Universidade Federal de Goiás (UFG)
Instituto de Matemática e Estatística (IME)
Programa de Pós Graduação em Matemática

Douglas Matheus Nunes Bonfim

Estudo do Problema de Valor Inicial para a Equação de Benjamin-Ono Dissipativa (dBO) em Espaços de Sobolev com Peso

Goiânia
2025

TERMO DE CIÊNCIA E DE AUTORIZAÇÃO (TECA) PARA DISPONIBILIZAR VERSÕES ELETRÔNICAS DE TESES

E DISSERTAÇÕES NA BIBLIOTECA DIGITAL DA UFG

Na qualidade de titular dos direitos de autor, autorizo a Universidade Federal de Goiás (UFG) a disponibilizar, gratuitamente, por meio da Biblioteca Digital de Teses e Dissertações (BDTD/UFG), regulamentada pela Resolução CEPEC nº 832/2007, sem ressarcimento dos direitos autorais, de acordo com a Lei 9.610/98, o documento conforme permissões assinaladas abaixo, para fins de leitura, impressão e/ou download, a título de divulgação da produção científica brasileira, a partir desta data.

O conteúdo das Teses e Dissertações disponibilizado na BDTD/UFG é de responsabilidade exclusiva do autor. Ao encaminhar o produto final, o autor(a) e o(a) orientador(a) firmam o compromisso de que o trabalho não contém nenhuma violação de quaisquer direitos autorais ou outro direito de terceiros.

1. Identificação do material bibliográfico

[X] Dissertação   [ ] Tese   [ ] Outro*:_____________

*No caso de mestrado/doutorado profissional, indique o formato do Trabalho de Conclusão de Curso, permitido no documento de área, correspondente ao programa de pós-graduação, orientado pela legislação vigente da CAPES.

Exemplos: Estudo de caso ou Revisão sistemática ou outros formatos.

2. Nome completo do autor

Douglas Matheus Nunes Bonfim

3. Título do trabalho

Estudo do Problema de Valor Inicial para a Equação de Benjamin-Ono Dissipativa (dBO) em Espaços de Sobolev com Peso

4. Informações de acesso ao documento (este campo deve ser preenchido pelo orientador)

Concorda com a liberação total do documento [x] SIM   [ ] NÃO[1]

[1] Neste caso o documento será embargado por até um ano a partir da data de defesa. Após esse período, a possível disponibilização ocorrerá apenas mediante:
a) consulta ao(à) autor(a) e ao(à) orientador(a);
b) novo Termo de Ciência e de Autorização (TECA) assinado e inserido no arquivo da tese ou dissertação.
O documento não será disponibilizado durante o período de embargo.
Casos de embargo:
- Solicitação de registro de patente;
- Submissão de artigo em revista científica;
- Publicação como capítulo de livro;
- Publicação da dissertação/tese em livro.

Obs. Este termo deverá ser assinado no SEI pelo orientador e pelo autor.

Documento assinado eletronicamente por **Edcarlos Domingos Da Silva**, **Professor do Magistério Superior**, em 15/12/2025, às 10:08, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no § 3º do art. 4º do Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020 .

Documento assinado eletronicamente por **Douglas Matheus Nunes Bonfim**, **Discente**, em 15/12/2025, às 10:34, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no § 3º do art. 4º do Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020.

A autenticidade deste documento pode ser conferida no site https://sei.ufg.br/sei/controlador_externo.php?acao=documento_conferir&id_orgao_acesso_externo=0, informando o código verificador **5858853** e o código CRC **FE9602FA**.

Referência: Processo nº 23070.059765/2025-94 SEI nº 5858853

DOUGLAS MATHEUS NUNES BONFIM

Estudo do Problema de Valor Inicial para a Equação de Benjamin-Ono Dissipativa (dBO) em Espaços de Sobolev com Peso

Dissertação apresentada ao Programa de Pós–Graduação em Matemática, do Instituto de Matemática e Estatística (IME) da Universidade Federal de Goiás (UFG), como requisito para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Área de concentração: Análise.

Orientador: Prof. Dr. Edcarlos Domingos da Silva

Co-Orientador: Prof. Dr. Alysson Tobias Ribeiro da Cunha

Goiânia
2025

Ficha de identificação da obra elaborada pelo autor, através do
Programa de Geração Automática do Sistema de Bibliotecas da UFG.

Bonfim, Douglas Matheus Nunes
Estudo do Problema de Valor Inicial para a Equação de Benjamin Ono Dissipativa (dBO) em Espaços de Sobolev com Peso [manuscrito] / Douglas Matheus Nunes Bonfim. - 2025.
58 f.

Orientador: Prof. Edcarlos Domingos da Silva; co-orientador Alysson Tobias Ribeiro da Cunha.
Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal de Goiás, Instituto de Matemática e Estatística (IME), Programa de Pós-Graduação em Matemática, Goiânia, 2025.
Bibliografia.

1. Boa colocação. 2. Espaço de Sobolev com peso. 3. dBO. 4. Derivada Fracionária. 5. Derivada de Stein. I. Silva, Edcarlos Domingos da , orient. II. Título.

CDU 517

UFG

UNIVERSIDADE FEDERAL DE GOIÁS

INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA

ATA DE DEFESA DE DISSERTAÇÃO

Ata nº **16** da sessão de Defesa de Dissertação de **Douglas Matheus Nunes Bonfim**, que confere o título de Mestre em **Matemática**, na área de concentração em **Análise**.

Ao **primeiro dia do mês de dezembro do ano de dois mil e vinte e cinco**, a partir da(s) **14h00**, de forma híbrida no auditório do IME e Google Meet, realizou-se a sessão pública de Defesa de Dissertação intitulada **"Boa colocação do problema de Cauchy para a equação de Benjamin Onodissipativa (dBO)"**. Os trabalhos foram instalados pelo Orientador, Professor Doutor **Edcarlos Domingos da Silva - IME/UFG** com a participação dos demais membros da Banca Examinadora: Professor Doutor **Marcos Leandro Mendes Carvalho - IME/UFG**, membro titular interno; Professor Doutor **Ademir Pastor Ferreira - IMECC/UNICAMP**, membro titular externo. Durante a arguição os membros da banca **fizeram** sugestão de alteração do título do trabalho. A Banca Examinadora reuniu-se em sessão secreta a fim de concluir o julgamento da Dissertação, tendo sido o candidato **aprovado** pelos seus membros. Proclamados os resultados pelo Professor Doutor **Edcarlos Domingos da Silva**, Presidente da Banca Examinadora, foram encerrados os trabalhos e, para constar, lavrou-se a presente ata que é assinada pelos Membros da Banca Examinadora, ao **primeiro dia do mês de dezembro do ano de dois mil e vinte e cinco**.

TÍTULO SUGERIDO PELA BANCA

Estudo do Problema de Valor Inicial para a Equação de Benjamin–Ono Dissipativa (dBO) em Espaços de Sobolev com Peso.

Documento assinado eletronicamente por **Ademir Pastor Ferreira**, **Usuário Externo**, em 02/12/2025, às 09:11, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no § 3º do art. 4º do Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020.

Documento assinado eletronicamente por **Marcos Leandro Mendes Carvalho**, **Professor do Magistério Superior**, em 02/12/2025, às 14:30, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no § 3º do art. 4º do Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020 .

Documento assinado eletronicamente por **Edcarlos Domingos Da Silva**, **Professor do Magistério Superior**, em 02/12/2025, às 15:51, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no § 3º do art. 4º do Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020 .

A autenticidade deste documento pode ser conferida no site https://sei.ufg.br/sei/controlador_externo.php?acao=documento_conferir&id_orgao_acesso_externo=0, informando o código verificador **5794954** e o código CRC **E81D68FB**.

Referência: Processo nº 23070.059765/2025-94 SEI nº 5794954

Douglas Matheus Nunes Bonfim

Bacharel em Matemática pelo Instituto de Matemática e Estatística - IME/UFG em 2023

Dedico este trabalho à minha família, que me incentivou em cada passo, aos meus amigos, por serem apoio nos momentos de dúvida e inseguranças, aos meus professores, por todo o aprendizado compartilhado, e a meu orientador, que com paciência, dedicação e muita solicitude me guiou e inspirou durante esta jornada.

Agradecimentos

Agradeço inicialmente à minha mãe Dolores, por ter me dado a existência, amor, carinho e ter sempre me incentivado a buscar o conhecimento e a persistir nos estudos, mesmo não podendo ver a conclusão deste mestrado.

Aos meus familiares por sempre terem acreditado em mim. Especialmente minhas tias Rosiley e Socorro que estiveram comigo em todos os momentos, mesmo estando a milhares de quilômetros de distância.

Aos meus queridos amigos pela companhia, pelos cafés no REUNI e na EMAC e pelas boas conversas. Em especial ao José e Neila por me aturarem e sempre toparem ir no Passeio comigo pra distrair a cabeça e olhar cacarecos. À Dany, Wellimar, Akemi, Clara, Jéssica, Nilma, Gisele (Minhau), por estarem comigo sempre dando apoio nesta jornada e às minhas fieis companheiras de mestrado, Thayline e Maria Eduarda, por serem uma fonte de inspiração, resiliência, coragem, bom humor e por sempre terem me apoiado, mesmo quando eu só queria desistir.

Ao meu Orientador Alysson pela escolha do tema e por sua paciência, atenção e compreensão.

À CAPES pelo apoio financeiro.

The people who are the most successful in this world are the ones who don't stop asking questions, who don't stop being curious, and who don't stop searching for the truth.

Taylor Swift,
Speech at the Billboard Women in Music event.

Resumo

Bonfim, Douglas. **Estudo do Problema de Valor Inicial para a Equação de Benjamin-Ono Dissipativa (dBO) em Espaços de Sobolev com Peso**. Goiânia, 2025. 58p. Dissertação de Mestrado. Instituto de Matemática e Estatística (IME), Universidade Federal de Goiás (UFG).

Neste trabalho mostramos a Boa Colocação em espaços de Sobolev com peso para o problema de valor inicial associado a equação dissipativa de Benjamin-Ono (dBO). Determinamos propriedades de Persistência da solução em espaços de Sobolev com peso $\mathcal{Z}_{s,r}$, assim como propriedades de continuação única nestes espaços.

Palavras–chave

Boa colocação, dBO, Espaço de Sobolev com peso, Transformada de Fourier, Derivada Fracionária, Derivada de Stein

Abstract

Bonfim, Douglas. **Study of the Initial Value Problem for the Dissipative Benjamin-Ono Equation (dBO) in Weighted Sobolev Spaces**. Goiânia, 2025. 58p. MSc. Dissertation. Instituto de Matemática e Estatística (IME), Universidade Federal de Goiás (UFG).

In this work we show the well-posedness in weighted Sobolev spaces for the initial value problem associated with the dissipative Benjamin-Ono (dBO) equation. We determine persistence properties of the solution in weighted Sobolev spaces $\mathcal{Z}_{s,r}$, as well as unique continuation in these spaces.

Keywords

Well-posedness, dBO equation, weighted Sobolev spaces, Fourier Transform, Fractional derivative, Stein derivative

Sumário

Introdução

Este trabalho é baseado no artigo [5] onde faremos o estudo do problema de valor inicial (PVI) para a equação de Benjamin-Ono dissipativa (dBO),

$$\begin{cases} u_t + \mathcal{H}\partial_x^2 u + D^\alpha u + uu_x = 0 \\ u(x,0) = \phi(x), \end{cases} \tag{1-1}$$

onde, $1 \leq \alpha \leq 2$ com $\alpha = 1 + a$ e D^s denota a derivada fracionária de ordem s, definida via transformada de Fourier como

$$D^s f(x) = (|\xi|^s \hat{f})^\vee(x), \tag{1-2}$$

e $\mathcal{H}$ representa a transformada de Hilbert definida como

$$\begin{aligned} \mathcal{H}f(x) &= p.v.\frac{1}{\pi}\int_{\mathbb{R}} \frac{f(y)}{x-y}\,dy \\ &= \mathcal{F}^{-1}(-isgn(\xi)\hat{f}(\xi))(x). \end{aligned} \tag{1-3}$$

Note que ao tomarmos $\alpha = 0$, (1-1) denota a equação de Benjamin-Ono (BO), que representa um modelo para a propagação de ondas internas unidirecionais de longo comprimento de onda em fluidos estratificados profundos. Dentro de espaços de Sobolev, a BO tem sido bastante estudada nos últimos anos, em relação a boa colocação global e local, veja [3], [12] e [19]. E também em relação ao princípio de continuação único, veja [9], [13] e [14].

Ao tomar $\alpha = 2$, (1-1) se torna a equação de Benjamin-Ono-Burguers (BOB)

$$\partial_t u + \mathcal{H}\partial_x^2 u - \partial_x^2 u + uu_x = 0.$$

A BOB foi inicialmente deduzida por Edwin e Roberts em [6]. Otani obteve a boa colocação global em $H^s(\mathbb{R})$, onde $s > -\frac{1}{2}$, veja [17]. Em seguida, Vento demonstrou que este índice é crítico no sentido de que para $s < -\frac{1}{2}$, $\phi \to u$ não é de classe C^3 de H^s em H^s, veja [20].

Quanto a dBO, sua boa colocação foi primeiro estudada por Vento [20]. Ele obteve a boa colocação global em H^s para o caso em que $1 < \alpha \leq 2$, onde $s > -\frac{\alpha}{4}$ e a má colocação quando $s < -\frac{\alpha}{4}$, no sentido de que $\phi \to u$ não é C^3 numa vizinhança da origem. Tomando $0 \leq \alpha < 1$, ele mostrou que em H^s, para todo $s \in \mathbb{R}$ o problema é mal colocado, no sentido de que $\phi \to u$ não é C^2 na origem.

Ao longo deste trabalho a solução estudada de (1-1) será a solução da equação integral associada à este problema e sua dedução será realizada no capítulo 2.

A seguir, temos os resultados que serão provados neste trabalho:

Teorema 1.1 *Seja $a \in (0,1]$, então as seguintes afirmações são verdadeiras*

i) Sejam $s \geq r > 0$ e $r < \frac{3}{2} + a$. Então, o PVI associado a dBO é globalmente bem colocado em $\mathcal{Z}_{s,r}$.

ii) Sejam $r \in [\frac{3}{2} + a, \frac{5}{2} + a)$ e $r \leq s$. Então, o PVI associado a dBO é globalmente bem colocado em $\dot{\mathcal{Z}}_{r,s}$.

Teorema 1.2 *Seja $u \in C([0,T]; \mathcal{Z}_{1,1})$ uma solução do PVI associado a dBO, com $a \in (0,1]$. Se existirem dois tempos diferentes $t_1, t_2 \in [0,T]$ tais que $u(t_j) \in \mathcal{Z}_{\frac{3}{2}+a,\frac{3}{2}+a}$, com $j = 1,2$, então*

$$\hat{u}(0,t) = 0, \forall t \in [0,T].$$

Teorema 1.3 *Seja $u \in C([0,T]; \mathcal{Z}_{2,2})$ uma solução do PVI associado a dBO,com $a \in (0,1]$. Se existirem três tempos diferentes $t_1, t_2, t_3 \in [0,T]$ tais que $u(t_j) \in \mathcal{Z}_{\frac{5}{2}+a,\frac{5}{2}+a}$, com $j = 1,2,3$, então existe $\bar{t}$, com $t_1 < \bar{t} < t_2$ tal que*

$$u(x,t) = 0, \forall x \in \mathbb{R}, t \geq \bar{t}.$$

Para a demonstração do Teorema 1.1 definiremos o conceito de boa colocação global.

Definição 1.4 *Sejam X e Y espaços de Banach e seja $F : Y \longrightarrow X$ uma função contínua. Dizemos que o problema*

$$\begin{cases} \partial_t u(t) = F(u(t)) \in X \\ u(0) = \phi \in Y, \end{cases} \tag{1-4}$$

é bem colocado globalmente quando existe uma única solução $u \in C([0,\infty), Y)$ tal que

1. $u(0) = \phi$ e

$$\lim_{h\to 0} \left\| \frac{u(t+h) - u(t)}{h} - F(u(t)) \right\|_X = 0, \forall t \in [0,\infty), \tag{1-5}$$

com a derivada em $t = 0$ tomada pela direita,

2. *a aplicação* $\phi \mapsto u$ *é contínua. Mais precisamente, dados* $\phi_n \xrightarrow{Y} \phi_\infty$ *e* $u_n, n = 1,2,3,...,\infty$ *as soluções correspondentes. Então para cada* $T > 0$ *temos que*

$$\lim_{n\to\infty} sup_{[0,T]} \|u_n(t) - u(t)_\infty\|_Y = 0. \tag{1-6}$$

Note que nesta definição está implícita a propriedade de persistência da solução, isto é, se $\phi \in Y$*, logo* $u(t) \in Y, \forall t \in [0,T]$.

O trabalho está dividido em cinco Capítulos, onde no Capítulo 2 apresentaremos notações e resultados essenciais ao trabalho. No Capítulo 3 faremos a demonstração do Teorema 1.1, onde mostraremos a boa colocação global de (1-1) além de observar que o termo dissipativo na dBO, $D^\alpha u$, tem o efeito de abaixar os índices r e s no espaço com peso $\mathcal{Z}_{s,r}$.

Nos Capitulos 4 e 5 demonstraremos os Teoremas 1.2 e 1.3, respectivamente. Esses Teoremas nos mostram que o Teorema 1.1 é sharp, ou seja, que não se pode conseguir índices r maiores que $\frac{3}{2}+a$ tais que as partes i) e ii) do Teorema 1.1 sejam válidas. E reciprocamente, mostram também que os índices $\frac{3}{2}+a$ e $\frac{5}{2}+a$ não podem ser diminuídos.

Como consequências destes três Teoremas 1.1-1.3, temos que o decaimento $r = \frac{3}{2}+a-$ é "sharp", ou seja, a solução u de (1-1) com valor inicial $\phi \in \mathcal{Z}_{s,r}$ com $\frac{3}{2}+a \leq r \leq s$ e $\hat{\phi}(0) \neq 0$ é de tal forma que $u \in C([0,T];\mathcal{Z}_{s,(\frac{3}{2}+a)-})$ para $T > 0$, mas não existe uma solução não-trivial u com valor inicial ϕ tal que $u \in C([0,T];\mathcal{Z}_{s,(\frac{3}{2}+a)})$. De forma similar, o decaimento $r = \frac{5}{2}+a-$ é o maior possível tal que para algum $T > 0$, existem soluções não-triviais $u \in C([0,T];\dot{\mathcal{Z}}_{s,(\frac{5}{2}+a)-})$, mas não existe uma solução não-trivial $u \in C([0,T];\dot{\mathcal{Z}}_{s,(\frac{5}{2}+a)})$.

CAPÍTULO 2

Resultados Preliminares

Neste capítulo apresentaremos os resultados essenciais para o desenvolvimento deste trabalho.

2.1 Notações

Usaremos a notação $a \lesssim b$ para indicar que existe uma constante $c > 0$ tal que $a \leq cb$. Também usaremos a notação $a \lesssim_l b$ para indicar que a constante c depende apenas do parâmetro l.

Definimos a transformada de Fourier de uma função f como:

$$\hat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}} e^{-i\xi x} f(x)\, dx.$$

Se $s \in \mathbb{R}$, denotaremos $H^s := H^s(\mathbb{R})$ como o espaço de Sobolev definido por

$$H^s(\mathbb{R}) = \{f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}) : \|f\|_{H^s} < \infty\}$$

onde $\|f\|_{H^s} = \|\langle\xi\rangle^s \hat{f}\|_{L^2_\xi}$, $\langle\xi\rangle = (1+\xi^2)^{1/2}$ e $\mathcal{S}'$ representa o conjunto de todas as distribuições temperadas, veja [15].

Adicionalmente, o potencial de Bessel J^s é definido por

$$(J^s f)^\wedge(\xi) = \langle\xi\rangle^s \hat{f}(\xi), \forall f \in \mathcal{S}',$$

e consequentemente $\|J^s f\|_{L^2_x} = \|f\|_{H^s}$.

O espaço de Sobolev com peso é definido por

$$\mathcal{Z}_{s,r} = H^s(\mathbb{R}) \cap L^2_r(\mathbb{R}),$$

onde $L^2_r(\mathbb{R}) = L^2(\langle x\rangle^{2r}\, dx)$ e a norma neste espaço dada por $\|\cdot\|^2_{\mathcal{Z}_{s,r}} = \|\cdot\|^2_{H^s} + \|\cdot\|^2_{L^2_r}$.

