (2-7) e da Desigualdade de Minkowski, Proposição 6.10 do Apêndice, que

$$\begin{aligned}\left(\int_M |\nabla_g(\phi_j^2 u)|^n dv_g\right)^{\frac{1}{n}} &\leq \left(\int_M |\nabla_g(\phi_j)|^{2n}|u|^n dv_g\right)^{\frac{1}{n}} + \left(\int_M \phi_j^{2n}|\nabla_g u|^n dv_g\right)^{\frac{1}{n}}\\ &\leq \frac{8}{\delta}\left(\int_M |u|^n dv_g\right)^{\frac{1}{n}} + \left(\int_M |\nabla_g u|^n dv_g\right)^{\frac{1}{n}}\\ &= \|u\|_{1,\tau} \leq 1.\end{aligned}$$

Lembrando que $\phi_j \equiv 1$ em $B_{x_j}(\delta/2)$, então

$$\begin{aligned}\int_{B_{x_j}(\delta/2)} |u| dv_g &= \int_{B_{x_j}(\delta/2)} |\phi_j^2 u| dv_g\\ &\leq \int_{B_{x_j}(\delta/2)} |\phi_j^2 u| dv_g + \int_{B_{x_j}(\delta)\setminus B_{x_j}(\delta/2)} |\phi_j^2 u| dv_g\\ &= \int_{B_{x_j}(\delta)} |\phi_j^2 u| dv_g.\end{aligned}$$

Utilizando o Lema 2.2, nos leva a

$$\begin{aligned}\int_M \zeta_n(\alpha|u|^{\frac{n}{n-1}}) dv_g &\leq \sum_j \int_{B_{x_j}(\delta/2)} \zeta_n(\alpha|u|^{\frac{n}{n-1}}) dv_g\\ &\leq \sum_j \int_{B_{x_j}(\delta)} \zeta_n(\alpha|\phi_j^2 u|^{\frac{n}{n-1}}) dv_g\\ &\leq C\sum_j \int_{B_{x_j}(\delta)} |\nabla(\phi_j^2 u)|^n dv_g\\ &\leq C\sum_j \int_M |\nabla(\phi_j^2 u)|^n dv_g.\end{aligned} \tag{2-9}$$

Para alguma constante C que depende apenas de n, α, λ e i_0. Além disso, utilizando a equação (2-7), temos $0 \leq \phi_j \leq 1$ e $(a+b)^n \leq 2^n(a^n + b^n)$, para $(a, b \geq 0)$. Dessa forma,

$$\begin{aligned}\int_M |\nabla_g(\phi_j^2 u)|^n dv_g &\leq 2^n \int_M (\phi_j^{2n}|\nabla_g u|^n + |\nabla_g \phi_j^2|^n |u|^n) dv_g\\ &\leq 2^n \int_M \phi_j |\nabla_g u|^n dv_g + 2^n \left(\frac{8}{\delta}\right)^n \int_M \phi_j |u|^n dv_g\\ &= 2^n \int_M \phi_j |\nabla_g u|^n dv_g + \left(\frac{16}{\delta}\right)^n \int_M \phi_j |u|^n dv_g.\end{aligned}$$

De acordo com (2-8), segue que

$$\sum_j \int_M |\nabla_g(\phi_j^2 u)|^n dv_g \leq \sum_j 2^n \int_M \phi_j |\nabla_g u|^n dv_g + \left(\frac{16}{\delta}\right)^n \int_M \phi_j |u|^n dv_g$$
$$\leq 2^n N \int_M |\nabla_g u|^n dv_g + \left(\frac{16}{\delta}\right)^n N \int_M |u|^n dv_g.$$

Utilizando que $\|u\|_{1,\tau} \leq 1$, obtemos

$$\int_M |\nabla_g u|^n dv_g \leq 1 \qquad \text{e} \qquad \int_M |u|^n dv_g \leq \left(\frac{1}{\tau}\right)^n.$$

Assim,

$$\sum_j \int_M |\nabla_g(\phi_j^2 u)|^n dv_g \leq 2^n N + \left(\frac{16}{\tau\delta}\right)^n N.$$

Isso, junto com (2-9), implica que

$$\int_M \zeta_n(\alpha |u|^{\frac{n}{n-1}}) dv_g \leq C \sum_j \int_M |\nabla_g(\phi_j^2 u)|^n dv_g$$
$$\leq C(2^n N + \left(\frac{16}{\tau\delta}\right)^n N) = \tilde{C} < \infty,$$

para alguma constante $\tilde{C}$ que depende apenas de n, α, λ e i_0. Pela densidade de $C_0^\infty(M)$ em $W^{1,n}(M)$, a desigualdade (0-7) vale para os valores de α, τ e C acima. Pela Proposição 1.24, concluímos que $W^{1,n}(M)$ está continuamente imerso em $L^q(M)$ para qualquer $q \geq n$.

(ii) Fixe um ponto $z \in M$, seja $r = r(x) = d_g(z,x)$ a distância geodésica entre x e z. Sem perda de generalidade, podemos assumir que o raio de injetividade de (M,g) em z é estritamente maior que 1. Tome uma sequência de funções

$$\phi_\epsilon(x) = \begin{cases} 1, & \text{quando } r < \epsilon \\ (\log \frac{1}{\epsilon})^{-1} \log \frac{1}{r}, & \text{quando } \epsilon \leq r \leq 1 \\ 0, & \text{quando } r > 1. \end{cases}$$

Note que se $\epsilon \geq 1$,

$$\phi_\epsilon(x) = \begin{cases} 1, & \text{quando } r < \epsilon \\ 0, & \text{quando } r \geq \epsilon. \end{cases}$$

Então

$$\|\phi_\epsilon\|_{W^{1,n}(M)} = \left(\int_M |\phi_\epsilon|^n dv_g + \int_M |\nabla_g \phi_\epsilon|^n dv_g\right)^{\frac{1}{n}}$$
$$= \left(\int_{B_z(\epsilon)} 1 dv_g + \int_M 0 dv_g\right)^{\frac{1}{n}}$$
$$= \mathrm{Vol}_g(B_z(\epsilon))^{\frac{1}{n}} < \infty.$$

Caso contrário

$$\phi_\epsilon(x) = \begin{cases} 1, & \text{quando } r < \epsilon \\ (\log \frac{1}{\epsilon})^{-1} \log \frac{1}{r}, & \text{quando } \epsilon \leq r \leq 1 \\ 0, & \text{quando } r > 1. \end{cases}$$

Então,

$$\|\phi_\epsilon\|_{W^{1,n}(M)} = \left(\int_M |\phi_\epsilon|^n dv_g + \int_M |\nabla_g \phi_\epsilon|^n dv_g\right)^{\frac{1}{n}}$$
$$= \left(\int_{B_z(\epsilon)} 1 dv_g + \left(\log \frac{1}{\epsilon}\right)^{-n} \int_{B_z(1)\setminus B_z(\epsilon)} \left|\log \frac{1}{r}\right|^n + |r\nabla_g r|^n dv_g\right)^{\frac{1}{n}}$$
$$\leq \left(\mathrm{Vol}_g(B_z(\epsilon)) + \left(\log \frac{1}{\epsilon}\right)^{-n} \int_{B_z(1)\setminus B_z(\epsilon)} \left|\log \frac{1}{\epsilon}\right|^n + 1 dv_g\right)^{\frac{1}{n}}$$
$$= \left(\mathrm{Vol}_g(B_z(\epsilon)) + \mathrm{Vol}_g(B_z(1)\setminus B_z(\epsilon)) + \left(\log \frac{1}{\epsilon}\right)^{-n} \mathrm{Vol}_g(B_z(1)\setminus B_z(\epsilon))\right)^{\frac{1}{n}}$$
$$\leq \left(\mathrm{Vol}_g(B_z(1)) + \left(\log \frac{1}{\epsilon}\right)^{-n} \mathrm{Vol}_g(B_z(1))\right)^{\frac{1}{n}}$$
$$= \left(\left(1 + \left(\log \frac{1}{\epsilon}\right)^{-n}\right) \mathrm{Vol}_g(B_z(1))\right)^{\frac{1}{n}} < \infty.$$

Então $\phi_\epsilon \in W^{1,n}(M)$ e, utilizando um argumento similar de Fontana em [22], para qualquer constante $\tau > 0$ temos

$$\|\phi_\epsilon\|_{1,\tau} = \left(\log \frac{1}{\epsilon}\right)^{\frac{1-n}{n}} \omega_{n-1}^{\frac{1}{n}} \left(1 + O\left(\frac{1}{\log \epsilon}\right)\right).$$

Defina $\tilde{\phi}_\epsilon = \phi_\epsilon/\|\phi_\epsilon\|_{1,\tau}$. Então, temos na bola geodésica $B_z(\epsilon) \subset M$,

$$\begin{aligned}
\zeta_n(\alpha\tilde{\phi}_\epsilon^{\frac{n}{n-1}}) &= e^{\alpha\tilde{\phi}_\epsilon^{\frac{n}{n-1}}} - \sum_{k=0}^{n-2} \frac{\alpha\tilde{\phi}_\epsilon^{\frac{nk}{n-1}}}{k!} \\
&\geq e^{\alpha \log\frac{1}{\epsilon}\omega_{n-1}^{\frac{-1}{n-1}}\left(1+O\left(\frac{1}{\log\epsilon}\right)\right)} - O\left(\left(\log\frac{1}{\epsilon}\right)^{n-2}\right) \\
&= \epsilon^{-\alpha\omega_{n-1}^{\frac{-1}{n-1}}\left(1+O\left(\frac{1}{\log\epsilon}\right)\right)} - O\left(\left(\log\frac{1}{\epsilon}\right)^{n-2}\right).
\end{aligned}$$

Note que para qualquer $\alpha > \alpha_n$ e com $\omega_{n-1}^{\frac{-1}{n-1}} > 0$ obtemos $\alpha\omega_{n-1}^{\frac{-1}{n-1}} > \alpha_n\omega_{n-1}^{\frac{-1}{n-1}} = n$. Portanto, quando $\alpha > \alpha_n$, temos

$$\begin{aligned}
\int_M \zeta_n(\alpha|(\tilde{\phi})_\epsilon|^{\frac{n}{n-1}})dv_g &\geq \int_{B_z(\epsilon)} \zeta_n(\alpha|(\tilde{\phi})_\epsilon|^{\frac{n}{n-1}})dv_g \\
&\geq \int_{B_z(\epsilon)} \epsilon^{-\alpha\omega_{n-1}^{\frac{-1}{n-1}}\left(1+O\left(\frac{1}{\log\epsilon}\right)\right)} - O\left(\left(\log\frac{1}{\epsilon}\right)^{n-2}\right) dv_g \\
&\geq \left[\epsilon^{-\alpha\omega_{n-1}^{\frac{-1}{n-1}}\left(1+O\left(\frac{1}{\log\epsilon}\right)\right)} - O\left(\left(\log\frac{1}{\epsilon}\right)^{n-2}\right)\right] \frac{\omega_{n-1}}{n}\epsilon^n(1+o(\epsilon)) \\
&= \frac{\omega_{n-1}}{n}(1+o_\epsilon(1))\epsilon^{n-\alpha\omega_{n-1}^{\frac{-1}{n-1}}\left(1+O\left(\frac{1}{\log\epsilon}\right)\right)} - o_\epsilon(1) \\
&\to \infty \text{ conforme } \epsilon \to 0.
\end{aligned}$$

Isso finaliza a prova do item (ii).

(iii) Tome $\alpha_0 : 0 < \alpha_0 < \alpha_n$. Pelo item (i) existe um $\tau_0 = \tau_0(n, \alpha_0, \lambda, i_0) > 0$ tal que

$$\Lambda_{\alpha_0} := \sup_{\|u\|_{1,\tau_0}\leq 1} \int_M \zeta_n(\alpha_0|u|^{\frac{n}{n-1}})dv_g < \infty.$$

Dado qualquer $\alpha > 0$ e qualquer $u \in W^{1,n}(M)$. Como $C_0^\infty(M)$ é denso em $W^{1,n}(M)$ sob a norma $\|\cdot\|_{W^{1,n}(M)}$, que é equivalente à norma $\|\cdot\|_{1,\tau_0}$, podemos escolher algum $u_0 \in C_0^\infty(M)$ tal que

$$2^{\frac{n}{n-1}}\alpha\|u-u_0\|_{1,\tau_0}^{\frac{n}{n-1}} < \alpha_0. \tag{2-10}$$

Como $\zeta_n(t)$ é crescente em t para $t \geq 0$, veja abaixo

$$\zeta_n(t) = \sum_{k=n-1}^{\infty} \frac{t^k}{k!} \Rightarrow \zeta'(n,t) = \sum_{k=n-1}^{\infty} \frac{kt^{k-1}}{k!} = \sum_{k=n-2}^{\infty} \frac{t^k}{k!} \geq 0 \text{ para } t \geq 0,$$

obtemos, utilizando que

$$|u|^{\frac{n}{n-1}} \leq |u-u_0+u_0|^{\frac{n}{n-1}} \leq 2^{\frac{n}{n-1}}|u-u_0|^{\frac{n}{n-1}} + 2^{\frac{n}{n-1}}|u_0|^{\frac{n}{n-1}},$$

e a Proposição 6.2 do Apêndice, que

$$\begin{aligned} \int_M \zeta_n(\alpha|u|^{\frac{n}{n-1}})dv_g &\leq \int_M \zeta_n(2^{\frac{n}{n-1}}\alpha|u-u_0|^{\frac{n}{n-1}}+2^{\frac{n}{n-1}}\alpha|u_0|^{\frac{n}{n-1}})dv_g \\ &\leq \frac{1}{\mu}\int_M \zeta_n(2^{\frac{n}{n-1}}\alpha\mu|u-u_0|^{\frac{n}{n-1}})dv_g \\ &+\frac{1}{\nu}\int_M \zeta_n(2^{\frac{n}{n-1}}\alpha\nu|u_0|^{\frac{n}{n-1}})dv_g, \end{aligned} \tag{2-11}$$

onde $1/\mu+1/\nu=1$. Em vista de (2-10), podemos tomar $\mu>1$ suficientemente próximo de 1 de forma a

$$2^{\frac{n}{n-1}}\alpha\mu\|u-u_0\|_{1,\tau_0}^{\frac{n}{n-1}}<\alpha_0 \Rightarrow 2^{\frac{n}{n-1}}\alpha\mu<\frac{\alpha_0}{\|u-u_0\|_{1,\tau_0}^{\frac{n}{n-1}}}.$$

Portanto,

$$\int_M \zeta_n(2^{\frac{n}{n-1}}\alpha\mu|u-u_0|^{\frac{n}{n-1}})dv_g<\int_M \zeta_n\left(\alpha_0\left|\frac{u-u_0}{\|u-u_0\|_{1,\tau_0}}\right|^{\frac{n}{n-1}}\right)dv_g.$$

Como $\|(u-u_0)/\|(u-u_0)\|_{1,\tau_0}\|_{1,\tau_0}=1$, temos que

$$\int_M \zeta_n\left(\alpha_0\left|\frac{u-u_0}{\|u-u_0\|_{1,\tau_0}}\right|^{\frac{n}{n-1}}\right)dv_g<\Lambda_{\alpha_0}. \tag{2-12}$$

Como $u_0\in C_0^\infty(M)$, particularmente u_0 tem suporte compacto, vale a relação

$$\begin{aligned} \int_M \zeta_n(2^{\frac{n}{n-1}}\alpha\nu|u_0|^{\frac{n}{n-1}})dv_g &= \sum_{k=n-1}^{\infty}\int_{supp(u_0)}\frac{\alpha^k\nu^k 2^{\frac{nk}{n-1}}|u_0|^{\frac{nk}{n-1}}}{k!}dv_g \\ &\leq \sum_{k=n-1}^{\infty}\int_{supp(u_0)}\frac{\alpha^k\nu^k 2^{\frac{nk}{n-1}}|u_0^{max}|^{\frac{nk}{n-1}}}{k!}dv_g \\ &= \int_M \zeta_n(2^{\frac{n}{n-1}}\alpha\nu|u_0^{\max}|^{\frac{n}{n-1}})dv_g \\ &\leq e^{2^{\frac{n}{n-1}}\alpha\nu|u_0^{\max}|^{\frac{n}{n-1}}}\mathrm{Vol}_g(supp(u_0)). \\ &<\infty. \end{aligned} \tag{2-13}$$

Onde u_0^{max} é o máximo da função u_0 em $supp(u_0)$. Combinando (2-11), (2-12) e (2-13), obtemos

$$\int_M \zeta_n(\alpha|u|^{\frac{n}{n-1}})dv_g<\infty.$$

Isso finaliza a prova do item (iii). □

CAPÍTULO 3

Desigualdade Subcrítica de Trudinger-Moser 2ª Parte

Nesta seção, provaremos a desigualdade subcrítica de Trudinger-Moser pelo método abordado por Li e Lu em [32].

Teorema 3.1 *Seja* (M,g) *uma variedade Riemanniana completa e não compacta cuja curvatura de Ricci tem um limite inferior, ou seja, existe uma constante* $\lambda \in \mathbb{R}$ *tal que* $\mathrm{Rc}_{(M,g)} \geq \lambda g$*. Além disso, assumimos que seu raio injetivo tem um limite inferior, ou seja,* $\mathrm{inj}_{(M,g)} \geq i_0$ *para algum* $i_0 > 0$*. Então, para qualquer* $u \in W^{1,n}(M)$ *tal que* $\|\nabla u\|_n \leq 1$, $\alpha < \alpha_n = n\omega_{n-1}^{1/(n-1)}$*, existe uma constante* $C = C(n,\alpha,M)$ *tal que*

$$\frac{1}{\|u\|_n^n}\int_M \zeta_n(\alpha|u|^{\frac{n}{n-1}})dv_g \leq C. \tag{3-1}$$

Além disso, essa desigualdade é sharp no sentido em que, quando $\alpha \geq \alpha_n$*, a desigualdade falha.*

Prova. Considere a integral

$$\frac{1}{\|u\|_n^n}\int_M \zeta_n(\alpha|u|^{\frac{n}{n-1}})dv_g,$$

para $\alpha < \alpha_n = n\omega_{n-1}^{1/(n-1)}$. Esta é definida como a soma de algumas subintegrais em uma cobertura da variedade, esta será a Cobertura de Gromov.

