

UNIVERSIDADE FEDERAL DE GOIÁS
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA

CAMILA SANTOS DE SÁ CARVALHO

**Equações Diofantinas envolvendo a
soma de quadrados de números de
Fibonacci k -generalizada**

Goiânia
2019

**TERMO DE CIÊNCIA E DE AUTORIZAÇÃO PARA DISPONIBILIZAR
VERSÕES ELETRÔNICAS DE TESES E DISSERTAÇÕES
NA BIBLIOTECA DIGITAL DA UFG**

Na qualidade de titular dos direitos de autor, autorizo a Universidade Federal de Goiás (UFG) a disponibilizar, gratuitamente, por meio da Biblioteca Digital de Teses e Dissertações (BDTD/UFG), regulamentada pela Resolução CEPEC nº 832/2007, sem ressarcimento dos direitos autorais, de acordo com a Lei nº 9610/98, o documento conforme permissões assinaladas abaixo, para fins de leitura, impressão e/ou *download*, a título de divulgação da produção científica brasileira, a partir desta data.

1. Identificação do material bibliográfico: ☒ Dissertação ☐ Tese

2. Identificação da Tese ou Dissertação:

Nome completo do autor: *Camila Santos de Sá Carvalho*

Título do trabalho: *Equações Diofantinas envolvendo a soma de quadrados de números de Fibonacci k -generalizada.*

3. Informações de acesso ao documento:

Concorda com a liberação total do documento ☒ SIM ☐ NÃO

Havendo concordância com a disponibilização eletrônica, torna-se imprescindível o envio do(s) arquivo(s) em formato digital PDF da tese ou dissertação.

Camila Santos de Sá Carvalho

Assinatura do(a) autor(a)

Ciente e de acordo:

Anna Paula de C. Alves
Assinatura do(a) orientador(a)²

Data: 14 / 01 / 2020

CAMILA SANTOS DE SÁ CARVALHO

Equações Diofantinas envolvendo a soma de quadrados de números de Fibonacci k -generalizada

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação do Instituto de Matemática e Estatística da Universidade Federal de Goiás, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Área de concentração: Teoria dos Números.

Orientadora: Profa. Ana Paula de Araújo Chaves

Goiânia
2019

Ficha de identificação da obra elaborada pelo autor, através do
Programa de Geração Automática do Sistema de Bibliotecas da UFG.

Santos de Sá Carvalho, Camila
Equações Diofantinas envolvendo a soma de quadrados de
números de Fibonacci k-generalizada [manuscrito] / Camila Santos
de Sá Carvalho. - 2019.
54 f.

Orientador: Profa. Dra. Ana Paula de Araújo Chaves.
Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal de Goiás, Instituto
de Matemática e Estatística (IME), Matemática, Goiânia, 2019.
Bibliografia. Apêndice.

1. Seqüência de Fibonacci. 2. Formas lineares em logaritmos. 3.
Método de redução. 4. Equações Diofantinas. I. de Araújo Chaves, Ana
Paula, orient. II. Título.

CDU 5



UNIVERSIDADE FEDERAL DE GOIÁS

INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA

ATA DE DEFESA DE DISSERTAÇÃO

Ata nº 44 da sessão de Defesa de Dissertação de Camila Santos de Sá Carvalho, que confere o título de Mestre(a) em Matemática, na área de concentração em Álgebra.

Ao/s vinte dias do mês de dezembro de dois mil e dezenove, a partir das dez horas, no Auditório do Instituto de Matemática e Estatística da UFG, realizou-se a sessão pública de Defesa de Dissertação intitulada “Equações Diofantinas Envolvendo a Soma de Quadrados de Números de Fibonacci k-Generalizados”. Os trabalhos foram instalados pela Orientadora, Professora Doutora Ana Paula de Araújo Chaves [IME/UFG] com a participação dos demais membros da Banca Examinadora: Professora Doutora Lidiane dos Santos Monteiro Lima [IME/UFG], membro titular interno; Professor Doutor Diego Marques Ferreira [Mat/UnB] (participação via videoconferência), membro titular externo. Durante a arguição os membros da banca não fizeram sugestão de alteração do título do trabalho. A Banca Examinadora reuniu-se em sessão secreta a fim de concluir o julgamento da Dissertação, tendo sido a candidata aprovada pelos seus membros. Proclamados os resultados pela Professora Doutora Ana Paula de Araújo Chaves, Presidente da Banca Examinadora, foram encerrados os trabalhos e, para constar, lavrou-se a presente ata que é assinada pelos Membros da Banca Examinadora, aos vinte dias do mês de dezembro de dois mil e dezenove.

TÍTULO SUGERIDO PELA BANCA

Equações Diofantinas Envolvendo a Soma de Quadrados de Números de Fibonacci k-Generalizados



Documento assinado eletronicamente por **Ana Paula De Araújo Chaves, Professora do Magistério Superior**, em 26/12/2019, às 12:45, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do [Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015](#).



Documento assinado eletronicamente por **Lidiane Dos Santos Monteiro Lima, Vice-Coordenador**, em 27/12/2019, às 09:34, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do [Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015](#).



Documento assinado eletronicamente por **DIEGO MARQUES FERREIRA, Usuário Externo**, em 28/01/2020, às 09:54, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do [Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015](#).



A autenticidade deste documento pode ser conferida no site https://sei.ufg.br/sei/controlador_externo.php?acao=documento_conferir&id_orgao_acesso_externo=0, informando o código verificador **1059548** e o código CRC **DE0E9371**.

Referência: Processo nº 23070.047091/2019-37

SEI nº 1059548

Todos os direitos reservados. É proibida a reprodução total ou parcial do trabalho sem autorização da universidade, do autor e do orientador(a).

Camila Santos de Sá Carvalho

Licenciada em Matemática pela Universidade Estadual de Goiás - UEG.

Dedico este trabalho ao meu marido, meu companheiro e grande incentivador, ao meu filho minha alegria e realização diária, a minha mãe minha torcida fiel e ao meu pai, minha luz que me guia.