Também utilizaremos o seguinte espaço:

$$\dot{\mathcal{Z}}_{s,r} = \{f \in \mathcal{Z}_{s,r} : \hat{f}(0) = 0\}.$$

Para auxiliar nas estimativas das demonstrações dos teoremas nos próximos capítulos, utilizaremos a função $\chi \in C_0^\infty$, com $supp \chi \subset [-2,2]$ e $\chi \equiv 1$ em $(-1,1)$. Também vamos denotar a norma L^2 na variável x por $\|\cdot\|_{L^2_x} := \|\cdot\|$.

2.2 Resultados

Proposição 2.1 *Sejam* $\delta, \nu > 0$ *tais que* $J^\delta f \in L^2(\mathbb{R})$ *e* $\langle x \rangle^\delta \in L^2(\mathbb{R})$. *Então para qualquer* $\beta \in (0,1)$,

$$\|J^{\beta\delta}(\langle x \rangle^{(1-\beta)\nu} f)\| \leq c \|\langle x \rangle^\nu f\|^{1-\beta} \|J^\delta f\|^\beta. \tag{2-1}$$

Prova. Veja [9]. □

Observação 2.2 *Assumindo* u *suficientemente regular, obtemos para cada* t *em que a solução existe que*

$$\int u(x,t)\,dx = \int \phi(x)\,dx.. \tag{2-2}$$

Prova. Tomemos u suficientemente regular, logo podemos calcular a integral $\int_{\mathbb{R}} u(x,t)\,dx$ e também podemos derivar esta expressão em relação a t, onde obtemos

$$\begin{aligned}
\partial_t \int_{\mathbb{R}} u(x,t)\,dx &= \int_{\mathbb{R}} u_t\,dx \\
&= \int_{\mathbb{R}} (-\mathcal{H}\partial_x^2 u - D^\alpha u - u u_x)\,dx \\
&= -\int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{H}\partial_x^2 u\,dx - \int_{-\infty}^{\infty} D^\alpha u\,dx - \int_{-\infty}^{\infty} u u_x\,dx, \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Assim, temos que $\int_{\mathbb{R}} u(x,t)\,dx = K, \forall t \in \mathbb{R}$. Pela condição inicial de (1-1) temos que

$$\int_{\mathbb{R}} u(x,0)\,dx = \int_{\mathbb{R}} \phi(x)\,dx = K,$$

portanto,

$$\int_{\mathbb{R}} u(x,t)\,dx = \int_{\mathbb{R}} \phi(x)\,dx,$$

e assim, concluímos a demonstração para a identidade (2-2). □

Onde (2-2) implica que

$$\hat{u}(0,t) = \hat{\phi}(0),. \tag{2-3}$$

Prova.

$$\hat{u}(0,t) = \int_{\mathbb{R}} e^{-i\xi\cdot 0} u(x,t)\,dx = \int_{\mathbb{R}} u(x,t)\,dx$$

e

$$\hat{\phi}(0) = \int_{\mathbb{R}} e^{-i\xi\cdot 0} \phi(x)\,dx = \int_{\mathbb{R}} \phi(x)\,dx.$$

Portanto, por (2-2) segue que

$$\hat{u}(0,t) = \hat{\phi}(0).$$

□

Temos também as seguinte relações assumindo-se u suficientemente regular:

$$\frac{d}{dt}\|u(t)\|^2 < 0, \tag{2-4}$$

Prova. Vamos multiplicar (1-1) por u e integrar em relação a x, onde obtemos

$$\int uu_t\,dx + \int u\mathcal{H}\partial_x^2 u\,dx + \int uD^\alpha u\,dx + \int u^2 u_x\,dx = 0,$$

que implica em

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|u(t)\|^2 + \int uD^\alpha u\,dx + \int u^2 u_x\,dx = 0.$$

Mas note que, integrando por partes obtemos

$$\int u^2 u_x\,dx = -2\int u^2 u_x\,dx.$$

Logo,

$$\int u^2 u_x\,dx = 0.$$

E também temos que

$$\begin{aligned}\int uD^\alpha u\,dx &= \int \hat{u}\overline{\widehat{D^\alpha u}}\,dx \\ &= \int \hat{u}|\xi|^\alpha \overline{\hat{u}}\,dx \\ &= \int |\xi|^\alpha |\hat{u}|^2\,dx \\ &\geq 0.\end{aligned}$$

Assim, segue que

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|u(t)\|^2 < 0.$$

□

e

$$\frac{d}{dt}\int xu(x,t)\,dx = \frac{1}{2}\|u(t)\|^2. \tag{2-5}$$

Prova.

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\int xu(x,t)\,dx &= \int \frac{d}{dx}xu(x,t)\,dx \\
&= \int xu_t\,dx \\
&= -\int x\mathcal{H}\partial_x^2 u\,dx - \int xD^{\alpha}u\,dx - \frac{1}{2}\int x\partial_x u^2\,dx \\
&= \frac{1}{2}\int u^2\,dx \\
&= \frac{1}{2}\|u(t)\|^2.
\end{aligned}$$

□

Ao definir $L_s^p := (1-\Delta)^{-s/2}L^p(\mathbb{R}^n)$, o próximo teorema trará uma caracterização para estes espaços.

Teorema 2.3 *Seja $b \in (0,1)$ e $\frac{2n}{n+2b} < p < \infty$. Então $f \in L_b^p(\mathbb{R}^n)$ se, e somente se*

a) $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$,
b) $\mathcal{D}^b f(x) = (\int_{\mathbb{R}^n} \frac{|f(x)-f(y)|^2}{|x-y|^{n+2b}}\,dy)^{1/2} \in L^p(\mathbb{R}^n)$, com

$$\|f\|_{b,p} \equiv \|(1-\Delta)^{b/2}f\|_p = \|J^b f\|_p \simeq \|f\|_p \simeq \|f\|_p + \|D^b f\|_p \simeq \|f\|_p + \|\mathcal{D}^b f\|_p, \tag{2-6}$$

onde para $s \in \mathbb{R}$, $D^s = (-\Delta)^{s/2}$ com $D^s = (\mathcal{H}\partial_x)^s$, se $n = 1$.

Prova. Veja [18]. □

Fazendo $p = 2$ e $b \in (0,1)$ no item b) do Teorema 2.3 obtemos a seguinte desigualdade:

$$\|\mathcal{D}^b(fg)\|_2 \leq \|f\mathcal{D}^b g\|_2 + \|g\mathcal{D}^b f\|_2. \tag{2-7}$$

Lema 2.4 *Seja $b \in (0,1)$ e h uma função mensurável em $\mathbb{R}$ tal que $h, h' \in L^\infty$. Então, para todo $x \in \mathbb{R}$*

$$\mathcal{D}^b h(x) \leq \|h\|_{L^\infty} + \|h'\|_{L^\infty}. \tag{2-8}$$

Além disso,

$$\|\mathcal{D}^b(hf)\| \leq \|\mathcal{D}^b h\|_\infty \|f\| + \|h\|_\infty \|\mathcal{D}^b f\|. \tag{2-9}$$

Prova. Veja [8]. □

Agora retornando a equação associada à dBO, temos que a integral associada ao PVI (1-1) é dada por:

$$u(t) = U(t)\phi - \int_0^t U(t-\tau)z(\tau)\,d\tau, \tag{2-10}$$

no qual $z = \frac{1}{2}\partial_x u^2$, e o semigrupo $U(t)$ é definido como:

$$(U(t)\phi)^\wedge(\xi) = e^{-it\xi|\xi|-t|\xi|^\alpha}\hat{\phi}, t \in [0,\infty). \tag{2-11}$$

Prova. Vamos aplicar a transformada de Fourier à dBO (1-1) e resolver a EDO:

$$\begin{aligned}(u_t + \mathcal{H}\partial_x^2 u + D^\alpha u)^\wedge &= (-uu_x)^\wedge\\ (u_t)^\wedge + (\mathcal{H}\partial_x^2 u)^\wedge + (D^\alpha u)^\wedge &= (G)^\wedge,\end{aligned}$$

onde definimos $G = uu_x$, assim

$$\begin{aligned}\widehat{u}_t + isgn(\xi)\xi^2\widehat{u} + |\xi|^\alpha\widehat{u} &= \widehat{G}\\ \widehat{u}_t + i\xi|\xi|\widehat{u} + |\xi|^\alpha\widehat{u} &= \widehat{G}\\ \widehat{u}_t + (i\xi|\xi| + |\xi|^\alpha)\widehat{u} &= \widehat{G},\end{aligned}$$

aplicando o metodo do Fator integrante com $\mu(t) = e^{(i\xi|\xi|+|\xi|^\alpha)t}$ obtemos

$$\frac{d}{dt}[\mu(t)\hat{u}] = \mu(t)\hat{G},$$

e integrando com relação a τ em $[0,t]$ obtemos

$$\int_0^t \frac{d}{d\tau}[\mu(\tau)\hat{u}]\,d\tau = \int_0^t \mu(\tau)\hat{G}\,d\tau,$$

e pela condição inicial de (1-1),

$$\mu(t)\hat{u}(t) = \hat{\phi}(x) + \int_0^t \mu(\tau)\hat{G}\,d\tau,$$

multiplicando ambos os lados por $\mu(-t)$ obtemos

$$\hat{u}(t) = \hat{\phi}\mu(-t) + \int_0^t \mu(\tau - t)\hat{G}\,d\tau.$$

Definindo-se $(U(t)\phi)^\wedge(\xi) = e^{(-it\xi|\xi|-|\xi|^\alpha t)\hat{\phi}}$, com $t \in [0,\infty)$, ao aplicar a Transformada de Fourier Inversa, obtemos

$$u(t) = U(t)\phi - \int_0^t U(t-\tau)uu_x\,d\tau,$$

e como $uu_x = \frac{1}{2}\partial_x u^2 = z(t)$, segue que

$$u(t) = U(t)\phi - \int_0^t U(t-\tau)z(\tau)\,d\tau.$$

$\square$

A partir de (2-11), vamos definir $\psi(\xi,t) = e^{-it\xi|\xi|-t|\xi|^{\alpha}}$, onde $\alpha = 1+a$, $a \in (0,1]$, e calcular as derivadas até terceira ordem de $\psi(\xi,t)\hat{\phi}$:

$$\partial_\xi(\psi(\xi,t)\hat{\phi}) = \Big[-\big(t(1+a)|\xi|^a sgn(\xi) + 2it|\xi|\big)\hat{\phi} + \partial_\xi\hat{\phi}\Big]\psi(\xi,t), \tag{2-12}$$

$$\begin{aligned}\partial_\xi^2(\psi(\xi,t)\hat{\phi}) = \Big[\Big(&t^2(1+a)^2|\xi|^{2a} - t(1+a)a|\xi|^{a-1} + 4it^2(1+a)|\xi|^{a+1}sgn(\xi) - 4t^2\xi^2 - \\ &-2itsgn(\xi)\Big)\hat{\phi} - \Big(2t(1+a)|\xi|^a sgn(\xi) + 4it|\xi|\Big)\partial_\xi\hat{\phi} + \partial_\xi^2\hat{\psi}\Big]\psi(\xi,t),\end{aligned} \tag{2-13}$$

$$\begin{aligned}\partial_\xi^3(\psi(\xi,t)\hat{\phi}) = \Big[\Big(&3t^2a(1+a)|\xi|^{2a-1}sgn(\xi) - t(a^2-1)a|\xi|^{a-2}sgn(\xi) - 4it\delta_\xi - \\ &-(1+a)^3t^3|\xi|^{3a}sgn(\xi) + 2i(1+a)(4+3a)t^2|\xi|^a sgn(\xi) - \\ &-6i(1+a)^2t^3|\xi|^{2a+1} + 12(1+a)t^3|\xi|^{a+2}sgn(\xi) + 8it^3|\xi|^3 - \\ &-12t^2\xi\Big)\hat{\phi} + \\ &+\Big(3(1+a)^2t^2|\xi|^{2a} + 12i(1+a)t^2|\xi|^{a+1}sgn(\xi) - 3a(1+a)t|\xi|^{a-1} - \\ &-12t^2\xi^2 - 6itsgn(\xi)\Big)\partial_\xi\hat{\phi} - \Big(3(1+a)t|\xi|^a sgn(\xi) + 6it|\xi|\Big)\partial_\xi^2\hat{\phi} + \\ &+\partial_\xi^3\hat{\phi}\Big]\psi(\xi,t).\end{aligned} \tag{2-14}$$

O termo δ_ξ acima representa a função delta de Dirac com respeito a variavél ξ.

Os próximos resultados nos trarão desigualdades que vão ser muito importantes para calcular algumas estimativas nas demontrações vindouras, assim como trazer caracterizações que serão muito utéis para para verificar se alguns elementos pertencem ou não a $L^2(\mathbb{R})$.

Lema 2.5 *Seja $\lambda > 0$, então*

$$\|\xi^{2\lambda}\psi(\xi,t)\|_{L^\infty_\xi} \leq c(a,\lambda)t^{-\frac{2\lambda}{a+1}}, \tag{2-15}$$

onde

$$c(a,\lambda) = \left(\frac{(a+1)e}{2\lambda}\right)^{-\frac{2\lambda}{a+1}}.$$

Mais ainda, temos que

$$\||\xi|^\sigma e^{-t|\xi|^{1+a}}\|_{L^2_\xi} = c_{\sigma,a}t^{-\frac{2\sigma+1}{2(1+a)}}. \tag{2-16}$$

Prova. Temos que

$$\begin{aligned}|\xi^{2\lambda}\psi(\xi,t)| &= |\xi^{2\lambda}e^{-it\xi|\xi|-t|\xi|^{1+a}}|\\ &\leq |\xi^{2\lambda}||e^{-it\xi|\xi|}||e^{-t|\xi|^{1+a}}|\\ &\leq \xi^{2\lambda}e^{-t|\xi|^{1+a}}.\end{aligned}$$

Agora vamos definir $\varphi(\xi,t) := \xi^{2\lambda}e^{-t|\xi|^{1+a}}$ e calcular $\partial_\xi\varphi(\xi,t)$, onde obtemos

$$\partial_\xi\varphi(\xi,t) = \xi^{2\lambda}e^{-t|\xi|^{1+a}}\Big(\frac{2\lambda}{\xi} - t(1+a)|\xi|^a\Big).$$

Note que $\partial_\xi\varphi(\xi,t) = 0$ se, e somente se, $(\frac{2\lambda}{\xi} - t(1+a)|\xi|^a)$, onde obtemos a seguinte igualdade:

$$(|\xi|^{1+a})^{\frac{1}{1+a}} = \Big(\frac{2\lambda}{1+a}\Big)^{\frac{1}{1+a}}\Big(\frac{1}{t}\Big)^{\frac{1}{1+a}},$$

que implica em

$$|\xi| = |\xi_0| = \Big(\frac{2\lambda}{1+a}\Big)^{\frac{1}{1+a}}t^{-\frac{1}{1+a}}.$$

Mais ainda, calculando-se $\varphi(0,t)$ e o limite de $\varphi(\xi,t)$ com $\xi\to\infty$, obtemos que $\varphi(0,t) = 0$ e $\varphi(\xi,t)\to 0$. Logo, voltando em $|\xi^{2\lambda}\psi(\xi,t)| \leq \varphi(\xi_0,t)$, vamos calcular o valor de $\varphi(\xi_0,t)$:

$$\begin{aligned}\varphi(\xi_0,t) &= (\xi_0)^{2\lambda}e^{-t|\xi_0|1+a}\\ &= \Big(\big(\frac{2\lambda}{1+a}\big)^{\frac{1}{1+a}}t^{-\frac{1}{1+a}}\Big)^{2\lambda}e^{-t|(\frac{2\lambda}{1+a})^{\frac{1}{1+a}}t^{-\frac{1}{1+a}}|^{1+a}}\\ &= \Big(\frac{(1+a)e}{2\lambda}\Big)^{-\frac{2\lambda}{1+a}}t^{-\frac{2\lambda}{1+a}}\\ &= c(a,\lambda)t^{-\frac{2\lambda}{1+a}}.\end{aligned}$$

Assim concluímos que $|\xi^{2\lambda}\psi(\xi,t)| \leq \varphi(\xi_0,t) = c(a,\lambda)t^{-\frac{2\lambda}{1+a}}$. Quanto a segunda parte do Lema,

$$\begin{aligned}\||\xi|^\sigma e^{-t|\xi|^{1+a}}\|^2_{L^2_\xi} = \Big(\int|\xi^\sigma e^{-t|\xi|^{1+a}}|\,d\xi\Big)^2 &= \int|\xi^{2\sigma}e^{-2t|\xi|^{1+a}}|\,d\xi\\ &= \int\xi^{2\sigma}e^{-2t|\xi|^{1+a}}\,d\xi,\end{aligned}$$

fazendo a mudança de variavéis $\xi = t^{-\frac{1}{1+a}}w$

$$\begin{aligned}\int\xi^{2\sigma}e^{-2t|\xi|^{1+a}}\,d\xi &= t^{\frac{-2\sigma-1}{1+a}}\int w^{2\sigma}e^{-2|w|^{1+a}}\,dw\\ &= c^2_{\sigma,a}t^{\frac{-2\sigma-1}{1+a}}.\end{aligned}$$

Assim, $\| |\xi|^\sigma e^{-t|\xi|^{1+a}} \|_{L^2_\xi} = c_{\sigma,a} t^{\frac{-2\sigma-1}{1+a}}$. □

Proposição 2.6 *Para todo $t > 0$, $\lambda > 0$ e $s \in \mathbb{R}$, $U(t) \in \mathcal{B}(H^s(\mathbb{R}), H^{s+\lambda}(\mathbb{R}))$ e*

$$\| U(t)\phi \|_{H^{s+\lambda}} \leq c(a,\lambda)(1 + t^{-\frac{\lambda}{1+a}})\|\phi\|_{H^s}. \tag{2-17}$$

Prova. Segue do Lema 2.5. □

Proposição 2.7 *Sejam $\phi \in H^s$ e u solução do PVI associada a dBO, então*

$$u \in C((0, T]; H^\infty), \tag{2-18}$$

e

$$\|u(t)\|_{H^{s+\lambda}} \leq c(a,\lambda,T)t^{-\frac{\lambda}{1+a}}\|\phi\|_{H^s}, t \in (0,T], s > \frac{1}{2}, 0 \leq \lambda < a+1. \tag{2-19}$$

Prova. A demonstração de que $u \in C((0,T]; H^\infty)$ segue do argumento Bootstrapping, veja [2], assim provaremos a desigualdade (2-19). Para isso usaremos a equação integral associada a dBO, a Proposição 2.6 e o Lema X4 de [16],

$$\begin{aligned}
\|u(t)\|_{H^{s+\lambda}} &= \| U(t)\phi - \int_0^t U(t-\tau)z(\tau)\, d\tau \|_{H^{s+\lambda}} \\
&\leq \| U(t)\phi\|_{H^{s+\lambda}} + \| \int_0^t U(t-\tau)z(\tau)\, d\tau\|_{H^{s+\lambda}} \\
&\leq c(a,\lambda)(1+t^{-\frac{\lambda}{1+a}})\|\phi\|_{H^s} + c(a,\lambda)\int_0^t (1+(t-\tau)^{-\frac{1}{1+a}})\|\partial_x u(\tau)^2\|_{H^{s+\lambda-1}}\, d\tau \\
&\lesssim_{a,\lambda} t^{-\frac{\lambda}{1+a}}(1+t^{\frac{\lambda}{1+a}})\|\phi\|_{H^s} + \int_0^t ((t-\tau)^{\frac{1}{1+a}}+1)(t-\tau)^{-\frac{1}{1+a}}\|u^2(\tau)\|_{H^{s+\lambda}}\, d\tau \\
&\lesssim_{a,\lambda,T} t^{-\frac{\lambda}{1+a}}\|\phi\|_{H^s} + \int_0^t (t-\tau)^{-\frac{1}{1+a}}\|u(\tau)\|_{L^\infty_x}\|u(\tau)\|_{H^{s+\lambda}}\, d\tau \\
&\lesssim_{a,\lambda,T} t^{-\frac{\lambda}{1+a}}\|\phi\|_{H^s} + \int_0^t (t-\tau)^{-\frac{1}{1+a}}\|u(\tau)\|_{H^s}\|u(\tau)\|_{H^{s+\lambda}}\, d\tau \\
&\lesssim_{a,\lambda,T} t^{-\frac{\lambda}{1+a}}\|\phi\|_{H^s} + M_T\int_0^t (t-\tau)^{-\frac{1}{1+a}}\|u(\tau)\|_{H^{s+\lambda}}\, d\tau,
\end{aligned}$$

onde $M_T = sup_{[0,T]}\|u(t)\|_{H^s}$. A conclusão desta prova decorre da aplicação de uma versão do Lema de Gronwall, veja [10], seção 1.2.1. □

Lema 2.8 *Sejam $a \in (0,1)$ e $\lambda \in \mathbb{Z}^+$, então*

$$\|\mathcal{D}^b_\xi(\psi(\xi,t)|\xi|^\lambda\hat{\phi})\| \leq c_{a,\lambda}(t^{-\frac{\lambda}{1+a}} + t^{\frac{1-\lambda}{1+a}} + t^{\frac{a-\lambda}{1+a}})\|f\| + t^{-\frac{\lambda}{1+a}}\||x|^b f\|, \tag{2-20}$$

mais ainda, a desigualdade é válida se $|\xi|^\lambda$ *for substituído por* $|\xi|^{\lambda_1}\xi^{\lambda_2}$, $\lambda = \lambda_1 + \lambda_2$, $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{Z}^+$.