Para esta cobertura, temos cartas locais com coordenadas harmônicas $\{P_i, B_{P_i}(\delta), x_j\}_{i\in\Lambda}$ e, correspondendo a isso, a partição da unidade $\alpha_i(P)_{i\in\Lambda}$ (aqui abusamos da notação α; quando escrevemos α_i, nos referimos à partição da unidade, e quando escrevemos α_n, nos referimos à melhor constante na desigualdade de Moser-Trudinger). Assim, temos

$$\frac{1}{\|u\|_n^n}\int_M \zeta_n(\alpha|u|^{\frac{n}{n-1}})dv_g = \frac{1}{\|u\|_n^n}\sum_i\int_{B_{P_i}(\delta)} \alpha_i(P)\zeta_n(\alpha|u(P)|^{\frac{n}{n-1}})dv_g.$$

Agora, faremos uma reescala para $u(P)$. Para b suficientemente grande, $\{B_{P_i}(\frac{\delta}{b})\}$ não terá interseção, já que são uniformemente localmente finitos. Para qualquer $P \in M$, ou existe i tal que $P \in B_{P_i}(\frac{\delta}{b})$, ou $P \in M \setminus \cup_i B_{P_i}(\frac{\delta}{b})$. No primeiro caso, para $P = (x_1, ..., x_n)$, definimos $v(P) = au(bx)$, onde a e b são constantes a serem escolhidas; no segundo caso, vamos definir $v(P) = 0$. A partir do argumento acima, isso está bem definido.

Queremos escolher a e b de modo que $\|v\|_{1,\tau} \leq 1$.

$$\begin{aligned}\int_M |\nabla v|^n dv_g &= \sum_i \int_{B_{P_i}(\delta)} \alpha_i(bx) a^n b^n |(\nabla u)(bx)|^n) \sqrt{|g(x)|} dx \\ &\leq Q^{n/2} \sum_i \int_{B_0(\delta)} \alpha_i(x) a^n |(\nabla u)(x)|^n dx \\ &\leq Q^n a^n \int_M |\nabla u|^n dv_g.\end{aligned}$$

Usamos o Teorema 1.5, para δ suficientemente pequeno, temos as seguintes limitações para o elemento de volume

$$Q^{-n/2} dx \leq dv_g \leq Q^{n/2} dx.$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned}\int_M |v|^n dv_g &= \sum_i \int_{B_{P_i}(\delta/b)} \alpha_i(bx) a^n |u(bx)|^n \sqrt{|g(x)|} dx \\ &\leq Q^{n/2} \frac{a^n}{b^n} \sum_i \int_{B_0(\delta)} \alpha_i(x) |u(x)|^n dx \\ &\leq Q^n \frac{a^n}{b^n} \int_M |u|^n dv_g.\end{aligned}$$

Uma vez que queremos,

$$\begin{aligned}\|u\|_{1,\tau}^n &= \int_M |\nabla u|^n + \tau |u|^n dv_g \\ &\leq Q^n a^n \int_M |\nabla u|^n dv_g + \tau Q^n \frac{a^n}{b^n} \int_M |u|^n dv_g \\ &\leq 1.\end{aligned}$$

Para esse propósito, definimos

$$a + \frac{(1-\varepsilon)^{1/n}}{Q} \ \text{ e } \ b = \left(\frac{(1-\varepsilon)\tau}{\varepsilon}\right)^{1/n} \|u\|_n,$$

onde ε é alguma constante positiva. Então,

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\|u\|_n^n}\int_M \zeta_n(\alpha|u|^{\frac{n}{n-1}})dv_g &= \frac{1}{\|u\|_n^n}\sum_i\int_{B_0(\delta)}\alpha_i(x)\zeta_n(\alpha|u(x)|^{\frac{n}{n-1}})\sqrt{|g(x)|}dx \\
&= \frac{1-\varepsilon}{\varepsilon}\tau\sum_i\int_{B_0(\delta)}\alpha_i(x)\zeta_n(\alpha|u(x)|^{\frac{n}{n-1}})\sqrt{|g(x)|}d\left(\frac{x}{b}\right) \\
&\leq Q^{n/2}\frac{1-\varepsilon}{\varepsilon}\tau\sum_i\int_{B_0(\delta/b)}\alpha_i(bx)\zeta_n\left(\frac{\alpha|au(bx)|^{\frac{n}{n-1}}}{a^{\frac{n}{n-1}}}\right)dx \\
&\leq Q^n\frac{1-\varepsilon}{\varepsilon}\tau\int_M \zeta_n(\alpha'|v|^{\frac{n}{n-1}})dv_g \\
&< \infty,
\end{aligned}$$

onde $\alpha' = \alpha/a^{n/(n-1)} \leq \alpha_n$ quando ε é suficientemente pequeno e Q é muito próximo de 1, portanto, a partir do Teorema 4.1 em que será provado no Capítulo 4 a validade para o caso crítico, a última linha é válida.

Para mostrarmos que é sharp, consideramos a seguinte sequência de funções,

$$u_k(d(P,\tilde{P})) = \begin{cases} \omega_{n-1}^{-\frac{1}{n}}\left(\frac{k}{n}\right)^{\frac{n-1}{n}}, & d(P,\tilde{P}) \leq e^{-\frac{k}{n}} \\ -\omega_{n-1}^{-\frac{1}{n}}\left(\frac{k}{n}\right)^{-\frac{1}{n}}\log(d(P,\tilde{P})), & e^{-\frac{k}{n}} \leq d(P,\tilde{P}) \leq 1 \\ 0, & d(P,\tilde{P}) \geq 1. \end{cases}$$

Usando o Teorema 1.5, temos

$$\begin{aligned}
\int_M \left|\nabla\frac{u_k}{\sqrt{Q}}\right| dv_g &= Q^{-n/2}\int_{B_P(1)}|\nabla u_k|^n r^{n-1}\sqrt{|g|}drd\theta \\
&= Q^{-n/2}\int_{B_P(1)\backslash B_P(e^{-k/n})}\left|-\omega_{n-1}^{-1/n}\left(\frac{k}{n}\right)^{-1/n}\frac{1}{r}\right|^n r^{n-1}\sqrt{|g|}drd\theta \\
&\leq Q^{-n/2}Q^{n/2}\omega_{n-1}^{-1}\left(\frac{k}{n}\right)^{-1}\int_{S_{n-1}}\int_{e^{-k/n}}^1\frac{1}{r}drd\theta \\
&\leq 1.
\end{aligned}$$

Portanto, $\|\nabla \frac{u_k}{\sqrt{Q}}\|_n \leq 1$. Em seguida, avaliamos a norma $\|\frac{u_k}{\sqrt{Q}}\|_n$. Observamos que

$$\begin{aligned}
\int_M \left|\frac{u_k}{\sqrt{Q}}\right| dv_g &= Q^{-n/2} \int_{B_P(e^{-k/n})} \left|\omega_{n-1}^{-\frac{1}{n}} \left(\frac{k}{n}\right)^{\frac{n-1}{n}}\right|^n dv_g \\
&\quad + Q^{-n/2} \int_{B_P(1)\setminus B_P(e^{-k/n})} \left|-\omega_{n-1}^{-1/n} \left(\frac{k}{n}\right)^{-1/n} \log(d(P,\tilde{P}))\right|^n dv_g \\
&\leq Q^{-n/2} \int_{S_{n-1}} \int_0^{e^{-k/n}} \left|\omega_{n-1}^{-\frac{1}{n}} \left(\frac{k}{n}\right)^{\frac{n-1}{n}}\right|^n r^{n-1} \sqrt{|g|} dr d\theta \\
&\quad + Q^{-n/2} \omega_{n-1}^{-1} \left(\frac{k}{n}\right)^{-1} \int_{S_{n-1}} \int_{e^{-k/n}}^1 |\log r| r^{n-1} \sqrt{|g|} dr d\theta \\
&\leq \omega_{n-1}^{-1} \left(\frac{k}{n}\right)^{-1} e^{-k} \omega_{n-1} + \omega_{n-1}^{-1} \left(\frac{k}{n}\right)^{-1} \int_{S_{n-1}} \int_{e^{-k/n}}^1 |\log r| r^{n-1} \sqrt{|g|} dr d\theta.
\end{aligned}$$

Ambos os termos acima tendem a zero conforme $k \to \infty$, portanto $\|\frac{u_k}{\sqrt{Q}}\|_n \to 0$ conforme $k \to \infty$. Em seguida, estimamos

$$\begin{aligned}
\int_M \zeta_n(\alpha_n |\frac{u_k}{\sqrt{Q}}|^{\frac{n}{n-1}}) dv_g &= \int_{B_P(1)\setminus B_P(e^{-k/n})} \exp\left\{\alpha_n' \left|-\omega_{n-1}^{-1/n} \left(\frac{k}{n}\right)^{-1/n} \log(d(P,\tilde{P}))\right|^{\frac{n}{n-1}}\right\} dv_g \\
&\quad - \int_{B_P(1)\setminus B_P(e^{-k/n})} \sum_{j=0}^{n-2} \frac{\alpha_n'^j \left|-\omega_{n-1}^{-1/n} \left(\frac{k}{n}\right)^{-1/n} \log(d(P,\tilde{P}))\right|^{\frac{n}{n-1}j}}{j!} dv_g \\
&\quad + \int_{B_P(e^{-k/n})} \zeta_n\left(\alpha_n' (\omega_{n-1}^{-\frac{1}{n}} \left(\frac{k}{n}\right)^{\frac{n-1}{n}})^{\frac{n}{n-1}}\right) dv_g \\
&\geq - \sum_{j=0}^{n-2} k^{-j\frac{1}{n-1}} \int_{B_P(1)} \frac{n^{j\frac{1}{n-1}}}{j!} |\log(d(P,\tilde{P}))|^{j\frac{n}{n-1}} dv_g \\
&\quad + (e^{-k/n})^n \omega_{n-1} \zeta_n(\alpha_n' (\omega_{n-1}^{-\frac{1}{n-1}} \frac{k}{n})).
\end{aligned}$$

Onde $\alpha_n' = \alpha_n/\sqrt{Q}$. É fácil ver que o primeiro termo tende a zero e, portanto, temos

$$\frac{1}{\|\frac{u_k}{\sqrt{Q}}\|_n^n} \int_M \zeta_n\left(\alpha_n \left|\frac{u_k}{\sqrt{Q}}\right|^{\frac{n}{n-1}}\right) dv_g \to \infty.$$

Concluímos que, de fato, a desigualdade de Trudinger-Moser é sharp com constante α_n, assim, completamos a prova do Teorema. □

CAPÍTULO 4

Desigualdade Crítica de Trudinger-Moser

Nesta seção, provamos a desigualdade crítica de Trudinger-Moser. Como já citado no Capítulo 2, a demonstração foi feita por Li e Lu em [32].

Teorema 4.1 *Seja* (M,g) *uma variedade Riemanniana completa e não compacta cuja curvatura de Ricci tem um limite inferior, ou seja, existe uma constante* $\lambda \in \mathbb{R}$ *tal que* $\mathrm{Rc}_{(M,g)} \geq \lambda g$*. Além disso, assumimos que o raio injetivo tem um limite inferior, ou seja,* $\mathrm{inj}_{(M,g)} \geq i_0$ *para algum* $i_0 > 0$*. Então, para todo* $\tau > 0$*, existe uma constante* $C = C(n,\tau,M)$ *tal que*

$$\sup_{u \in W^{1,n}(M), \|u\|_{1,\tau} \leq 1} \int_M \zeta_n(\alpha_n |u|^{\frac{n}{n-1}}) dv_g \leq C(n,\tau,M), \tag{4-1}$$

novamente aqui $\alpha_n = n\omega_{n-1}^{\frac{1}{n-1}}$*,* ω_{n-1} *é a área da esfera unitária em* $\mathbb{R}^n$*,* $\zeta_n(t) = \sum_{i=n-1}^{\infty} \frac{t^i}{i!}$*,* $\|u\|_{1,\tau} = [\int_M (|\nabla u|^n + \tau |u|^n) dv_g]^{\frac{1}{n}}$*. Além disso,* α_n *é sharp no sentido de que se* α_n *for substituído por qualquer número maior, a desigualdade acima falha.*

Prova. Precisamos apenas provar a desigualdade crítica de Trudinger-Moser em M para todo $u \in C_0^{\infty}(M)\backslash\{0\}$ tal que $u \geq 0$ e $\|u\|_{1,\tau} \leq 1$. Isso decorre do seguinte argumento de densidade: para qualquer $u \in W^{1,n}(M)$, $|u| = u^+ + u^-$, então $|u|^{\frac{n}{n-1}} = |u^+|^{\frac{n}{n-1}} + |u^-|^{\frac{n}{n-1}}$. Portanto, podemos reduzir o problema para funções não negativas. Para qualquer $u \in W^{1,n}(M)$ e $u \geq 0$, como $C_0^{\infty}(M)$ é denso em $W^{1,n}(M)$, podemos encontrar uma sequência de funções não negativas $\{u_m\}_{m=1}^{\infty}$ em $C_0^{\infty}(M)$ tal que $u_m \to u$ em $W^{1,n}(M)$. Então existe uma subsequência $\{u_{m_k}\}$ tal que $u_{m_k} \to u$ q.t.p. Pelo Lema de Fatou,

$$\int_M \liminf_{k\to\infty} \zeta_n(\alpha_n |u_{m_k}|^{\frac{n}{n-1}}) dv_g \leq \liminf_{k\to\infty} \int_M \zeta_n(\alpha_n |u_{m_k}|^{\frac{n}{n-1}}) dv_g.$$

Portanto, temos

$$\int_M \zeta_n(\alpha_n |u|^{\frac{n}{n-1}}) dv_g \leq \sup_{u \in C_0^{\infty}, u \geq 0, \|u\|_{1,\tau} \leq 1} \int_M \zeta_n(\alpha_n |u|^{\frac{n}{n-1}}) dv_g.$$

Agora, para mostrar que $\int_M \zeta_n(\alpha_n|u|^{\frac{n}{n-1}})dv_g \leq C(n,\tau)$ para $u \in C_0^\infty(M)\backslash\{0\}$, definimos

$$A(u) = 2^{-\frac{1}{n(n-1)}}\tau^{\frac{1}{\tau}}\|u\|_{L^n},$$

e

$$\Omega(u) = \{x \in M : u(x) \geq A(u)\}.$$

Como $\|u\|_{1,\tau} \leq 1$, temos $\tau^{\frac{1}{n}}\|u\|_{L^n} \leq 1$, então $A(u) \leq 1$. Como temos o seguinte

$$\int_M |u|^n dv_g \geq \int_{\Omega(u)} |u|^n dv_g \geq \int_{\Omega(u)} |A(u)|^n dv_g \geq |\Omega(u)| 2^{-\frac{1}{n-1}}\tau\|u\|_{L^n}^n,$$

então $|\Omega(u)| \leq 2^{\frac{1}{n-1}}\tau^{-1}$ e $\Omega(u)$ é compacto por Hopf-Rinow. Como M é completo, $\Omega(u)$ é ainda limitado. Agora dividimos a integral como

$$\begin{aligned}\int_M \zeta_n(\alpha_n|u|^{\frac{n}{n-1}})dv_g &= \int_{\Omega(u)} \zeta_n(\alpha_n|u|^{\frac{n}{n-1}})dv_g + \int_{M\backslash\Omega(u)} \zeta_n(\alpha_n|u|^{\frac{n}{n-1}})dv_g \\ &\equiv I_1 + I_2.\end{aligned}$$

Para I_2, temos

$$\begin{aligned}I_2 &\leq \int_{\{x:u(x)<1\}} \sum_{k=n-1}^{\infty} \frac{\alpha_n^k|u|^{\frac{kn}{n-1}}}{k!} dv_g \\ &\leq \sum_{k=n-1}^{\infty} \frac{\alpha_n^k}{k!} \int_M |u|^n dv_g \\ &= \sum_{k=n-1}^{\infty} \frac{\alpha_n^k}{k!} \|u\|_{L^n}^n \\ &\leq \frac{1}{\tau} \sum_{k=n-1}^{\infty} \frac{\alpha_n^k}{k!} \\ &\equiv C(\tau, n).\end{aligned}$$

Para estimar I_1, definimos $v(x) = u(x) - A(u)$ em $\Omega(u)$. Então, $v \in W_0^{1,n}(\Omega(u))$ e

$$\begin{aligned}
|u|^{n'} &= (|v| + A(u))^{n'} \\
&\leq |v|^{n'} + n'2^{n'-1}(|v|^{n'-1}A(u) + A(u)^{n'}) \\
&\leq |v|^{n'} + n'2^{n'-1}\left(\frac{(|v|^{n'-1}A(u))^n}{n} + \frac{1}{n'}\right) + n'2^{n'-1}A(u)^{n'} \\
&= |v|^{n'}\left(1 + \frac{2^{\frac{1}{n-1}}}{n-1}|A(u)|^n\right) + n'2^{n'-1}\left(\frac{1}{n'} + |A(u)|^{n'}\right) \\
&\leq |v|^{n'}\left(1 + \frac{2^{\frac{1}{n-1}}}{n-1}|A(u)|^n\right) + C(n),
\end{aligned}$$

onde $n' = \frac{n}{n-1}$. Podemos limitar o segundo termo por uma constante $C = C(n)$ pois $A(u) \leq 1$.