Agradecimentos

Agradeço primeiramente ao meu marido, companheiro, amigo e grande incentivador Thiago, por todo apoio, carinho e compreensão, por acreditar em mim e não medir esforços para que esse sonho se realizasse. Sem ele nada disso seria possível. Ao meu filho, Cristiano que chegou durante essa jornada me realizando como *mãe* e me mostrando que as dificuldades que surgiriam só me fortaleceriam ainda mais. Agradeço também a minha mãe, Agda por ter me dado educação e me ensinado valores tão preciosos. Nela me espelho para educar o meu filho. Ao Sebastião Carço pelo grande apoio nessa reta final e incentivo para continuar na vida acadêmica. A minha irmã, Natália, pelas palavras de apoio e carinho. Ao meu pai, Cristiano (*in memoriam*), que onde quer que esteja, está orgulhoso das minhas conquistas.

Também agradeço a Prof.^a Dr.^a Ana Paula Chaves, minha orientadora e exemplo de profissional pela confiança, incentivo, paciência e disponibilidade para os encontros de orientação dos quais sentirei saudades, pois estes me enriqueceram não só para realizar este trabalho mas também como ser humano. Te admiro muito e muito...muito obrigada por tudo.

Ao Prof. Dr. Romildo da Silva Pina com que tive a oportunidade de fazer uma disciplina como aluna especial, que me encorajou a seguir em frente.

A Prof.^a Dr.^a. Lidianne Santos e o Prof. Dr. Diego Marques (UNB), por aceitarem compor a banca e enriquecerem o meu trabalho.

Aos colegas de mestrado, em especial aqueles que se tornaram amigos João César, Nielson, Robson, Ana Paula e Raquel e que me ajudaram bastante durante todo esse período fazendo com que os dias de estudo ficassem mais leves e divertidos.

Ao aluno de doutorado, Mayk Joaquim dos Santos, por disponibilizar seu tempo e paciência em me ajudar com Látex.

Agradeço à CAPES pelo apoio financeiro.

"Se os números não são bonitos, eu não sei o que é."

Paul Erdős,
2013-Centenário de Paul Erdős.

Resumo

Carvalho, Camila Santos de Sá. **Equações Diofantinas envolvendo a soma de quadrados de números de Fibonacci k -generalizada**. Goiânia, 2019. 52p. Dissertação de Mestrado. Instituto de Matemática e Estatística, Universidade Federal de Goiás.

A sequência de Fibonacci $(F_n)_n$, dada por $F_0 = 0$, $F_1 = 1$ e $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$ para $n \geq 0$, possui várias generalizações. Entre elas, temos a sequência $(F_n^{(k)})_n$, dada por $F_n^{(k)} = F_{n-1}^{(k)} + \dots + F_{n-k}^{(k)}$, para todo $n \geq 2$, com valores iniciais $F_{-(k-2)}^{(k)} = F_{-(k-3)}^{(k)} = \dots = F_0^{(k)} = 0$ e $F_1^{(k)} = 1$. que é chamada de *sequência de Fibonacci k -generalizada* (ou sequência de k -bonacci). Observando a identidade $F_n^2 + F_{n+1}^2 = F_{2n+1}$, que nos diz que a soma de quadrados de dois números de Fibonacci consecutivos também é um número de Fibonacci, Chaves e Marques, em 2014, mostraram que a equação Diofantina $(F_n^{(k)})^2 + (F_{n+1}^{(k)})^2 = F_m^{(k)}$ não possui soluções em inteiros positivos n, m e k , com $n > 1$ e $k \geq 3$, ou seja, que a identidade mencionada não é satisfeita para números de k -bonacci, fora dos valores iniciais. Neste trabalho, baseado no artigo de Bednařík, Freitas, Marques e Trojovský (2019), mostraremos que a equação Diofantina $(F_n^{(k)})^2 + (F_{n+1}^{(k)})^2 = F_m^{(l)}$, não possui solução para $2 \leq k < l$ e $n > k + 1$, implicando que a soma de quadrados de dois números de k -bonacci consecutivos, não pertencer a uma outra sequência de Fibonacci l -generalizada de ordem maior.

Palavras-chave

Sequência de Fibonacci, formas lineares em logaritmos, método de redução, equações diofantinas.

Abstract

Carvalho, Camila Santos de Sá. **Diophantine equations involving the sum of squares of k -generalized Fibonacci numbers**. Goiânia, 2019. 52p. MSc. Dissertation. Instituto de Matemática e Estatística, Universidade Federal de Goiás.

Fibonacci numbers $(F_n)_n$, where $F_0 = 0$, $F_1 = 1$ and $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$ for $n \geq 0$, has several generalizations. Among them, we have the sequence $(F_n^{(k)})_n$, given by $F_n^{(k)} = F_{n-1}^{(k)} + \dots + F_{n-k}^{(k)}$, for every $n \geq 2$, with initial values $F_{-(k-2)}^{(k)} = F_{-(k-3)}^{(k)} = \dots = F_0^{(k)} = 0$ and $F_1^{(k)} = 1$, which is called the *k -generalized Fibonacci sequence* (or *k -bonacci sequence*). Inspired by the identity $F_n^2 + F_{n+1}^2 = F_{2n+1}$, which tells us that the sum of squares of two consecutive Fibonacci numbers is also a Fibonacci number, Chaves and Marques number, in 2014, showed that the Diophantine equation $(F_n^{(k)})^2 + (F_{n+1}^{(k)})^2 = F_m^{(k)}$ has no solutions in positive integers n, m and k , with $n > 1$ and $k \geq 3$, which means that the mentioned identity is not satisfied for k -bonacci numbers, outside the initial values. In this work, based on the paper of Bednařík, Freitas, Marques and Trojovský (2019), we will show that the Diophantine equation $(F_n^{(k)})^2 + (F_{n+1}^{(k)})^2 = F_m^{(l)}$, has no solution to $2 \leq k < l$ e $n > k + 1$, implying that the sum of squares of two consecutive k -bonacci numbers does not belong to another l -generalized Fibonacci sequence of greater order.

Keywords

Fibonacci sequence, linear forms in logarithms, reduction method, Diophantine equations.