Prova. Inicialmente temos que $\partial_\xi \psi = -(t(1+a)|\xi|^a sgn(\xi) + 2it|\xi|)\psi$. Assim, utilizando o Lema 2.4, o Lema 2.5 e a aplicação (2-8):

$$\begin{aligned}
\|\mathcal{D}_\xi^b(\psi|\xi|^\lambda \hat{f})\| &\lesssim \|\mathcal{D}_\xi^b(\psi|\xi|^\lambda)\hat{f}\| + \|\psi|\xi|^\lambda \mathcal{D}_\xi^b(\hat{f})\| \\
&\lesssim \|\mathcal{D}_\xi^b(\psi|\xi|^\lambda)\|_\infty \|f\| + \|\psi|\xi|^\lambda\|_\infty \|\mathcal{D}_\xi^b \hat{f}\| \\
&\lesssim_b (\||\xi|^\lambda \psi\|_\infty + \|\partial_\xi(|\xi|^\lambda \psi)\|_\infty)\|f\| + \||\xi|^\lambda \psi\|_\infty \|\mathcal{D}_\xi^b \hat{f}\| \\
&\lesssim_b ((t^{-\frac{\lambda}{1+a}}) + (t^{\frac{1-\lambda}{1+a}} + t^{\frac{a-\lambda}{1+a}}))\|f\| + t^{-\frac{\lambda}{1+a}} \||x|^b f\| \\
&\lesssim_b (t^{-\frac{\lambda}{1+a}} + t^{\frac{1-\lambda}{1+a}} + t^{\frac{a-\lambda}{1+a}}))\|f\| + t^{-\frac{\lambda}{1+a}} \||x|^b f\|.
\end{aligned}$$

A demonstração é análoga para o segundo caso ao substituir $|\xi|^\lambda$ por $|\xi|^{\lambda_1}\xi^{\lambda_2}$. □

O próximo Lema será essencial nas nossas estimativas quando lidarmos com a tranformada de Hilbert em espaços de Sobolev com peso.

Lema 2.9 *Seja* $-\frac{1}{2} < \nu < \frac{1}{2}$, *então a transformada de Hilbert* $\mathcal{H}$ *é um operador limitado em* $L^2(|x|^\nu dx)$, *isto é,*

$$\|\mathcal{H}f|x|^\nu\| \lesssim \|f|x|^\nu\|. \tag{2-21}$$

Prova. Veja [11], onde uma versão mais geral deste Lema pode ser encontrada. □

A próxima proposição é vital para obtenção de nossas estimativas e também na demonstração dos Teoremas 1.2 e 1.3.

Proposição 2.10 *Para qualquer* $\theta \in (0,1)$ *e* $\gamma > 0$,

$$\mathcal{D}^\theta(|\xi|^\gamma \chi(\xi))(\eta) \sim \begin{cases} c|\eta|^{\gamma-\theta} + c_1, \gamma \neq \theta, |\eta| \ll 1, \\ c(-ln|\eta|)^{\frac{1}{2}}, \gamma = \theta, |\eta| \ll 1, \\ \frac{c}{|\eta|^{\frac{1}{2}+\theta}}, |\eta| \gg 1, \end{cases}$$

onde $\mathcal{D}^\theta(|\xi|^\gamma \chi(\xi))(\cdot)$ *é contínua em* $\eta \in \mathbb{R} - \{0\}$. *Em particular, segue que* $\mathcal{D}^\theta(|\xi|^\gamma \chi(\xi))(\cdot) \in L^2(\mathbb{R})$ *se, e somente, se* $\theta < \gamma + \frac{1}{2}$.
De forma similar, segue que

$$\mathcal{D}^\theta(|\xi|^\gamma sgn(\xi)\chi(\xi))(\cdot) \in L^2(\mathbb{R}) \text{ se, e somente, se } \theta < \gamma + \frac{1}{2}. \tag{2-22}$$

Prova. Proposição 2.9 em [7]. □

Proposição 2.11 *Seja* $\gamma \in [0, \frac{1}{2})$*, então*

$$\mathcal{D}^{\gamma}(|\xi|^{\gamma-\frac{1}{2}}\chi(\xi)) \notin L^2(\mathbb{R}). \tag{2-23}$$

Prova. Seja $\eta \in (0,1)$, fazendo $\gamma_1 = \gamma - \frac{1}{2}$ e realizando-se a mudança de variáveis $y - \eta = \xi$

$$\begin{aligned}
\mathcal{D}^{\gamma}(|\xi|^{\gamma_1}\chi(\xi))(\eta)^2 &= \int \frac{(|y|^{\gamma_1}\chi(y) - |\eta|^{\gamma_1}\chi(\eta))^2}{|y-\eta|^{1+2\gamma}}\, dy \\
&= \int \frac{(|\xi+\eta|^{\gamma_1}\chi(\xi+\eta) - |\eta|^{\gamma_1}\chi(\eta))^2}{|\xi|^{1+2\gamma}}\, d\xi \\
&= \underbrace{\int_{\xi\in(-\eta,0)} \frac{(|\xi+\eta|^{\gamma_1}\chi(\xi+\eta) - |\eta|^{\gamma_1}\chi(\eta))^2}{|\xi|^{1+2\gamma}}\, d\xi}_{A(\eta)} + \\
&+ \underbrace{\int_{\xi\notin(-\eta,0)} \frac{(|\xi+\eta|^{\gamma_1}\chi(\xi+\eta) - |\eta|^{\gamma_1}\chi(\eta))^2}{|\xi|^{1+2\gamma}}\, d\xi}_{B(\eta)}.
\end{aligned}$$

Na primeira integral acima, temos que $0 < \xi+\eta < \eta < 1$, logo $\chi(\xi+\eta) = \chi(\eta) = 1$. Logo, ao aplicar o Teorema do Valor Médio, existe $z \in (\xi+\eta, \eta)$ tal que

$$(\xi+\eta)^{\gamma_1} - \eta^{\gamma_1} = \gamma_1 z^{\gamma_1 - 1}\xi.$$

Assim,

$$\begin{aligned}
A(\eta) &= \int_{-\eta}^{0} \frac{((\xi+\eta)^{\gamma_1} - \eta^{\gamma_1})^2}{|\xi|^{1+2\gamma}}\, d\xi = \int_{-\eta}^{0} \frac{(\gamma_1 z^{\gamma_1-1}\xi)^2}{|\xi|^{1+2\gamma}}\, d\xi \\
&= \gamma_1^2 \int_{-\eta}^{0} \frac{(z^{\gamma_1-1}\xi)^2}{|\xi|^{1+2\gamma}}\, d\xi = \gamma_1^2 \int_{-\eta}^{0} \frac{z^{2(\gamma_1-1)}\xi^2}{|\xi|^{1+2\gamma}}\, d\xi \\
&\geq \gamma_1^2 \int_{-\eta}^{0} \frac{\eta^{2(\gamma_1-1)}\xi^2}{|\xi|^{1+2\gamma}}\, d\xi = \gamma_1^2 \eta^{2(\gamma_1-1)} \int_{0}^{\eta} \xi^{1-2\gamma}\, d\xi \\
&= \frac{\gamma_1^2}{2(1-\gamma)}\eta^{-1} := g(\eta).
\end{aligned}$$

Como $\mathcal{D}^{\gamma}(|\xi|^{\gamma_1}\chi(\xi))(\eta)^2 \geq g(\eta)$ para qualquer $0 < \eta < 1$ e $g \notin L^1_{loc}(\mathbb{R})$, concluímos a demonstração. □

Proposição 2.12 *Se* $f \in L^2(\mathbb{R})$ *e* $\phi \in H^1(\mathbb{R})$*, então*

$$\|[D^{\gamma};\phi]f\| \leq c\|\phi\|_{H^2}\|f\|, \tag{2-24}$$

onde $\gamma \in (0,1)$ *e* $[D^{\gamma};\phi]$ *representa o comutador entre* D^{γ} *e* ϕ.

Prova. Notemos inicialmente que

$$
\begin{aligned}
([D^{\gamma};\phi]f)^{\wedge}(\xi) &= (D^{\gamma}(\phi f)-\phi D^{\gamma}f)^{\wedge}(\xi)\\
&= \int (|\xi|^{\gamma}-|\eta|^{\gamma})\hat{\phi}(\xi-\eta)\hat{f}(\eta)\,d\eta,
\end{aligned}
$$

e como $||\xi|^{\gamma}-|\eta|^{\gamma}|\leq|\xi-\eta|^{\gamma}$, assim temos que

$$
\begin{aligned}
|([D^{\gamma};\phi]f)^{\wedge}(\xi)| &= \int |\xi-\eta|^{\gamma}|\hat{\phi}(\xi-\eta)||\hat{f}(\eta)|\,d\eta\\
&= c(|\widehat{D^{\gamma}\phi}|*|\hat{f}|)(\xi).
\end{aligned}
$$

uma vez que $\|\widehat{D^{\gamma}\phi}\|_{L^1}\leq\|D^{\gamma}\phi\|_{H^1}\leq\|\phi\|_{H^2}$, aplicando a desigualdade de Young obtemos

$$
\begin{aligned}
\|[D^{\gamma};\phi]f\| &\leq c\||\widehat{D^{\gamma}\phi}|*|\hat{f}|\|\\
&\leq c\|\widehat{D^{\gamma}\phi}\|_{L^1}\|\hat{f}\|\\
&\leq c\|\phi\|_{H^2}\|f\|,
\end{aligned}
$$

e assim concluímos a demonstração. □

CAPÍTULO 3

Boa Colocação

Neste capítulo realizaremos a demonstração do teorema de boa colocação global do PVI associado à dBO. Abordaremos apenas o caso onde $a \in (0,1)$, sendo que o caso $a = 1$ pode ser verificado utilizando-se as ideias de [8].

Antes de começar a demonstração, precisamos de alguns resultados auxiliares.

3.1 Lemas

Lema 3.1 *Seja* $\theta \in (0,1]$. *Então para toda* $\phi \in \mathcal{Z}_{\theta,\theta}(\mathbb{R})$,

$$\|D_\xi^\theta(\psi(\xi,t)\hat{\phi})\| \lesssim_a \rho_1(t)\|\langle x\rangle^\theta \phi\|, \tag{3-1}$$

onde $\rho_1(t) = 3 + t^{\frac{1}{1+a}} + t^{\frac{a}{1+a}}$.

Prova. Seja $\theta \in (0,1)$, então por uma aplicação da identidade de Parseval, (2-6) e o Lema 2.8 com $\lambda = 0$, obtemos

$$\begin{aligned} \|D_\xi^\theta(\phi(\xi,t)\hat{\phi})\| &\lesssim \|\psi(\xi,t)\hat{\phi}\| + \|\mathcal{D}_\xi^\theta(\psi(\xi,t)\hat{\phi})\| \\ &\lesssim_a (3 + t^{\frac{1}{1+a}} + t^{\frac{a}{1+a}})\|\langle x\rangle^\theta \phi\| \\ &\lesssim_a \rho_1(t)\|\langle x\rangle^\theta \phi\|. \end{aligned} \tag{3-2}$$

O caso em que $\theta = 1$ segue de forma análoga. □

Lema 3.2 *Seja* $\theta \in (\frac{1}{2}, \frac{1}{2} + a)$. *Então para toda* $\phi \in \mathcal{Z}_{1+\theta,1+\theta}(\mathbb{R})$,

$$\|D_\xi^{1+\theta}(\psi(\xi,t)\hat{\phi})\| \lesssim_a \rho_2(t)\|\langle x\rangle^{1+\theta} \phi\|, \tag{3-3}$$

onde ρ_2 *é uma função crescente e contínua em* $[0,\infty)$.

Prova. Seja $\phi \in \mathcal{Z}_{1+\theta,1+\theta}(\mathbb{R})$, note que

$$
\begin{aligned}
D_\xi^{1+\theta}(\psi(\xi,t)\hat{\phi}) &= D_\xi^{\theta}(\partial_\xi \psi(\xi,t)\hat{\phi})\\
&= D_\xi^{\theta}\left(\hat{\phi}\partial_\xi \psi(\xi,t) + \psi(\xi,t)\partial_\xi\hat{\phi}\right)\\
&= D_\xi^{\theta}(\hat{\phi}\partial_\xi \psi(\xi,t)) + D_\xi^{\theta}(\psi(\xi,t)\partial_\xi\hat{\phi}).
\end{aligned}
\tag{3-4}
$$

Logo,

$$
\begin{aligned}
\|D_\xi^{\theta}(\psi(\xi,t)\hat{\phi})\| &= \|D_\xi^{\theta}(\hat{\phi}\partial_\xi \psi(\xi,t)) + D_\xi^{\theta}(\psi(\xi,t)\partial_\xi\hat{\phi})\|\\
&\leq \|D_\xi^{\theta}(\hat{\phi}\partial_\xi \psi(\xi,t))\| + \|D_\xi^{\theta}(\psi(\xi,t)\partial_\xi\hat{\phi})\|.
\end{aligned}
\tag{3-5}
$$

Aplicando o Lema 2.8 com $\lambda = 0$ e $\partial_\xi\psi = -(t(1+a)|\xi|^a sgn(\xi) + 2it|\xi|)\psi$ em (3-5), obtemos

$$
\begin{aligned}
\|D_\xi^{1+\theta}(\psi(\xi,t)\hat{\phi})\| &\leq \|D_\xi^{\theta}(\hat{\phi}\partial_\xi \psi(\xi,t))\| + \|D_\xi^{\theta}(\psi(\xi,t)\partial_\xi\hat{\phi})\|\\
&\lesssim_a (1 + t^{\frac{1}{1+a}} + t^{\frac{a}{1+a}})\|\partial_\xi\hat{\phi}\| + \|D_\xi^{\theta}\partial_\xi\hat{\phi}\| +\\
&+ \underbrace{t\|D_\xi^{\theta}(|\xi|^a sgn(\xi)\psi\hat{\phi})\|}_{A_1} + \underbrace{t\|D_\xi^{\theta}(|\xi|\psi\hat{\phi})\|}_{A_2}.
\end{aligned}
\tag{3-6}
$$

Precisamos agora estimar os termos A_1 e A_2. Note que para o termo A_2, basta aplicar o Lema 2.8 com $\lambda = 1$:

$$
\begin{aligned}
A_2 &= t\|D_\xi^{\theta}(|\xi|^a sgn(\xi)\psi\hat{\phi})\|\\
&\lesssim_a t(t^{-\frac{1}{1+a}} + 1 + t^{\frac{a-1}{1+a}})\|\phi\| + tt^{-\frac{1}{1+a}}\||x|^\theta\phi\|\\
&\lesssim_a (1 + t^{\frac{a}{1+a}} + t^{\frac{2a}{1+a}})\|\phi\| + t^{\frac{a}{1+a}}\||x|^\theta\phi\|.
\end{aligned}
\tag{3-7}
$$

Agora para o termo A_1, vamos utilizar a função χ, onde obtemos os termos $A_{1,1}$ e $A_{1,2}$,

$$
\begin{aligned}
A_1 &= t\|D_\xi^{\theta}(|\xi|^a sgn(\xi)\psi\hat{\phi})\|\\
&= t\|D_\xi^{\theta}(|\xi|^a sgn(\xi)\psi\hat{\phi}\chi) + D_\xi^{\theta}(|\xi|^a sgn(\xi)\psi\hat{\phi}(1-\chi))\|\\
&\leq t\underbrace{\|D_\xi^{\theta}(|\xi|^a sgn(\xi)\psi\hat{\phi}\chi)\|}_{A_{1,1}} + t\underbrace{\|D_\xi^{\theta}(|\xi|^a sgn(\xi)\psi\hat{\phi}(1-\chi))\|}_{A_{1,2}}.
\end{aligned}
\tag{3-8}
$$

Aplicando o Teorema 2.3 e o Lema 2.4 ao termo $A_{1,2}$ encontramos

$$
\begin{aligned}
A_{1,2} &= t\|D_\xi^{\theta}(|\xi|^a sgn(\xi)\psi\hat{\phi}(1-\chi))\|\\
&\lesssim t(\||\xi|^a\psi(1-\chi)\|_\infty + \|\partial_\xi(|\xi|^a sgn(\xi)\psi(1-\chi))\|)\|\phi\| +\\
&+ t\||\xi|^a sgn(\xi)\psi(1-\chi)\|_\infty\|\mathcal{D}_\xi^{\theta}\hat{\phi}\|\\
&\lesssim (2 + t^{\frac{1-a}{1+a}} + t^{\frac{1}{1+a}})\|\phi\| + t^{\frac{1}{1+a}}\||x|^\theta\phi\|.
\end{aligned}
\tag{3-9}
$$

Agora reescrevendo $A_{1,1}$,

$$\begin{aligned} A_{1,1} &= t\|D_\xi^\theta(|\xi|^a sgn(\xi)\psi\hat{\phi}\chi)\| \\ &= t\|D_\xi^\theta(|\xi|^a sgn(\xi)(\psi-1)\hat{\phi}\chi)+D_\xi^\theta(|\xi|^a sgn(\xi)\hat{\phi}\chi)\| \\ &\lesssim \underbrace{t\|D_\xi^\theta(|\xi|^a sgn(\xi)(\psi-1)\hat{\phi}\chi)\|}_{A_{1,1}^1}+\underbrace{t\|D_\xi^\theta(|\xi|^a sgn(\xi)\hat{\phi}\chi)\|}_{A_{1,1}^2}. \end{aligned} \tag{3-10}$$

Novamente, prosseguindo com o Lema 2.4 e com $\partial_\xi\psi$,

$$\begin{aligned} A_{1,1}^1 &= t\|D_\xi^\theta(|\xi|^a sgn(\xi)(\psi-1)\hat{\phi}\chi)\| \\ &\lesssim t(\||\xi|^a(\psi-1)\chi\|_\infty+\|\partial_\xi(|\xi|^a sgn(\xi)(\psi-1)\chi)\|_\infty)\|\phi\|+ \\ &+t\||\xi|^a(\psi-1)\chi\|_\infty\|\mathcal{D}_\xi^\theta\hat{\phi}\| \\ &\lesssim_a (t+t^2)(\|\phi\|+\||x|^\theta\phi\|). \end{aligned} \tag{3-11}$$

Resta o termo $A_{1,1}^2$, para isso vamos reescrevê-lo como

$$\begin{aligned} A_{1,1}^2 &= t\|D_\xi^\theta(|\xi|^a sgn(\xi)\hat{\phi}\chi)\| \\ &= t\|D_\xi^\theta(|\xi|^a sgn(\xi)(\hat{\phi}(\xi)-\hat{\phi}(0))\chi)+D_\xi^\theta(|\xi|^a sgn(\xi)\hat{\phi}(0)\chi)\| \\ &\lesssim \underbrace{t\|D_\xi^\theta(|\xi|^a sgn(\xi)(\hat{\phi}(\xi)-\hat{\phi}(0))\chi)\|}_{\tilde{A}}+\underbrace{t\|D_\xi^\theta(|\xi|^a sgn(\xi)\hat{\phi}(0)\chi)\|}_{\tilde{\tilde{A}}}. \end{aligned} \tag{3-12}$$

Denotando-se por $L=|\xi|^a sgn(\xi)(\hat{\phi}(\xi)-\hat{\phi}(0))\chi$, podemos estimar $\|L\|$,

$$\begin{aligned} \|L\| &= \||\xi|^a sgn(\xi)(\hat{\phi}(\xi)-\hat{\phi}(0))\chi\| \\ &\lesssim \||\xi|^a\chi\hat{\phi}(\xi)\|+\||\xi|^a\hat{\phi}(0)\chi\| \\ &\lesssim_a \||\xi|^a\chi\|\|\hat{\phi}\|_\infty \\ &= \|\langle x\rangle\phi\|. \end{aligned} \tag{3-13}$$