Definimos $w(x) = v(x)\left(1 + \frac{2^{\frac{1}{n-1}}}{n-1}|A(u)|^n\right)^{\frac{n-1}{n}}$, então $w \in W_0^{1,n}(M)$ e $|u|^{n'} \leq w^{n'} + C(n)$. Assim, para I_1,

$$I_1 \leq \int_{\Omega(u)} \exp\{\alpha_n |u|^{n'}\} dv_g \leq e^{\alpha_n C(n)} \int_{\Omega(u)} \exp\{\alpha_n |w|^{n'}\} dv_g.$$

Para aplicar o Teorema 1.14 para a variedade compacta $\Omega(u)$, precisamos verificar que $\|\nabla w\|_{L^n} \leq 1$. Para isso, estimamos

$$\begin{aligned}
\int_{\Omega(u)} |\nabla w|^n dv_g &= \left(1 + \frac{2^{\frac{1}{n-1}}}{n-1}|A(u)|^n\right)^{n-1} \int_{\Omega(u)} |\nabla v|^n dv_g \\
&\leq \left(1 + \frac{2^{\frac{1}{n-1}}}{n-1}|A(u)|^n\right)^{n-1} \left(1 - \tau \int_M |u|^n dv_g\right).
\end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned}
\left(\int_{\Omega(u)} |\nabla w|^n dv_g\right)^{\frac{1}{n-1}} &\leq \left(1 + \frac{2^{\frac{1}{n-1}}}{n-1}|A(u)|^n\right)\left(1 - \tau \int_M |u|^n dv_g\right)^{\frac{1}{n-1}} \\
&\leq \left(1 + \frac{\tau}{n-1}\int_M |u|^n dv_g\right)\left(1 - \frac{\tau}{n-1}\int_M |u|^n dv_g\right) \\
&\leq 1.
\end{aligned}$$

Portanto, $I_1 \leq e^{\alpha_n C(n)} C(n, \Omega(u))$ pelo Teorema 1.14, onde $C(n, \Omega(u))$ é uma constante dependente de n e do domínio $\Omega(u)$ que escolhemos. Como $|\Omega(u)| \leq 2^{\frac{1}{n-1}}\tau^{-1}$, a partir do argumento no final da última seção, o volume $|\Omega(u)|$ é uniformemente limitado, independente da escolha de u. Portanto, provamos a desigualdade crítica de Trudinger-

Moser em M.

Quanto a ser sharp vide demonstração no Capítulo 3. $\square$

CAPÍTULO 5

Aplicações

Nesta seção trazemos uma aplicação para a desigualdade de Trudinger-Moser. Seja (M,g) uma variedade Riemanniana n-dimensional completa e não compacta. Denotaremos por ∇_g a derivada covariante e por div_g o operador de divergência. Suponha que a curvatura de Ricci de (M,g) tenha uma cota inferior e que o raio de injetividade seja estritamente positivo, ou seja, (0-7) é satisfeito. Consideramos resultados de existência para a seguinte equação quasilinear:

Problema 5.1

$$-\operatorname{div}_g(|\nabla_g u|^{n-2}\nabla_g u)+\nu(x)|u|^{n-2}u=\phi(x)f(x,u),$$

onde $\nu(x)$, $\phi(x)$ e $f(x,t)$ são todas funções contínuas, e $f(x,t)$ se comporta como $e^{\alpha t^{n/(n-1)}}$ quando $t\to\infty$. Seja O um ponto fixo de M e $d_g(\cdot,\cdot)$ a distância geodésica entre dois pontos de (M,g). Suponha que $\phi(x)$ satisfaça as seguintes hipóteses:

(ϕ_1) $\phi(x)\in L^p_{\text{loc}}(M)$ para algum $p>1$, ou seja, para qualquer $R>0$, temos $\phi(x)\in L^p(B_O(R))$;

(ϕ_2) $\phi(x)>0$ para todo $x\in M$, e existem constantes positivas C_0 e R_0 tais que $\phi(x)\le C_0$ para todo $x\in M\backslash B_O(R_0)$.

Assume-se que o potencial $\nu(x)$ satisfaça o seguinte:

(ν_1) existe alguma constante $\nu_0>0$ tal que $\nu(x)\ge\nu_0$ para todo $x\in M$;

(ν_2) ou $1/\nu(x)\in L^{1/(n-1)}(M)$ ou $\nu(x)\to+\infty$ conforme $d_g(O,x)\to+\infty$.

A não linearidade $f(x,t)$ satisfaz as seguintes hipóteses:

(f_1) existem constantes $\alpha_0,b_1,b_2>0$ tais que para todo $(x,t)\in M\times\mathbb{R}^+$,

$$|f(x,t)|\le b_1t^{n-1}+b_2\zeta_n(\alpha_0t^{n/(n-1)}); \tag{5-1}$$

(f_2) existe alguma constante $\mu>n$ tal que para todo $x\in M$ e $t>0$,

$$0<\mu F(x,t)\equiv\mu\int_0^t f(x,s)ds\le tf(x,t); \tag{5-2}$$

(f_3) existem constantes $R_1, A_1 > 0$ tais que se $t \geq R_1$, então para todo $x \in M$ temos

$$F(x,t) \leq A_1 f(x,t). \tag{5-3}$$

Defina um espaço de funções por

$$E = \left\{ u \in W^{1,n}(M) : \int_M \nu(x)|u|^n dv_g < \infty \right\}. \tag{5-4}$$

Dizemos que $u \in E$ é uma solução fraca do Problema 5.1 se, para todo $\phi \in E$, tivermos

$$\int_M (|\nabla_g u|^{n-2}\nabla_g u \nabla_g \varphi + \nu(x)|u|^{n-2}u\varphi) dv_g = \int_M \phi(x) f(x,u) dv_g. \tag{5-5}$$

Defina um autovalor ponderado para o operador n-Laplaciano por

$$\lambda_\phi = \inf_{u \in E, u \not\equiv 0} \frac{\int_M (|\nabla_g u|^n + \nu(x)|u|^n) dv_g}{\int_M \phi(x)|u|^n dv_g}. \tag{5-6}$$

Veja na Proposição 6.4 que λ_ϕ é positivo. Se $u \in E$, então a norma E de u é definida por

$$\|u\|_E = \left(\int_M (|\nabla_g u|^n + \nu|u|^n) dv_g \right)^{1/n}, \tag{5-7}$$

e

$$S_q = \inf_{u \in E \setminus \{0\}} \frac{(\int_M (|\nabla_g u|^n + \nu(x)|u|^n) dv_g)^{1/n}}{(\int_M \phi(x)|u|^q dv_g)^{1/q}}. \tag{5-8}$$

Outras hipóteses consideradas para f serão:

(f_4) $\limsup_{t \to 0^+} nF(x,t)/t^n < \lambda_\phi$ uniformemente em $x \in M$;

(f_5) existem constantes $q > n$ e C_q tais que para todo $(x,t) \in M \times [0,\infty)$

$$f(x,t) \geq C_q t^{q-1},$$

onde

$$C_q > \left(\frac{q-n}{q} \right)^{(q-n)/n} \left(\frac{p\alpha_0}{(p-1)\alpha_n} \right)^{(q-n)(n-1)/n} S_q^q.$$

Mais a frente iremos construir funções f que satifazem (f_1)-(f_5).

Os seguintes resultados buscam elucidar aspectos fundamentais e estabelecer conclusões relevantes:

Proposição 5.2 *Para qualquer $q \geq n$, o espaço de funções E está compactamente imerso em $L^q(M)$.*

Prova. Seja (u_k) uma sequência de funções tal que $\|u_k\|_E \leq C$ para alguma constante C. Basta provar que, a menos de uma subsequência, (u_k) converge em $L^q(M)$ para qualquer

$q \geq n$. Uma vez que, (u_k) é limitado em $W^{1,n}(M)$ e, assim, podemos assumir que, para qualquer $q > 1$, a menos de uma subsequência

$$\begin{aligned} u_k &\rightharpoonup u_0 \ \text{ fracamente em } E \\ u_k &\to u_0 \ \text{ fortemente em } \ L^q_{loc}(M) \\ u_k &\to u_0 \ \text{ q.t.p. em } \ M. \end{aligned} \tag{5-9}$$

Se $1/\nu(x) \in L^{1/(n-1)}(M)$, usando o mesmo argumento de [63, Lema 2.4], concluímos que $E \hookrightarrow L^q(M)$ compactamente para qualquer $q > 1$. Portanto, em vista de (ν_2), podemos assumir que $\nu(x) \to \infty$ quando $d_g(O,x) \to \infty$, onde O é um ponto fixo de M. Dado qualquer $\epsilon > 0$, existe um $R > 0$ tal que $v(x) > (2C)^n/\epsilon$ quando $d_g(O,x) \geq R$. Portanto,

$$\frac{(2C)^n}{\epsilon}\int_{M\setminus B_O(R)} |u_k - u_0| dv_g < \int_M \nu |u_k - u_0| dv_g \leq (2C)^n.$$

O que resulta em

$$\int_{M\setminus B_O(R)} |u_k - u_0| dv_g < \epsilon.$$

Por (5-9), temos $u_k \to u_0$ fortemente em $L^n(B_O(R))$, ou seja,

$$\lim_{k\to\infty}\int_{B_0(R)} |u_k - u_0|^n dv_g = 0.$$

Portanto, para o ϵ acima, existe um $l \in \mathbb{N}$ tal que quando $k > l$,

$$\int_M |u_k - u_0|^n dv_g = \int_{M\setminus B_O(R)} |u_k - u_0|^n dv_g + \int_{B_O(R)} |u_k - u_0|^n dv_g < 2\epsilon.$$

Isso implica que $u_k \to u_0$ fortemente em $L^n(M)$ quando $k \to \infty$.

Segue da (i) do Teorema 2.3 que (u_k) é limitada em $L^q(M)$ para qualquer $q \geq n$. Agora, fixando $q > n$, obtemos pela desigualdade de Hölder

$$\begin{aligned} \int_M |u_k - u_0|^q dv_g &= \int_M |u_k - u_0||u_k - u_0|^{q-1} dv_g \\ &\leq \left(\int_M |u_k - u_0|^n dv_g\right)^{1/n}\left(\int_M |u_k - u_0|^{(q-1)n/(n-1)} dv_g\right)^{1-1/n}. \end{aligned}$$

Isso, juntamente com o fato de que $u_k \to u_0$ em $L^n(M)$, implica que $u_k \to u_0$ em $L^q(M)$. □

Vamos provar que S_q pode ser atingindo. Quando (M,g) é o espaço euclidiano padrão $\mathbb{R}^n$, $\varphi(x) = |x|^{-\beta}$ para $0 < \beta < n$, (f_1) - (f_4) e

(H_5) $\liminf_{s\to+\infty} sf(x,s)e^{-\alpha_0 s^{\frac{n}{n-1}}} = \beta_0 > M$

uniformemente em x, onde M é algum número suficientemente grande, obtemos resultados similares em [63]. Seja S_q definido por (5-8). Então temos o seguinte:

Proposição 5.3 *Para qualquer $q > n$, S_q é atingido por alguma função não negativa $u \in E \backslash \{0\}$.*

Prova. Suponha $q > n$. É fácil ver que

$$S_q^n = \inf_{\int_M \phi |u|^q dv_g = 1} \int_M (|\nabla_g u|^n + \nu(x)|u|^n) dv_g.$$

Escolhendo uma sequência de funções $(u_k) \subset E$ tal que $\int_M \phi |u_k|^q dv_g = 1$ e

$$\lim_{k \to \infty} \int_M (|\nabla_g u|^n + \nu |u|^n) dv_g = S_q^n.$$

Pela Proposição 5.2, existe $u \in E$ tal que, a menos de uma subsequência, $u_k \rightharpoonup u$ fracamente em E, $u_k \to u$ fortemente em $L^q(M)$ para qualquer $q \geq n$, e $u_k \to u$ q.t.p. em M. Como $u_k \to u$ fortemente em $L^s(B_O(R_0))$ para todo $s > 1$ e $\phi \in L^p(B_O(R_0))$, temos, usando a desigualdade de Hölder,

$$\lim_{k \to \infty} \int_{B_O(R_0)} \phi |u_k|^q dv_g = \int_{B_O(R_0)} \phi |u|^q dv_g \leq 1. \tag{5-10}$$

Em vista de (ν_2), temos

$$\begin{aligned}
\int_{M \backslash B_O(R_0)} \phi ||u_k|^q - |u|^q| dv_g &\leq C_0 \int_M ||u_k|^q - |u|^q| dv_g \\
&\leq qC_0 \int_M (|u_k|^{q-1} + |u_0|^{q-1}) |u_k - u_0| dv_g \\
&= qC_0 \left\{ \int_M |u_k|^{q-1} |u_k - u_0| dv_g + \int_M |u_0|^{q-1} |u_k - u_0| dv_g \right\} \\
&\leq qC_0 \left\{ \left(\int_M |u_k|^q dv_g \right)^{1-1/q} + \left(\int_M |u|^q dv_g \right)^{1-1/q} \right\} \\
&\quad \times \left(\int_M |u_k - u|^q dv_g \right)^{1/q} \\
&\to 0 \text{ conforme } k \to \infty.
\end{aligned}$$

Isso, juntamente com (5-10), implica

$$\int_M \phi |u|^q dv_g = \lim_{k \to \infty} \int_M \phi |u_k|^q dv_g = 1. \tag{5-11}$$

Como $u_k \rightharpoonup u$ fracamente em E, temos

$$\begin{aligned}\int_M |\nabla u|^n dv_g &= \lim_{k\to\infty}\int_M |\nabla u|^{n-2}\nabla u \nabla u_k dv_g\\ &\le \limsup_{k\to\infty}\left(\int_M |\nabla u_k|^n dv_g\right)^{1/n}\left(\int_M |\nabla u|^n dv_g\right)^{1-1/n},\end{aligned}$$

do qual obtemos

$$\begin{aligned}&\left(\frac{\int_M |\nabla u|^n dv_g}{\left(\int_M |\nabla u|^n dv_g\right)^{1-1/n}}\right)^n \le \limsup_{k\to\infty}\int_M |\nabla u_k|^n dv_g\\ &\Rightarrow \int_M |\nabla u|^n dv_g \le \limsup_{k\to\infty}\int_M |\nabla u_k|^n dv_g.\end{aligned} \tag{5-12}$$

Além disso, temos pelo Lema de Fatou

$$\int_M \nu |u|^n dv_g \le \limsup_{k\to\infty}\int_M \nu |u_k|^n dv_g. \tag{5-13}$$

Combinando (5-11), (5-12) e (5-13), concluímos que S_q é atingido por $u \in E\backslash\{0\}$. Como $|u| \in E$, pode-se ver facilmente que S_q também é atingido por $|u|$. $\square$

Agora voltamos ao Problema 5.1. Como estamos interessados em soluções fracas não negativas, sem perda de generalidade, podemos assumir que $f(x,t) \equiv 0$ para todo $(x,t) \in M \times (-\infty, 0]$. Pelo (f_1), temos para todo $(x,t) \in M \times \mathbb{R}$,

$$|F(x,t)| \le \frac{b_1}{n}|t|^n + b_2 t\zeta_n(|t|^{n/(n-1)}). \tag{5-14}$$

Isso, juntamente com (ϕ_1), (ϕ_2) e a Proposição 6.1, implica que para qualquer $u \in E$ vale

$$\begin{aligned}\int_M \phi F(x,u) dv_g &\le \|\phi\|_{L^p(B_O(R_0))}\|F(x,u)\|_{L^q(M)} + C_0\int_M F(x,u)dv_g\\ &\le \|\phi\|_{L^p(B_O(R_0))}\left(\frac{b_1}{n}\|u\|^n_{L^{qn}(M)} + b_2\|u\zeta_n(|u|^{\frac{n}{n-1}})\|_{L^q(M)}\right)\\ &\quad + C_0\frac{b_1}{n}\|u\|^n_{L^n(M)} + C_0 b_2\|u\zeta_n(|u|^{\frac{n}{n-1}})\|_{L^1(M)}\\ &\le C\left(\|u\|^n_{L^{qn}(M)} + \|u\|_{L^{qn}(M)}\|\zeta_n\left(\frac{qn}{n-1}|u|^{\frac{n}{n-1}}\right)\|^{1-1/n}_{L^1(M)}\right.\\ &\quad\left. + \|u\|^n_{L^n(M)} + \|u\|_{L^n(M)}\|\zeta_n\left(\frac{n}{n-1}|u|^{\frac{n}{n-1}}\right)\|_{L^1(M)}\right),\end{aligned}$$

onde C é uma constante que depende apenas de n, b_1, b_2, C_0 e $\|\phi\|_{L^p(B_O(R_0))}$, e $1/p + 1/q = 1$. Pelo Teorema 2.3, $u \in L^s(M)$ para todo $s \ge n$, e para qualquer $\alpha > 0$ vale $\zeta_n(\alpha|u|^{\frac{n}{n-1}}) \in$

$L^1(M)$. Portanto,

$$\int_M \phi F(x,u)dv_g < +\infty, \ \forall u \in E.$$

Com base nisso, podemos definir uma funcional em E por

$$J(u) = \frac{1}{n}\|u\|_E^n - \int_M \phi F(x,u)dv_g. \tag{5-15}$$

Por [47, Proposição 1], e o argumento padrão [54], temos que $J \in \mathcal{C}^1(E,\mathbb{R})$. Claramente, o ponto crítico de J é uma solução fraca para o Problema 5.1. Em relação a geometria de J, os dois lemas a seguir implicam que J possui uma geometria do passo da montanha.

Proposição 5.4 *Suponha que* (f_1), (f_2) *e* (f_3) *são satisfeitas. Então, para qualquer função não negativa de suporte compacto* $u \in E\backslash\{0\}$, *vale* $J(tu) \to -\infty$ *conforme* $t \to +\infty$.

Prova. Por (f_2) e (f_3), existem c_1, $c_2 > 0$ e $\mu > n$ tal que $F(x,s) \geq c_1 s^\mu - c_2$ para todo $(x,s) \in M \times [0,+\infty)$. Assumindo $supp(u) \subset B_O(R_1)$ para algum $R_1 > 0$, temos

$$\begin{aligned} J(tu) &= \frac{t^n}{n}\|u\|_E^n - \int_{B_O(R_1)} \phi F(x,tu)dv_g \\ &\leq \frac{t^n}{n}\|u\|_E^n - c_1 t^\mu \int_{B_O(R_1)} \phi u^\mu dv_g - c_2 \int_{B_O(R_1)} \phi dv_g. \end{aligned}$$

Como $\phi > 0$ e $\mu > n$, temos que $J(tu) \to -\infty$ conforme $t \to +\infty$. □

Proposição 5.5 *Suponha que* (f_1) *e* (f_4) *são satisfeitas. Então, existem constantes suficientemente pequenas* $r > 0$ *e* $\delta > 0$ *tais que* $J(u) \geq \delta$ *para todo* u *com* $\|u\|_E = r$.