Sumário

1	Introdução	12
2	Conceitos Preliminares	16
2.1	Sequências Recorrentes	16
2.2	Generalizações da sequência de Fibonacci	18
2.2.1	Sequência de Fibonacci k -generalizada	19
2.3	Formas lineares em logaritmos	21
2.4	Método de Redução	23
3	A Equação Diofantina $(F_n^{(k)})^2 + (F_{n+1}^{(k)})^2 = F_m^{(l)}$	24
3.1	Uma limitação para m e n em termos de l	25
3.2	O caso l grande	32
3.2.1	O caso $n < 2^{k/2}$	36
3.2.2	O caso $n > 2^{k/2}$	42
3.2.3	Prova do teorema principal	46
A	Comandos usados no software Mathematica [®]	50
	Referências Bibliográficas	51

Introdução

Um importante matemático grego do século III a.C foi Diofanto de Alexandria. Considerado por muitos estudiosos como o "pai da álgebra", Diofanto está para a *Aritmética* como Euclides está para a Geometria, ou Ptolomeu para a Astronomia. Esse matemático foi o primeiro algebrista a empregar símbolos, chamados de *aritmós*, para designar alguma quantidade desconhecida, e também símbolos para operações algébricas e potências. É famoso pelo seu livro *Aritmética*, onde há resultados importantes para Teoria dos Números, como por exemplo $8n + 7$ pode ser escrito como a soma de três quadrados. Acredita-se que no original, *Aritmética* era uma coletânea de 13 livros, mas os manuscritos gregos que sobreviveram continham apenas 6 destes livros. Os outros são considerados perdidos, e possivelmente foram queimados no grande incêndio ocorrido em Alexandria, não muito tempo após Diofanto concluir a coletânea.

Pelos estudos pioneiros de Diofanto, denomina-se por *Equação Diofantina* uma equação da forma

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0, \quad (1-1)$$

onde f é uma função de n variáveis, $n \geq 2$, e $x_1, \dots, x_n$ assumem apenas valores inteiros. Quando f é tal que alguma de suas variáveis aparece como expoente, então dizemos que (1-1) é uma *Equação Diofantina Exponencial*. Definitivamente, o exemplo mais conhecido desse tipo de equação, é a advinda do famoso *Último Teorema de Fermat*, que conjecturava: não existem inteiros positivos x, y, z e n , com $n > 2$, satisfazendo $x^n + y^n = z^n$. Esse teorema surgiu da famosa anotação feita por Pierre de Fermat, em 1637, na margem de uma cópia do livro *Aritmética*, que estabelecia o resultado e continha a célebre afirmação: "Encontrei uma demonstração verdadeiramente maravilhosa disto, mas esta margem é estreita demais para contê-la." Apesar da afirmação de Fermat, sua demonstração "maravilhosa" não foi encontrada. Deste então, inúmeros matemáticos foram tentados à demonstrar a conjectura, o que aconteceu apenas 358 anos depois com a prova de Andrew Wiles.

Outro tema central do nosso trabalho é a famosa *Sequência de Fibonacci*, assim denominada por ter sido apresentada ao mundo ocidental por Leonardo Fibonacci (também conhecido como Leonardo de Pisa ou Leonardo Pisano) em seu livro *Liber Abaci* de 1202, embora ela já tivesse sido descrita por gregos e indianos. Fibonacci considerou o crescimento idealizado (não realista biologicamente) de uma população de coelhos com as seguintes condições: Um par de coelhos recém-nascidos, um macho e uma fêmea, são colocados em um campo; os coelhos acasalam com um mês de idade, para que no final do segundo mês a fêmea dê a luz a um par de coelhos; coelhos nunca morrem e um casal de coelhos sempre gera um novo par (um macho e uma fêmea) todos os meses a partir do seu segundo mês. O problema que Fibonacci analisou foi: quantos casais de coelhos teremos em um ano? Uma rápida reflexão nos dá:

- Ao fim do primeiro mês, eles acasalam, mas ainda há apenas **1** casal;
- Ao fim do segundo mês, a fêmea dá à luz a um novo casal, donde temos **2** casais;
- Ao fim do terceiro mês, a primeira fêmea dá à luz à outro casal e o segundo par acasala, nos dando **3** casais;
- Ao fim do quarto mês, a primeira e a segunda fêmea dão à luz a um novo par, totalizando **5** casais.

No final do n -ésimo mês, o número de pares de coelhos é igual ao número de novos pares (que é o número de pares do mês $(n - 2)$, mais o número de pares vivos do último mês $(n - 1)$. Este é o n -ésimo número de Fibonacci. Rigorosamente, temos que a sequência de Fibonacci, que denotaremos por $(F_n)_n$, é tal que definimos $F_0 = 0$ e $F_1 = 1$, e a partir daí temos $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$ para todo $n \geq 0$. Os primeiros números de Fibonacci são:

0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, 377, ...

Os números de Fibonacci são conhecidos por satisfazerem várias identidades, alguns exemplos são:

$$F_1 + F_3 + F_5 + \dots + F_{2n+1} = F_{2n+2},$$

$$F_{n+1} \cdot F_{n-1} - F_n^2 = (-1)^n,$$

$$F_n^2 + F_{n+1}^2 = F_{2n+1}, \text{ para todo } n \geq 0. \quad (1-2)$$

Esta última identidade é de grande interesse para o nosso trabalho. Em particular, essa identidade, que pode ser provada por indução, nos diz que a soma dos quadrados de dois números de Fibonacci consecutivos ainda é um número de Fibonacci. A denominação "*Sequência de Fibonacci*" foi usada pela primeira vez pelo teórico dos números Édouard Lucas, no século XIX.