Observe que

$$\partial_\xi L = a|\xi|^{a-1}sgn(\xi)(\hat{\phi}(\xi)-\hat{\phi}(0))+|\xi|^a sgn(\xi)(\hat{\phi}(\xi)-\hat{\phi}(0))\partial_\xi\chi+|\xi|^a sgn(\xi)\chi\partial_\xi\hat{\phi}(\xi), \tag{3-14}$$

assim tendo em vista que $\theta > \frac{1}{2}$, podemos estimar $\|\partial_\xi L\|$:

$$\begin{aligned}
\|\partial_\xi L\| &= \|a|\xi|^{a-1}sgn(\xi)(\hat{\phi}(\xi)-\hat{\phi}(0)) + |\xi|^a sgn(\xi)(\hat{\phi}(\xi)-\hat{\phi}(0))\partial_\xi\chi + |\xi|^a sgn(\xi)\chi\partial_\xi\hat{\phi}(\xi)\| \\
&\lesssim \||\xi|^a(\frac{(\hat{\phi}(\xi)-\hat{\phi}(0))}{\xi})\chi\| + \||\xi|^a\partial_\xi\hat{\phi}(\xi)\chi\| + \||\xi|^a(\hat{\phi}(\xi)-\hat{\phi}(0))\partial_\xi\chi\| \\
&\lesssim \||\xi|^a\chi\|\|\partial_\xi\hat{\phi}\|_\infty + \||\xi|^a\chi\|_\infty\|\partial_\xi\hat{\phi}\| + \||\xi|^a\partial_\xi\chi\|\|\hat{\phi}\|_\infty + \||\xi|^a\partial_\xi\chi\||\hat{\phi}(0)| \\
&\lesssim_a \|J^\theta\partial_\xi\hat{\phi}\| + \|x\phi\| + \|J^\theta\hat{\phi}\| \\
&\lesssim_a \|\langle x\rangle^{1+\theta}\phi\|.
\end{aligned} \tag{3-15}$$

Das desigualdades (3-14) e (3-15), obtemos

$$\tilde{A} \lesssim t\|L\|_{H^1_\xi} \lesssim \|\langle x\rangle^{1+\theta}\phi\|. \tag{3-16}$$

Como $\theta < \frac{1}{2}+a$, aplicando a Proposição 2.10, concluímos que $\mathcal{D}^\theta_\xi(|\xi|^a sgn(\xi)\chi) \in L^2$. Portanto, pelo Teorema 2.3

$$\begin{aligned}
\tilde{\tilde{A}} &\lesssim_a t\|\hat{\phi}\|_\infty + t\|\hat{\phi}\|_\infty\|\mathcal{D}^\theta_\xi(|\xi|^a sgn(\xi)\chi\| \\
&\lesssim_a t\|\langle x\rangle\phi\|.
\end{aligned} \tag{3-17}$$

Basta reunir as desigualdades (3-6), (3-7), (3-9), (3-11), (3-16) e (3-17) e assim concluímos a demonstração. □

Lema 3.3 *Seja* $\theta \in (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}+a)$. *Então para toda* $\phi \in \dot{\mathcal{Z}}_{2+\theta,2+\theta}(\mathbb{R})$,

$$\|D^{2+\theta}_\xi(\psi(\xi,t)\hat{\phi})\| \lesssim_a \rho_3(t)\|\langle x\rangle^{2+\theta}\phi\|, \tag{3-18}$$

onde ρ_3 *é uma função crescente e contínua em* $[0,\infty)$.

Prova. Seja $\phi \in \dot{\mathcal{Z}}_{2+\theta,2+\theta}(\mathbb{R})$. Note que

$$\begin{aligned}
D^{\theta+2}_\xi(\psi(\xi,t)\hat{\phi}) &= D^\theta_\xi(\partial^2_\xi(\psi(\xi,t)\hat{\phi})) \\
&= D^\theta_\xi(\hat{\phi}\partial^2_\xi\psi(\xi,t) + 2\partial_\xi\hat{\phi}\partial_\xi\psi(\xi,t) + \psi(\xi,t)\partial^2_\xi\hat{\phi}).
\end{aligned} \tag{3-19}$$

Usando (3-19) e a identidade de Plancherel, obtemos

$$\begin{aligned}
\|D^{\theta+2}_\xi(\psi(\xi,t)\hat{\phi})\| &= \|D^\theta_\xi(\hat{\phi}\partial^2_\xi\psi(\xi,t) + 2\partial_\xi\hat{\phi}\partial_\xi\psi(\xi,t) + \psi(\xi,t)\partial^2_\xi\hat{\phi})\| \\
&\lesssim \underbrace{\|D^\theta_\xi(\partial^2_\xi\psi(\xi,t)\hat{\phi})\|}_{C} + \underbrace{\|D^\theta_\xi(\partial_\xi\hat{\phi}\partial_\xi\psi(\xi,t))\|}_{D} + \underbrace{\|D^\theta_\xi(\psi(\xi,t)\partial^2_\xi\hat{\phi})\|}_{E}.
\end{aligned} \tag{3-20}$$

Para o termo E, aplicaremos o Lema 2.8 com $\lambda = 0$

$$\begin{aligned} E &\lesssim (1 + t^{\frac{a}{1+a}} + t^{\frac{1}{1+a}})\|\partial_\xi^2\hat{\phi}\| + \|\mathcal{D}_\xi^\theta\partial_\xi^2\hat{\phi}\| \\ &\lesssim (2 + t^{\frac{a}{1+a}} + t^{\frac{1}{1+a}})\|x^2\phi\| + \||x|^{\theta+2}\phi\|. \end{aligned} \tag{3-21}$$

Quanto ao termo D, vamos reescrevê-lo, usando a expressão de $\partial_\xi\psi(\xi, t)$,

$$\begin{aligned} D &= \|D_\xi^\theta(\partial_\xi\hat{\phi}(-(t(1+a)|\xi|^a sgn(\xi) + 2it|\xi|)\psi(\xi, t))\| \\ &\lesssim \underbrace{t\|D_\xi^\theta(|\xi|^a sgn(\xi)\psi(\xi, t)\partial_\xi\hat{\phi})\|}_{D_1} + \underbrace{\|D_\xi^\theta(|\xi|\psi(\xi, t)\partial_\xi\hat{\phi})\|}_{D_2}, \end{aligned} \tag{3-22}$$

onde o termo D_1 se decompõe como

$$\begin{aligned} D_1 &= t\|D_\xi^\theta(|\xi|^a sgn(\xi)\psi(\xi, t)\partial_\xi\hat{\phi})\| \\ &= t\|D_\xi^\theta(|\xi|^a sgn(\xi)\psi(\xi, t)\chi\partial_\xi\hat{\phi} + |\xi|^a sgn(\xi)\psi(\xi, t)(1-\chi)\partial_\xi\hat{\phi})\| \\ &\lesssim \underbrace{t\|D_\xi^\theta(|\xi|^a sgn(\xi)\psi(\xi, t)\chi\partial_\xi\hat{\phi})\|}_{D_{1,1}} + \underbrace{t\|D_\xi^\theta(|\xi|^a sgn(\xi)\psi(\xi, t)(1-\chi)\partial_\xi\hat{\phi})\|}_{D_{1,2}}. \end{aligned} \tag{3-23}$$

Além disso, podemos reescrever também

$$\begin{aligned} D_{1,1} &= t\|D_\xi^\theta(|\xi|^a sgn(\xi)\psi(\xi, t)\chi\partial_\xi\hat{\phi})\| \\ &= t\|D_\xi^\theta(|\xi|^a sgn(\xi)\psi(\xi, t)\chi(\partial_\xi\hat{\phi}(\xi) - \partial_\xi\hat{\phi}(0)) + |\xi|^a sgn(\xi)\psi(\xi, t)\chi\partial_\xi\hat{\phi}(0))\| \\ &\lesssim \underbrace{t\|D_\xi^\theta(|\xi|^a sgn(\xi)\psi(\xi, t)\chi(\partial_\xi\hat{\phi}(\xi) - \partial_\xi\hat{\phi}(0)))\|}_{D_{1,1}^1} + \underbrace{t\|D_\xi^\theta(|\xi|^a sgn(\xi)\psi(\xi, t)\chi\partial_\xi\hat{\phi}(0))\|}_{D_{1.1}^2}. \end{aligned} \tag{3-24}$$

Agora, usando o Teorema 2.3 e o Lema 2.4 com $h = |\xi|^a sgn(\xi)\psi(\xi, t)(\partial_\xi\hat{\phi}(\xi) - \partial_\xi\hat{\phi}(0))$

e $f = \chi$,

$$
\begin{aligned}
D^1_{1,1} &\lesssim t\Big(\|\mathcal{D}^{\theta}(|\xi|^a sgn(\xi)\psi(\xi,t)(\partial_\xi\hat{\phi}(\xi) - \partial_\xi\hat{\phi}(0))\|_\infty \|\chi\| + \\
&+ \||\xi|^a sgn(\xi)\psi(\xi,t)(\partial_\xi\hat{\phi}(\xi) - \partial_\xi\hat{\phi}(0))\|_\infty \|\mathcal{D}^{\theta}_\xi\chi\|\Big) \\
&\lesssim t\Big(\Big[\||\xi|^a\psi(\xi,t)(\partial_\xi\hat{\phi}(\xi) - \partial_\xi\hat{\phi}(0))\|_\infty + \\
&+ \|\partial_\xi(|\xi|^a sgn(\xi)\psi(\xi,t)(\partial_\xi\hat{\phi}(\xi) - \partial_\xi\hat{\phi}(0)))\|_\infty\Big] \|\chi\| \\
&+ \||\xi|^a\psi(\xi,t)(\partial_\xi\hat{\phi}(\xi) - \partial_\xi\hat{\phi}(0))\|_\infty + \|\mathcal{D}^{\theta}_\xi\chi\|\Big) \\
&\lesssim t\Big(\Big[\||\xi|^a\psi(\xi,t)\partial_\xi\hat{\phi}\|_\infty + \|\frac{|\xi|^a}{\xi}\psi(\xi,t)\partial_\xi\hat{\phi}\|_\infty + \||\xi|^a\partial_\xi\psi(\xi,t)\partial_\xi\hat{\phi}\|_\infty + \\
&+ \||\xi|^a\psi(\xi,t)\partial^2_\xi\hat{\phi}(\xi)\|_\infty\Big] \|\chi\| + \||\xi|^a\psi(\xi,t)\partial_\xi\hat{\phi}\|_\infty \|\mathcal{D}^{\theta}_\xi\chi\|\Big) \\
&\lesssim_a t\Big(\Big[t^{-\frac{a}{1+a}} \|\partial_\xi\hat{\phi}\|_\infty + t^{\frac{-a+1}{a+1}} \|\partial_\xi\hat{\phi}\|_\infty + \|\partial_\xi\hat{\phi}\|_\infty + t^{-\frac{a}{1+a}} \|\partial^2_\xi\hat{\phi}\|_\infty\Big] \|\chi\| + \\
&+ t^{-\frac{a}{1+a}} \|\partial_\xi\hat{\phi}\|_\infty \|\mathcal{D}^{\theta}_\xi\chi\|\Big) \\
&\lesssim_a \Big((t^{\frac{1}{1+a}} + t^{\frac{2}{a+1}} + t) \|\partial_\xi\hat{\phi}\|_\infty + t^{\frac{1}{a+1}} \|\partial^2_\xi\hat{\phi}\|_\infty\Big) \|\chi\| + t^{\frac{1}{1+a}} \|\partial_\xi\hat{\phi}\|_\infty \|\mathcal{D}^{\theta}_\xi\chi\| \\
&\lesssim_a \Big((t^{\frac{1}{1+a}} + t^{\frac{2}{a+1}} + t) \|\langle x\rangle^{\theta+1}\phi\| + t^{\frac{1}{a+1}} \|\langle x\rangle^{\theta+2}\phi\|\Big) \|\chi\| + t^{\frac{1}{1+a}} \|\langle x\rangle^{\theta+1}\phi\|_2 \|\mathcal{D}^{\theta}_\xi\chi\|.
\end{aligned}
\tag{3-25}
$$

Procederemos de forma análoga à (3-25) ao termo $D^2_{1.1}$ com $h = \phi(\xi,t)$ e $f = |\xi|^a sgn(\xi)\chi\partial_\xi\hat{\phi}(0)$,

$$
\begin{aligned}
D^2_{1.1} &\lesssim t\Big(\|\mathcal{D}^{\theta}_\xi(\psi(\xi,t))\|_\infty \||\xi|^a sgn(\xi)\chi\partial_\xi\hat{\phi}(0)\| + \|\psi(\xi,t)\|_\infty \|\mathcal{D}^{\theta}_\xi(|\xi|^a sgn(\xi)\chi\partial_\xi\hat{\phi}(0))\|\Big) \\
&\lesssim t\Big(\Big[\|\psi(\xi,t)\|_\infty + \|\partial_\xi\psi(\xi,t)\|_\infty\Big] \||\xi|^a\chi\partial_\xi\hat{\phi}(0)\| + \\
&+ \|\psi(\xi,t)\|_\infty |\partial_\xi\hat{\phi}| \|\mathcal{D}^{\theta}_\xi(|\xi|^a sgn(\xi)\chi)\|\Big) \\
&\lesssim t\|\partial_\xi\hat{\phi}(0)\|_\infty \Big(\Big[\|\psi(\xi,t)\|_\infty + \|\partial_\xi\psi(\xi,t)\|_\infty\Big] \||\xi|^a\chi\| + \|\mathcal{D}^{\theta}_\xi(|\xi|^a sgn(\xi)\chi)\|\Big) \\
&\lesssim \|\langle x\rangle^{\theta+1}\phi\| t\Big(\|\mathcal{D}_\xi(\psi(\xi,t)\| \||\xi|^a\chi\| + \|\mathcal{D}^{\theta}_\xi(|\xi|^a sgn(\xi)\chi)\|\Big) \\
&\lesssim \|\langle x\rangle^{\theta+1}\phi\| \Big((t + t^{\frac{2+a}{1+a}} + t^{\frac{1+2a}{1+a}}) + t\underbrace{\|\mathcal{D}^{\theta}_\xi(|\xi|^a sgn(\xi)\chi)\|}_{N}\Big).
\end{aligned}
\tag{3-26}
$$

Note que sendo $N = \|\mathcal{D}^{\theta}_\xi(|\xi|^a sgn(\xi)\chi)\|$, como $\theta < \theta + \frac{1}{2}$, segue pela Proposição 2.10, que $N \in L^2(\mathbb{R})$. Seguindo como em (3-25) para o termo $D_{1.2}$ com $h = |\xi|^a sgn(\xi)\psi(\xi,t)(1-\chi)$

e $f = \partial_\xi \hat{\phi}$, obtemos

$$
\begin{aligned}
D_{1.2} \lesssim\, & t\Big(\|\mathcal{D}_\xi^\theta(|\xi|^a sgn(\xi)\psi(\xi,t)(1-\chi)\|_\infty \|\partial_\xi\hat{\phi}\| + \\
& + \||\xi|^a sgn(\xi)\psi(\xi,t)(1-\chi)\|_\infty \|\mathcal{D}_\xi^\theta \partial_\xi \hat{\phi}\|\Big) \\
\lesssim\, & t\Big(\|\partial_\xi\hat{\phi}\| \big(\||\xi|^a\psi(\xi,t)(1-\chi)\|_\infty + \|\partial_\xi(|\xi|^a sgn(\xi)\psi(\xi,t)(1-\chi))\|_\infty\big) \\
& + \||\xi|^a\psi(\xi,t)(1-\chi)\|_\infty \|\mathcal{D}_\xi^\theta\partial_\xi\hat{\phi}\|\Big) \\
\lesssim\, & t\Big(\|\partial_\xi\hat{\phi}\| \big(\||\xi|^a\psi(\xi,t)(1-\chi)\|_\infty + \|\partial_\xi(|\xi|^a \psi(\xi,t)(1-\chi))\|_\infty\big) + \\
& + \||\xi|^a\psi(\xi,t)(1-\chi)\|_\infty \|\mathcal{D}_\xi^\theta\partial_\xi\hat{\phi}\|\Big) \\
\lesssim\, & t\Big(\|\partial_\xi\hat{\phi}\| \|\mathcal{D}_\xi^\theta(|\xi|^a\psi(\xi,t)(1-\chi))\|_\infty + \||\xi|^a\psi(\xi,t)(1-\chi)\|_\infty \|\mathcal{D}_\xi^\theta\partial_\xi\hat{\phi}\|\Big) \\
\lesssim\, & t\Big((t^{-\frac{a}{1+a}} + t^{-\frac{2a}{1+a}} + t^{-1})\|\partial_\xi\hat{\phi}\| + t^{-\frac{a}{1+a}}\|\mathcal{D}_\xi^\theta\partial_\xi\hat{\phi}\|\Big) \\
\lesssim\, & (t^{\frac{1}{1+a}} + t^{\frac{1-a}{1+a}} + 1)\|x\phi\| + t^{\frac{1}{1+a}}\|\langle x\rangle^{1+\theta}\phi\|.
\end{aligned} \tag{3-27}
$$

Quanto ao termo D_2, procedendo como (3-25), obtemos

$$
\begin{aligned}
D_2 \lesssim\, & t\Big(\|\mathcal{D}_\xi^\theta(|\xi|\psi(\xi,t))\|_\infty \|\partial_\xi\hat{\phi}\| + \||\xi|\psi(\xi,t)\|_\infty \|\mathcal{D}_\xi^\theta\partial_\xi\hat{\phi}\|\Big) \\
\lesssim\, & \big(t^{\frac{a}{1+a}} + t^{\frac{2a}{1+a}} + t\big)\|x\phi\| + t^{\frac{1}{1+a}}\|\langle x\rangle^{1+\theta}\phi\|.
\end{aligned} \tag{3-28}
$$

Agora, voltemos ao termo C em (3-20). Temos que $C = \|D_\xi^\theta(\partial_\xi^2\psi(\xi,t)\hat{\phi})\|$. E usando $\partial_\xi^2\psi(\xi,t)\hat{\phi}$ calculada em (2-13), podemos estimar C como

$$
\begin{aligned}
C \lesssim\, & \underbrace{t^2\|D_\xi^\theta(|\xi|^{2a}\psi(\xi,t)\hat{\phi})\|}_{C_1} + \underbrace{t\|D_\xi^\theta(|\xi|^{a-1}\psi(\xi,t)\hat{\phi})\|}_{C_2} + \underbrace{t^2\|D_\xi^\theta(|\xi|^{a+1}sgn(\xi)\psi(\xi,t)\hat{\phi})\|}_{C_3} + \\
& + \underbrace{t^2\|D_\xi^\theta(\xi^2\psi(\xi,t)\hat{\phi})\|}_{C_4} + \underbrace{t\|D_\xi^\theta(sgn(\xi)\psi(\xi,t)\hat{\phi})\|}_{C_5}.
\end{aligned} \tag{3-29}
$$

Para o termo C_1 vamos utilizar o Lema 2.8, onde obtemos

$$
\begin{aligned}
C_1 \lesssim\, & t^2\Big(\big(t^{-\frac{2a}{1+a}} + t^{\frac{1-2a}{1+a}} + t^{\frac{a-2a}{1+a}}\big)\|\phi\| + t^{-\frac{2a}{1+a}}\||x|^\theta\phi\|\Big) \\
\lesssim\, & \Big(t^{\frac{2}{1+a}} + t^{\frac{3}{1+a}} + t^{\frac{2+a}{1+a}}\Big)\|\phi\| + t^{-\frac{2a}{1+a}}\||x|^\theta\phi\|.
\end{aligned} \tag{3-30}
$$

Para o termo C_2, vamos reescrevê-lo utilizando a função χ. Assim, obtemos

$$
C_2 \lesssim \underbrace{t\|D_\xi^\theta(|\xi|^{a-1}\psi(\xi,t)\chi\hat{\phi})\|}_{C_2^1} + \underbrace{t\|D_\xi^\theta(|\xi|^{a-1}\psi(\xi,t)(1-\chi)\hat{\phi})\|}_{C_2^2}. \tag{3-31}
$$