Prova. Por (f_1), temos que para todo $(x,s) \in M \times \mathbb{R}^+$

$$\begin{aligned} |f(x,s)| &\leq b_1 s^{n-1} + b_2 \zeta_n(\alpha_0 s^{\frac{n}{n-1}}), \ \alpha_0, b_1, b_2 > 0 \\ \Rightarrow F(x,s) &\leq b_1 \int_0^s |s|^{n-1} ds + b_2 \int_0^s \zeta_n(\alpha_0 s^{\frac{n}{n-1}}) ds \\ &= \frac{b_1}{n}|s|^n + b_2|s|\zeta_n(\alpha_0 |s|^{\frac{n}{n-1}}). \end{aligned}$$

Por (f_4), temos que, para δ suficientemente pequeno e $s \in (0,\delta)$,

$$F(x,s) < \frac{\lambda_\phi |s|^n}{n} \text{ e } f(x,s) < \lambda_\phi |s|^{n-1}.$$

Existem constantes $\theta \in (0,1)$ e $C > 0$ tais que

$$F(x,s) \leq \frac{(1-\theta)\lambda_\phi}{n}|s|^n + C|s|^{n+1}\zeta_n(\alpha_0 |s|^{\frac{n}{n-1}}), \tag{5-16}$$

para todo $(x,s) \in M \times \mathbb{R}$. Pela definição de λ_ϕ,

$$\frac{(1-\theta)\lambda_\phi}{n}\int_M \phi|u|^n dv_g \leq \frac{1-\theta}{n}\|u\|_E^n. \tag{5-17}$$

Observe que ϕ satisfaz (ϕ_1) e (ϕ_2). Temos, pela desigualdade de Hölder e pela Proposição 6.1, que

$$\begin{aligned}
\int_M \phi|u|^{n+1}\zeta_n(\alpha_0|u|^{\frac{n}{n-1}})dv_g &= \int_{B_O(R_0)} \phi|u|^{n+1}\zeta_n(\alpha_0|u|^{\frac{n}{n-1}})dv_g \\
&+ \int_{M\setminus B_O(R_0)} \phi|u|^{n+1}\zeta_n(\alpha_0|u|^{\frac{n}{n-1}})dv_g \\
&\leq \left(\int_{B_O(R_0)} |\phi|^p dv_g\right)^{1/p}\left(\int_M |u|^{(n+1)q}dv_g\right)^{1/q} \\
&\times \left(\int_M \zeta_n(q'\alpha_0|u|^{\frac{n}{n-1}})dv_g\right)^{1/q'} \\
&+ C_0\left(\int_M |u|^{(n+1)\beta}dv_g\right)^{1/\beta}\left(\int_M \zeta_n(\gamma\alpha_0|u|^{\frac{n}{n-1}})dv_g\right)^{1/\gamma},
\end{aligned} \tag{5-18}$$

onde $1/p+1/q+1/q'=1$ e $1/\gamma+1/\beta=1$. Fixe $\alpha=\beta_0/2$, onde $\beta_0=\beta_0(m,n)$ é definido por (0-3). Segue de (i) do Teorema 2.3 que existe uma constante τ dependendo apenas de α, n, λ e i_0 tal que

$$\Lambda_\alpha := \sup_{\|u\|_{1,\tau}\leq 1}\int_M \zeta_n(\alpha|u|^{\frac{n}{n-1}})dv_g < +\infty. \tag{5-19}$$

Considere r uma constante positiva a ser determinada posteriormente. Suponha agora que $\|u\|_E = r$. É fácil ver que $\|u\|_{1,\tau} \leq r + \frac{\tau r}{\nu_0^{1/n}}$.

$$\|u\|_E^n = \left(\int_M |\nabla u|^n + \nu|u|^n dv_g\right)^{\frac{1}{n}} = r,$$

logo

$$\|u\|_E^n = r^n \Rightarrow \int_M |\nabla_g u|^n dv_g = r^n - \int_M \nu|u|^n dv_g \leq r^n.$$

Assim,

$$\begin{aligned}
&\int_M \nu_0|u|^n dv_g \leq \int_M \nu|u|^n dv_g = r^n - \int_M |\nabla_g u|^n dv_g \leq r^n \\
&\Rightarrow \int_M |u|^n dv_g \leq \frac{r^n}{\nu_0},
\end{aligned}$$

e então,

$$\|u\|_{1,\tau} = \left(\int_M |\nabla u|^n dv_g\right)^{\frac{1}{n}} + \tau\left(\int_M |u|^n dv_g\right)^{\frac{1}{n}}$$
$$\leq (r^n)^{1/n} + \tau\left(\frac{r^n}{\nu_0}\right)^{1/n} = r + \tau\frac{r}{\nu_0^{1/n}}.$$

Claramente, pode-se escolher r suficientemente pequeno de modo que

$$r + \tau\frac{r}{\nu_0^{1/n}} < \left(\frac{\alpha}{q'\alpha_0}\right)^{\frac{n}{n-1}} \Rightarrow r\left(1 + \frac{\tau}{\nu_0^{1/n}}\right) < \left(\frac{\alpha}{q'\alpha_0}\right)^{\frac{n}{n-1}}$$
$$\Rightarrow r < \left(\frac{\alpha}{q'\alpha_0}\right)^{\frac{n}{n-1}}\left(\frac{\nu_0^{1/n}}{\nu_0^{1/n} + \tau}\right) > 0.$$

Portanto, $q'\alpha_0\|u\|_{1,\tau}^{n/(n-1)} < \alpha$ e de maneira semelhante, $\gamma\alpha_0\|u\|_{1,\tau}^{n/(n-1)} < \alpha$. Segue de (5-19) que

$$\sup_{\|u\|_E = r}\int_M \zeta_n(q'\alpha_0|u|^{\frac{n}{n-1}})dv_g \leq \Lambda_\alpha,$$

e

$$\sup_{\|u\|_E = r}\int_M \zeta_n(\gamma\alpha_0|u|^{\frac{n}{n-1}})dv_g \leq \Lambda_\alpha,$$

desde que r seja escolhido suficientemente pequeno. Inserindo essas duas desigualdades em (5-18), e usando a imersão $E \hookrightarrow L^s(M)$ para todo $s \geq n$ pela Proposição 5.2 e (5-17), obtemos

$$\int_M \phi|u|^{n+1}\zeta_n(\alpha_0|u|^{\frac{n}{n-1}})dv_g \leq \|\phi\|\left(\int_M |u|^{(n+1)q}dv_g\right)^{1/q}\Lambda_\alpha^{1/q'}$$
$$+ C_0\left(\int_M |u|^{(n+1)\beta}dv_g\right)^{1/\beta}\Lambda_\alpha^{1/\gamma}.$$

E assim,

$$\begin{aligned}
\int_M \phi F(x,u)dv_g &\leq \int_M \frac{\phi(1-\theta)\lambda_\phi}{n}|u|^n dv_g + \int_M \phi C|u|^{n+1}\zeta_n(\alpha_0|u|^{\frac{n}{n-1}})dv_g \\
&\leq \frac{1-\theta}{n}\|u\|_E^n + \|\phi\|_{L^p(B_O(R_0))}\left(\int_M |u|^{(n+1)q}dv_g\right)^{1/q}\Lambda_\alpha^{1/q'} \\
&+ C_0\left(\int_M |u|^{(n+1)\beta}dv_g\right)^{1/\beta}\Lambda_\alpha^{1/\gamma} \\
&\leq \frac{1-\theta}{n}\|u\|_E^n + \|\phi\|_{L^p(B_O(R_0))}\Lambda_\alpha^{1/q'}C_1\|u\|_E^{n+1} + C_0\Lambda_\alpha^{1/\gamma}C_2\|u\|_E^{n+1} \\
&\leq \frac{1-\theta}{n}\|u\|_E^n + \widetilde{C}\|u\|_E^{n+1}.
\end{aligned}$$

Onde $\tilde{C}$ depende de $\|\phi\|_{L^p(B_O(R_0))}$, C_0, C_1, C_2, Λ_α, q' e γ. Portanto, concluímos

$$\begin{aligned}
J(u) &= \frac{1}{n}\|u\|_E^n - \int_M \phi F(x,u)dv_g \\
&\geq \frac{1}{n}\|u\|_E^n - \frac{(1-\theta)}{n}\|u\|_E^n - \tilde{C}\|u\|_E^{n+1} \\
&= \frac{\theta}{n}\|u\|_E^n - \tilde{C}\|u\|_E^{n+1} \\
&= \frac{\theta}{n}r^n - \tilde{C}r^{n+1} = \delta.
\end{aligned}$$

Observe que para $\delta > 0$ precisamos de $\theta/(n\tilde{C}) > r$ para alguma constante $\tilde{C}$ dependendo apenas de α, n, λ e i_0, desde que $\|u\|_E$ seja suficientemente pequeno. Isso nos dá o resultado desejado. □

Proposição 5.6 *Suponha* (f_5)*. Existe alguma função não negativa* $u^* \in E$ *tal que*

$$\sup_{t\geq 0} J(tu^*) < \frac{1}{n}\left(\frac{(p-1)\alpha_n}{p\alpha_0}\right)^{n-1}.$$

Prova. Suponha que $q > n$ seja dado por (f_5). Seja u^* dado pela Proposição 5.3, ou seja, $u^* \geq 0$, $\|u^*\|_E = S_q$, e $\int_M \phi|u^*|^q dv_g = 1$. Então, para qualquer $t \geq 0$, temos

$$\begin{aligned}
J(tu^*) &= \frac{1}{n}\|tu^*\|_E^n - \int_M \phi(x)F(x,tu^*)dv_g \\
&\leq \frac{S_q^n t^n}{n} - \frac{C_q t^q}{q}.
\end{aligned}$$

Observe que o máximo da função $g(t) = \frac{S_q^n t^n}{n} - \frac{C_q t^q}{q}$ para $t \geq 0$ é atingido por $t =$

$\left(\frac{S_q^n}{C_q}\right)^{1/(q-n)}$. Com isso, temos

$$\begin{aligned}
J(tu^*) &\leq \frac{S_q^n}{n}\left(\frac{S_q^n}{C_q}\right)^{\frac{n}{q-n}} - \frac{C_q}{q}\left(\frac{S_q^n}{C_q}\right)^{\frac{q}{q-n}} \\
&= \frac{qC_qS_q^{n+\frac{n^2}{q-n}} - nC_qS_q^{\frac{nq}{q-n}}}{nqC_q^{\frac{q}{q-n}}} \\
&= \frac{qS_q^{\frac{n(q-n)+n^2}{q-n}} - nS_q^{\frac{nq}{q-n}}}{nqC_q^{\frac{q}{q-n}-1}} \\
&= \frac{(q-n)S_q^{\frac{nq}{q-n}}}{nqC_q^{\frac{n}{q-n}}} \\
&< \frac{q-n}{nq}\frac{S_q^{\frac{nq}{q-n}}}{\left(\left(\frac{q-n}{q}\right)^{(q-n)/n}\left(\frac{p\alpha_0}{(p-1)\alpha_n}\right)^{(q-n)(n-1)/n}S_q^q\right)^{\frac{n}{q-n}}} \\
&= \frac{1}{n}\left(\frac{(p-1)\alpha_n}{p\alpha_0}\right)^{n-1},
\end{aligned}$$

e a última desigualdade segue da hipótese (f_5). □

Adaptando a prova de [63, Lema 3.4], obtemos o seguinte resultado de compacidade.

Proposição 5.7 *Suponha* (f_1)-(f_3). *Seja* $(u_j) \subset E$ *uma sequência arbitrária de Palais–Smale para* J*, ou seja,*

$$J(u_j) \to c,\ J'(u_j) \to 0 \text{ em } E^* \text{ conforme } j \to \infty, \tag{5-20}$$

onde E^* *denota o espaço dual de* E*. Então, existe uma subsequência de* (u_j) *(ainda denotada por* (u_j)*) e* $u \in E$ *tal que* $u_j \rightharpoonup u$ *fracamente em* E*,* $u_j \to u$ *fortemente em* $L^q(M)$ *para todo* $q \geq n$*, e*

$$\begin{aligned}
&\nabla u_j(x) \to \nabla u(x) \text{ q.t.p. em } M \\
&\phi(x)F(x,u_j) \to \phi(x)F(x,u) \text{ fortemente em } L^1(M).
\end{aligned}$$

Além disso, u *é uma solução fraca de 5.1.*

Prova. Suponha que (u_j) é uma sequência de Palais-Smale para J. Pela equação (5-20), temos

$$J(u_j) = \frac{1}{n}\|u_j\|_E^n - \int_M \phi(x)F(x,u_j)dv_g \to c, \text{ conforme } j \to \infty \tag{5-21}$$

e,

$$|J'(u_j)\psi| = \left|\int_M (|\nabla_g u_j|^{n-2}\nabla_g u_j \nabla_g \psi + \nu |u_j|^{n-2}u_j\psi)dv_g - \int_M \phi(x)f(x,u_j)\psi dv_g\right| \le \sigma_j\|\psi\|_E, \tag{5-22}$$

para todo $\psi \in E$, onde $\sigma_j \to 0$ conforme $j \to \infty$. Note que $f(x,s) \equiv 0$ para todo $(x,s) \in M \times (-\infty, 0]$. Pelo item (f_2), temos $0 \le \mu F(x,u_j) \le u_j f(x,u_j)$ para algum $\mu > n$. Escolhendo $\psi = u_j$ em (5-22) e multiplicando (5-21) por μ, temos

$$|\mu J(u_j)| = |\frac{\mu}{n}\|u_j\|_E^n - \int_M \phi(x)\mu F(x,u_j)dv_g| \to \mu|c| \text{ conforme } j \to \infty$$
$$|J'(u_j)u_j| = \left|\|u_j\|_E^n - \int_M \phi(x)f(x,u_j)u_j dv_g\right| \le \sigma_j\|u_j\|_E.$$

Logo,

$$\frac{\mu}{n}\|u_j\|_E^n - \int_M \phi(x)\mu F(x,u_j)dv_g \le \mu|c|$$
$$\|u_j\|_E^n - \int_M \phi(x)f(x,u_j)u_j dv_g \le \sigma_j\|u_j\|_E - \|u_j\|_E^n.$$

Portanto,

$$\begin{aligned}\left(\frac{\mu}{n} - 1\right)\|u_j\|_E^n &\le \mu|c| + \int_M \phi(x)\mu F(x,u_j)dv_g - \sigma_j\|u_j\|_E - \int_M \phi(x)f(x,u_j)u_j dv_g \\ &\le \mu|c| + \sigma_j\|u_j\|_E + \int_M \phi(x)(\mu F(x,u_j) - f(x,u_j)u_j)dv_g \\ &\le \mu|c| + \sigma_j\|u_j\|_E.\end{aligned}$$

Então, como limitamos uma potência de n por uma linear, temos que $\|u_j\|_E$ é limitado. Segue de (5-21) e (5-22) que

$$-\int_M \phi(x)F(x,u_j)dv_g \le |c| - \frac{1}{n}\|u_j\|_E^n$$
$$-\int_M \phi(x)f(x,u_j)u_j dv_g \le \sigma_j\|u_j\|_E - \|u_j\|_E^n,$$

para j suficientemente grande, digamos $j > k_0$,

$$\left|\frac{1}{n}\|u_j\|_E^n - \int_M \phi(x)F(x,u_j)dv_g - c\right| < \epsilon,$$

e então

$$\int_M \phi(x)F(x,u_j)dv_g < \frac{1}{n}\|u_j\|_E^n - c + \epsilon,$$

da mesma forma, dado $\beta > 0$ escolhendo j suficientemente grande, digamos $j > \tilde{k}_0$, $\sigma_j < \beta$

então

$$-\sigma_j\|u_j\|_E \leq \|u_j\|_E^n - \int_M \phi(x)f(x,u_j)u_j dv_g \leq \sigma_j\|u_j\|_E.$$

Então,

$$\int_M \phi(x)f(x,u_j)u_j dv_g \leq \|u_j\|_E^n + \sigma_j\|u_j\|_E < \|u_j\|_E^n + \beta\|u_j\|_E.$$

Tomando $C = \max\{\frac{1}{n}\|u_j\|_E^n - c + \epsilon, \|u_j\|_E^n + \beta\|u_j\|_E\}$ temos

$$\begin{aligned} &\int_M \phi(x)F(x,u_j)dv_g < C \\ &\int_M \phi(x)f(x,u_j)u_j dv_g < C. \end{aligned} \tag{5-23}$$

Pela Proposição 5.2, existe algum $u \in E$ tal que $u_j \rightharpoonup u$ fracamente em E, $u_j \to u$ fortemente em $L^q(M)$ para qualquer $q \geq n$, e $u_j \to u$ q.t.p. em M. Pelo (f_3), existem constantes positivas A_1 e R_1 tais que $F(x,s) \leq A_1 f(x,s)$ para todo $s \geq R_1$. Em particular, para qualquer $A > R_1$, temos

$$F(x,s) \leq A_1 f(x,s), \quad \forall s \geq A. \tag{5-24}$$

Agora provamos que $\phi(x)F(x,u_j) \to \phi F(x,u)$ fortemente em $L^1(M)$. Para isso, para qualquer $\epsilon > 0$, escolhemos $A = \max\{A_1 C/\epsilon, R_1\}$, onde C é dado por (5-23). Então, temos pela (5-24)

$$\int_{|u_j|>A} \phi(x)F(x,u_j)dv_g \leq \int_M A_1\phi(x)f(x,u_j)dv_g.$$

Como $|u_j| > A \Rightarrow \frac{|u_j|}{A} > 1$, temos

$$\int_{|u_j|>A} \phi(x)F(x,u_j)dv_g \leq \frac{A_1}{A}\int_M \phi(x)f(x,u_j)u_j dv_g \leq \frac{A_1 C}{A} < \epsilon. \tag{5-25}$$