Generalizando o “conceito” advindo da sequência de Fibonacci, temos as *Sequências Recorrentes Lineares de ordem k*, $(G_n)_n$, onde definimos os coeficientes $c_1, \dots, c_k$, os k primeiros termos $G_0, G_1, \dots, G_{k-1}$ da sequência e a partir daí temos

$$G_{n+k} = c_1 G_{n+k-1} + c_2 G_{n+k-2} + \dots + c_k G_n, \forall n \geq 0.$$

Equações Diofantinas envolvendo sequências recorrentes, como a sequência de Fibonacci, têm sido objeto de extenso estudo da Teoria dos Números, desenvolvendo diversas ferramentas para resolver tais equações. Um resultado importante nessa direção, foi publicado na *Annals of Mathematics* (revista matemática mais prestigiada da atualidade), pelos matemáticos Y.Bugeaud, M.Mignotte e S.Siksek, em 2006, onde mostraram que as únicas soluções para a equação Diofantina $F_n = y^m$, são $(n, y, m) \in \{(0, 0, m), (1, 1, m), (2, 1, m), (6, 2, 3), (12, 12, 2)\}$. Em 2010, D.Marques e A. Togbé, motivados pela bela identidade $F_n^2 + F_{n+1}^2 = F_{2n+1}$, mostraram que se a equação Diofantina $F_n^s + F_{n+1}^s = F_m$ for satisfeita para infinitos $n \in \mathbb{N}$, então $s = 1$ ou $s = 2$. Logo em seguida, F. Luca e R. Oyono, em 2011, resolveram completamente esta equação, mostrando que a mesma não possui solução para $s \geq 3$ e $n \geq 2$.

Uma generalização dos números de Fibonacci é dada pela seguinte definição.

Definição 1.1 Para cada inteiro $k \geq 2$ a sequência de Fibonacci k -generalizada ou sequência de k -Fibonacci, $F^{(k)} := (F_n^{(k)})_{n \geq 2-k}$, é dada pela recorrência

$$F_n^{(k)} = F_{n-1}^{(k)} + \dots + F_{n-k}^{(k)},$$

para todo $n \geq 2$ e com valores iniciais $F_{-(k-2)}^{(k)} = F_{-(k-3)}^{(k)} = \dots = F_0^{(k)} = 0$ e $F_1^{(k)} = 1$.

Em 2014, Chaves e Marques, em [6], estudaram uma generalização da equação (1-2) e mostraram que a equação Diofantina

$$(F_n^{(k)})^2 + (F_{n+1}^{(k)})^2 = F_m^{(k)}, \quad (1-3)$$

não possui soluções em inteiros positivos n, m e k , com $n > 1$ e $k \geq 3$. No mesmo ano, Luca e Gómez, em [9], mostraram que a equação

$$(F_n^{(k)})^s + (F_{n+1}^{(k)})^s = F_m^{(k)},$$

não possui solução em inteiros positivos quando $k \geq 3$, $n \geq 2$ e $s \geq 2$.

O foco do nosso trabalho é estudar o artigo de Bednařík, Freitas, Marques e Trojovský [2], que disserta sobre a existência de números da forma $(F_n^{(k)})^2 + (F_{n+1}^{(k)})^2$ que são números de l -bonacci. Com tal generalização da equação (1-3), o artigo conclui que, mesmo adicionando esse grau de liberdade vale:

Teorema 1.1 *A equação Diofantina*

$$(F_n^{(k)})^2 + (F_{n+1}^{(k)})^2 = F_m^{(l)},$$

não possui solução para $2 \leq k < l$ e $n > k + 1$.

Conceitos Preliminares

2.1 Sequências Recorrentes

Sequências recorrentes são sequências $(x_n)_n$ nas quais são dados termos iniciais e, a partir deles, cada termo é determinado em função dos termos anteriores. Dado um inteiro positivo k , e uma *sequência recorrente de ordem k* é aquela onde definem-se seus primeiros k termos a partir do $(k+1)$ -ésimo termo, estes são determinados como:

$$x_{n+k} = f(x_{n+k-1}, x_{n+k-2}, \dots, x_n). \quad (2-1)$$

Este tipo de sequência possui um estudo muito abrangente, confundido-se em larga escala com a teoria dos Sistemas Dinâmicos, e um comportamento que pode ser bastante caótico e de difícil descrição, mesmo que qualitativamente. Um caso particular, e nosso principal interesse, é quando a função f é linear, ou seja, quando existem constantes $C_1, C_2, \dots, C_k$ tais que

$$x_{n+k} = C_1 x_{n+k-1} + C_2 x_{n+k-2} + \dots + C_k x_n \quad \forall n \in \mathbb{N}. \quad (2-2)$$

Sequências que satisfazem este tipo de recorrência são chamadas *sequências recorrentes lineares de ordem k* , e generalizam simultaneamente progressões geométricas e aritméticas:

- Progressões geométricas: Se $x_n = aq^n$, então $x_{n+1} = qx_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$, donde $(x_n)_n$ é uma sequência recorrente linear de ordem 1.
- Progressão aritméticas: Se $(x_n)_n$ é uma progressão aritmética, existe uma constante r tal que $x_{n+1} - x_n = r$ para todo $n \in \mathbb{N}$, daí $x_{n+2} - x_{n+1} = x_{n+1} - x_n$, e logo $x_{n+2} = 2x_{n+1} - x_n$. Portanto, $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é uma sequência recorrente de ordem 2.

Outros exemplos importantes são:

- A sequência de Fibonacci $(F_n)_n$ é uma sequência recorrente linear de ordem 2, que satisfaz $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$, onde $F_0 = 0$ e $F_1 = 1$.

- A sequência de Lucas $(L_n)_n$ é uma sequência recorrente linear cuja relação de recorrência é a mesma da sequência de Fibonacci, ou seja $L_{n+2} = L_{n+1} + L_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$, mas possui valores iniciais diferentes, $L_0 = 2$ e $L_1 = 1$.

O fato de essas sequências terem a mesma relação de recorrência, implica a existência de várias identidades que as relacionam, como por exemplo:

- $L_n^2 = 5F_n^2 + 4(-1)^n$;
- $L_{m+n} = L_{m+1}F_n + L_mF_{m+1}$;
- $F_{n+k} + (-1)^k F_{n-k} = L_k F_n$.