Note que o termo $t|\xi|^{a-1}\psi(\xi,t)(1-\chi)\hat{\phi}\in H^1_\xi$, visto que

$$\begin{aligned} t\||\xi|^{a-1}\psi(\xi,t)(1-\chi)\hat{\phi}\| &\lesssim t\||\xi|^{a}\psi(\xi,t)\hat{\phi}\frac{(1-\chi)}{\xi}\| \\ &\lesssim t\|\frac{1-\chi}{\xi}\|_\infty\||\xi|^{a}\psi(\xi,t)\hat{\phi}\| \\ &\lesssim t\|\frac{1-\chi}{\xi}\|\|\phi\|t^{\frac{-a}{1+a}} \\ &\lesssim t^{\frac{1}{1+a}}\|\phi\|, \end{aligned} \tag{3-32}$$

e

$$\begin{aligned} t\|\partial_\xi(|\xi|^{a-1}\psi(\xi,t)(1-\chi)\hat{\phi})\| &\lesssim t\Big(\||\xi|^{a}\psi(\xi,t)\hat{\phi}\frac{1-\chi}{\xi^2}\|+t\||\xi|^{2a}\psi(\xi,t)\hat{\phi}\frac{1-\chi}{\xi}\|+ \\ &+\||\xi|^{a+1}\psi(\xi,t)\hat{\phi}\frac{1-\chi}{\xi}\|+\||\xi|^{a}\psi(\xi,t)\partial_\xi\hat{\phi}\frac{1-\chi}{\xi}\|+ \\ &+\||\xi|^{a}\psi(\xi,t)\hat{\phi}\partial_\xi\Big(\frac{1-\chi}{\xi}\Big)\|\Big) \\ &\lesssim (t^{\frac{1}{1+a}}+t^{\frac{1-a}{1+a}}+t^{\frac{a}{1+a}})\|\phi\|+t^{\frac{1}{1+a}}\|x\phi\|. \end{aligned} \tag{3-33}$$

Para o termo C_2^1, vamos usar o fato de que como $\hat{\phi}\in\dot{\mathcal{Z}}_{2+\theta,2+\theta}$, logo $\hat{\phi}(0)=0$. Assim, aplicando a fórmula de Taylor obtemos

$$\hat{\phi}(\xi)=\xi\partial_\xi\hat{\phi}(0)+\int_0^\sigma(\xi-\sigma)\partial_\xi^2\hat{\phi}(\sigma)\,d\sigma\,, \tag{3-34}$$

onde podemos reescrever o termo C_2^1

$$C_2^1=\underbrace{t\|D_\xi^\theta(|\xi|^{a-1}\xi\psi(\xi,t)\chi\partial_\xi\hat{\phi}(0))\|}_{S}+\underbrace{t\|D_\xi^\theta(\int_0^\xi(\xi-\sigma)|\xi|^{a-1}\psi(\xi,t)\chi\partial_\xi^2\hat{\phi}(\sigma))\,d\sigma\,\|}_{t\|D_\xi^\theta R\|}. \tag{3-35}$$

Note que $R\in H^1_\xi$, visto que aplicando a imersão de Sobolev obtemos

$$\begin{aligned} \|R\| &= \|\int_0^\xi(\xi-\sigma)|\xi|^{a-1}\psi(\xi,t)\chi\partial_\xi^2\hat{\phi}(\sigma))\,d\sigma\,\| \\ &\lesssim \||\xi|^{a-1}\psi(\xi,t)\chi\xi^2\|\partial_\xi^2\hat{\phi}\|_\infty\| \\ &\lesssim \||\xi|^{a+1}\psi(\xi,t)\chi\|\|\partial_\xi^2\hat{\phi}\|_\infty \\ &\lesssim_a \|\langle x\rangle^{2+\theta}\phi\|, \end{aligned} \tag{3-36}$$

e

$$\begin{aligned}
\|\partial_\xi R\| &= \|\partial_\xi\Big(\int_0^\xi(\xi-\sigma)|\xi|^{a-1}\psi(\xi,t)\chi\partial_\xi^2\hat{\phi}(\sigma)\,d\sigma\Big)\|\\
&\lesssim \||\xi|^{a-2}\psi(\xi,t)\xi^2\chi\|\partial_\xi^2\hat{\phi}\|_\infty\| + t\|(|\xi|^{2a-1}+|\xi|^a)\psi)(\xi,t)\chi\xi^2\|\partial_\xi^2\hat{\phi}\|_\infty\| +\\
&+\||\xi|^{a-1}\psi(\xi,t)\chi'\xi^2\|\partial_\xi^2\hat{\phi}\|_\infty\| + \||\xi|^{a-1}\psi(\xi,t)\chi\int_0^\xi\partial_\xi^2\hat{\phi}(\tau)\,d\tau\|\\
&\lesssim \|\langle x\rangle^{2+\theta}\phi\|.
\end{aligned} \tag{3-37}$$

Para o termo S, vamos utilizar o Teorema 2.3 e o Lema 2.4 com $h=\psi(\xi,t)$ e $f=|\xi|^{a-1}\xi\chi\partial_\xi\hat{\phi}(0)$,

$$\begin{aligned}
\|S\| &= t\|D_\xi^\theta(|\xi|^{a-1}\xi\psi(\xi,t)\chi\partial_\xi\hat{\phi}(0))\|\\
&\lesssim t\Big(\|\mathcal{D}_\xi^\theta(\psi(\xi,t)\|_\infty\||\xi|^a\chi\partial_\xi\hat{\phi}(0)\| + \|\psi(\xi,t)\|_\infty\|\mathcal{D}_\xi^\theta(|\xi|^a sgn(\xi)\chi)\||\partial_\xi\hat{\phi}(0)|\Big)\\
&\lesssim t\Big(\big(\|\psi(\xi,t)\|_\infty + \|\partial_\xi\psi(\xi,t)\|_\infty\big)|\partial_\xi\hat{\phi}(0)|\||\xi|^a\chi\| +\\
&+|\partial_\xi\hat{\phi}(0)|\|\psi(\xi,t)\|_\infty\|\mathcal{D}_\xi^\theta(|\xi|^a sgn(\xi)\chi)\|\Big),
\end{aligned} \tag{3-38}$$

note que $\|\mathcal{D}_\xi^\theta(|\xi|^a sgn(\xi)\chi)\|$ é o termo N que aparece em (3-26), assim vamos substituir na desigualdade (3-39), onde obtemos

$$\begin{aligned}
\|S\| &\lesssim t\Big(\big(\|\psi(\xi,t)\|_\infty + \|\partial_\xi\psi(\xi,t)\|_\infty\big)|\partial_\xi\hat{\phi}||\xi^a\chi| + |\partial_\xi\hat{\phi}|\|\psi(\xi,t)\|_\infty N\Big)\\
&\lesssim_a t|\partial_\xi\hat{\phi}(0)|\Big(\|\psi(\xi,t)\|_\infty + t\||\xi|^a\psi(\xi,t)\| + t\||\xi|\psi(\xi,t)\| + N\Big)\\
&\lesssim_a t|\partial_\xi\hat{\phi}(0)|(1 + t^{\frac{-a}{1+a}} + t^{\frac{-1}{1+a}} + N)\\
&\lesssim_a \|\langle x\rangle^{1+\theta}\phi\|(t + t^{\frac{2+a}{1+a}} + t^{\frac{2a+1}{1+a}} + N).
\end{aligned} \tag{3-39}$$

Aplicando o Lema 2.4 ao termo C_3 obtemos

$$\begin{aligned}
C_3 &\lesssim t^2\Big(\||\xi|^{a+1}\psi(\xi,t)\|_\infty\|\partial_\xi(|\xi|^{a+1}\psi(\xi,t))\|_\infty\|\phi\| + \||\xi|^{a+1}\psi(\xi,t)\|_\infty\|\mathcal{D}_\xi^\theta\hat{\phi}\|\Big)\\
&\lesssim \big(t + t^{\frac{2+a}{1+a}} + t^{\frac{2a+1}{1+a}}\big)\|\phi\| + t\||x|^\theta\phi\|.
\end{aligned} \tag{3-40}$$

Aplicando o Teorema 2.3 e Lema 2.8 ao termo C_4 obtemos

$$C_4 \lesssim t^2(t^{\frac{-2}{1+a}} + t^{\frac{-1}{1+a}} + t^{\frac{a-2}{1+a}})\|\phi\| + t^{\frac{-2}{1+a}}\||x|^\theta\phi\|. \tag{3-41}$$

E por fim, para o termo C_5, vamos proceder como em (3-41), onde obtemos

$$C_5 \lesssim t\Big((1 + t^{\frac{1}{1+a}} + t^{\frac{a}{1+a}})\|\phi\| + \underbrace{\|\mathcal{D}_\xi^\theta(sgn(\xi)\hat{\phi})\|}_{T}\Big). \tag{3-42}$$

Note que como $\frac{1}{2} < \theta < \frac{1}{2} + a$, segue que $-\frac{1}{2} < \theta - 1 < \frac{1}{2}$, assim podemos aplicar o Lema 2.9 em T,

$$\begin{aligned} \|D_\xi^\theta(sgn(\xi)\hat{\phi})\| &= \||x|^\theta \mathcal{H}\phi\| \\ &= \||x|^{\theta-1} x\mathcal{H}\phi\| \\ &= \||x|^{\theta-1}\mathcal{H}(x\phi)\| \\ &\lesssim \||x|^{\theta-1} x\phi\| \\ &= \||x|^\theta \phi\|. \end{aligned} \tag{3-43}$$

Agora, utilizando a relação entre as Derivadas fracionária e de Stein (2-6), obtemos

$$\|\mathcal{D}_\xi^\theta(sgn(\xi)\hat{\phi})\| \lesssim \|\phi\| + \|\mathcal{D}_\xi^\theta(sgn(\xi)\hat{\phi})\| \lesssim \||x|^\theta \phi\|. \tag{3-44}$$

Basta reunir as desigualdades e assim concluímos a demonstração. □

3.2 Demonstração do Teorema 1.1

Sejam $s \geq r$ e $\phi \in \mathcal{Z}_{s,r}(\mathbb{R})$, temos que a solução $u(t)$ do PVI associado à dBO (1-1) é única e satisfaz $u \in C([0,T]; H^s(\mathbb{R}))$ para todo $T > 0$. Assim como também temos a dependência contínua dos dados iniciais em H^s. Dessa forma, provaremos apenas a propriedade de persistência em L_r^2. Para isso definiremos $M := sup_{[0,T]}\|u(t)\|_{H^s}$ e dividiremos em 6 casos.

Inicialmente vamos multiplicar a equação integral associada a dBO (2-10) por $|x|^\theta$ e vamor estimar sua norma.

$$|x|^\theta u(t) = |x|^\theta U(t)\phi + \int_0^t |x|^\theta U(t-\tau)z(\tau)\, d\tau \tag{3-45}$$

o que implica em

$$\||x|^\theta u(t)\| \leq \||x|^\theta U(t)\phi\| + \|\int_0^t |x|^\theta U(t-\tau)z(\tau)\, d\tau\| \tag{3-46}$$

onde $z = \frac{1}{2}\partial_x u^2$. Assim, vamos estimar os dois termos a esquerda em (3-46) para cada um dos casos a seguir.

3.2.1 Caso 1

Sejam $r = \theta$ e $\theta \in (\frac{1}{2}, 1)$. Pela identidade de Plancherel e Lema 3.1 obtemos

$$\begin{aligned} \||x|^{\theta} U(t)\phi\| &= \|(|x|^{\theta} U(t)\phi)^{\wedge}\| \\ &= \|D_{\xi}^{\theta}(\psi(\xi, t)\hat{\phi})\| \\ &\lesssim_a \rho_1(t)\|\langle x\rangle^{\theta}\phi\| \\ &\lesssim_a \rho_1(T)\|\langle x\rangle^{\theta}\phi\|. \end{aligned} \tag{3-47}$$

Para o termo referente a integral, utilizando o Lema 3.1, imersão de Sobolev e a Proposição 2.7, onde $\frac{3}{2} - s < \lambda < a + 1$ obtemos

$$\begin{aligned} \||x|^{\theta} U(t-\tau)z(\tau)\| &= \||x|^{\theta}(U(t-\tau)z(\tau))^{\wedge}\| \\ &= \|D_{\xi}^{\theta}(\psi(\xi, t-\tau)\hat{z}(\tau))\| \\ &\lesssim_a \rho_1(t)(t-\tau)\|\langle x\rangle^{\theta}\partial_x u^2(\tau)\| \\ &\lesssim_a \rho_1(T)\|\langle x\rangle^{\theta} u(\tau)\partial_x u(\tau)\| \\ &\lesssim_a \rho_1(T)\|\langle x\rangle^{\theta} u(\tau)\|\|\partial_x u(\tau)\|_{L_x^{\infty}} \\ &\lesssim_a \rho_1(T)\|\langle x\rangle^{\theta} u(\tau)\|\|\partial_x u(\tau)\|_{H^{s+\lambda}} \\ &\lesssim_a \rho_1(T)c(a,\lambda, T)t^{\frac{-\lambda}{1+a}}\|\phi\|_{H^s}\|\langle x\rangle^{\theta} u(\tau)\|. \end{aligned} \tag{3-48}$$

A partir da identidade (2-4) obtemos

$$\|u(t)\| \leq \|\phi\|. \tag{3-49}$$

Reunindo (3-47)-(3-49) e o Lema de Gronwall, veja [10], obtemos

$$\begin{aligned} \||x|^{\theta} u(t)\| &\lesssim_a \rho_1(T)\|\langle x\rangle^{\theta}\phi\| + \rho_1(T)\|\langle x\rangle^{\theta}\phi\| \\ &\lesssim_{a,T} \|\langle x\rangle^{\theta}\phi\|, \text{onde } t \in [0, T]. \end{aligned} \tag{3-50}$$

De (3-50) obtemos a propriedade de persistência em L_r^2. A continuidade da aplicação $t \in [0, T] \mapsto L_r^2$ segue usando a desigualdade (3-50) argumentando-se com em [4]. Por argumentos similares a [9] e [4] temos a dependência contínua em L_r^2.

3.2.2 Caso 2

Sejam $r = 1+\theta$, $\theta \in (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}+a)$. Vamos prosseguir de forma similar a (3-46) porém agora com $|x|^{1+\theta}$, onde obtemos a desigualdade

$$\||x|^{\theta+1}u(t)\| \leq \||x|^{\theta+1}U(t)\phi\| + \|\int_0^t |x|^{\theta+1}U(t-\tau)z(\tau)\,d\tau\|. \tag{3-51}$$

Utilizando o Lema 3.2, para todo $t \in [0,T]$ em $\||x|^{\theta+1}U(t)\phi\|$ obtemos

$$\begin{aligned}\||x|^{\theta+1}U(t)\phi\| &= \|D_\xi^{1+\theta}(\psi(\xi,t)\hat{\phi}\| \\ &\lesssim_a \rho_2(t)\|\langle x\rangle^{1+\theta}\phi\| \\ &\lesssim_a \rho_2(T)\|\langle x\rangle^{1+\theta}\phi\|.\end{aligned} \tag{3-52}$$

E pelo Lema 3.2 e imersão de Sobolev em $\||x|^{\theta+1}U(t-\tau)z(\tau)\|$ obtemos

$$\begin{aligned}\||x|^{\theta+1}U(t-\tau)z(\tau)\| &= \|D_\xi^{1+\theta}(\psi(\xi,t-\tau)\hat{z}(\tau))\| \\ &\lesssim_a \rho_2(t-\tau)\|\langle x\rangle^{1+\theta}\partial_x u^2(\tau)\| \\ &\lesssim_a \rho_2(t-\tau)\|\langle x\rangle^{1+\theta}u(\tau)\partial_x u(\tau)\| \\ &\lesssim_a \rho_2(T)\|\langle x\rangle^{1+\theta}u(\tau)\|\|\partial_x u(\tau)\|_{L_x^\infty} \\ &\lesssim_a \rho_2(T)\|\langle x\rangle^{1+\theta}u(\tau)\|\|u(\tau)\|_{H^s} \\ &\lesssim_a \rho_2(T)M\|\langle x\rangle^{1+\theta}u(\tau)\|.\end{aligned} \tag{3-53}$$

Daqui em diante, basta reunir as desigualdades obtidas em (3-52) e (3-53) e proceder como no Caso 1 pra concluir o resultado.

3.2.3 Caso 3

Seja $1 < r < \frac{3}{2}$. Da desigualdade no Lema 3.1 obtemos

$$\|U(t)\phi\|_{L_1^2} \lesssim_a \rho_1(t)\|\phi\|_{L_1^2} \tag{3-54}$$

e pelo Lema 3.2

$$\|U(t)\phi\|_{L_\sigma^2} \lesssim_a \rho_2(t)\|\phi\|_{L_\sigma^2}, \sigma > \frac{3}{2}. \tag{3-55}$$

Assim, aplicando o Teorema de Interpolação de Stein-Weiss com mudança de medida (veja [1]) em (3-54) e (3-55) obtemos

$$\|U(t)\phi\|_{L_r^2} \lesssim_a \rho(t)\|\phi\|_{L_r^2} \lesssim_{a,T} \|\phi\|_{L_r^2}, t \in [0,T], \tag{3-56}$$

onde $r = 1+\theta(\sigma-1)$ e $\rho(t) \leq \rho_1(t)^{1-\theta}\rho_2(t)^\theta$, com $\theta \in (0,1)$.

Assim, voltando a equação integral associado ao PVI da dBO (2-10), onde estimando sua norma juntamente aos resultados (3-56), Proposição 2.7 e imersão de Sobolev obtemos

$$\begin{aligned}
\|u(t)\|_{L^2_r} &= \|U(t)\phi - \int_0^t U(t-\tau)z(\tau)\,d\tau\|_{L^2_r} \\
&\leq \|U(t)\phi\|_{L^2_r} + \|\int_0^t U(t-\tau)z(\tau)\,d\tau\|_{L^2_r} \\
&\lesssim_{a,T} \|\phi\|_{L^2_r} + \frac{1}{2}\int_0^t \|\partial_x u^2(\tau)\|_{L^2_r}\,d\tau \\
&\lesssim_{a,T} \|\phi\|_{L^2_r} + \int_0^t \|u(\tau)\partial_x u(\tau)\|_{L^2_r}\,d\tau \\
&\lesssim_{a,T} \|\phi\|_{L^2_r} + \int_0^t \|u(\tau)\|_{L^2_r}\|\partial_x u(\tau)\|_{L^\infty_x}\,d\tau \\
&\lesssim_{a,T} \|\phi\|_{L^2_r} + \int_0^t \|u(\tau)\|_{L^2_r}\|u(\tau)\|_{L^{s+\lambda}}\,d\tau \\
&\lesssim_{a,T} \|\phi\|_{L^2_r} + \|\phi\|_{H^s}\, c(a,\lambda,T)\int_0^t \tau^{-\frac{\lambda}{1+a}}\|u(\tau)\|_{L^2_r}\,d\tau,
\end{aligned} \tag{3-57}$$

onde temos que $\frac{3}{2} - s < \lambda < a+1$. Assim, ao utilizar o Lema de Gronwall obtemos a seguinte desigualdade

$$\|u(t)\|_{L^2_r} \lesssim_{a,\lambda,T} \|\phi\|_{L^2_r}. \tag{3-58}$$

A partir de (3-58) basta prosseguir como nos casos anteriores para concluir o resultado.

3.2.4 Caso 4

Sejam $r = \theta$ e $\theta \in (0, \frac{1}{2}]$. Este caso é similar ao caso 3.

3.2.5 Caso 5

Sejam $r = 2 + \theta \in (\frac{5}{2}, \frac{5}{2} + a)$ e $\theta \in (\frac{1}{2}, \frac{1}{2} + a)$. Obtemos a desigualdade

$$\||x|^{\theta+2}u(t)\| \leq \||x|^{\theta+2}U(t)\phi\| + \|\int_0^t |x|^{\theta+2}U(t-\tau)z(\tau)\,d\tau\|. \tag{3-59}$$

Procedendo de forma análoga ao caso 2 e aplicando o Lema 3.3 aos dois termos a direita da desigualdade (3-59), obtemos

$$\||x|^{\theta+2}U(t)\phi\| = \|D_\xi^{\theta+2}(\psi(\xi,t)\hat{\phi})\| \lesssim_a \rho_3(T)\|\langle x\rangle^{2+\theta}\phi\| \tag{3-60}$$

e

$$\||x|^{\theta+2}U(t-\tau)z(\tau)\| = \|D_\xi^{\theta+2}(\psi(\xi,t-\tau)\hat{z}(\tau))\| \lesssim_a \rho_3(T)M\|\langle x\rangle^{2+\theta}u(\tau)\|. \tag{3-61}$$

Basta proceder como no Caso 2 para finalizar a demontração deste caso.

3.2.6 Caso 6

Seja $\frac{3}{2} + a < r \leq \frac{5}{2}$. Este caso é similar ao Caso 3.

Assim concluímos a demontração do Teorema 1.1. $\square$

Demonstração do Teorema 1.2

Iniciaremos agora a demonstração do Teorema 1.2. Para isso vamos considerar $a \in (0,1)$. Note que o caso em que $a = 1$ pode ser obtido utilizando-se da mesma abordagem de [8]. Vamos dividir a demonstração em dois casos.