Da mesma forma,

$$\int_{|u|>A} \phi(x)F(x,u)dv_g < \epsilon. \tag{5-26}$$

Pelo (f_1), temos para $(x,s) \in M \times [0,\infty)$

$$\begin{aligned}
f(x,s) &\leq b_1 s^{n-1} + b_2 \zeta_n(\alpha_0 s^{\frac{n}{n-1}}) \\
&= b_1 s^{n-1} + b_2 \sum_{k=n-1}^{\infty} \frac{\alpha_0^k s^{\frac{nk}{n-1}}}{k!} \\
&= b_1 s^{n-1} + b_2 \sum_{k=n-1}^{\infty} \frac{\alpha_0^k s^n s^{\frac{nk}{n-1}-n}}{k!} \\
&= b_1 s^{n-1} + b_2 s^n \sum_{k=n-1}^{\infty} \frac{\alpha_0^k s^{\frac{n(k+n-1)}{n-1}-n}}{k!} \\
&= b_1 s^{n-1} + b_2 s^n \left(\frac{\alpha_0^{n-1}}{(n-1)!} + \frac{\alpha_0^n s^{\frac{n}{n-1}}}{n!} + \frac{\alpha_0^{n+1} s^{\frac{2n}{n-1}}}{(n+1)!} + \dots \right) \\
&= b_1 s^{n-1} + b_2 s^n \alpha_0^{n-1} \left(\frac{1}{(n-1)!} + \frac{\alpha_0 s^{\frac{n}{n-1}}}{n!} + \frac{\alpha_0^2 s^{\frac{2n}{n-1}}}{(n+1)!} + \dots \right) \\
&\leq b_1 s^{n-1} + b_2 s^n \alpha_0^{n-1} e^{\alpha_0 s^{\frac{n}{n-1}}}.
\end{aligned}$$

Assim, para todos $(x,s) \in M \times [0,A]$, temos

$$f(x,s) \leq (b_1 + b_2 A \alpha_0^{n-1} e^{\alpha_0 A^{\frac{n}{n-1}}}) s^{n-1}.$$

Segue que

$$\begin{aligned}
F(x,s) = \int_0^s f(x,s)ds &\leq (b_1 + b_2 A \alpha_0^{n-1} e^{\alpha_0 A^{\frac{n}{n-1}}}) \int_0^s s^{n-1} ds \\
&= (b_1 + b_2 A \alpha_0^{n-1} e^{\alpha_0 A^{\frac{n}{n-1}}}) \frac{s^n}{n}, \quad \forall s \in [0,A],
\end{aligned}$$

para todos $(x,s) \in M \times [0,A]$, o que implica

$$|\phi(x)\chi_{\{|u_j| \leq A\}}(x) F(x,u_j)| \leq C_1 \phi(x) |u_j|^n, \tag{5-27}$$

onde aqui tomamos

$$C_1 = \frac{b_1 + b_2 A \alpha_0^{n-1} e^{\alpha_0 A^{\frac{n}{n-1}}}}{n},$$

e $\chi_{\{|u_j| \leq A\}}(x)$ denota a função característica do conjunto $x \in M : |u_j(x)| \leq A$. Pela desigualdade $||a|^n - |b|^n| \leq n|a-b|(|a|^{n-1} + |b|^{n-1})$ $(\forall a,b \in \mathbb{R})$ e a desigualdade de Hölder, obtemos

$$
\begin{aligned}
\int_M \phi ||u_j|^n| - |u|^n| dv_g &\leq n \int_M \phi |u_j - u| (|u_j|^{n-1} + |u|^{n-1}) dv_g \\
&\leq n \left(\int_M \phi |u_j - u|^n dv_g \right)^{1/n} \\
&\qquad \times \left\{ \left(\int_M \phi |u_j|^n dv_g \right)^{1-1/n} + \left(\int_M \phi |u|^n dv_g \right)^{1-1/n} \right\}.
\end{aligned}
$$

Portanto, $\phi|u_j|^n \to \phi|u|^n$ em $L^1(M)$, já que $u_j \to u$ fortemente em $L^n(M)$. Por (5-27), concluímos pelo Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue

$$\lim_{j\to\infty} \int_M \phi(x)\chi_{\{|u_j|\leq A\}}(x)F(x,u_j)dv_g = \int_M \phi(x)\chi_{\{|u|\leq A\}}(x)F(x,u)dv_g.$$

Isso, juntamente com (5-25) e (5-26), implica que existe algum $m \in \mathbb{N}$ tal que quando $j > m$, vale a seguinte desigualdade:

$$\left| \int_M \phi(x)\chi_{\{|u|\leq A\}}(x)F(x,u)dv_g - \int_M \phi(x)\chi_{\{|u_j|\leq A\}}(x)F(x,u_j)dv_g \right| < \epsilon.$$

E também temos que

$$\left| \int_M \phi(x)\chi_{\{|u|> A\}}(x)F(x,u)dv_g - \int_M \phi(x)\chi_{\{|u_j|> A\}}(x)F(x,u_j)dv_g \right| < 2\epsilon.$$

Dessa forma, obtemos que

$$\left| \int_M \phi(x)F(x,u)dv_g - \int_M \phi(x)F(x,u_j)dv_g \right| < 3\epsilon.$$

Portanto,

$$\lim_{j\to\infty} \int_M \phi(x)F(x,u_j)dv_g = \int_M \phi(x)F(x,u)dv_g.$$

Usando o mesmo método usado para provar [66, (4.26)], temos que $\nabla_g u_j(x) \to \nabla_g u(x)$ para quase todo $x \in M$ e

$$|\nabla_g u_j|^{n-2}\nabla_g u_j \rightharpoonup |\nabla_g u|^{n-2}\nabla_g u \text{ fracamente em } (L^{\frac{n}{n-1}}(M))^n.$$

Passando para o limite $j \to \infty$ em (5-22), obtemos

$$\int_M (|\nabla_g u|^{n-2}\nabla_g u \nabla_g \psi + \nu |u|^{n-2}u\psi)dv_g - \int_M \phi(x)f(x,u)\psi dv_g = 0,$$

para todo $\psi \in C_0^\infty(M)$. Uma vez que $C_0^\infty(M)$ é denso em E sob a norma $\|\cdot\|_E$, concluímos que u é uma solução fraca do Problema 5.1. $\square$

Damos mais detalhes sobre o Lema 5.7. Suponha que (M,g) seja o espaço Euclidiano padrão $\mathbb{R}^n$ e $\phi(x) = |x|^{-\beta}$, $0 \leq \beta < n$. Yang demonstrou em [63] que $\phi F(x,u_j) \to \phi F(x,u)$ em $L^1(\mathbb{R}^n)$ sob a hipótese de que $E \hookrightarrow L^q(\mathbb{R}^n)$ compactamente para todo $q \geq 1$. Enquanto Lam e Lu [29] observaram que a convergência ainda ocorre sob a suposição $E \hookrightarrow L^q(\mathbb{R}^n)$ para todo $q \geq n$. Aqui generalizamos essas duas situações.

O próximo lema é uma consequência não trivial do Teorema 2.3. Ele é suficiente para nosso uso ao considerar os resultados de existência e multiplicidade para os problemas 5.1 e 5.11.

Proposição 5.8 *Seja $(u_j) \subset E$ uma sequência de funções que satisfaz $\|u_j\|_E \leq 1$, $u_j \rightharpoonup u_0$ fracamente em E, $\nabla_g u_j \to \nabla_g u_0$ q.t.p em M, e $u_j \to u_0$ fortemente em $L^n(M)$ conforme $j \to \infty$. Nesse caso,*

(i) *para qualquer $\alpha : 0 < \alpha < \alpha_n$, temos*

$$\sup_j \int_M \zeta_n(\alpha |u_j|^{\frac{n}{n-1}}) dv_g < \infty; \tag{5-28}$$

(ii) *para qualquer $\alpha : 0 < \alpha < \alpha_n$ e $q : 0 < q < (1 - \|u_0\|_E^n)^{-1/(n-1)}$, temos*

$$\sup_j \int_M \zeta_n(q\alpha |u_j|^{\frac{n}{n-1}}) dv_g < \infty. \tag{5-29}$$

Prova. (i) Para qualquer α fixo, com $0 < \alpha < \alpha_n$, segue da parte (i) do Teorema 2.3 que existe uma constante positiva τ_α que depende apenas de α, n, λ e i_0, tal que

$$\mathcal{B}_\alpha = \sup_{u \in W^{1,n}(M), \|u\|_{1,\tau_\alpha} \leq 1} \int_M \zeta_n(\alpha |u|^{\frac{n}{n-1}}) dv_g < \infty. \tag{5-30}$$

Note que $\nu \geq \nu_0$ em M. Como $\|u_j\|_E \leq 1$, obtemos

$$\|u_j\|_{1,\tau_\alpha} = \left(\int_M |\nabla_g u_j|^n dv_g \right)^{1/n} + \tau_\alpha \left(\int_M |u_j|^n dv_g \right)^{1/n} \leq 1 + \frac{\tau_\alpha}{\nu_0^{1/n}}.$$

Existe algum número positivo pequeno α_0 tal que $\alpha_0 \|u_j\|_{1,\tau_\alpha}^{\frac{n}{n-1}} \leq \alpha$. Portanto, usando a equação (5-30) e o fato de que $\zeta_n(t)$ é uma função crescente para $t \geq 0$, temos

$$\sup_j \int_M \zeta_n(\alpha_0 |u_j|^{\frac{n}{n-1}}) dv_g \leq \sup_j \int_M \zeta_n \left(\alpha \left| \frac{u_j}{\|u_j\|_{1,\tau_\alpha}} \right|^{\frac{n}{n-1}} \right) dv_g \leq \mathcal{B}_\alpha.$$

Isso nos permite definir

$$\alpha^* = \sup \left\{ \alpha : \int_M \zeta_n(\alpha |u_j|^{\frac{n}{n-1}}) dv_g < \infty \right\}.$$

Para provar (5-28), é suficiente demonstrar que $\alpha^* \geq \alpha_n$. Dessa forma, teríamos que, para todo $\alpha : 0 \leq \alpha \leq \alpha_n \leq \alpha^*$, o supremo mencionado acima é finito. Suponha o contrário, ou seja, $\alpha^* < \alpha_n$. Escolha duas constantes α' e α'' tais que $\alpha^* < \alpha' < \alpha'' < \alpha_n$. Novamente, pela parte (i) do Teorema 2.3, existe uma constante $\tau_{\alpha''}$ que depende apenas de α'', n, K e i_0, tal que

$$\mathcal{B}_{\alpha''} = \sup_{u\in W^{1,n}(M), \|u\|_{1,\tau_{\alpha''}}\leq 1} \int_M \zeta_n(\alpha''|u|^{\frac{n}{n-1}})dv_g < \infty. \tag{5-31}$$

Como $u_j \to u_0$ fortemente em $L^n(M)$ e $\nabla_g u_j \to \nabla_g u_0$ q.t.p. em M, obtemos utilizando o lema de Brezis-Lieb [9]

$$\|u_j - u_0\|_{1,\tau_{\alpha''}} = \left(\int_M |\nabla_g u_j|^n dv_g - \int_M |\nabla_g u|^n dv_g\right)^{1/n} + o_j(1),$$

onde $o_j(1) \to 0$ conforme $j \to \infty$. Como $u_j \rightharpoonup u_0$ fracamente em E, temos

$$\lim_{j\to\infty} \int_M |\nabla_g u_0|^{n-1} \nabla_g u_0 \nabla_g u_j dv_g = \int_M |\nabla_g u_0|^n dv_g.$$

Isso implica imediatamente que

$$\int_M |\nabla_g u_0|^n dv_g \leq \limsup_{j\to+\infty} \int_M |\nabla_g u_j|^n dv_g \leq 1.$$

Então

$$\|u_j - u_0\|_{1,\tau_{\alpha''}} \leq 1 + o_j(1).$$

Segue da Proposição 6.2 que, para qualquer $\epsilon > 0$, existe uma constante $\tilde{c}$ que depende apenas de ϵ e n, tal que

$$\zeta_n(\alpha'|u_j|^{\frac{n}{n-1}}) \leq \frac{1}{\mu}\zeta_n(\alpha'(1+\epsilon)\mu|u_j - u_0|^{\frac{n}{n-1}}) + \frac{1}{\nu}\zeta_n(\alpha'\tilde{c}\nu|u_0|^{\frac{n}{n-1}}), \tag{5-32}$$

onde $1/\mu + 1/\nu = 1$. Escolhendo μ suficientemente pequeno e μ suficientemente próximo de 1 de modo que

$$\alpha'(1+\epsilon)\mu\|u_j - u_0\|_{1,\tau_{\alpha''}}^{\frac{n}{n-1}} < \alpha''.$$

desde que j seja suficientemente grande. Isso, juntamente com (5-31), implica que

$$\sup_j \int_M \zeta_n(\alpha'(1+\epsilon)\mu|u_j - u_0|^{\frac{n}{n-1}})dv_g \leq \mathcal{B}_{\alpha''}. \tag{5-33}$$

Além disso, temos pela parte (iii) do Teorema 2.3 que

$$\int_M \zeta_n(\alpha'\tilde{c}\nu|u_0|^{\frac{n}{n-1}})dv_g < +\infty. \tag{5-34}$$

Inserindo as expressões (5-33) e (5-34) na equação (5-32), obtemos

$$\sup_j \int_M \zeta_n(\alpha' |u_j|^{\frac{n}{n-1}}) dv_g < +\infty, \tag{5-35}$$

o que contradiz a definição de α^* e, portanto, encerra a prova da parte (i). □

Prova. (ii) Dado qualquer $\alpha : 0 < \alpha < \alpha_n$ e qualquer $q : 0 < q < (1 - \|u_0\|_E^n)^{-1/(n-1)}$. Pela equação 6.2, para todo $\epsilon > 0$, existem constantes $\tilde{c} > 0$, $\mu > 1$ e $\nu > 1$ $(1/\mu + 1/\nu = 1)$ tais que

$$\int_M \zeta_n(q\alpha |u_j|^{\frac{n}{n-1}}) dv_g \leq \frac{1}{\mu} \int_M \zeta_n(q\alpha(1+\epsilon)|u_j - u_0|^{\frac{n}{n-1}}) dv_g + \frac{1}{\nu} \int_M \zeta_n(q\alpha\tilde{c}\nu |u_0|^{\frac{n}{n-1}}) dv_g.$$

Pela lema de Brézis-Lieb [9],

$$\|u_j - u_0\|_E^{\frac{n}{n-1}} \leq (1 - \|u_0\|_E^n)^{\frac{n}{n-1}} + o_j(1).$$

Se escolhermos ϵ suficientemente pequeno e μ suficientemente próximo de 1 de modo que

$$q\alpha(1+\epsilon)\mu \|u_j - u_0\|_E^{\frac{n}{n-1}} \leq (\alpha + \alpha_n)/2,$$

desde que j seja suficientemente grande, então, segue da parte (i) que

$$\sup_j \int_M \zeta_n(q\alpha(1+\epsilon)|u_j - u_0|^{\frac{n}{n-1}}) dv_g < \infty.$$

Pela parte (iii) do Teorema 2.3, temos

$$\int_M \zeta_n(q\alpha\tilde{c}\nu |u_0|^{\frac{n}{n-1}}) dv_g < \infty.$$

Portanto, a equação (5-29) é válida. Note que, dado ϵ, existe $k \in \mathbb{N}$ tal que, para $j > k$, temos $o_j(1) < \epsilon/(1 - \|u_0\|_E^n)^{1/(n-1)}$, assim obtemos

$$\|u_j - u_0\|_E^{\frac{n}{n-1}} \cdot (1 - \|u_0\|_E^n)^{\frac{-1}{n-1}} \leq 1 + \epsilon.$$

Portanto, escolhendo $q : 0 < q < (1 - \|u_0\|_E^n)^{\frac{-1}{n-1}}$, segue que

$$q\|u_j - u_0\|_E^{\frac{n}{n-1}} < 1 + \epsilon.$$

Além disso, podemos escolher μ próximo de 1 de modo que

$$\mu \leq \frac{(1+\epsilon)}{q\alpha} \frac{(\alpha + \alpha_n)}{2} \frac{1}{\|u_j - u_0\|_E^{\frac{n}{n-1}}}.$$

No entanto, deve-se satisfazer

$$1 < \frac{(1+\epsilon)}{q\alpha}\frac{(\alpha+\alpha_n)}{2}\frac{1}{\|u_j-u_0\|_E^{\frac{n}{n-1}}},$$

e então

$$\frac{2q\alpha\|u_j-u_0\|_E^{\frac{n}{n-1}}}{\alpha+\alpha_n} < 1+\epsilon.$$

E, portanto, é necessário que $\epsilon > (2q\alpha\|u_j-u_0\|_E^{\frac{n}{n-1}} - \alpha - \alpha_n)/(\alpha+\alpha_n)$, desta forma existe μ tal que

$$1 < \mu \leq \frac{(1+\epsilon)}{q\alpha}\frac{(\alpha+\alpha_n)}{2}\frac{1}{\|u_j-u_0\|_E^{\frac{n}{n-1}}}.$$

□

Observação 5.9 *No Lema 5.8, se $u_0 \equiv 0$, então a conclusão da parte (ii) é mais fraca do que a da parte (i). Se $u_0 \equiv 0$, então a conclusão da parte (i) é um caso especial da parte (ii). Se (M,g) tem dimensão dois, a condição $\nabla_g u_j \to \nabla_g u_0$ q.t.p em M pode ser removida.*

O próximo resultado obtém que o Problema 5.1 possui uma solução não trivial.