Um outro fato bastante conhecido sobre estas duas sequências, são as suas formas fechadas. Em outras palavras, podemos calcular os números F_n e L_n sem recorrermos aos seus dois termos anteriores, com uma fórmula que depende apenas de n :

$$\begin{aligned} F_n &= \frac{1}{\sqrt{5}} \left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n \right], \\ L_n &= \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n + \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n. \end{aligned} \quad (2-3)$$

A fórmula (2-3) é conhecida como *fórmula de Binet* (apesar de ser um resultado já conhecido por Euler, D. Bernoulli, e De Moivre mais de um século antes). Um resultado importante da teoria das seqências recorrentes lineares, nos diz que sempre há uma forma fechada para sequências recorrentes lineares. Para enunciarmos este fato, precisamos de algumas definições.

Definição 2.1 *O polinômio característico de uma sequência $(x_n)_n$, satisfazendo (2-2) é dado por*

$$P(x) = x^k - c_1 x^{k-1} - \dots - c_{k-1} x - c_k,$$

onde denotamos por $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_r$ suas raízes complexas com multiplicidades $a_1, a_2, \dots, a_r$, respectivamente.

Um importante resultado sobre sequências recorrentes lineares, que pode ser encontrado em [13], afirma que para todo $n \in \mathbb{N}$, temos

$$x_n = Q_1(n)\lambda_1^n + Q_2(n)\lambda_2^n + \dots + Q_r(n)\lambda_r^n,$$

onde $Q_1, \dots, Q_r$ são polinômios sobre o corpo $\mathbb{Q}(\lambda_1, \dots, \lambda_r)$ com grau $\deg(Q_i) < a_i$, para todo $i \in [1, r]$. A partir daqui denotaremos o conjunto $\{a, a+1, \dots, b\}$ por $[a, b]$, com $a, b \in \mathbb{Z}$ e $a < b$.

No caso da sequência de Fibonacci temos que

$$F_n = c_1 \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^n + c_2 \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^n,$$

onde $c_i = \frac{(-1)^{i+1}}{\sqrt{5}}$.

Enunciaremos abaixo algumas propriedades da sequência de Fibonacci e que serão primordiais para o seguinte capítulo.

Lema 2.2 *Temos,*

- (a) (Fórmula da Identidade) $F_n^2 + F_{n+1}^2 = F_{2n+1}$
- (b) (Fórmula da Adição) $F_{m+n} = F_{m-1}F_n + F_mF_{n+1}$;
- (c) (Fórmula de múltiplos ângulos) $F_{kn+c} = \sum_{i=0}^k \binom{k}{i} F_{c-i} F_n^i F_{n+1}^{k-i}$;
- (d) $F_n | F_m$ se, e somente se, $n | m$, com $m \neq 0$.
- (e) (Identidade de d'Ocagne) $(-1)^n F_{m-n} = F_m F_{n+1} - F_n F_{m+1}$;
- (f) Para todo p primo, $F_{p-\left(\frac{p}{5}\right)} \equiv 0 \pmod{p}$, onde $\left(\frac{a}{q}\right)$ denota o símbolo de Legendre de a com respeito a um primo $q > 2$.

Para uma demonstração do Lema 2.2 veja [11].

2.2 Generalizações da sequência de Fibonacci

Ao decorrer do tempo, várias generalizações dos números de Fibonacci foram dadas, desde recorrências lineares inteiras (como as sequências de Lucas) até extensões da sequência para números reais, como por exemplo:

$$F_x = \frac{1}{\sqrt{5}} \left\{ \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^x - \left(\frac{2}{1 + \sqrt{5}} \right)^x \cos(x\pi) \right\}.$$

A sequência de k -bonacci (ou *Fibonacci k -generalizada*), denotada por $(F_n^{(k)})_n$, é uma sequência recorrente linear de ordem k que também é uma generalização da sequência de Fibonacci.

2.2.1 Sequência de Fibonacci k -generalizada

Para cada inteiro $k \geq 2$ a sequência de Fibonacci k -generalizada ou sequência k -bonacci, $(F_n^{(k)})_{n \geq 2-k}$, é dada pela recorrência

$$F_n^{(k)} = F_{n-1}^{(k)} + \cdots + F_{n-k}^{(k)}, \quad (2-4)$$

para todo $n \geq 2$ e com valores iniciais $F_{-(k-2)}^{(k)} = F_{-(k-3)}^{(k)} = \cdots = F_0^{(k)} = 0$ e $F_1^{(k)} = 1$.

Note que essa generalização é de fato uma família de sequências, onde cada escolha de k produz uma sequência distinta. Por exemplo, a usual sequência de Fibonacci, $(F_n)_n$, é obtida para $k = 2$ e para valores posteriores de k essas sequências são chamadas de Tribonacci, Tretanacci, Pentanacci, Hexanacci, Heptanacci, Octanacci e assim por diante.

Em 2012, Bravo e Luca estudaram a equação Diofantina $F_n^k = 2^m$, em [4], e mostraram que as únicas potências de dois nessa sequência são os primeiros $k + 1$ termos não nulos, isto é,

$$F_1^{(k)} = 1, F_2^{(k)} = 1, F_3^{(k)} = 2, F_4^{(k)} = 4, \dots, F_{k+1}^{(k)} = 2^{k-1},$$

enquanto que o próximo termo da sequência é $F_{k+2}^{(k)} = 2^k - 1$,

Outra informação importante sobre essa sequência, é o seu *polinômio característico*. A saber, o polinômio característico de $F_n^{(k)}$ é dado por

$$\phi_k(x) = x^k - x^{k-1} - x^{k-2} - \cdots - x - 1,$$

e é irredutível sobre $\mathbb{Q}[x]$, como foi observado, em [18]. Um fato já observado em [15, 16, 18], é que o polinômio $\phi_k(x)$ possui uma única raiz α , real, fora do círculo unitário, ou seja $|\alpha| > 1$, e as demais raízes $\alpha^{(2)}, \alpha^{(3)}, \dots, \alpha^{(k)}$, possuem valor absoluto estritamente menor do que 1. Denominamos esta raiz α , como a *raiz dominante da recorrência*. Além disso, temos os seguintes limitantes para α , dados por Wolfram em [18]:

$$2 \left(1 - \frac{1}{2^k} \right) < \alpha < 2. \quad (2-5)$$

Agora, consideramos para um inteiro $k \geq 2$, a função

$$g(x, k) = \frac{x-1}{2 + (k+1)(x-2)}, \quad (2-6)$$

para todo $x > 2(1 - 2^{-k})$. Com essa notação Dresden e Du, em [7], obtiveram a seguinte

fórmula, chamada de “Fórmula do tipo Binet”,

$$F_n^{(k)} = \sum_{i=1}^k g(\alpha_i, k) \alpha_i^{n-1} \quad (2-7)$$

onde $\alpha = \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k$ são os zeros de $\phi_k(x)$. Nesse mesmo artigo foi mostrado que a contribuição dos zeros que estão dentro círculo unitário, para a fórmula (2-7), é muito pequena, mais precisamente,

$$|F_n^k - g(\alpha_i, k) \alpha_i^{n-1}| < \frac{1}{2}, \quad (2-8)$$

para todo $n > k - 1$.