Caso $a \in (0, \frac{1}{2})$:

A ideia principal desta demonstração será observar que os termos em (2-12) tem um decaimento apropriado quando $|\xi|$ tende a infinito. Assim começaremos retomando a equação integral associada ao PVI da dBO,

$$u(t) = U(t)\phi - \frac{1}{2}\int_0^t U(t-\tau)u(\tau)\partial_x u(\tau)\, d\tau, \tag{4-1}$$

onde temos que

$$(U(t)\phi)^{\wedge}(\xi) = \psi(\xi, t)\hat{\phi}. \tag{4-2}$$

Seja $\frac{3}{2} + a = 1 + \gamma$, onde $\gamma \in (\frac{1}{2} + a, 1)$, ao multiplicar (4-1) por $|x|^{1+\gamma}$ obtemos

$$D_\xi^\gamma \partial_\xi \widehat{u(t)} = D_\xi^\gamma \partial_\xi(\psi(\xi, t)\hat{\phi}) - \int_0^t D_\xi^\gamma \partial_\xi(\psi(\xi, t-\tau)\hat{z}\, d\tau. \tag{4-3}$$

Sem perda de generalidade assumimos que $t_1 = 0 < t_2$. Seja $\phi \in \mathcal{Z}_{\frac{3}{2}+a, \frac{3}{2}+a}$, então temos pelo item (i) do Teorema 1.1 que

$$u \in C([0, T]; H^{\frac{3}{2}+a}(\mathbb{R}) \cap L_r^2), \text{ onde } 0 < r < \frac{3}{2} + a. \tag{4-4}$$

Agora vamos multiplicar o termo $D_\xi^\gamma \partial_\xi(\psi(\xi, t)\hat{\phi})$ pela função auxiliar χ, onde obtemos

$$\begin{aligned}\chi D_\xi^\gamma \partial_\xi(\psi(\xi,t)\hat{\phi}) &= \chi D_\xi^\gamma \partial_\xi(\psi(\xi,t)\hat{\phi}) + D_\xi^\gamma \chi \partial_\xi(\psi(\xi,t)\hat{\phi}) - D_\xi^\gamma \chi \partial_\xi(\psi(\xi,t)\hat{\phi})\\ &= (\chi D_\xi^\gamma \partial_\xi(\psi(\xi,t)\hat{\phi}) - D_\xi^\gamma \chi \partial_\xi(\psi(\xi,t)\hat{\phi})) + D_\xi^\gamma \chi \partial_\xi(\psi(\xi,t)\hat{\phi})\\ &= [\chi; D_\xi^\gamma]\partial_\xi(\psi(\xi,t)\hat{\phi}) + D_\xi^\gamma \chi \partial_\xi(\psi(\xi,t)\hat{\phi})\\ &:= A + B,\end{aligned} \tag{4-5}$$

onde, $[\chi; D_\xi^\gamma]$ representa o comutador entre χ e D_ξ^γ.

Substituindo (2-12) em A e B, obtemos os seguintes termos:

$$\begin{aligned}A &= [\chi; D_\xi^\gamma]\partial_\xi(\psi(\xi,t)\hat{\phi})\\ &= [\chi; D_\xi^\gamma](-(t(1+a)|\xi|^a sgn(\xi) + 2it|\xi|)\hat{\phi} + \partial_\xi\hat{\phi})\psi(\xi,t)\\ &= \underbrace{[\chi; D_\xi^\gamma]((-(t(1+a)|\xi|^a sgn(\xi)\hat{\phi}\psi(\xi,t))}_{A_1} - \underbrace{[\chi; D_\xi^\gamma]2it|\xi|\hat{\phi}\psi(\xi,t)}_{A_2} + \underbrace{[\chi; D_\xi^\gamma]\partial_\xi\hat{\phi}\psi(\xi,t)}_{A_3}.\end{aligned} \tag{4-6}$$

e

$$\begin{aligned}B &= D_\xi^\gamma \chi \partial_\xi(\psi(\xi,t)\hat{\phi})\\ &= D_\xi^\gamma(\chi(-(t(1+a)|\xi|^a sgn(\xi) + 2it|\xi|)\hat{\phi} + \partial_\xi\hat{\phi})\psi(\xi,t))\\ &= \underbrace{-(1+a)D_\xi^\gamma(\chi|\xi|^a sgn(\xi)\hat{\phi}\psi(\xi,t))}_{B_1} - \underbrace{D_\xi^\gamma(2it|\xi|\chi\hat{\phi}\psi(\xi,t))}_{B_2} + \underbrace{D_\xi^\gamma(\chi\partial_\xi\hat{\phi}\psi(\xi,t))}_{B_3}.\end{aligned} \tag{4-7}$$

Para auxiliar em nossas estimativas o próximo resultado será bastante importante.

Proposição 4.1 *$A_i, B_j \in L^2$, para $i = 1,2,3$ e $j = 2,3$.*

Prova. Para os termos A_i vamos utilizar a Proposição 2.12, o Lema 2.8 e a identidade de Plancherel:

$$\begin{aligned}\|A_1\| &= \|[\chi; D_\xi^\gamma]((-(t(1+a)|\xi|^a sgn(\xi)\hat{\phi}\psi(\xi,t))\|\\ &\lesssim \|\chi\|_{H_\xi^2}\|t(1+a)|\xi|^a sgn(\xi)\hat{\phi}\psi(\xi,t)\|\\ &\lesssim_{a,t} \|\chi\|_{H_\xi^2}\||\xi|^a\hat{\phi}\psi(\xi,t)\|\\ &\lesssim_{a,t} \|\phi\|,\end{aligned} \tag{4-8}$$

$$\begin{aligned}\|A_2\| &= \|[\chi; D_\xi^\gamma]2it|\xi|\hat{\phi}\psi(\xi,t)\|\\ &\lesssim \|\chi\|_{H_\xi^2}\|2it|\xi|\hat{\phi}\psi(\xi,t)\|\\ &\lesssim_{a,t} \|\chi\|_{H_\xi^2}\||\xi|\hat{\phi}\psi(\xi,t)\|\\ &\lesssim_{a,t} \|\phi\|,\end{aligned} \tag{4-9}$$

e

$$\begin{aligned}\|A_3\| &= \|[\chi; D_\xi^\gamma]\partial_\xi \hat{\phi}\psi(\xi,t)\| \\ &\lesssim \|\chi\|_{H_\xi^2}\|\partial_\xi\hat{\phi}\psi(\xi,t)\| \\ &\lesssim \|x\phi\|.\end{aligned} \tag{4-10}$$

Para os termos B_j, utilizaremos a relação de equivalência entre as derivadas de Stein e fracionária (2-6) obtida no Teorema 2.3 e o Lema 2.4:

$$\begin{aligned}\|B_2\| &= \|D_\xi^\gamma(2it|\xi|\chi\hat{\phi}\psi(\xi,t))\| \\ &\lesssim_t \||\xi|\chi\hat{\phi}\psi(\xi,t)\| + \|\mathcal{D}_\xi^\gamma(|\xi|\chi\hat{\phi}\psi(\xi,t))\| \\ &\lesssim_t \|\hat{\phi}\| + \|\mathcal{D}_\xi^\gamma\hat{\phi}\| \\ &\lesssim_{a,t} \|\phi\| + \||x|^{\frac{1}{2}+a}\phi\|,\end{aligned} \tag{4-11}$$

e

$$\begin{aligned}\|B_3\| &= \|D_\xi^\gamma(\chi\partial_\xi\hat{\phi}\psi(\xi,t))\| \\ &\leq \|\chi\partial_\xi\hat{\phi}\psi(\xi,t)\| + \|\mathcal{D}_\xi^\gamma(\chi\partial_\xi\hat{\phi}\psi(\xi,t))\| \\ &\lesssim_{a,t} \|\partial_\xi\hat{\phi}\| + \|\mathcal{D}_\xi^\gamma\partial_\xi\hat{\phi}\| \\ &\lesssim_{a,t} \|x\phi\| + \||x|^{\frac{3}{2}+a}\phi\|.\end{aligned} \tag{4-12}$$

Assim concluímos a demonstração. □

Agora vamos voltar a atenção ao termo da integral em (4-3), onde vamos reescrever este termo utilizando a função auxiliar χ e o comutador entre χ e D_ξ^γ:

$$\begin{aligned}&\int_0^t \chi D_\xi^\gamma\partial_\xi(\psi(\xi,t-\tau)\hat{z})\,d\tau = \\ &= \int_0^t [\chi; D_\xi^\gamma]\partial_\xi(\psi(\xi,t-\tau)\hat{z} - D_\xi^\gamma\chi\partial_\xi(\psi(\xi,t-\tau)\hat{z}) + D_\xi^\gamma\chi\partial_\xi(\psi(\xi,t-\tau)\hat{z})]\,d\tau \\ &= \int_0^t ([\chi; D_\xi^\gamma]\partial_\xi(\psi(\xi,t-\tau)\hat{z}) + D_\xi^\gamma(\chi\partial_\xi(\psi(\xi,t-\tau)\hat{z})))\,d\tau.\end{aligned} \tag{4-13}$$

Reorganizando os termos em (4-13) obtemos

$$\begin{aligned}&\int_0^t [\chi, D_\xi^\theta]\Big(\psi(\xi,t-\tau)((\tau-t)(1+a)|\xi|^a sgn(\xi)\hat{z} + 2i(\tau-t)|\xi|\hat{z}) + \partial_\xi\hat{z}\Big) + \\ &+ D_\xi^\theta\Big(\chi\big(\psi(\xi,t-\tau)((\tau-t)(1+a)|\xi|^a sgn(\xi)\hat{z} + 2i(\tau-t)|\xi|\hat{z} + \partial_\xi\hat{z}\big)\Big)\,d\tau. \\ &:= \mathcal{A}_1 + \mathcal{A}_2 + \mathcal{A}_3 + \mathcal{B}_1 + \mathcal{B}_2 + \mathcal{B}_3.\end{aligned} \tag{4-14}$$

Assim como fizemos para os termos obtidos a partir de (4-6) e (4-7) demonstraremos o seguinte resultado:

Proposição 4.2 *Sejam $t \in [0,T]$, então $\mathcal{A}_i, \mathcal{B}_i \in L^2$ para $i = 1,2,3$.*

Prova. Note que na demontração da Proposição 4.1 utilizamos o fato de que $\phi \in L^2(\langle x\rangle^{\frac{3}{2}+a}dx)$, assim precisamos mostrar que z também pertence a este espaço para todo $t \in (0,T]$. Assim, observemos inicialmente que

$$\partial_\xi(\langle x\rangle^{\frac{3}{2}+a}u^2) = (\frac{3}{2}+a)\langle x\rangle^{-\frac{1}{2}+a}xu^2 + \langle x\rangle^{\frac{3}{2}+a}\partial_\xi u^2. \tag{4-15}$$

Portanto, é suficiente estimar o lado esquerdo da identidade (4-15), assim notemos que

$$\begin{aligned} \|J(\langle x\rangle^{\frac{3}{2}+a}u^2)\| &= \|J(\langle x\rangle^{\frac{6}{4}+\frac{2a}{2}}u^2)\| \\ &= \|J(\langle x\rangle^{2(\frac{3}{4}+\frac{a}{2})}u^2)\| \\ &= \|J((\langle x\rangle^{(\frac{3}{4}+\frac{a}{2})}u)^2)\| \\ &\lesssim \|J(\langle x\rangle^{(\frac{3}{4}+\frac{a}{2})}u)\|^2 \\ &\lesssim \|J^{\frac{1}{\beta}}\|^{\beta}\|\langle x\rangle u\|^{1-\beta}, \end{aligned} \tag{4-16}$$

onde na última desigualdade em (4-16) utilizamos a Proposição 2.1 com os coeficientes $\beta = \frac{1}{4} - \frac{a}{2}$, $\nu = 1$ e $\delta = \frac{1}{\beta}$. Logo, resta lidar com o termo $\mathcal{B}_1$, assim usando a relação de equivalência entre as derivadas de Stein e fracionária (2-6) e o Lema 2.4, obtemos

$$\begin{aligned} \|\mathcal{B}_1\| &\leq \int_0^t \|D_\xi^\theta(\chi\psi(\xi,t-\tau)((\tau-t)(1+a)|\xi|^a sgn(\xi)\hat{z}\|\,d\tau \\ &\lesssim_{a,t} \int_0^t \|D_\xi^\theta(\chi\psi(\xi,t-\tau)|\xi|^{a+1}\widehat{u^2}\|\,d\tau \\ &\lesssim_{a,t} \|\widehat{u^2}\| + \|\mathcal{D}_\xi^\theta\widehat{u^2}\| \\ &\lesssim_{a,t} \|u\|_{H^1}^2 + \|u\|_{H^1}\||x|^{\frac{1}{2}+a}u\|. \end{aligned} \tag{4-17}$$

Assim concluímos a demonstração desta proposição. □

Vimos até o presente momento que os termos $A_i, \mathcal{A}_i, B_j, \mathcal{B}_i \in L^2$ com $i = 1,2,3$ e $j = 2,3$. Lidaremos agora com o termo restante B_1. Como

$B_1 = -t(1+a)D_\xi^\theta(\chi\psi(\xi,t)sgn(\xi)|\xi|^a\hat{\phi})$, vamos reescrevê-lo, onde obtemos

$$\begin{aligned}
B_1 &= -t(1+a)D_\xi^\theta(\chi\psi(\xi,t)sgn(\xi)|\xi|^a\hat{\phi})\\
&= -t(1+a)D_\xi^\theta(\chi\psi(\xi,t)sgn(\xi)|\xi|^a\hat{\phi}(\xi))+\\
&+t(1+a)D_\xi^\theta(\chi\psi(\xi,t)sgn(\xi)|\xi|^a\hat{\phi}(0)) - t(1+a)D_\xi^\theta(\chi\psi(\xi,t)sgn(\xi)|\xi|^a\hat{\phi}(0))\\
&= \underbrace{-t(1+a)D_\xi^\theta(\chi\psi(\xi,t)sgn(\xi)|\xi|^a(\hat{\phi}(\xi)-\hat{\phi}(0)))}_{B_{1.1}} - \underbrace{t(1+a)D_\xi^\theta(\chi\psi(\xi,t)sgn(\xi)|\xi|^a\hat{\phi}(0))}_{B_{1.2}}.
\end{aligned} \tag{4-18}$$

Note que tomando-se $M = \chi\psi(\xi,t)sgn(\xi)|\xi|^a(\hat{\phi}(\xi)-\hat{\phi}(0))$, obtemos

$$\begin{aligned}
\partial_\xi M &= \partial_\xi(\chi)\psi(\xi,t)|\xi|^a(\hat{\phi}(\xi)-\hat{\phi}(0)) + \partial_\xi(\psi(\xi,t))\chi sgn(\xi)|\xi|^a(\hat{\phi}(\xi)-\hat{\phi}(0))+\\
&+\chi\psi(\xi,t)sgn(\xi)a|\xi|^{a-1}(\hat{\phi}(\xi)-\hat{\phi}(0)) + \chi\psi(\xi,t)sgn(\xi)|\xi|^a\partial_\xi\hat{\phi}(\xi),
\end{aligned} \tag{4-19}$$

onde agora vamos estimar as normas de M e $-t(1+a)\partial_\xi M$:

$$\begin{aligned}
\|M\| &= \|\chi\psi(\xi,t)sgn(\xi)|\xi|^a(\hat{\phi}(\xi)-\hat{\phi}(0))\|\\
&\le \|\chi\psi(\xi,t)sgn(\xi)|\xi|^a\hat{\phi}(\xi)\| + \|\chi\psi(\xi,t)sgn(\xi)|\xi|^a\hat{\phi}(0)\|\\
&\lesssim_{a,t} \|\chi|\xi|^a\hat{\phi}(\xi)\| + \|\chi|\xi|^a\hat{\phi}(0)\|\\
&\lesssim_{a,t} \|\chi|\xi|^a\|_\infty\|\hat{\phi}(\xi)\| + \|\chi|\xi|^a\||\hat{\phi}(0)|\\
&\lesssim_{a,t} \|\hat{\phi}\| + |\hat{\phi}(0)|,
\end{aligned} \tag{4-20}$$

e

$$\begin{aligned}
&\|-t(1+a)\partial_\xi M\| \lesssim_{a,t}\\
&\lesssim_{a,t} \|\partial_\xi(\chi)\psi(\xi,t)|\xi|^a(\hat{\phi}(\xi)-\hat{\phi}(0))\| + \|\partial_\xi(\psi(\xi,t))\chi sgn(\xi)|\xi|^a(\hat{\phi}(\xi)-\hat{\phi}(0))\|+\\
&+\|\chi\psi(\xi,t)sgn(\xi)a|\xi|^{a-1}(\hat{\phi}(\xi)-\hat{\phi}(0))\| + \|\chi\psi(\xi,t)sgn(\xi)|\xi|^a\partial_\xi\hat{\phi}(\xi)\|\\
&\lesssim_{a,t} \|\partial_\xi(\chi)\psi(\xi,t)|\xi|^a\hat{\phi}(\xi)\| + \|\partial_\xi(\chi)\psi(\xi,t)|\xi|^a\hat{\phi}(0)\|+\\
&+\|\partial_\xi(\psi(\xi,t))\chi|\xi|^a\hat{\phi}(\xi)\| + \|\partial_\xi(\psi(\xi,t))\chi|\xi|^a\hat{\phi}(0)\|+\\
&+\|\chi\psi(\xi,t)|\xi|^a\partial_\xi\hat{\phi}\| + \|\chi\psi(\xi,t)|\xi|^a\partial_\xi\hat{\phi}\|\\
&\lesssim_{a,t} \||\xi|^a\partial_\xi(\chi)\|_\infty\|\hat{\phi}\| + \||\xi|^a\partial_\xi(\chi)\||\hat{\phi}(0)|+\\
&+\|\chi|\xi|^a\partial_\xi(\psi(\xi,t))\|_{L^\infty_\xi}\|\phi\| + \|\partial_\xi\psi(\xi,t)\|_{L^\infty_\xi}\||\xi|^a\chi\||\hat{\phi}(0)|+\\
&+\|\chi|\xi|^a\|\|\partial_\xi\hat{\phi}\|_\infty + \|\chi|\xi|^a\|_\infty\|\hat{\phi}\|\\
&\lesssim_{a,t} \|\langle x\rangle^{\frac{3}{2}+a}\phi\| + \|x\phi\|,
\end{aligned} \tag{4-21}$$

onde em (4-21) usamos a imersão de Sobolev

$$\|\partial_\xi \hat{\phi}\|_\infty \lesssim \|J_\xi^{\frac{3}{2}+a}\hat{\phi}\| = \|\langle x\rangle^{\frac{3}{2}+a}\phi\|. \tag{4-22}$$

Assim, de (4-20) e (4-21) concluímos que $B_{1.1} \in H^1(\mathbb{R})$. Note que utilizando a Proposição 4.1, a Proposição 4.2 e (4-18)-(4-21) obtemos que

$$t(1+a)|\xi|^a sgn(\xi)\psi(\xi,t)\chi\hat{\phi}(0) \in H^\gamma(\mathbb{R}). \tag{4-23}$$

Note que reescrevendo (4-23) obtemos

$$\begin{aligned} t(1+a)|\xi|^a sgn(\xi)\psi(\xi,t)\chi\hat{\phi}(0) &= t(1+a)|\xi|^a sgn(\xi)\psi(\xi,t)\chi\hat{\phi}(0) - t(1+a)|\xi|^a sgn(\xi)\chi\hat{\phi}(0) + \\ &\quad + t(1+a)|\xi|^a sgn(\xi)\chi\hat{\phi}(0) \\ &= \underbrace{t(1+a)|\xi|^a sgn(\xi)(\psi(\xi,t)-1)\chi\hat{\phi}(0)}_{C_1} + \\ &\quad + \underbrace{t(1+a)|\xi|^a sgn(\xi)\chi\hat{\phi}(0)}_{C_2}, \end{aligned} \tag{4-24}$$

onde segue que $C_1 \in H_\xi^1(\mathbb{R})$ e $C_2 \in H_\xi^\gamma$.