Teorema 5.10 *Seja (M,g) uma variedade Riemanniana completa não compacta de dimensão n. Suponha que $\mathrm{Rc}_{(M,g)} \geq \lambda g$ para algum constante $\lambda \in \mathbb{R}$, e $\mathrm{inj}_{(M,g)} \geq i_0$ para algum constante positiva i_0. Assuma que $\nu(x)$ é uma função contínua que satisfaz (ν_1) e (ν_2), $\phi(x)$ é uma função contínua que satisfaz (ϕ_1) e (ϕ_2), $f: M\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ é uma função contínua e as hipóteses (f_1), (f_2), (f_3), (f_4), (f_5) são satisfeitas. Então, o Problema 5.1 possui uma solução fraca não trivial e não negativa.*

Prova. (Teorema 5.10) Segue dos Lemas 5.4 e 5.5 que J satisfaz todas as hipóteses do Teorema do Passo de Montanha, exceto pela condição de Palais-Smale: $J \in \mathcal{C}^1(E,\mathbb{R})$; $J(0) = 0$; $J(u) \geq \delta > 0$ quando $\|u\|_E = r$ para r suficientemente pequeno; $J(e) < 0$ para algum $e \in E$ com $\|e\|_E > r$. Então, usando o Teorema do Passo da Montanha sem a condição de Palais-Smale [54], podemos encontrar uma sequência (u_j) em E tal que

$$J(u_j) \to c > 0, \;\; J'(u_j) \to 0 \text{ em } \; E^*,$$

onde

$$c = \min_{\gamma\in\Gamma}\max_{u\in\gamma} J(u) \geq \delta,$$

é o valor do min-max de J, onde $\Gamma = \{\gamma \in C([0,1],E) : \gamma(0) = 0, \gamma(1) = e\}$. Isso é equivalente a (5-21) e (5-22). Pelo Lema 5.7, a menos de uma subsequência, vale

$$\begin{aligned}
&u_j \rightharpoonup u \text{ fracamente em } E\\
&u_j \to u \text{ fortemente em } L^q(M),\ \forall q \geq n\\
&\lim_{j\to\infty}\int_M \phi(x)F(x,u_j)dv_g = \int_M \phi(x)F(x,u)dv_g\\
&u \text{ é uma solução fraca de } 5.1.
\end{aligned} \tag{5-36}$$

Agora suponha por contradição que $u \equiv 0$. Como $F(x,0) = 0$ para todo $x \in M$, segue de (5-21) e (5-36) que

$$\lim_{j\to\infty} \|u_j\|_E^n = nc > 0. \tag{5-37}$$

Porque,

$$\begin{aligned}
c &= \lim_{j\to\infty}\left(\frac{1}{n}\|u_j\|_E^n - \int_M \phi(x)F(x,u_j)dv_g\right)\\
&= \lim_{j\to\infty}\frac{1}{n}\|u_j\|_E^n - \lim_{j\to\infty}\int_M \phi(x)F(x,u_j)dv_g\\
&= \lim_{j\to\infty}\frac{1}{n}\|u_j\|_E^n - \cancelto{0}{\int_M \phi(x)F(x,u)dv_g}.
\end{aligned}$$

Pelo Lema 5.6, $0 < c < \frac{1}{n}\left(\frac{(p-1)\alpha_n}{p\alpha_0}\right)^{n-1}$. Assim, existem $\eta_0 > 0$ e $m > 0$ tal que $\|u_j\|_E^n \leq \left(\frac{p-1}{p}\frac{\alpha_n}{\alpha_0} - \eta_0\right)^{n-1}$ para todo $j > m$. Escolha $q > 1$ suficientemente próximo de 1 tal que $q\alpha_0\|u_j\|_E^{\frac{n}{n-1}} \leq (1-1/p)\alpha_n - \alpha_0\eta_0/2$ para todo $j > m$. Pela (f_1),

$$|f(x,u_j)u_j| \leq b_1|u_j|^n + b_2|u_j|\zeta_n(\alpha_0|u_j|^{\frac{n}{n-1}}).$$

Segue da Proposição 6.1, da desigualdade de Hölder e da parte (i) do Lema 5.8 que

$$
\begin{aligned}
\int_M \phi|f(x,u_j)u_j|dv_g &\leq b_1\int_M \phi|u_j|^n dv_g + b_2\int_M \phi|u_j|\zeta_n(\alpha_0|u_j|^{\frac{n}{n-1}})dv_g \\
&\leq b_1\int_M \phi|u_j|^n dv_g + b_2\int_M \phi^{\frac{q-1}{q}}|u_j|\phi^{\frac{1}{q}}\zeta_n(\alpha_0|u_j|^{\frac{n}{n-1}})dv_g \\
&\leq b_1\int_M \phi|u_j|^n dv_g + b_2\left(\int_M (\phi^{\frac{q-1}{q}}|u_j|)^{\frac{q}{q-1}}dv_g\right)^{\frac{q-1}{q}} \\
&\qquad\times\left(\int_M (\phi^{\frac{1}{q}}\zeta_n(\alpha_0|u_j|^{\frac{n}{n-1}}))^q dv_g\right)^{\frac{1}{q}} \\
&\leq b_1\int_M \phi|u_j|^n dv_g + C\left(\int_M \phi|u_j|^{q'}dv_g\right)^{\frac{1}{q'}}\left(\int_M \phi\zeta_n(q\alpha_0|u_j|^{\frac{n}{n-1}})dv_g\right)^{\frac{1}{q}} \\
&\leq b_1\int_M \phi|u_j|^n dv_g + C\left(\int_M \phi|u_j|^{q'}dv_g\right)^{\frac{1}{q'}} \to 0 \ \text{ conforme } \ j\to\infty,
\end{aligned}
$$

onde $1/q+1/q' = 1$ e C é uma constante que é independente de j. Aqui, usamos novamente (5-36) (precisamente, $u_j \to u$ em $L^r(M)$ para todo $r \geq n$) nas estimativas acima. Inserindo isso em (5-22) com $\psi = u_j$, temos

$$
\begin{aligned}
&\|u_j\|_E^n - \int_M \phi(x)f(x,u_j)u_j dv_g \leq \sigma_j\|u_j\|_E \\
\Rightarrow\ &\lim_{j\to\infty}\|u_j\|_E^n - \cancelto{0}{\lim_{j\to\infty}\int_M \phi(x)f(x,u_j)u_j dv_g} \leq \lim_{j\to\infty}\sigma_j\|u_j\|_E \\
&\qquad\Rightarrow \lim_{j\to\infty}\|u_j\|_E^n \leq \lim_{j\to\infty}\sigma_j\|u_j\|_E = 0.
\end{aligned}
$$

Portanto, concluímos que $\|u_j\|_E \to 0$ conforme $j\to\infty$. Isso contradiz (5-37). Portanto, $u \not\equiv 0$ e obtemos uma solução fraca não trivial do Problema 5.1. Finalmente, u é não negativo, uma vez que $f(x,s)\equiv 0$ para todos $(x,s)\in M\times(-\infty,0]$. $\square$

Também consideramos resultados de multiplicidade para uma perturbação do Problema 5.1, a saber,

Problema 5.11

$$
-div_g|\nabla_g u|^{n-2}\nabla_g u + \nu(x)|u|^{n-2}u = \phi(x)f(x,u) + h(x), \tag{5-38}
$$

onde $h(x)\in E^*$, o espaço dual de E. Se $h\not\equiv 0$ e $\epsilon > 0$ é suficientemente pequeno, sob algumas suposições existem pelo menos duas soluções fracas distintas para o Problema 5.11. Precisamente, temos o seguinte teorema.

Teorema 5.12 *Seja* (M,g) *uma variedade Riemanniana completa não compacta de dimensão* n. *Suponha que* $\mathrm{Rc}(M,g)\geq\lambda g$ *para alguma constante* $\lambda\in\mathbb{R}$, *e* $\mathrm{inj}_{(M,g)}\geq i_0$ *para* *alguma constante positiva i_0. Assuma que $f(x,t)$ é contínua em $M \times \mathbb{R}$ e que (f_1)-(f_5) são satisfeitas. Tanto $\nu(x)$ quanto $\phi(x)$ são contínuas em M e (ν_1), (ν_2), (ϕ_1), (ϕ_2) são satisfeitas, h pertence a E^*, o espaço dual de E, com $h \geq 0$ e $h \not\equiv 0$. Então, existe $\epsilon_0 > 0$ tal que se $0 < \epsilon < \epsilon_0$, o problema 5.11 possui pelo menos duas soluções fracas não negativas distintas.*

Prova. A prova é dividida em três etapas, a saber:

Passo 1. Em vez de $J : E \to \mathbb{R}$ definido por (5-15), consideramos funcionais para todo $u \in E$ e $\epsilon > 0$

$$J_\epsilon(u) = \frac{1}{n}\|u\|_E^n - \int_M \phi(x)F(x,u)dv_g - \epsilon \int_M hudv_g.$$

O Lema 5.7 ainda vale se substituirmos J por J_ϵ. Ou seja, para qualquer sequência de Palais–Smale $(u_j) \subset E$ de J_ϵ, existe uma subsequência de (u_j) (ainda denotada por (u_j)) e $u \in E$ tal que $u_j \rightharpoonup u$ fracamente em E, $u_j \to u$ fortemente em $L^q(M)$ para todo $q \geq n$, e

$$\begin{aligned} &\nabla_g u_j(x) \to \nabla_g u(x) \text{ q.t.p. em } M \\ &\phi(x)F(x,u_j) \to \phi(x)F(x,u) \text{ fortemente em } L^1(M) \\ &u \text{ é uma solução fraca do problema 5.11.} \end{aligned} \tag{5-39}$$

Passo 2. Temos o seguinte

(a) existem constantes $\epsilon_1 > 0$, $\delta > 0$, e uma sequência de funções $(v_j) \subset E$ tal que $J_\epsilon(v_j) \to c_M$ e $J'_\epsilon(v_j) \to 0$ conforme $j \to \infty$, desde que $0 < \epsilon < \epsilon_1$. Além disso, v_j é limitada em E, $v_j \rightharpoonup u_M$ fracamente em E e u_M é uma solução fraca de 5.11. Aqui, c_M é o valor min-max de J_ϵ e satisfaz

$$0 < c_M < \frac{1}{n}\left(1 - \frac{1}{p}\right)^{n-1}\left(\frac{\alpha_n}{\alpha_0}\right)^{n-1} - \delta; \tag{5-40}$$

Prova. Pelos Lemas 5.4 e 5.5, quando $0 < \epsilon < \epsilon_1$, J_ϵ satisfaz a seguinte condição: $J_\epsilon \in C^1(E,\mathbb{R})$; $J_\epsilon(0) = 0$; $J_\epsilon(u) \geq \delta_\epsilon > 0$ quando $\|u\|_E = r$; $J_\epsilon(e) < 0$ para algum $e \in E$ com $\|e\| > \max\{r_\epsilon, 1\}$. Então, usando o Teorema do Passo da Montanha sem a condição de Palais–Smale [51], podemos encontrar uma sequência (v_n) em E tal que

$$J_\epsilon(v_n) \to c_M > 0, \quad J'_\epsilon(v_n) \to 0 \text{ em } E^*,$$

onde

$$c_M = \min_{\gamma\in\Gamma}\max_{u\in\gamma} J_\epsilon(u) \geq \delta_\epsilon,$$

é um valor min–max de J_ϵ, onde $\Gamma = \{\gamma \in C([0,1],E) : \gamma(0) = 0, \gamma(1) = e\}$. Claramente (5-40) segue do Lema 5.6. A última afirmação segue imediatamente do Lema 5.7. □

(b) Existe uma constante $\epsilon_2 : 0 < \epsilon_2 < \epsilon_1$ tal que para qualquer $0 < \epsilon < \epsilon_2$, existem constantes positivas r_ϵ com $r_\epsilon \to 0$ conforme $\epsilon \to 0$ e uma sequência $(u_j) \subset E$ tal que

$$J_\epsilon(u_j) \to c_\epsilon = \inf_{\|u\|_E \le r_\epsilon} J_\epsilon(u) < 0, \;\; J'_\epsilon(u_j) \to 0 \;\text{ em }\; E^* \;\text{ conforme }\; j \to \infty.$$

Além disso, $u_j \to u_0$ fortemente em E, onde u_0 é uma solução fraca de 5.11 com $J_\epsilon(u_0) = c_\epsilon$.

Prova. Seja r_ϵ dado por (ii) do Lema 5.4, ou seja, $J_\epsilon(u) > \theta_\epsilon > 0$ para todo u com $\|u\|_E = r$. Como $r \to 0$ conforme $\epsilon \to 0$, pode-se escolher $\epsilon_3 : 0 < \epsilon_3 < \epsilon_2$ de modo que, quando $0 < \epsilon < \epsilon_3$,

$$r_\epsilon < \left(\frac{n-1}{n} \frac{\alpha_n}{\alpha_0} \right)^{\frac{n-1}{n}}.$$

Por (f_1) e (f_2), temos

$$\begin{aligned} F(x,u) &\le b_1|u|^n + b_2|u|\zeta_n(\alpha_0|u|^{\frac{n}{n-1}}) \\ &= b_1|u|^n + b_2|u|\zeta_n(\alpha_0\|u\|_E^{\frac{n}{n-1}}(|u|/\|u\|_E)^{\frac{n}{n-1}}). \end{aligned}$$

Quando $\|u\|_E \le r_\epsilon$, temos $\alpha_0\|u\|_E^{n/(n-1)} < (1-\beta/n)\alpha_n$. Então, segue do Lema 5.7, (ϕ_1) e (ϕ_2) que $\phi(x)F(x,u)$ é limitado em $L^p(M) \cap L^1(M)$ para algum $p > 1$ quando $\|u\|_E \le r_\epsilon$. Portanto, J_ϵ tem cota inferior na bola $B_{r_\epsilon} = \{u \in E : \|u\|_E \le r_\epsilon\}$. □

Passo 3. Existe $\epsilon_0 : 0 < \epsilon_0 < \epsilon_2$ tal que se $0 < \epsilon < \epsilon_0$, então $u_M \not\equiv u_0$.

Prova do Teorema 5.12. Suponha, por contradição, que $u_M \equiv u_0$. Então, $v_j \rightharpoonup u_0$ fracamente em E. Pelo item (a),

$$J_\epsilon(v_j) \to c_M > 0, \quad |\langle J'_\epsilon(v_j), \varphi \rangle| \le \gamma_j \|\varphi\|_E, \tag{5-41}$$

com $\gamma_j \to 0$ conforme $j \to \infty$. Por um lado, temos, pelo item (5-39),

$$\int_M \phi(x)F(x,v_j)dv_g \to \int_M \phi(x)F(x,u_0)dv_g \;\text{ conforme } j \to \infty. \tag{5-42}$$

Por outro lado, dado que $v_j \rightharpoonup u_0$ fracamente em E e $h \in E^*$, segue que

$$\int_M hv_j dv_g \to \int_M hu_0 dv_g \;\text{ conforme } j \to \infty. \tag{5-43}$$

Inserindo (5-42) e (5-43) na primeira igualdade de (5-41), obtemos

$$\frac{1}{n}\|v_j\|_E^n = c_M + \int_M \phi(x)F(x,u_0)dv_g + \epsilon\int_M hu_0 dv_g + o_j(1). \tag{5-44}$$

Da mesma forma, podemos derivar

$$\frac{1}{n}\|u_j\|_E^n = c_\epsilon + \int_M \phi(x)F(x,u_0)dv_g + \epsilon\int_M hu_0 dv_g + o_j(1). \tag{5-45}$$

Combinando (5-44) e (5-45), temos

$$\|v_j\|_E^n - \|u_0\|_E^n = n(c_M - c_\epsilon + o_j(1)). \tag{5-46}$$

Do item (b), sabemos que $c_\epsilon \to 0$ conforme $\epsilon \to 0$. Isso, juntamente com (5-40), leva a existência de $\epsilon_0 : 0 < \epsilon_0 < \epsilon_2$ tal que, se $0 < \epsilon < \epsilon_0$, então

$$0 < c_M - c_\epsilon < \frac{1}{n}\left(\frac{p-1}{p}\frac{\alpha_n}{\alpha_0}\right)^{n-1}. \tag{5-47}$$

Defina

$$w_j = \frac{v_j}{\|v_j\|_E^n}, \quad w_0 = \frac{u_0}{(\|u_0\|_E^n + n(c_M - c_\epsilon))^{1/n}}.$$

Segue de (5-46) e $v_j \rightharpoonup u_0$ fracamente em E que $w_j \rightharpoonup w_0$ fracamente em E. Note que

$$\int_M \phi(x)\zeta_n(\alpha_0|v_j|^{n/(n-1)})dv_g = \int_M \phi(x)\zeta_n(\alpha_0\|v_j\|_E^{n/(n-1)}|w_j|^{n/(n-1)})dv_g.$$

Por (5-46) e (5-47), um cálculo direto mostra que

$$\begin{aligned}
&\lim_{j\to\infty} \alpha_0(n(c_M - c_\epsilon + o_j(1)) + \|u_0\|_E^n)^{\frac{1}{n-1}}(1-\|w_0\|_E^n)^{\frac{1}{n-1}} \\
&= \lim_{j\to\infty}\left\{\alpha_0^{n-1}n(c_M - c_\epsilon + o_j(1))(1-\|w_0\|_E^n) + \alpha_0^{n-1}\|u_0\|_E^n(1-\|w_0\|_E^n)\right\}^{\frac{1}{n-1}} \\
&< \lim_{j\to\infty}\left\{\alpha_0^{n-1}n\left(\frac{1}{n}\left[\frac{p-1}{p}\frac{\alpha_n}{\alpha_0}\right]^{n-1} + \alpha_0^{n-1}o_j(1)\right)(1-\|w_0\|_E^n) + \alpha_0^{n-1}\|u_0\|_E^n(1-\|w_0\|_E^n)\right\}^{\frac{1}{n-1}} \\
&= \left\{\left[\frac{p-1}{p}\alpha_n\right]^{n-1}\left((1-\|w_0\|_E^n) + \alpha_0^{n-1}\left[\frac{p}{p-1}\frac{1}{\alpha_n}\right]^{n-1}\|w_0\|_E^n(1-\|w_0\|_E^n)\right)\right\}^{\frac{1}{n-1}} \\
&= \left\{\left[\frac{p-1}{p}\alpha_n\right]^{n-1}\left[\left(1+\left[\frac{p}{p-1}\frac{\alpha_0}{\alpha_n}\right]^{n-1}\|u_0\|_E^n\right)(1-\|w_0\|_E^n)\right]\right\}^{\frac{1}{n-1}}.
\end{aligned}$$

Observando que

$$1 + \left[\frac{p}{p-1}\frac{\alpha_0}{\alpha_n}\right]^{n-1} \|u_0\|_E^n \leq \frac{1}{\|w_0\|_E^n} = \frac{\|u_0\|_E^n + n(c_M - c_\epsilon)}{n(c_M - c_\epsilon)},$$

e,

$$\Rightarrow c_M - c_\epsilon \leq \frac{1}{n}\left[\frac{p-1}{p}\frac{\alpha_n}{\alpha_0}\right]^{n-1}.$$