Outro fato importante provado por Bravo e Luca, em [5], nós dá a seguinte estimativa para o $F_n^{(k)}$ em função α :

$$\alpha^{n-2} \leq F_n^{(k)} \leq \alpha^{n-1} \text{ para todo } n \geq 3. \quad (2-9)$$

Na seção anterior, vimos que a Fórmula de Binet é uma maneira direita para calcular os números de Fibonacci:

$$F_n = \frac{1}{5} \left[\left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^n - \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^n \right] = \frac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta},$$

onde α e β são as raízes do polinômio $\phi_2(x) = x^2 - x - 1$. Para ilustrar melhor o próximo resultado, vamos reescrever a fórmula (2-7) da seguinte maneira:

$$F_n = \frac{\alpha - 1}{2 + 3(\alpha - 2)} \alpha^{n-1} + \frac{\beta - 1}{2 + 3(\beta - 2)} \beta^{n-1}.$$

A demonstração deste fato é puramente algébrica.

O resultado principal de Dresden e Du [7], é uma forma análoga da fórmula de Binet, na versão acima, para números de k -bonacci:

Teorema 2.3 (Dresden-Du, 2014) *Seja $F_n^{(k)}$ o n -ésimo número de k -bonacci. Então:*

$$F_n^{(k)} = \sum_{i=1}^k \frac{\alpha^{(i)} - 1}{2 + (k+1)(\alpha^{(i)} - 2)} (\alpha^{(i)})^{n-1},$$

onde $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k$ são as raízes do polinômio $\phi_k(x)$.

Também foi mostrado em [7] que $F_n(k)$ é bem aproximado pelo termo $g\alpha^{n-1}$,

onde $g := g(\alpha, k) = \frac{\alpha-1}{2+(k+1)(\alpha-2)}$, ou seja

$$|F_n^{(k)} - g\alpha^{(n-1)}| = |E_n(k)| < \frac{1}{2}, \quad (2-10)$$

onde $E_n(k) = \sum_{i=2}^k g(\alpha_i, k)(\alpha_i)^{n-1}$.

2.3 Formas lineares em logaritmos

Primeiro, vamos ver qual o significado de *formas lineares logaritmo*. Seja $n \geq 1$ um inteiro positivo, e denote $A_i := \max\{|x_i|, |y_i|, 3\}$. Defina $B := \max\{b_1, \dots, b_n, 3\}$. Considere a seguinte expressão

$$\Lambda := \left(\frac{x_1}{y_1}\right)^{b_1} \dots \left(\frac{x_n}{y_n}\right)^{b_n} - 1, \quad (2-11)$$

que ocorre naturalmente em várias equações Diofantinas exponenciais. Normalmente, é possível mostrar que Λ é diferente de zero e daí conseguir um limitante superior pequeno para $|\Lambda|$. Daí, para conseguir algum resultado, restaria conseguir um bom limitante inferior para $|\Lambda|$.

Apesar de (2-11) estar longe de ser linear, ou de conter logaritmos, é comumente conhecido por *forma linear em logaritmo*. A razão é a seguinte, caso tenhamos $|\Lambda|$ muito pequeno, digamos $|\Lambda| \leq \frac{1}{2}$, então a *forma linear em logaritmo* ocorre:

$$|\Lambda| \geq \frac{\log |1 + \Lambda|}{2} = \frac{1}{2} \left| b_1 \log \frac{x_1}{y_1} + \dots + b_n \log \frac{x_n}{y_n} \right|$$

Agora, supondo que temos Λ não nulo, vamos estabelecer um limitante inferior trivial para Λ . Estimando diretamente o denominador de (2-11), obtemos

$$\log |\Lambda| \geq - \sum_{i=1}^n b_i \log |y_i| \geq -B \sum_{i=1}^n \log A_i$$

A dependência deste limitante em A_i é satisfatória, ao contrário da dependência em B . No entanto, para resolver várias equações Diofantinas, precisamos de uma melhor estimativa para B , mesmo se as estimativas para A_i não forem as melhores possíveis. A. Baker [1] foi o primeiro a estabelecer um resultado nesta direção, o que gerou vários refinamentos por diversos autores (para uma bibliografia completa e progressos nessa teoria até 2000, ver [17]). Em 2000, E. Matveev [14] mostrou que sob as hipóteses

anteriores, temos

$$\log |\Lambda| \geq -30^{n+4}(n+1)^6(\log A_1) \dots (\log A_n)(\log B)$$

Vale salientar que também existem limitantes para a expressão (2-11), quando $\frac{x_i}{y_i}$ são substituídos por algébricos não nulos α_i , com números reais A_i sendo expressos em termos da *altura de Weil* (ou *altura logarítmica*) de α_i , como também foi mostrado por Matveev.