Como $C_2 \in H_\xi^\gamma$, aplicando a relação de equivalência (2-6) obtemos

$$t(1+a)\mathcal{D}_\xi^\gamma(|\xi|^a sgn(\xi)\chi\hat{\phi}(0)) \in L^2(\mathbb{R}). \tag{4-25}$$

Por hipótese $\gamma < \frac{1}{2} + a$, logo aplicando a identidade (2-22) obtida na Proposição 2.10 segue que $\hat{\phi}(0) = 0$. Como vimos em (2-3), $\hat{u}(0,t) = \hat{\phi}(0)$. Portanto obtemos

$$\hat{u}(0,t) = 0, \tag{4-26}$$

em todo tempo t em que a solução existe. Assim, concluímos a demonstração deste Teorema para o caso em que $a \in (0, \frac{1}{2})$. O caso $a \in [\frac{1}{2}, 1)$ decorre de forma análoga tomando-se $\frac{3}{2} + a = 2 + \gamma$, com $\gamma = a - \frac{1}{2}$, utilizando-se a segunda derivada de $\psi(\xi,t)\hat{\phi}(\xi)$ calculada em (2-13), e observando que pela Proposição 2.11 o termo

$$\mathcal{D}_\xi^\gamma(|\xi|^{a-1}\chi) \notin L^2(\mathbb{R}). \tag{4-27}$$

Assim concluímos a demontração do Teorema 1.2. $\square$

CAPÍTULO 5

Demonstração do Teorema 1.3

Para esta demonstração prosseguiremos de forma similar a demonstração do Teorema 1.2. Seja $a \in (0, \frac{1}{2})$. Assumamos sem perda de generalidade que $0 = t_1 < t_2 < t_3$. Como $\phi \in \mathcal{Z}_{\frac{5}{2}+a, \frac{5}{2}+a}$, aplicando o Teorema 1.1 (ii), obtemos

$$u \in C([0, T]; H^{\frac{5}{2}+a}(\mathbb{R}) \cap L_r^2), 0 < r < \frac{5}{2} + a. \tag{5-1}$$

Seja $\frac{5}{2} + a = 2 + \gamma$, onde $\gamma \in (0, 1)$, multiplicando a equação integral associada ao PVI da dBO por $|x|^{2+\gamma}$ e procedendo de forma similar a (4-3), obtemos a seguinte identidade:

$$D_\xi^\gamma \partial_\xi^2(\widehat{u(t)}) = D_\xi^\gamma \partial_\xi^2(\psi(\xi, t)\hat{\phi}) - \int_0^t D_\xi^\gamma \partial_\xi^2(\psi(\xi, t-\tau)\hat{z}(\tau))\, d\tau. \tag{5-2}$$

Vamos agora realizar a estimativa com relação ao primeiro termo de (5-2), isto é, $D_\xi^\gamma \partial_\xi^2(\psi(\xi, t)\hat{\phi})$, para isso vamos reescrever este termo utilizando-se da função auxiliar χ, onde obtemos

$$\begin{aligned}\chi D_\xi^\gamma \partial_\xi^2(\psi(\xi, t)\hat{\phi}) &= \chi D_\xi^\gamma \partial_\xi^2(\psi(\xi, t)\hat{\phi}) - D_\xi^\gamma \chi \partial_\xi^2(\psi(\xi, t)\hat{\phi}) + D_\xi^\gamma \chi \partial_\xi^2(\psi(\xi, t)\hat{\phi}) \\ &= \underbrace{[\chi; D_\xi^\gamma]\partial_\xi^2(\psi(\xi, t)\hat{\phi})}_{C} + \underbrace{D_\xi^\gamma(\chi \partial_\xi^2(\psi(\xi, t)\hat{\phi}))}_{D},\end{aligned} \tag{5-3}$$

substituindo em C e D a segunda derivada de $\psi(\xi, t)\hat{\phi}$ calculada em (2-13) obtemos os termos a seguir

$$\begin{aligned}C &= [\chi; D_\xi^\gamma]\partial_\xi^2(\psi(\xi, t)\hat{\phi}) \\ &= [\chi; D_\xi^\gamma]\bigg(\Big[(t^2(1+a)^2|\xi|^{2a} - t(1+a)a|\xi|^{a-1} + 4it^2(1+a)|\xi|^{a+1}sgn(\xi) - 4t^2\xi^2 - \\ &\quad -2itsgn(\xi))\hat{\phi}(2t(1+a)|\xi|^a sgn(\xi) + 4it|\xi|)\partial_\xi\hat{\phi} + \partial_\xi^2\hat{\psi}\Big]\psi(\xi, t)\bigg) \\ &:= C_1 + \cdots + C_8,\end{aligned} \tag{5-4}$$

onde

$$
\begin{aligned}
C_1 &= [\chi; D_\xi^\gamma] t^2(1+a)^2|\xi|^{2a}\hat{\phi}\psi(\xi,t)\\
C_2 &= [\chi; D_\xi^\gamma](-t(1+a)a|\xi|^{a-1})\hat{\phi}\psi(\xi,t)\\
C_3 &= [\chi; D_\xi^\gamma]4it^2(1+a)|\xi|^{a+1}sgn(\xi)\hat{\phi}\psi(\xi,t)\\
C_4 &= [\chi; D_\xi^\gamma](-4t^2\xi^2)\phi\psi(\hat{\xi},t)\\
C_5 &= [\chi; D_\xi^\gamma](-2itsgn(\xi))\hat{\phi}\psi(\xi,t)\\
C_6 &= [\chi; D_\xi^\gamma](-2t(1+a)|\xi|^{a}sgn(\xi)\partial_\xi(\hat{\phi})\psi(\xi,t)\\
C_7 &= [\chi; D_\xi^\gamma](-4it|\xi|)\partial_\xi(\hat{\phi})\psi(\xi,t)\\
C_8 &= [\chi; D_\xi^\gamma]\partial_\xi^2(\hat{\phi})\psi(\xi,t),
\end{aligned}
\tag{5-5}
$$

e

$$
\begin{aligned}
D &= D_\xi^\gamma(\chi\partial_\xi^2(\psi(\xi,t)\hat{\phi}))\\
&= D_\xi^\gamma\Big(\chi\Big[(t^2(1+a)^2|\xi|^{2a} - t(1+a)a|\xi|^{a-1} + 4it^2(1+a)|\xi|^{a+1}sgn(\xi) - 4t^2\xi^2 -\\
&-2itsgn(\xi))\hat{\phi}(2t(1+a)|\xi|^{a}sgn(\xi) + 4it|\xi|)\partial_\xi\hat{\phi} + \partial_\xi^2\hat{\psi}\Big]\psi(\xi,t)\Big)\\
&:= D_1 + \cdots + D_8,
\end{aligned}
\tag{5-6}
$$

onde

$$
\begin{aligned}
D_1 &= D_\xi^\gamma(\chi t^2(1+a)^2|\xi|^{2a}\hat{\phi}\psi(\xi,t))\\
D_2 &= D_\xi^\gamma((-\chi t(1+a)a|\xi|^{a-1})\hat{\phi}\psi(\xi,t))\\
D_3 &= D_\xi^\gamma(\chi 4it^2(1+a)|\xi|^{a+1}sgn(\xi)\hat{\phi}\psi(\xi,t))\\
D_4 &= D_\xi^\gamma((-\chi 4t^2\xi^2)\phi\psi(\hat{\xi},t))\\
D_5 &= D_\xi^\gamma((-\chi 2itsgn(\xi))\hat{\phi}\psi(\xi,t))\\
D_6 &= D_\xi^\gamma((-\chi 2t(1+a)|\xi|^{a}sgn(\xi)\partial_\xi(\hat{\phi})\psi(\xi,t))\\
D_7 &= D_\xi^\gamma((-\chi 4it|\xi|)\partial_\xi(\hat{\phi})\psi(\xi,t))\\
D_8 &= D_\xi^\gamma(\chi\partial_\xi^2(\hat{\phi})\psi(\xi,t)).
\end{aligned}
\tag{5-7}
$$

Agora enunciaremos um resultado que será necessário para a nossa demonstração.

Proposição 5.1 *Os termos $C_i, D_i \in L^2(\mathbb{R})$, onde $i = 1, ..., 8$ com exceção de D_2 e D_6.*

Prova. Vamos primeiro mostrar que $C_2 \in L^2(\mathbb{R})$, para isso vamos utilizar o fato de que como $\hat{\phi}(0) = 0$, pela Fórmula de Taylor podemos reescrever $\hat{\phi}$ como

$$
\hat{\phi}(\xi) = \xi\partial_\xi\hat{\phi}(0) + \int_0^t (\xi - \sigma)\partial_\xi^2\hat{\phi}(\sigma)\,d\sigma, \tag{5-8}
$$

e aplicando a Proposição 2.12 obtemos

$$
\begin{aligned}
\|C_2\| &\lesssim \|\chi\|_{H^2_\xi}\|t(1+a)a|\xi|^{a-1})\hat{\phi}\psi(\xi,t)\| \\
&\lesssim_a t\||\xi|^{a-1}\psi(\xi,t)(\xi\partial_\xi\hat{\phi}(0)+\int_0^t(\xi-\sigma)\partial_\xi^2\hat{\phi}(\sigma)\,d\sigma)\| \\
&\lesssim_a t\Big(\||\xi|^{a-1}\psi(\xi,t)\xi\partial_\xi\hat{\phi}(0)\|+\||\xi|^{a-1}\psi(\xi,t)\int_0^t(\xi-\sigma)\partial_\xi^2\hat{\phi}(\sigma)\,d\sigma)\|\Big) \\
&\lesssim_a t\Big(\||\xi|^{a}\psi(\xi,t)\partial_\xi\hat{\phi}(0)\|+\||\xi|^{a-1}\psi(\xi,t)\int_0^t(\xi-\sigma)\partial_\xi^2\hat{\phi}(\sigma)\,d\sigma)\|\Big) \\
&\lesssim_a t\Big(\||\xi|^{a}e^{-t|\xi|^{1+a}}\||\partial_\xi\hat{\phi}(0)|+\||\xi|^{a}e^{-t|\xi|^{1+a}}\|\|\partial_\xi^2\hat{\phi}\|_{L^\infty_\sigma}\Big) \\
&\lesssim_a t^{\frac{1}{2(1+a)}}\|\phi\|_{H^{\frac{5}{2}+a}},
\end{aligned}
\tag{5-9}
$$

onde em (5-9) utilizamos o Lema 2.5 e a imersão de Sobolev. Quanto aos termos C_i com $i\neq 2$, procederemos de forma similar ao que foi feito para os termos A_i, com $i=1,2,3$ na Proposição 4.1.

Para os termos D_j, com $j\neq 2,6$ vamos utilizar a relação de equivalência (2-6), o Lema 2.4 e o Lema 2.8:

$$
\begin{aligned}
\|D_1\| &\lesssim \|\chi t^2(1+a)^2|\xi|^{2a}\hat{\phi}\psi(\xi,t)\|+\|\mathcal{D}^\gamma_\xi(\chi t^2(1+a)^2|\xi|^{2a}\hat{\phi}\psi(\xi,t))\| \\
&\lesssim_a t^2\Big(\|\hat{\phi}\|+\|\mathcal{D}^\gamma_\xi(|\xi|^{2a}\hat{\phi}\psi(\xi,t))\|\Big) \\
&\lesssim_a t^2\Big(\|\phi\|+(t^{-\frac{2a}{1+a}}+t^{\frac{1-2a}{1+a}}+t^{\frac{-a}{1+a}})\|\phi\|+t^{\frac{-2a}{1+a}}\||x|^\gamma\phi\|\Big) \\
&\lesssim_a \|\phi\|\big(t^2+t^{\frac{2}{1+a}}+t^{\frac{3}{1+a}}+t^{\frac{2+a}{1+a}}\big)+t^{\frac{2}{1+a}}\||x|^\gamma\phi\| \\
&\lesssim_{a,t} \|\phi\|+\||x|^{\frac{1}{2}+a}\phi\|,
\end{aligned}
\tag{5-10}
$$

$$
\begin{aligned}
\|D_3\| &\lesssim \|\chi 4it^2(1+a)|\xi|^{a+1}sgn(\xi)\hat{\phi}\psi(\xi,t)\|+\|\mathcal{D}^\gamma_\xi(\chi 4it^2(1+a)|\xi|^{a+1}sgn(\xi)\hat{\phi}\psi(\xi,t))\| \\
&\lesssim_a t^2\big(\||\xi|^{a+1}\psi(\xi,t)\hat{\phi}\|\big)+\|\mathcal{D}^\gamma_\xi(|\xi|^{a+1}\hat{\phi}\psi(\xi,t))\| \\
&\lesssim_a (1+t^{\frac{1+2a}{1+a}}+t^{\frac{2+a}{1+a}})\|\phi\|+t\||x|^\gamma\phi\| \\
&\lesssim_{a,t} \|\phi\|+\||x|^{\frac{1}{2}+a}\phi\|,
\end{aligned}
\tag{5-11}
$$

$$
\begin{aligned}
\|D_4\| &\lesssim \|-\chi 4t^2\xi^2\hat{\phi}\psi(\xi,t)\|+\|\mathcal{D}^\gamma_\xi(-\chi 4t^2\xi^2\hat{\phi}\psi(\xi,t))\| \\
&\lesssim_a t^2\|\xi^2\hat{\phi}\psi(\xi,t)\|+t^2\|\mathcal{D}^\gamma_\xi(\xi^2\hat{\phi}\psi(\xi,t))\| \\
&\lesssim_a t^2\Big(t^{\frac{-2}{1+a}}\|\phi\|+(t^{\frac{-2}{1+a}}+t^{\frac{-1}{1+a}}+t^{\frac{a-2}{1+a}})\|\phi\|+t^{\frac{2}{1+a}}\||x|^\gamma\phi\|\Big) \\
&\lesssim_{a,t} \|\phi\|+\||x|^{\frac{1}{2}+a}\phi\|,
\end{aligned}
\tag{5-12}
$$

$$
\begin{aligned}
\|D_7\| &\lesssim t\||\xi|\psi(\xi,t)\partial_\xi(\hat{\phi})\| + t\|\mathcal{D}_\xi^\gamma(|\xi|\psi(\xi,t)\partial_\xi(\hat{\phi}))\| \\
&\lesssim_a \|\partial_\xi(\hat{\phi})\|(t^{\frac{a}{1+a}} + t^{\frac{2}{1+a}} + t) + t^{\frac{a}{1+a}}\||x|^\gamma\partial_\xi\phi\| \\
&\lesssim_{a,t} \|x\phi\| + \|\mathcal{D}_\xi^\gamma\partial_\xi\phi\| \\
&\lesssim_{a.t} \|x\phi\| + \||x|^{\gamma+1}\phi\| \\
&\lesssim_{a,t} \|x\phi\| + \||x|^{\frac{3}{2}+2}\phi\|,
\end{aligned} \tag{5-13}
$$

$$
\begin{aligned}
\|D_8\| &\lesssim_a \|\psi(\xi,t)\partial_\xi^2\hat{\phi}\| + \|\mathcal{D}_\xi^\gamma(\psi(\xi,t)\partial_\xi^2\hat{\phi})\| \\
&\lesssim_{a,t} \|x^2\phi\| + \|\mathcal{D}_\xi^\gamma\partial_\xi^2\phi\| \\
&\lesssim_{a,t} \|x^2\phi\| + \||x|^{\frac{5}{2}+a}\phi\|,
\end{aligned} \tag{5-14}
$$

e por fim

$$
\|D_5\| \lesssim_a t(\|sgn(\xi)\psi(\xi,t)\hat{\phi}\| + \|\mathcal{D}_\xi^\gamma(sgn(\xi)\psi(\xi,t)\hat{\phi})\|), \tag{5-15}
$$

onde o termo D_5 pode ser estimado de forma similar ao termo (3-43). Assim temos a conclusão da Proposição 5.1. $\square$

Vamos proceder agora ao termo referente a integral em (5-2) e para isto utilizaremos novamente a função auxiliar χ para reescrever este termo:

$$
\begin{aligned}
&\chi\int_0^t D_\xi^\gamma\partial_\xi^2(\psi(\xi,t-\tau)\hat{z}(\tau))\,d\tau = \\
&\int_0^t \chi D_\xi^\gamma\partial_\xi^2(\psi(\xi,t-\tau)\hat{z}(\tau))\,d\tau - \int_0^t D_\xi^\gamma\chi\partial_\xi^2(\psi(\xi,t-\tau)\hat{z}(\tau))\,d\tau + \\
&+\int_0^t D_\xi^\gamma\chi\partial_\xi^2(\psi(\xi,t-\tau)\hat{z}(\tau))\,d\tau \\
&= \int_0^t [\chi, D_\xi^\gamma](\partial_\xi^2(\psi(\xi,t-\tau)\hat{z}(\tau)))\,d\tau + \int_0^t D_\xi^\gamma(\chi\partial_\xi^2(\psi(\xi,t-\tau)\hat{z}(\tau)))\,d\tau,
\end{aligned} \tag{5-16}
$$

onde aplicando a derivada segunda $\partial_\xi^2(\psi(\xi,t-\tau)\hat{z})$ calculada em (2-13) obtemos:

$$
\begin{aligned}
&\int_0^t [\chi, D_\xi^\gamma]\Big(\partial_\xi^2(\psi(\xi,t-\tau)\hat{z}(\tau))\Big)\,d\tau = \\
&= \int_0^t [\chi, D_\xi^\gamma]\Big(\psi(t-\tau,\xi)\big((t-\tau)^2(1+a)^2|\xi|^{2a} - (t-\tau)(1+a)a|\xi|^{a-1} + \\
&+4it(t-\tau)^2(1+a)|\xi|^{a+1}sgn(\xi) - 4(t-\tau)^2\xi^2 - 2i(t-\tau)sgn(\xi)\big)\hat{z} - \\
&-\big(2(t-\tau)(1+a)|\xi|^a sgn(\xi) + 4i(t-\tau)|\xi|\big)\partial_\xi\hat{z} + \partial_\xi^2\hat{z}\Big)\,d\tau \\
&:= \mathcal{C}_1 + \cdots + \mathcal{C}_8,
\end{aligned} \tag{5-17}
$$

e

$$\begin{aligned}
&\int_0^t D_\xi^\gamma\Big(\chi\big(\partial_\xi^2(\psi(\xi,t-\tau)\hat{z}(\tau)\big)\Big)\,d\tau = \\
&= \int_0^t D_\xi^\gamma\Big(\chi(\psi(t-\tau,\xi)\big((t-\tau)^2(1+a)^2|\xi|^{2a}-(t-\tau)(1+a)a|\xi|^{a-1}+ \\
&+4it(t-\tau)^2(1+a)|\xi|^{a+1}sgn(\xi)-4(t-\tau)^2\xi^2-2i(t-\tau)sgn(\xi))\hat{z}- \\
&-(2(t-\tau)(1+a)|\xi|^a sgn(\xi)+4i(t-\tau)|\xi|)\partial_\xi\hat{z}+\partial_\xi^2\hat{z}\big)\Big)\,d\tau \\
&:= \mathcal{D}_1+\cdots+\mathcal{D}_8.
\end{aligned} \tag{5-18}$$

Proposição 5.2 *Os termos $\mathcal{C}_j, \mathcal{D}_j \in L^2$ para todo $t \in [0,T]$, $j = 1,...,8$, exceto $\mathcal{D}_2$ e $\mathcal{D}_6$.*

Prova. Vamos prosseguir como na demonstração da Proposição 4.2. Com efeito, observando-se na demonstração da Proposição 5.1 percebemos que utilizamos apenas o fato de que $\phi \in L^2(\langle x\rangle^{\frac{5}{2}+a}dx)$. Dessa forma é suficiente mostrar que $z = uu_x \in L^2(\langle x\rangle^{\frac{5}{2}+a}dx)$, para todo $t \in (0,T]$. Note que

$$\partial_x(\langle x\rangle^{\frac{5}{2}+a}u^2) = (\frac{5}{2}+a)\langle x\rangle^{\frac{1}{2}+a}xu^2+\langle x\rangle^{\frac{5}{2}+a}\partial_x u^2. \tag{5-19}$$

Portanto, estimaremos o lado esquerdo da identidade (5-19)

$$\begin{aligned}
\|J(\langle x\rangle^{\frac{5}{2}+a}u^2)\| &= \|J(\langle x\rangle^{\frac{5}{4}.2+\frac{a}{2}.2}u^2)\| \\
&= \|J((\langle x\rangle^{\frac{5}{4}+\frac{a}{2}}u)^2)\| \\
&= \|J(\langle x\rangle^{\frac{5}{4}+\frac{a}{2}}u)\|^2 \\
&\lesssim \|J^{\frac{1}{\beta}u}\|^{\beta}\|\langle x\rangle^{\frac{3}{2}}u\|^{1-\beta},
\end{aligned} \tag{5-20}$$

onde em (5-20) utilizamos o fato de que $u \in ((0,T];H^\infty)$ e a Proposição 2.1 com $\nu = \frac{3}{2}$, $\delta = \frac{1}{\beta}$ e $\beta = \frac{1-2a}{4}$.