Logo, concluímos que

$$\left\{\left[\frac{p-1}{p}\alpha_n\right]^{n-1}\left[\left(1 + \left[\frac{p}{p-1}\frac{\alpha_0}{\alpha_n}\right]^{n-1}\|u_0\|_E^n\right)\left(1 + \|w_0\|_E^n\right)\right]\right\}^{\frac{1}{n-1}}$$
$$\leq \left\{\left[\frac{p-1}{p}\alpha_n\right]^{n-1}\right\}^{\frac{1}{n-1}} = \left(1 - \frac{1}{p}\right)\alpha_n.$$

Portanto,

$$\lim_{j\to\infty} \alpha_0 \|v_j\|_E^{\frac{n}{n-1}}(1 - \|w_0\|_E^n)^{\frac{1}{n-1}} < \left(1 - \frac{1}{p}\right)\alpha_n.$$

Assim, o Lema 5.8 juntamente com a Proposição 6.2 implica que $\phi(x)\zeta_n(\alpha_0|v_j|^{n/(n-1)})$ é limitada em $L^q(M)$ para algum $q : 1 < q < n/(n-1)$. Por (f_1),

$$|f(x, v_j)| \leq b_1|v_j|^{n-1} + b_2\zeta_n(\alpha_0|v_j|^{n/(n-1)}).$$

Tomando $c = \max\{b_1, b_2\}$, temos que

$$|f(x, v_j)| \leq c|v_j|^{n-1} + c\zeta_n(\alpha_0|v_j|^{n/(n-1)}).$$

Portanto,

$$\begin{aligned}\left|\int_M \phi(x) f(x, u_j)(v_j - u_0)dv_g\right| &\leq c\int_M \phi(x)(|v_j|^{n-1} + \zeta_n(\alpha_0|v_j|^{\frac{n}{n-1}}))|v_j - u_0|dv_g \\ &\leq c\|\phi|v_j|^{n-1}\|_{L^{\frac{n}{n-1}}(M)}\|v_j - u_0\|_{L^n(M)} \\ &+ c\|\phi\zeta_n(\alpha_0|v_j|^{\frac{n}{n-1}})\|_{L^q(M)}\|v_j - u_0\|_{L^{q'}(M)}|f(x, v_j)| \\ &\leq c|v_j|^{n-1} + c\zeta_n(\alpha_0|v_j|^{n/(n-1)}).\end{aligned}$$

Como $1 < q < n/(n-1)$, temos $q' > n$. Então, segue da imersão compacta $E \hookrightarrow L^r(M)$ para todo $r \geq n$ que

$$\lim_{j\to\infty}\int_M \phi(x) f(x, v_j)(v_j - u_0)dv_g = 0. \tag{5-48}$$

Tomando $\varphi = v_j - u_0$ em (5-41), temos, usando (5-43) e (5-48),

$$\int_M (|\nabla_g v_j|^{n-2}\nabla_g v_j \nabla_g(v_j - u_0) + \nu(x)|v_j|^{n-2}v_j(v_j - u_0))dv_g \to 0. \tag{5-49}$$

No entanto, o fato de $v_j \rightharpoonup u_0$ fracamente em E leva a

$$\int_M (|\nabla_g u_0|^{n-2}\nabla_g u_0 \nabla_g(v_j - u_0) + \nu(x)|u_0|^{n-2}u_0(v_j - u_0))dv_g \to 0. \tag{5-50}$$

Subtraindo (5-50) de (5-49), usando a Proposição 6.7

$$2^{2-n}|b-a|^n \le \langle |b|^{n-2}b - |a|^{n-2}a, b-a\rangle, \forall a,b \in \mathbb{R}^n,$$

temos,

$$\begin{aligned}&\int_M (|\nabla_g v_j|^{n-2}\nabla_g v_j \nabla_g(v_j - u_0) + \nu(x)|v_j|^{n-2}v_j(v_j - u_0))dv_g \\ &\qquad - \int_M (|\nabla_g u_0|^{n-2}\nabla_g u_0 \nabla_g(v_j - u_0) + \nu(x)|u_0|^{n-2}u_0(v_j - u_0))dv_g \to 0, j \to \infty.\end{aligned}$$

Isso é equivalente a

$$\begin{aligned}&\int_M \nabla_g(v_j - u_0)[|\nabla_g v_j|^{n-2}\nabla_g v_j - |\nabla_g u_0|^{n-2}\nabla_g u_0] + \nu(x)(v_j - u_0)[|v_j|^{n-2}v_j - |u_0|^{n-2}u_0]dv_g \\ &\qquad \ge \int_M 2^{n-1}|\nabla_g v_j - \nabla_g u_0|^n + \nu(x)2^{n-1}|v_j - u_0|^n dv_g \\ &\qquad = 2^{n-1}\int_M |\nabla_g(v_j - u_0)|^n + \nu(x)|v_j - u_0|dv_g \to 0, j \to \infty.\end{aligned}$$

Implicando que

$$2^{n-1}\|v_j - u_0\|_e^n \to 0, j \to \infty,$$

então $\|v_j - u_0\|_E^n \to 0$ conforme $j \to \infty$. Isso, juntamente com (5-46), implica que $c_M \equiv c_\epsilon$, o que é absurdo, pois $c_M > 0$ e $c_\epsilon < 0$. Portanto, $u_M \not\equiv u_0$. Como $f(x,s) \equiv 0$ para todos $(x,s) \in M \times (-\infty, 0]$, pode-se ver facilmente que $u_M \ge 0$ e $u_0 \ge 0$. Isso completa a prova do teorema. □

Para concluir, vamos construir exemplos de f's para mostrar que (f_1)-(f_5) não implicam (H_5).

Proposição 5.13 *Existem funções contínuas $f : M \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tais que (f_1)-(f_5) são satisfeitas, mas (H_5) não é satisfeita.*

Prova. Seja ϕ que satisfaça as hipóteses (ϕ_1) e (ϕ_2), $p > 1$ seja dado em (ϕ_1), l seja um inteiro tal que $l \ge n$, $q = nl/(n-1) + 1$ e S_q seja definido por (5-8). Pelo Lema 5.3, S_q é atingido por alguma função não negativa $u \in E$. Seja C_q um número positivo tal que

$$C_q > \left(\frac{q-n}{q}\right)^{(q-n)/n} \left(\frac{p\alpha_0}{(p-1)\alpha_n}\right)^{(q-n)(n-1)/n} S_q^q.$$

Seja $\chi : [0,\infty) \to \mathbb{R}$ uma função suave tal que $0 \le \chi < 1$, $\chi \equiv 0$ em $[0,A]$, $\chi \equiv 0$ em $[2A,\infty]$, e $|\chi'| \le 2/A$, onde A é uma constante positiva a ser determinada posteriormente. Definimos

$$f(t) = \begin{cases} 2^l l! C_q \sum_{k=l}^{\infty} \frac{(t^{\frac{n}{n-1}} - \chi(t) t^{\frac{1}{n-1}})^k}{k!}, & t \ge 0, \\ 0, & t < 0. \end{cases}$$

Agora verificamos (f_1)-(f_5) para uma escolha apropriada de A da seguinte forma:

(f_1) : Se $A > 1$, então $0 \le t^{n/(n-1)} - \chi(t) t^{1/(n-1)} \le t^{n/(n-1)}$ para todo $t \ge 0$. Assim,

$$\begin{aligned} f(t) &= 2^l l! C_q \left(e^{t^{n/(n-1)} - \chi(t) t^{1/(n-1)}} - \sum_{k=0}^{l-1} \frac{(t^{\frac{n}{n-1}} - \chi(t) t^{\frac{1}{n-1}})^k}{k!} \right) \\ &\le 2^l l! C_q \left(e^{t^{n/(n-1)}} - \sum_{k=0}^{l-1} \frac{t^{\frac{nk}{n-1}}}{k!} \right) \\ &\le 2^l l! C_q \zeta_n(t^{n/(n-1)}), \end{aligned}$$

para todo $t \ge 0$. Assim, (f_1) é satisfeito quando $A > 1$.

(f_2) : Quando $t \in [0,A]$, temos $\chi(t) = 0$ e

$$\int_0^t f(t) dt = 2^l l! C_q \sum_{k=l}^{\infty} \int_0^t \frac{t^{\frac{nk}{n-1}}}{k!} dt \le 2^l l! C_q t \sum_{k=l}^{\infty} \frac{t^{\frac{nk}{n-1}}}{k!} dt = t f(t). \tag{5-51}$$

Quando $t \ge A$, afirmamos que se A for escolhido suficientemente grande, digamos $A \ge 4^{n-1}$, então

$$\int_A^t \frac{(t^{\frac{n}{n-1}} - \chi(t) t^{\frac{1}{n-1}})^k}{k!} dt \le \frac{(t^{\frac{n}{n-1}} - \chi(t) t^{\frac{1}{n-1}})^{k+1}}{(k+1)!} - \frac{A^{\frac{n(k+1)}{n-1}}}{(k+1)!}. \tag{5-52}$$

De fato, se definirmos

$$\gamma(t) = \int_A^t \frac{(t^{\frac{n}{n-1}} - \chi(t) t^{\frac{1}{n-1}})^k}{k!} dt - \frac{(t^{\frac{n}{n-1}} - \chi(t) t^{\frac{1}{n-1}})^{k+1}}{(k+1)!} + \frac{A^{\frac{n(k+1)}{n-1}}}{(k+1)!},$$

então $\gamma(A) = 0$ e

$$\gamma'(t) = \frac{(t^{\frac{n}{n-1}} - \chi(t)t^{\frac{1}{n-1}})^k}{k!} - \frac{(t^{\frac{n}{n-1}} - \chi(t)t^{\frac{1}{n-1}})^k}{k!}\left(\frac{n}{n-1}t^{\frac{1}{n-1}} - \chi'(t)t^{\frac{1}{n-1}} - \frac{1}{n-1}\chi(t)t^{\frac{1}{n-1}-1}\right).$$

Seja $A \geq 4^{n-1}$. Então, para $t \in [A, \infty)$, temos:

$$\begin{aligned}\frac{n}{n-1}t^{\frac{1}{n-1}} - \chi'(t)t^{\frac{1}{n-1}} - \frac{1}{n-1}\chi(t)t^{\frac{1}{n-1}-1} &\geq \left(\frac{n}{n-1} - \frac{2}{A}\right)A^{\frac{1}{n-1}} - \frac{1}{n-1}A^{\frac{1}{n-1}-1}\\ &\geq 4\left(\frac{n}{n-1} - \frac{2}{4(n-1)} - \frac{1}{4(n-1)^2}\right)\\ &> 1.\end{aligned}$$

Portanto, $\gamma'(t) \leq 0$, e assim nossa afirmação (5-52) é válida. Note que

$$\int_0^A \frac{t^{\frac{nk}{n-1}}}{k!}dt = \frac{A^{\frac{n(k+1)}{n-1}}}{(k+1)!}\frac{k+1}{\frac{nk}{n-1}+1}A^{-\frac{1}{n-1}} \leq \frac{A^{\frac{n(k+1)}{n-1}}}{(k+1)!}. \tag{5-53}$$

Segue de (5-52) e (5-53) que quando $t \geq A$,

$$\int_0^t \frac{(t^{\frac{n}{n-1}} - \chi(t)t^{\frac{1}{n-1}})^k}{k!}dt \leq \frac{(t^{\frac{n}{n-1}} - \chi(t)t^{\frac{1}{n-1}})^{k+1}}{(k+1)!},$$

e, assim,

$$\int_0^t f(t)dt \leq f(t) \leq \frac{1}{\mu}tf(t), \tag{5-54}$$

para algum $\mu > n$. Isso, juntamente com (5-51), implica que (f_2) é satisfeito.

(f_3) : Seja $A \geq 4^{n-1}$. Em vista de (5-54), quando $t \geq A$,

$$F(t) = \int_0^t f(t)dt \leq f(t).$$

Assim, (f_3) é satisfeito.

(f_4) : Como $l > n$, obtemos $F(t)/t^n \to 0$ quando $t \to 0^+$. Assim, (f_4) é satisfeito.

(f_5) : Note que $t^{n/(n-1)} - t^{1/(n-1)} \geq t^{n/(n-1)}/2$ para todo $t \geq 2$. Seja $A \geq 2$. Então, para todo $t \geq A$, temos

$$f(t) \geq 2^l l! C_q \frac{(t^{\frac{n}{n-1}} - \chi(t)t^{\frac{1}{n-1}})^l}{l!} \geq 2^l C_q (t^{\frac{n}{n-1}}/2)^l = C_q t^{q-1}.$$

Quando $t \in [0, A]$, obtemos

$$f(t) \geq 2^l l! C_q \frac{t^{\frac{nl}{n-1}}}{l!} = 2^l C_q t^{q-1}.$$

Assim, (f_5) é satisfeito. Em resumo, $f(t)$ satisfaz (f_1)-(f_5) se $A \geq 4^{n-1}$.
Finalmente, verificamos que (H_5) não é satisfeito. Quando $t \geq 2A$, temos

$$f(t) = 2^l l! C_q \left(e^{t^{\frac{n}{n-1}} - t^{\frac{1}{n-1}}} - \sum_{k=0}^{l-1} \frac{(t^{\frac{n}{n-1}} - t^{\frac{1}{n-1}})^k}{k!} \right).$$

Segue que

$$\lim_{t \to +\infty} t f(t) e^{-t^{\frac{n}{n-1}}} = 0.$$

Assim, $f(t)$ não satisfaz (H_5).

$\square$

CAPÍTULO 6

Apêndice

Para qualquer número inteiro $n \geq 2$ e número real s, definimos uma função $\zeta : \mathbb{N} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ por

$$\zeta_n(s) = e^s - \sum_{k=0}^{n-2} \frac{s^k}{k!} = \sum_{k=n-1}^{\infty} \frac{s^k}{k!}.$$

Proposição 6.1 *Se $s \geq 0$, $p \geq 1$ são números reais e $n \geq 2$ é um número inteiro, então vale*

$$(\zeta_n(s))^p \leq \zeta_n(ps). \tag{6-1}$$

Prova. Provamos por indução em relação a n. Definimos uma função

$$\phi(s) = (e^s - 1)^p - (e^{ps} - 1). \tag{6-2}$$

É fácil ver que para $s \geq 0$ e $p \geq 1$,

$$\phi'(s) = p(e^s - 1)^{p-1} - pe^{ps} \leq 0.$$

Portanto, $\phi(s) \leq \phi(0) = 0$ e, assim, a desigualdade (6-1) vale para $n = 2$. Suponhamos que (6-1) vale para $n \geq 2$, só precisamos provar que

$$(\zeta(n+1, s))^p \leq \zeta(n+1, ps).$$

Para este propósito, definimos

$$\psi(s) = \left(e^s - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{s^k}{k!}\right)^p - \left(e^{ps} - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(ps)^k}{k!}\right).$$

Um cálculo direto mostra

$$\begin{aligned}\psi'(s) &= p\left(e^s - \sum_{k=0}^{n-1}\frac{s^k}{k!}\right)^{p-1}\left(e^s - \sum_{k=1}^{n-1}\frac{s^{k-1}}{(k-1)!}\right) - \left(pe^{ps} - p\sum_{k=1}^{n-1}\frac{(ps)^{k-1}}{(k-1)!}\right)\\ &\leq p\left\{\left(e^s - \sum_{k=1}^{n-1}\frac{s^{k-1}}{(k-1)!}\right) - \left(e^{ps} - \sum_{k=1}^{n-1}\frac{(ps)^{k-1}}{(k-1)!}\right)\right\}\\ &= p\left\{\left(e^s - \sum_{k=0}^{n-2}\frac{s^k}{k!}\right) - \left(e^{ps} - \sum_{k=0}^{n-2}\frac{(ps)^k}{k!}\right)\right\} \leq 0.\end{aligned}$$

Aqui, usamos a hipótese de indução $(\zeta_n(s))^p \leq \zeta_n(ps)$. Assim, $\psi(s) \leq \psi(0) = 0$ para $s \geq 0$, e, portanto, (6-2) vale. Portanto, (6-1) vale para qualquer número inteiro $n \geq 2$. $\square$

Proposição 6.2 *Para todos* $n \geq 2$, $s \geq 0$, $t \geq 0$, $\mu > 1$ *e* $\nu > 1$ *com* $1/\mu + 1/\nu = 1$, *vale*

$$\zeta_n(s+t) \leq \frac{1}{\mu}\zeta_n(\mu s) + \frac{1}{\nu}\zeta_n(\nu t).$$

Prova. Observando que

$$\frac{\partial^2}{\partial s^2}\zeta(2,s) = e^s \geq 0, \quad \frac{\partial^2}{\partial s^2}\zeta(3,s) = e^s \geq 0,$$

e quando $n \geq 4$,

$$\frac{\partial^2}{\partial s^2}\zeta_n(s) = e^s - \sum_{k=2}^{n-2}\frac{s^{k-2}}{(k-2)!} = e^s - \sum_{k=0}^{n-4}\frac{s^k}{k!} \geq 0,$$

concluímos que $\zeta_n(s)$ é convexa em relação a s para todos $n \geq 2$. Assim

$$\zeta_n(s+t) = \zeta_n\left(\frac{1}{\mu}\mu s + \frac{1}{\nu}\nu t\right) \leq \frac{1}{\mu}\zeta_n(\mu s) + \frac{1}{\nu}\zeta_n(\nu t).$$

Isso conclui a proposição. $\square$

Proposição 6.3 *Para todo* $q \geq 1$ *e* $a, b > 0$ *vale que*

$$|a^q - b^q| \leq q(a^{q-1} + b^{q-1})|a-b|$$

Prova. Seja f uma função $f : [a,b] \to \mathbb{R}$, definida por $f(t) = t^q$, então $f'(t) = qt^{q-1}$ e sendo contínua em (a,b) existe $t_0 \in (a,b)$ tal que

$$|f'(t)| \leq |f'(t_0)| = qt_0^{q-1} \leq q(a^{q-1} + b^{q-1}),$$

pelo Teorema do Valor Médio,

$$|f(a)-f(b)| \leq q(a^{q-1}+b^{q-1})|a-b|.$$

$\square$

Proposição 6.4 *Temos que* λ_{ϕ} *é positiva. Uma vez que* $\nu > 0$ *e* $\phi > 0$ *temos a diferença de dois termos positivos* $\int_M(|\nabla_g u|^n + \nu(x)|u|^n)dv_g > 0$ *e* $\int_M \phi(x)|u|^n dv_g > 0$.