Teorema 2.4 (Matveev) *Sejam $\alpha_1, \dots, \alpha_t$ números algébricos e $b_1, \dots, b_t$ inteiros não nulos. Defina $\Lambda := \alpha_1^{b_1} \dots \alpha_t^{b_t} - 1$. Sejam $D = [\mathbb{Q}(\alpha_1, \dots, \alpha_t) : \mathbb{Q}]$ e $A_1, \dots, A_t$ números reais positivos satisfazendo*

$$A_j \geq \max\{Dh(\alpha_j), |\log \alpha_j|, 0, 16\}, \text{ para } j = 1, \dots, t.$$

Tome $B \geq \max\{|b_1|, \dots, |b_t|\}$. Também defina

$$C_{t,D} := 1,4 \times 30^{t+3} \times t^{4,5} \times D^2(1 + \log D).$$

Se $\Lambda \neq 0$, então

$$|\Lambda| > \exp(-C_{t,D}(1 + \log B)A_1 \dots A_t).$$

Onde para um número algébrico η , denotamos $h(\eta)$ pela altura logarítmica (ou de Weil) cuja fórmula é

$$h(\eta) = \frac{1}{d} \left(\log |a_0| + \sum_{i=1}^d \log(\max\{|\eta^{(i)}|, 1\}) \right),$$

com $d = \partial(\eta)$, grau de η sobre $\mathbb{Q}$, a_0 o coeficiente líder do polinômio minimal de η sobre $\mathbb{Z}$ e $\eta = \eta^{(1)}, \dots, \eta^{(d)}$, os seus conjugados.

Em particular, se $\eta = \frac{p}{q}$ é um número racional irredutível, então $h(\eta) = \log(\max\{|p|, |q|\})$.

A função altura logarítmica possui as seguintes propriedades. Sejam η e γ números algébricos, então:

- $h(\eta \pm \gamma) \leq h(\eta) + h(\gamma) + \log 2$,
- $h(\eta \gamma^{\pm 1}) \leq h(\eta) + h(\gamma)$,
- $h(\eta^s) = |s|h(\eta)$, para todo $s \in \mathbb{Z}$.

O próximo Lema nós dá uma estimativa para $g(\alpha, k)$, e sua demonstração pode ser encontrada em [3].

Lema 2.5 *Para todo $k \geq 2$, seja α a raiz dominante de $F_n^{(k)}$, e considere a função definida anteriormente $g(x, k)$. Então*

$$(a) \text{ Se } i \in [2, k], \text{ então } \frac{1}{2} < g(\alpha, k) < \frac{3}{4} \text{ e } |g(\alpha_i, k)| < 1.$$

$$(b) \text{ Temos que } h(g(\alpha, k)) < 4 \log k.$$

2.4 Método de Redução

Em 1998, Dujella e Pethö, em [8], apresentaram uma versão do método de redução baseado no Lema de Baker-Davenport. O Lema seguinte, que é uma variação imediata do resultado devido a Dujella e Pethö, será uma ferramenta chave no nosso trabalho desempenhando a função de diminuir drasticamente os limitantes das variáveis da equação Diofantina trabalhada aqui.

Teorema 2.6 (Dujella-Pethö) *Seja M um inteiro positivo e seja p/q um convergente da fração contínua do número irracional γ tal que $q > 6M$. Sejam A e B , μ números reais com $A > 0$ e $B > 1$. Defina $\varepsilon = ||\mu q|| - M||\gamma q||$, (onde $||x||$ denota a distância de x ao inteiro mais próximo). Se $\varepsilon > 0$, então não existe solução para a desigualdade*

$$0 < |u\gamma - v + \mu| < AB^{-w},$$

em inteiros positivos u, v e w com

$$u \leq M \text{ e } w \geq \frac{\log(\frac{Aq}{\varepsilon})}{\log B}.$$

A Equação Diofantina $(F_n^{(k)})^2 + (F_{n+1}^{(k)})^2 = F_m^{(l)}$

Vimos que os números de Fibonacci satisfazem a seguinte identidade

$$F_n^2 + F_{n+1}^2 = F_{2n+1}, \quad (3-1)$$

para todo $n \geq 0$. Essa identidade nos diz que a soma dos quadrados de dois números de Fibonacci consecutivos ainda é um número de Fibonacci. Em 2010, Marques e Togbé, em [12], mostraram que para um s fixo, se $F_n^s + F_{n+1}^s$ é um número de Fibonacci para infinitos n , então $s = 1$ ou $s = 2$. No ano seguinte, Luca e Oyono, em [10], resolveram o problema completamente mostrando que a equação Diofantina

$$F_n^s + F_{n+1}^s = F_m,$$

não tem solução (n, m, s) com $n \geq 2$ e $s \geq 3$.

Em 2014, Chaves e Marques, em [6], estudaram uma generalização da equação (3-1) e mostraram que a equação Diofantina

$$(F_n^{(k)})^2 + (F_{n+1}^{(k)})^2 = F_m^{(k)}, \quad (3-2)$$

não possui soluções em inteiros positivos n, m e k , com $n > 1$ e $k \geq 3$. No mesmo ano, Luca e Gómez, em [9], que mostraram que a equação

$$(F_n^{(k)})^s + (F_{n+1}^{(k)})^s = F_m^{(k)},$$

não possui soluções em inteiros positivos quando $k \geq 3, n \geq 2$ e $s \geq 2$.

Nosso interesse nesse capítulo é observar quais números da forma

$$(F_n^{(k)})^2 + (F_{n+1}^{(k)})^2$$

são números de l -bonacci. Observaremos que, mesmo adicionando esse grau de liberdade obtemos o seguinte resultado:

Teorema 3.1 (Bednařík-Freitas-Marques-Trojovský, 2019) *A equação Diofantina*

$$(F_n^{(k)})^2 + (F_{n+1}^{(k)})^2 = F_m^{(l)}, \quad (3-3)$$

não possui solução para $2 \leq k < l$ e $n > k + 1$.