Isto conclui a demonstração da Proposição 5.2. □

Voltemos agora nossa atenção para os termos D_2 e D_6. Como $\hat{\phi}(0) = 0$, utilizando a fórmula de Taylor temos que

$$\hat{\phi}(\xi) = \xi\partial_\xi\hat{\phi}(0)+\int_0^\xi(\xi-\sigma)\partial_\xi^2\hat{\phi}(\sigma)\,d\sigma, \tag{5-21}$$

onde ao utilizar (5-21) no termo D_2, podemos reescrevê-lo como

$$\begin{aligned}
D_2 &= \mathcal{D}_\xi^\gamma(-\chi t(1+a)a|\xi|^{a+1}\hat{\phi}(\xi)\psi(\xi,t) \\
&= \mathcal{D}_\xi^\gamma(-\chi t\underbrace{(1+a)a}_{c_a}|\xi|^{a+1}\hat{\phi}(\xi)\psi(\xi,t) \\
&= tc_a\mathcal{D}_\xi^\gamma(\chi|\xi|^{a+1}\psi(\xi,t)\hat{\phi}(\xi)) \\
&= tc_a\mathcal{D}_\xi^\gamma(\chi|\xi|^{a+1}\psi(\xi,t)(\xi\partial_\xi\hat{\phi}(0)+\int_0^\xi(\xi-\sigma)\partial_\xi^2\hat{\phi}(\sigma)\,d\sigma)) \\
&= \underbrace{tc_a\mathcal{D}_\xi^\gamma(\chi|\xi|^{a}\psi(\xi,t)sgn(\xi)\partial_\xi\hat{\phi}(0))}_{\tilde{D}_2}+ \\
&+\underbrace{c_a\mathcal{D}_\xi^\gamma(t\chi|\xi|^{a-1}\psi(\xi,t)sgn(\xi)\int_0^\xi(\xi-\sigma)\partial_\xi^2\hat{\phi}(\sigma)\,d\sigma),}_{R(\xi)}
\end{aligned} \tag{5-22}$$

onde denotaremos $R(\xi)=c_a\mathcal{D}_\xi^\gamma(F)$.

Note que

$$\begin{aligned}
\|F\| &= \|t\chi|\xi|^{a-1}\psi(\xi,t)sgn(\xi)\int_0^\xi(\xi-\sigma)\partial_\xi^2\hat{\phi}(\sigma)\,d\sigma\| \\
&= t\|\chi|\xi|^{a-1}e^{-t|\xi|^{1+a}}\int_0^\xi(\xi-\sigma)\partial_\xi^2\hat{\phi}(\sigma)\,d\sigma\| \\
&\lesssim_t \|\chi|\xi|^{a-1}e^{-t|\xi|^{1+a}}\int_0^\xi(\xi-\sigma)\,d\sigma\|\|\partial_\xi^2\hat{\phi}(\sigma)\|_\infty \\
&\lesssim_t \|\chi|\xi|^{a-1}e^{-t|\xi|^{1+a}}\xi^2\|\|\partial_\xi^2\hat{\phi}\|_\infty \\
&\lesssim_{a,t} \|\chi|\xi|^{a-1}\xi^2\|\|\partial_\xi^2\hat{\phi}\|_\infty \\
&\lesssim_{a,t} \|J_\xi^{\frac{1}{2}+a}\partial_\xi^2\hat{\phi}\| \\
&\lesssim_{a,t} \|\langle x\rangle^{\frac{5}{2}+a}\phi\|,
\end{aligned} \tag{5-23}$$

e

$$\begin{aligned}
\partial_\xi F &= t(\partial_\xi(\chi)(|\xi|^{a-1}sgn(\xi)\psi(\xi,t)\int_0^\xi(\xi-\sigma)\partial_\xi^2\hat{\phi}(\sigma)\,d\sigma)+ \\
&+\chi(a-1)|\xi|^{a-2}sgn(\xi)\psi(\xi,t)\int_0^\xi(\xi-\sigma)\partial_\xi^2\hat{\phi}(\sigma)\,d\sigma+ \\
&+\chi|\xi|^{a-1}sgn(\xi)\int_0^\xi(\xi-\sigma)\partial_\xi^2\hat{\phi}(\sigma)\,d\sigma\partial_\xi\psi(\xi,t)+ \\
&+\chi|\xi|^{a-1}sgn(\xi)\psi(\xi,t)\partial_\xi\int_0^\xi(\xi-\sigma)\partial_\xi^2\hat{\phi}(\sigma)\,d\sigma),
\end{aligned} \tag{5-24}$$

onde obtemos

$$\begin{aligned}\|\partial_\xi F\| &\lesssim t\Big(\||\xi|^{a-2}\chi\xi^2\|\|\partial_\xi^2\hat{\phi}\|_\infty + \||\xi|^{a-1}\partial_\xi\psi(\xi,t)\xi^2\chi\|\|\partial_\xi^2\hat{\phi}\|_\infty + \\ &+\||\xi|^{a-1}\psi(\xi,t)\partial_\xi\chi\xi^2\|\|\partial_\xi^2\hat{\phi}\|_\infty + \||\xi|^{a-1}\chi\int_0^\xi \partial_\xi^2\hat{\phi}(\sigma)\,d\sigma\|\Big) \\ &\lesssim_{a,t} \|\langle x\rangle^{\frac{5}{2}+a}\phi\|.\end{aligned} \tag{5-25}$$

Assim, por (5-23) e (5-25) temos que $R(\xi) \in H^1_\xi$.

Retomando ao termo $\bar{D}_2$, podemos reescrevê-lo como

$$\begin{aligned}\bar{D}_2 &= tc_a\mathcal{D}^\gamma_\xi(\chi|\xi|^a\psi(\xi,t)sgn(\xi)\partial_\xi\hat{\phi}(0)) \\ &= tc_a\mathcal{D}^\gamma_\xi(\chi|\xi|^a(\psi(\xi,t)-1+1)sgn(\xi)\partial_\xi\hat{\phi}(0)) \\ &= \underbrace{tc_a\mathcal{D}^\gamma_\xi(\chi|\xi|^a(\psi(\xi,t)-1)sgn(\xi)\partial_\xi\hat{\phi}(0))}_{\bar{D}_{2.1}} + \underbrace{tc_a\mathcal{D}^\gamma_\xi(\chi|\xi|^a sgn(\xi)\partial_\xi\hat{\phi}(0))}_{\widetilde{D}_2},\end{aligned} \tag{5-26}$$

onde $\bar{D}_{2.1} \in L^2_\xi$. De fato, pois como a derivada de $\psi(\xi,t)$ é dada por

$$\partial_\xi\psi(\xi,t) = -\Big(t(1+a)|\xi|^a sgn(\xi) + 2it|\xi|\Big)\psi(\xi,t), \tag{5-27}$$

obtemos

$$\||\xi|^a sgn(\xi)\chi\partial_\xi\hat{\phi}(0)(\psi(\xi,t)-1)\| \lesssim_t |\partial_\xi\hat{\phi}(0)|\|\chi|\xi|^a\| \tag{5-28}$$

e ao calcular a derivada de $|\xi|^a sgn(\xi)\chi\partial_\xi\hat{\phi}(0)(\psi(\xi,t)-1)$ obtemos

$$\begin{aligned}\partial_\xi(|\xi|^a sgn(\xi)\chi\partial_\xi\hat{\phi}(0)(\psi(\xi,t)-1)) &= a|\xi|^{a-1}sgn(\xi)\chi(\psi(\xi,t)-1)\partial_\xi\hat{\phi}(0) + \\ &+|\xi|^a sgn(\xi)(\psi(\xi,t)-1)\partial_\xi(\chi)\partial_\xi\hat{\phi}(0) + \\ &+|\xi|^a sgn(\xi)\chi\partial_\xi(\psi(\xi,t))\partial_\xi\hat{\phi}(0),\end{aligned} \tag{5-29}$$

onde ao calcular a norma deste termo em (5-29) obtemos

$$\begin{aligned}\|\partial_\xi(|\xi|^a sgn(\xi)\chi\partial_\xi\hat{\phi}(0)(\psi(\xi,t)-1))\| &\lesssim_a |\partial_\xi\hat{\phi}(0)|\Big(\||\xi|^a\chi\frac{\psi(\xi,t)-1}{\xi}\| + \\ &+\||\xi|^a\partial_\xi(\chi)\| + \||\xi|^a\partial_\xi\psi(\xi,t)\|\Big) \\ &\lesssim_{a,t} |\partial_\xi\hat{\phi}(0)|\Big(\||\xi|^a\chi\| + \||\xi|^a\partial_\xi(\chi)\| + \\ &+\|(|\xi|^{2a}+|\xi|^{1+a})\chi\|\Big).\end{aligned} \tag{5-30}$$

Quanto ao termo D_6 vamos reescrevê-lo da seguinte forma

$$\begin{aligned} D_6 &= -\mathcal{D}_\xi^\gamma(2t(1+a)|\xi|^a sgn(\xi)\chi\partial_\xi\hat{\phi}\psi(\xi,t)) \\ &= -\mathcal{D}_\xi^\gamma(2t(1+a)|\xi|^a sgn(\xi)\chi\partial_\xi\hat{\phi}(\psi(\xi,t)-1+1)) \\ &= \underbrace{-\mathcal{D}_\xi^\gamma(2t(1+a)|\xi|^a sgn(\xi)\chi\partial_\xi\hat{\phi}}_{D_{6.1}} - \underbrace{\mathcal{D}_\xi^\gamma(2t(1+a)|\xi|^a sgn(\xi)\chi\partial_\xi\hat{\phi}(\psi(\xi,t)-1))}_{D_{6.2}}, \end{aligned} \tag{5-31}$$

onde pelo Lema 2.4, temos que $D_{6.2} \in L^2_\xi$.

Agora iremos reescrever o termo $D_{6.1}$:

$$\begin{aligned} D_{6.1} &= -\mathcal{D}_\xi^\gamma(2t(1+a)|\xi|^a sgn(\xi)\chi\partial_\xi\hat{\phi}(\xi)) \\ &= -\mathcal{D}_\xi^\gamma(2t(1+a)|\xi|^a sgn(\xi)\chi(\partial_\xi\hat{\phi}(\xi)-\partial_\xi\hat{\phi}(0)+\partial_\xi\hat{\phi}(0))) \\ &= \underbrace{-2t(1+a)\mathcal{D}_\xi^\gamma(|\xi|^a sgn(\xi)\chi(\partial_\xi\hat{\phi}(\xi)-\partial_\xi\hat{\phi}(0)))}_{\bar{D}_6} - \underbrace{2t(1+a)\mathcal{D}_\xi^\gamma(|\xi|^a sgn(\xi)\chi\partial_\xi\hat{\phi}(0))}_{\frac{2}{a}\widetilde{D}_2}, \end{aligned} \tag{5-32}$$

onde temos que $\bar{D}_6 \in L^2_\xi$.

Ao reunir os termos D_2 e D_6 obtemos

$$\begin{aligned} D_2 + D_6 &= \bar{D}_2 + R(\xi) + D_{6.1} + D_{6.2} \\ &= \bar{D}_{2.1} + \widetilde{D}_2 + R(\xi) + \bar{D}_6 + \frac{2}{a}\widetilde{D}_2 + D_{6.2} \\ &= \bar{D}_{2.1} + R(\xi) + \bar{D}_6 + D_{6.2} - (2+a)(1+a)t\mathcal{D}_\xi^\gamma(|\xi|^a sgn(\xi)\chi\partial_\xi\hat{\phi}(0)). \end{aligned} \tag{5-33}$$

Note que prosseguindo de forma similar à (5-21)-(5-33) obtemos a seguinte identidade:

$$\mathcal{D}_2 + \mathcal{D}_6 = \bar{\mathcal{D}}_{2.1} + \mathcal{R}(\xi) + \bar{\mathcal{D}}_6 + \mathcal{D}_{6.2} - \int_0^t (t-\tau)\mathcal{D}_\xi^\gamma(|\xi|^a sgn(\xi)\chi\partial_\xi\hat{z}(0,\tau))\,d\tau. \tag{5-34}$$

De nossas hipóteses, Proposição 5.1, Proposição 5.2, (5-32) e (5-33) temos que

$$D_\xi^\gamma\left(|\xi|^a sgn(\xi)\chi(t\partial_\xi\hat{\phi}(0) - \int_0^t (t-\tau)\partial_\xi\hat{z}(0,\tau)\,d\tau)\right) \in L^2 \tag{5-35}$$

se, e somente se

$$D_\xi^\gamma\partial_\xi^2\hat{u}(\cdot,t) \in L^2(\mathbb{R}). \tag{5-36}$$

Calculemos $\partial_\xi \hat{z}(0,\tau)$:

$$
\begin{aligned}
\partial_\xi \hat{z}(0,\tau) &= -i\widehat{xz}(0,\tau)\\
&= -i\int e^{-i.0.x}\frac{1}{2}x\partial_x u^2(x,\tau)\,dx\\
&= \frac{-i}{2}\int x\partial_x u^2(x,\tau)\,dx\\
&= \frac{-i}{2}(-\|u(\tau)\|^2)\\
&= i\frac{1}{2}\|u(\tau)\|^2\\
&= i\frac{d}{dx}\int xu(x,\tau)\,d\tau,
\end{aligned}
\tag{5-37}
$$

onde em (5-37) utilizamos a identidade (2-5). Retomaremos agora à identidade (5-35), onde utilizaremos o termo $\partial_\xi \hat{z}(0,\tau)$ calculado em (5-37) e utilizando integração por partes obtemos

$$
\begin{aligned}
t\partial_\xi\hat{\phi}(0) - \int_0^t (t-\tau)\partial_\xi \hat{z}(0,\tau)\,d\tau &= -it\widehat{x\phi}(0) - \int_0^t (t-\tau)i\frac{d}{d\tau}\int xu(x,\tau)\,dx\,d\tau\\
&= -it\int x\phi(x)\,dx - i\left[(t-\tau)\int xu(x,\tau)\,dx\right]_{\tau=0}^{\tau=t} -\\
&-i\int_0^t\int xu(x,\tau)\,dx\,d\tau\\
&= -it\int x\phi(x)\,dx + it\int xu(x,0)\,dx -\\
&-i\int_0^t\int xu(x,\tau)\,dx\,d\tau\\
&= -it\int x\phi(x)\,dx + it\int x\phi(x)\,dx - i\int_0^t\int xu(x,\tau)\,dx\,d\tau\\
&= -i\int_0^t\int xu(x,\tau)\,dx\,d\tau.
\end{aligned}
\tag{5-38}
$$

Fazendo $t = t_2$ as identidades (5-35) e (5-38) implicam que

$$
D_\xi^\gamma(|\xi|^a sgn(\xi)\chi\int_0^{t_2}\int xu(x,\tau)\,dx\,d\tau) \in L^2, \tag{5-39}
$$

assim como pela derivada de Stein

$$
\mathcal{D}_\xi^\gamma(|\xi|^a sgn(\xi)\chi\int_0^{t_2}\int xu(x,\tau)\,dx\,d\tau) \in L^2. \tag{5-40}
$$

Como $\gamma = \frac{1}{2} + a$, pela identidade (2-22) na Proposição 2.10 segue que

$$\int_0^{t_2} \int xu(x,\tau)\, dx\, d\tau = 0. \tag{5-41}$$

Ao definir a seguinte função

$$F(t) = \int_0^{t} \int xu(x,\tau)\, dx\, d\tau, \tag{5-42}$$

temos que como

$$F(0) = F(t_2) = 0, \tag{5-43}$$

pelo Lema de Rolle, existe $\tau_1 \in (0, \tau_2)$ tal que $F'(\tau_1) = 0$, ou seja,

$$\int xu(x,\tau_1)\, dx = 0. \tag{5-44}$$

De modo similar, usando o fato de que $u(t_2), u(t_3) \in \mathcal{Z}_{\frac{5}{2}+a,\frac{5}{2}+a}$, podemos mostrar que existe $\tau_2 \in (t_2, t_3)$ tal que

$$\int xu(x,\tau_2)\, dx = 0. \tag{5-45}$$

Portanto, de (5-44), (5-45) e da identidade (2-5) obtemos que $u(t) = 0$, para todo $t \in [\tau_1, \tau_2]$. E como $\|u(t)\|$ é decrescente em t, como visto em (2-4), concluímos que

$$u(t) = 0, \forall t \geq \tau_1 = \bar{t}. \tag{5-46}$$

Para o caso em que $a \in [\frac{1}{2}, 1)$ podemos proceder tomando $\frac{5}{2} + a = 3 + \gamma$, onde $\gamma = a - \frac{1}{2}$, usando a terceira derivada de $\psi(\xi, t)\hat{\phi}$ calculada em (2-14) e notando que pela Proposição 2.11

$$\mathcal{D}_\xi^\gamma(|\xi|^{a-1}\chi(\xi)) \notin L^2(\mathbb{R}). \tag{5-47}$$

Assim, concluímos a demonstração do Teorema 1.3. $\square$

Referências Bibliográficas

[1] BERG, J.; LOFSTROM, J. **Interpolation Spaces, An Introduction**. Springer-Verlag, 1976.

[2] BIAGIONI, H.; BONA, J. L.; IÓRIO, R. J.; SCIALOM, M. **On the korteweg-de vries–kuramoto–sivashinsky equation**. *Advances in Differential Equations*, 1:1–20, 1996.

[3] BURQ, N.; PLANCHON, F. **On well-posedness for the Benjamin-Ono equation**. *Mathematische Annalen*, 340:497–542, 2008.

[4] CUNHA, A.; PASTOR, A. **The IVP for the Benjamin-Ono-Zakharov-Kuznetsov equation in weighted Sobolev spaces**. *J. Math. Anal. Appl.*, 417:660–693, 2014.

[5] CUNHA, A. **The cauchy problem for dissipative benjamin-ono equation in weighted sobolev spaces**. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 492(2):124468, 2020.

[6] EDWIN, P. M.; ROBERTS, B. **The Benjamin-Ono-Burgers equation: an application in solar physics**. *Wave Motion*, 8(2):151–158, 1986.

[7] FONSECA, G.; LINARES, F.; PONCE, G. **The IVP for the dispersion generalized Benjamin-Ono equation in weighted Sobolev spaces**. *Ann. Inst. Henri Poincaré, Anal. Non Linéaire*, 30:763–790, 2013.

[8] FONSECA, G.; PASTRÁN, R.; RODRÍGUEZ-BLANCO, G. **The IVP for a nonlocal perturbation of the Benjamin-Ono equation in classical and weighted Sobolev spaces**. *J. Math. Anal. Appl.*, 476(2):391–425, 2019.

[9] FONSECA, G.; PONCE, G. **The IVP for the Benjamin-Ono equation in weighted Sobolev spaces**. *J. Funct. Anal.*, 260:436–459, 2011.

[10] HENRY, D. **Geometric Theory of Semilinear Parabolic Equations**, volume 840 de **Lecture Notes in Mathematics**. Springer-Verlag, 1981.

[11] HUNT, R.; MUCKENHOUPT, B.; WHEEDEN, R. **Weighted norm inequalities for the conjugate function and hilbert transform**. *Trans. Am. Math. Soc.*, 176:227–251, 1973.

[12] IONESCU, A. D.; KENIG, C. E. **Global well-posedness of the Benjamin-Ono equation in low-regularity spaces**. *Journal of the American Mathematical Society*, 20:753–798, 2007.

[13] IORIO, R. J. **On the cauchy problem for the Benjamin-Ono equation**. *Communications in Partial Differential Equations*, 11:1031–1084, 1986.

[14] IORIO, R. J. **Unique continuation principle for the Benjamin-Ono equation**. *Differential and Integral Equations*, 16:1281–1291, 2003.

[15] IÓRIO, R. J.; IÓRIO, V. D. M. **Fourier Analysis and Partial Differential Equations**. Cambridge University Press, Cambridge, 2001.

[16] KATO, T.; PONCE, G. **Commutator estimates and the Euler and Navier-Stokes equations**. *Comm. Pure Appl. Math.*, XLI:891–907, 1988.

[17] OTANI, M. **Bilinear estimates with applications to the generalized Benjamin–Ono–Burgers equations**. *Differential and Integral Equations*, 18:1397–1426, 2005.

[18] STEIN, E. **The characterization of functions arising as potentials**. *Bull. Am. Math. Soc.*, 67:102–104, 1961.

[19] TAO, T. **Global well-posedness of the Benjamin-Ono equation in $h^1(\mathbb{R})$**. *Journal of Hyperbolic Differential Equations*, 1:27–49, 2004.

[20] VENTO, S. **Well-posedness and ill-posedness results for dissipative Benjamin-Ono equations**. *Osaka Journal of Mathematics*, 48:933–958, 2011.