Proposição 6.5 *Para todo* $p \geq 1$ *e* $a, b \geq 0$ *vale.*

$$(a+b)^p \leq a^p + p2^{p-1}(a^{p-1}b + b^p)$$

Prova. Note que, dividindo por a^p e tomando $x = \frac{b}{a}$, precisamos provar que

$$(1+x)^p \leq 1 + p2^{p-1}(x+x^p).$$

Para este propósito, seja $f(x) = (1+x)^p$ (uma função crescente), então $f'(x) = p(1+x)^{p-1}$ (também é uma função crescente). Pelo Teorema do Valor Intermediário, existe $\theta \in (0,x)$ tal que:

$$f(x) - f(0) = f'(\theta)x \leq f'(x)x.$$

Assim,

$$\begin{aligned}(1+x)^p - 1 &\leq p(1+x)^{p-1}x \\ &\leq p2^{p-1}(1+x^{p-1})x \\ &= p2^{p-1}(x+x^p).\end{aligned}$$

$\square$

Proposição 6.6 *Para todo* $0 < p, a < 1$ *vale*

$$(1-a)^p \leq 1 - pa.$$

Prova. Para este propósito, seja $f(x) = (1-x)^p$, então $f'(x) = -p(1-x)^{p-1}$ (uma função decrescente). Pelo Teorema do Valor Intermediário, existe $\theta \in (0,x)$ tal que

$$f(x) - f(0) = f'(\theta)x \leq f'(0)x.$$

Assim,

$$(1-x)^p - 1 \leq -px \Rightarrow (1-x)^p \leq 1 - px$$

$\square$

Proposição 6.7 *Para todo* $a, b \in \mathbb{R}^n$ *e* $p \geq 2$ *vale*

$$\langle |b|^{p-2}b - |a|^{p-2}a, b-a\rangle \geq 2^{2-p}|b-a|^p.$$

Prova. Vamos começar com a identidade

$$\begin{aligned}
\langle |b|^{p-2}b - |a|^{p-2}a, b-a\rangle &= |b|^{p-2}\langle b,b\rangle - |b|^{p-2}\langle b,a\rangle - |a|^{p-2}\langle a,b\rangle + |a|^{p-2}\langle a,a\rangle \\
&= |b|^p - |b|^{p-2}\langle b,a\rangle - |a|^{p-2}\langle a,b\rangle + |a|^p \\
&= \frac{2|b|^p - 2|b|^{p-2}\langle b,a\rangle - 2|a|^{p-2}\langle a,b\rangle + 2|a|^p}{2} \\
&= \frac{|b|^p + |b|^{p-2}(\langle b,b\rangle - 2\langle a,b\rangle) + |a|^{p-2}(-2\langle a,b\rangle + \langle a,a\rangle) + |a|^p}{2} \\
&= \frac{|b|^p + |b|^{p-2}(|b-a|^2 - |a|^2) + |a|^{p-2}(|b-a|^2 - |b|^2) + |a|^p}{2} \\
&= \frac{|b|^{p-2} + |a|^{p-2}}{2}|b-a|^2 + \frac{(|b|^{p-2} - |a|^{p-2})(|b|^2 - |a|^2)}{2}.
\end{aligned}$$

Por outro lado,

$$(|a| + |b|)^{p-2} \leq 2^{p-3}(|a|^{p-2} + |b|^{p-2}),$$

e usando que $|a-b| \leq |a| + |b|$, obtemos

$$2^{3-p}(|a-b|)^{p-2} \leq (|a|^{p-2} + |b|^{p-2}).$$

Dessa forma, temos que

$$\langle |b|^{p-2}b - |a|^{p-2}a, b-a\rangle \geq 2^{-1}(|b|^{p-2} + |a|^{p-2})|b-a|^2 \geq 2^{2-p}|b-a|^p.$$

$\square$

Proposição 6.8 *Para todo* $a, b > 0$ *e* $0 < p < 1$, *vale*

$$(a+b)^p \leq a^p + b^p.$$

Proposição 6.9 *(Desigualdade de Hölder) Seja* E *um espaço vetorial normado. Para* $1 \leq p, q \leq \infty$, *tais que* $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, *tomando* $f \in L^p(E)$ *e* $g \in L^q(E)$ *temos que* $fg \in L^1(E)$. *Além disso,*

$$\|fg\|_1 \leq \|f\|_p \|g\|_q.$$

Proposição 6.10 *(Desigualdade de Minkowski) Seja* E *um espaço vetorial normado. Para* $1 \leq p \leq \infty$*, tomando* $f, g \in L^p(E)$ *temos que* $f + g \in L^p(E)$*. Além disso,*

$$\|f + g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p.$$

Proposição 6.11 *(Desigualdade de Young) Se p e q são números reais positivos tais que* $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$*, então, para todo par de números reais* a *e* b *não negativos vale a desigualdade:*

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}.$$

CAPÍTULO 7

Considerações Finais

Através dos estudos de Yang [64] e de Li e Liu [32], a desigualdade de Trudinger-Moser é comprovada para variedades Riemannianas completas, sob determinadas hipóteses, curvatura de Ricci limitada inferiormente e raio injetivo estritamente positivo. Entretanto, nas demonstrações apresentadas por Yang [64, Teorema 2.6], identificamos um erro insolúvel. Em futuras pesquisas, almejamos estender esses resultados para incluir derivadas de ordem superior.

Referências Bibliográficas

[1] ADACHI, S.; TANAKA, K. **Trudinger type inequalities in $\mathbb{R}^n$ and their best exponents**. *Proceedings of the American Mathematical Society*, 128(7):2051–2057, 2000.

[2] ADAMS, D. R. **A sharp inequality of J. Moser for higher order derivatives**. *Annals of Mathematics*, 128(2):385–398, 1988.

[3] ADIMURTHI.; DRUET, O. **Blow-up analysis in dimension 2 and a sharp form of Trudinger-Moser inequality**. 2005.

[4] AUBIN, T. **Sur la fonction exponentielle**. *CR Acad. Sci. Paris Sér. AB*, 270:A1514–A1516, 1970.

[5] AUBIN, T. **Meilleures constantes dans le théorème d'inclusion de Sobolev et un théorème de Fredholm non linéaire pour la transformation conforme de la courbure scalaire**. *Journal of Functional Analysis*, 32(2):148–174, 1979.

[6] BARTLE, R. G. **The elements of integration and Lebesgue measure**. John Wiley & Sons, 2014.

[7] BECKNER, W. **Sharp Sobolev inequalities on the sphere and the Moser–Trudinger inequality**. *Annals of Mathematics*, 138(1):213–242, 1993.

[8] BREZIS, H.; BRÉZIS, H. **Functional analysis, Sobolev spaces and partial differential equations**, volume 2. Springer, 2011.

[9] BRÉZIS, H.; LIEB, E. **A relation between pointwise convergence of functions and convergence of functionals**. *Proceedings of the American Mathematical Society*, 88(3):486–490, 1983.

[10] CAO, D. M. **Nontrivial solution of semilinear elliptic equations with critical exponent in $\mathbb{R}^2$**. *Communications in Partial Differential Equations*, 17(3-4):407–435, 1992.

[11] CARLESON, L.; CHANG, S.-Y. A. **On the existence of an extremal function for an inequality of Moser, J**. *Bulletin des Sciences Mathématiques*, 110(2):113–127, 1986.

[12] CASSANI, D.; SANI, F.; TARSI, C. **Equivalent Moser type inequalities in $\mathbb{R}^2$ and the zero mass case**. *Journal of Functional Analysis*, 267(11):4236–4263, 2014.

[13] CHAVEL, I. **Riemannian geometry: a modern introduction**, volume 98. Cambridge university press, 2006.

[14] CHEN, W. X. **A Trüdinger inequality on surfaces with conical singularities**. *Proceedings of the American Mathematical Society*, 108(3):821–832, 1990.

[15] CHERRIER, P. **Une inégalité de Sobolev sur les variétés Riemanniennes**. *Bull. Sci. Math.*, 103:353–374, 1979.

[16] CIANCHI, A.; LUTWAK, E.; YANG, D.; ZHANG, G. **Affine Moser–Trudinger and Morrey–Sobolev inequalities**. *Calculus of Variations and Partial Differential Equations*, 36:419–436, 2009.

[17] COSTA, D. G.; OTHERS. **An invitation to variational methods in differential equations**. Springer, 2007.

[18] DING, W.; JOST, J.; LI, J.; WANG, G. **The differential equation $\Delta u = 8\pi$- 8π heu on a compact riemann surface, Univ**. *Leipzig Preprint,(Feb. 1998)*, 1998.

[19] DO Ó, J. M. **N-Laplacian equations in $\mathbb{R}^N$ with critical growth**. In: *Abstr. Appl. Anal*, volume 2, p. 301–315, 1997.

[20] EVANS, L. C. **Partial differential equations**, volume 19. American Mathematical Society, 2022.

[21] FLUCHER, M. **Extremal functions for the Trudinger-Moser inequality in 2 dimensions**. *Commentarii Mathematici Helvetici*, 67(1):471–497, 1992.

[22] FONTANA, L. **Sharp borderline Sobolev inequalities on compact Riemannian manifolds**. *Comment. Math. Helv.*, 68(3):415–454, 1993.

[23] GALLOT, S.; HULIN, D.; LAFONTAINE, J.; OTHERS. **Riemannian geometry**, volume 2. Springer, 1990.

[24] HEBEY, E. **Sobolev spaces on Riemannian manifolds**, volume 1635. Springer Science & Business Media, 1996.

[25] HEMPEL, J.; MORRIS, G.; TRUDINGER, N. **On the sharpness of a limiting case of the Sobolev imbedding theorem**. *Bulletin of the Australian Mathematical Society*, 3(3):369–373, 1970.

[26] HONG, C. W. **A best constant and the Gaussian curvature**. *Proceedings of the American Mathematical Society*, 97(4):737–747, 1986.

[27] JUDOVIČ, V. I. **Some estimates connected with integral operators and with solutions of elliptic equations**. *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, 138:805–808, 1961.

[28] LAM, N. **Equivalence of sharp Trudinger-Moser-Adams inequalities.** *Communications on Pure & Applied Analysis*, 16(3), 2017.

[29] LAM, N.; LU, G. **Existence and multiplicity of solutions to equations of N-Laplacian type with critical exponential growth in $\mathbb{R}^n$**. *Journal of functional Analysis*, 262(3):1132–1165, 2012.

[30] LAM, N.; LU, G.; ZHANG, L. **Equivalence of critical and subcritical sharp Trudinger–Moser–Adams inequalities**. *Revista Matemática Iberoamericana*, 33(4):1219–1246, 2017.

[31] LEE, J. M.; LEE, J. M. **Smooth manifolds**. Springer, 2012.

[32] LI, J.; LU, G. **Critical and subcritical Trudinger-Moser inequalities on complete noncompact Riemannian manifolds**. *Advances in Mathematics*, 389:107915, 2021.

[33] LI, X.; YANG, Y. **Extremal functions for singular Trudinger-Moser inequalities in the entire Euclidean space**. *Journal of Differential Equations*, 264(8):4901–4943, 2018.

[34] LI, Y. **Moser-Trudinger inequality on compact Riemannian manifolds of dimension two**. *J. Partial Differential Equations*, 14(2):163–192, 2001.

[35] LI, Y. **Extremal functions for the Moser-Trudinger inequalities on compact Riemannian manifolds**. *Sci. China Ser. A*, 48(5):618–648, 2005.

[36] LI, Y.; LIU, P. **A Moser-Trudinger inequality on the boundary of a compact Riemann surface**. *Mathematische Zeitschrift*, 250:363–386, 2005.

[37] LI, Y.; LIU, P.; YANG, Y. **Moser-Trudinger inequalities of vector bundle over a compact Riemannian manifold of dimension 2**. *Calculus of Variations and Partial Differential Equations*, 28:59–83, 2007.

[38] LI, Y.; RUF, B. **A sharp Trudinger-Moser type inequality for unbounded domains in $\mathbb{R}^n$**. *Indiana University mathematics journal*, p. 451–480, 2008.

[39] LIN, K.-C. **Extremal functions for Moser's inequality**. *Transactions of the American Mathematical Society*, 348(7):2663–2671, 1996.

[40] LU, G.; TANG, H. **Best constants for Moser-Trudinger inequalities on high dimensional hyperbolic spaces**. *Adv. Nonlinear Stud.*, 13(4):1035–1052, 2013.

[41] LU, G.; YANG, Y. **Adams' inequalities for bi-Laplacian and extremal functions in dimension four**. *Advances in Mathematics*, 220(4):1135–1170, 2009.

[42] LU, G.; YANG, Y. **Sharp constant and extremal function for the improved Moser-Trudinger inequality involving L^p norm in two dimension**. *Discrete and Continuous Dynamical Systems*, 25(3):963–979, 2009.

[43] LU, G.; YANG, Y. **A sharpened Moser–Pohozaev–Trudinger inequality with mean value zero in $\mathbb{R}^2$**. *Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications*, 70(8):2992–3001, 2009.

[44] LUTWAK, E.; YANG, D.; ZHANG, G. **L^p affine isoperimetric inequalities**. *Journal of Differential Geometry*, 56(1):111–132, 2000.

[45] LUTWAK, E.; YANG, D.; ZHANG, G. **Sharp affine L^p sobolev inequalities**. *Journal of Differential Geometry*, 62(1):17–38, 2002.

[46] MARCOS DO Ó, J.; DE SOUZA, M. **On a class of singular Trudinger-Moser type inequalities and its applications**. *Mathematische Nachrichten*, 284(14-15):1754–1776, 2011.

[47] MEDEIROS, E.; SEVERO, U.; OTHERS. **On a quasilinear nonhomogeneous elliptic equation with critical growth in $\mathbb{R}^n$**. *Journal of Differential Equations*, 246(4):1363–1386, 2009.

[48] MOSER, J. **A sharp form of an inequality by N. Trudinger**. *Indiana University Mathematics Journal*, 20(11):1077–1092, 1971.

[49] NGUYEN, V. H. **Extremal functions for the Moser–Trudinger inequality of Adimurthi–Druet type in $W^{1,N}$ ($\mathbb{R}^N$)**. *Communications in Contemporary Mathematics*, 21(04):1850023, 2019.

[50] ONOFRI, E. **On the positivity of the effective action in a theory of random surfaces**. *Communications in Mathematical Physics*, 86(3):321–326, 1982.

[51] PANDA, R. **Nontrivial solution of a quasilinear elliptic equation with critical growth in $\mathbb{R}^n$**. In: *Proceedings of the Indian Academy of Sciences-Mathematical Sciences*, volume 105, p. 425–444. Springer India, 1995.

[52] PETERSEN, P. **Riemannian geometry**, volume 171. Springer, 2006.

[53] POHOZAEV, S. **The Sobolev embedding in the special case pl=n**. In: *Proceedings of the Technical Scientific Conference on Advances of Scientific Reseach 1964-1965, Mathematics Sections*, p. 158–170, 1964.

[54] RABINOWITZ, P. H. **On a class of nonlinear Schrödinger equations**. *Zeitschrift Angewandte Mathematik und Physik*, 43(2):270–291, 1992.

[55] RUF, B. **A sharp trudinger-moser type inequality for unbounded domains in $\mathbb{R}^2$**. *Journal of Functional Analysis*, 219(2):340–367, 2005.

[56] STRUWE, M. **Critical points of embeddings of $H_0^{1,n}$ into Orlicz spaces**. In: *Annales de l'Institut Henri Poincaré C, Analyse non linéaire*, volume 5, p. 425–464. Elsevier, 1988.

[57] TRUDINGER, N. S. **On imbeddings into Orlicz spaces and some applications**. *Journal of Mathematics and Mechanics*, 17(5):473–483, 1967.

[58] YANG, Y. **Extremal functions for a sharp Moser–Trudinger inequality**. *International Journal of Mathematics*, 17(03):331–338, 2006.

[59] YANG, Y. **Extremal functions for Moser–Trudinger inequalities on 2-dimensional compact Riemannian manifolds with boundary**. *International Journal of Mathematics*, 17(03):313–330, 2006.

[60] YANG, Y. **A sharp form of Moser–Trudinger inequality in high dimension**. *Journal of Functional Analysis*, 239(1):100–126, 2006.

[61] YANG, Y. **A Sharp Form of the Moser-Trudinger Inequality on a Compact Riemannian Surface**. *Transactions of the American Mathematical Society*, 359(12):5761–5776, 2007.

[62] YANG, Y. **A sharp form of trace Moser–Trudinger inequality on compact Riemannian surface with boundary**. *Mathematische Zeitschrift*, 255:373–392, 2007.

[63] YANG, Y. **Existence of positive solutions to quasi-linear elliptic equations with exponential growth in the whole Euclidean space**. *Journal of Functional Analysis*, 262(4):1679–1704, 2012.

[64] YANG, Y. **Trudinger-Moser inequalities on complete noncompact Riemannian manifolds**. *Journal of Functional Analysis*, 263(7):1894–1938, 2012.

[65] YANG, Y. **Extremal functions for Trudinger–Moser inequalities of Adimurthi–Druet type in dimension two**. *Journal of Differential Equations*, 258(9):3161–3193, 2015.

[66] YANG, Y.; OTHERS. **An interpolation of Hardy inequality and Trudinger-Moser inequality in $\mathbb{R}^n$ and its applications**. *International Mathematics Research Notices*, 2010(13):2394–2426, 2010.

[67] ZHANG, C.; CHEN, L. **Equivalence of Subcritical and Critical Adams Inequalities in $W^{m,2}(\mathbb{R}^{2m})$ and Existence and Non-existence of Extremals for Adams Inequalities under Inhomogeneous Constraints**. *Potential Analysis*, 59(4):2071–2091, 2023.