3.1 Uma limitação para m e n em termos de l

Denote por α e β as raízes reais que denominamos anteriormente de *dominantes*, das sequências $(F_n^{(k)})_n$ e $(F_m^{(l)})_m$ respectivamente. Note que $\alpha < \beta$ pois $k < l$. De fato suponha por absurdo que $\alpha > \beta$, então $(\alpha/\beta) > 1 \Rightarrow (\alpha/\beta)^{n-2} \rightarrow \infty$ para $n \rightarrow \infty$, com $n \in \mathbb{N}$. Então, existe $n_0 \in \mathbb{N}$, tal que $(\alpha/\beta)^{n-2} > \beta, \forall n \geq n_0$, Logo $F_n^{(k)} \geq \alpha^{n-2} > \beta^{n-1} \geq F_n^{(l)}$, para todo $n \geq n_0$. Absurdo pois $l > k$, e sabemos que, nesse caso, $F_n^{(k)} \leq F_n^{(l)}$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Segue de (2-9), que

$$\begin{aligned} F_m^{(l)} = (F_n^{(k)})^2 + (F_{n+1}^{(k)})^2 &\geq (\alpha^{n-2})^2 + (\alpha^{n-1})^2 \\ &\geq \alpha^{2n-4} + \alpha^{2n-2} = \alpha^{2n-4}(1 + \alpha^2) \\ &> \alpha^{2n-2}, \end{aligned} \quad (3-4)$$

onde usamos que $(1 + \alpha^2) > \alpha^2$, e

$$\begin{aligned} F_m^{(l)} = (F_n^{(k)})^2 + (F_{n+1}^{(k)})^2 &\leq (\alpha^{n-1})^2 + (\alpha^n)^2 \\ &\leq \alpha^{2n-2} + \alpha^{2n} = \alpha^{2n-2}(1 + \alpha^2) \\ &< \alpha^{2n+1}, \end{aligned} \quad (3-5)$$

onde usamos que $(1 + \alpha^2) < \alpha^3$. Também por $\beta^{m-2} \leq F_m^{(l)} \leq \beta^{m-1}$, junto com as desigualdades (3-4) e (3-5), obtidas anteriormente, concluímos que

$$\alpha^{2n-2} < F_m^{(l)} \leq \beta^{m-1} \quad \text{e} \quad \beta^{m-2} \leq F_m^{(l)} < \alpha^{2n+1}.$$

Como vimos que $\alpha < \beta$, obtemos

$$\alpha^{m-2} < \beta^{m-2} \leq F_m^{(l)} < \alpha^{2n+1}.$$

Logo

$$\alpha^{m-2} < \alpha^{2n+1} \Rightarrow m < 2n + 3. \quad (3-6)$$

Agora usando que $\sqrt{2} < (1 + \sqrt{5})/2 \leq \alpha$, onde $(1 + \sqrt{5})/2$ é a raiz dominante

da sequência de Fibonacci, temos que

$$(\sqrt{2})^{2n-2} < \alpha^{2n-2} < \beta^{m-1} < 2^{m-1}.$$

Analisando os extremos da cadeia de desigualdades acima, conseguimos

$$\frac{2n-2}{2} < m-1 \Rightarrow n < m. \quad (3-7)$$

Portanto, juntando as desigualdades (3-6) e (3-7), temos,

$$n < m < 2n + 3. \quad (3-8)$$

A desigualdade (3-8), nos dá limitantes, superior e inferior, para a variável m , apenas em função de n . O resultado a seguir, relaciona as variáveis m e n com a variável l , nos dando limitantes superiores para as duas primeiras em função da última. Para isso, vamos utilizar o resultado sobre formas lineares em logaritmo dado por Matveev [14] e algumas desigualdades satisfeitas pela função altura logarítmica, que podem ser encontradas na Seção 2.3.

Lema 3.2 *Se (n, m, k, l) é uma solução inteira da Equação Diofantina (3-3), com $l > k$ e $m > l + 1$, então*

$$n < 1.18 \cdot 10^{15} l^9 \log^3 l \quad e \quad m < 2.37 \cdot 10^{15} \cdot l^9 \cdot \log^3 l$$

Demonstração. Sejam $F_n^{(k)} = g(\alpha, k)\alpha^{n-1} + E_n(k)$ e $F_m^{(l)} = g(\beta, l)\beta^{m-1} + E_m(l)$, dados pela fórmula (2-7). Então segue da equação (2-10) que

$$g(\beta, l)\beta^{m-1} + E_m(l) = (g(\alpha, k)\alpha^{n-1} + E_n(k))^2 + (g(\alpha, k)\alpha^n + E_{n+1}(k))^2.$$

Expandindo os quadrados temos:

$$\begin{aligned} g(\beta, l)\beta^{m-1} + E_m(l) &= g(\alpha, k)^2(\alpha^{n-1})^2 + 2g(\alpha, k)\alpha^{n-1}E_n(k) + E_n^2(k) \\ &+ g(\alpha, k)^2(\alpha^n)^2 + 2g(\alpha, k)\alpha^n E_{n+1}(k) + E_{n+1}^2(k) \\ &= g(\alpha, k)^2(\alpha^{2n-2})(1 + \alpha^2) + 2g(\alpha, k)\alpha^{n-1}(E_n(k) + \alpha E_{n+1}(k)) \\ &+ E_n^2(k) + E_{n+1}^2(k). \end{aligned}$$

Denotamos $h := g(\beta, l)$ e $g := g(\alpha, k)$ teremos:

$$h\beta^{m-1} + E_m(l) = g^2\alpha^{2n-2}(1 + \alpha^2) + 2g\alpha^{n-1}(E_n(k) + \alpha E_{n+1}(k)) + E_n^2(k) + E_{n+1}^2(k).$$

Agora, vamos organizar os termos de maior ordem de um lado, obtendo

$$g^2\alpha^{2n-2}(1+\alpha^2) - h\beta^{m-1} = E_m(l) - 2g\alpha^{n-1}(E_n(k) + \alpha E_{n+1}(k)) + E_n^2(k) + E_{n+1}^2(k)$$

Aplicando a desigualdade triangular e usando as limitações para os E_n 's de (2-10), para g do Lema 2.5, junto com (2-5), conseguimos,

$$\begin{aligned} |g^2\alpha^{2n-2}(1+\alpha^2) - h\beta^{m-1}| &\leq |E_m(l)| + 2g\alpha^{n-1}(|E_n(k)| + \alpha|E_{n+1}(k)|) + |E_n^2(k)| + |E_{n+1}^2(k)| \\ &< \frac{1}{2} + 2 \cdot \frac{3}{4} \cdot \alpha^{n-1} \left(\frac{1}{2} + 2 \cdot \frac{1}{2} \right) + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} \\ &< \frac{1}{2} + \frac{9}{4} \cdot \alpha^{n-1} + \frac{1}{2} \\ &< 2,5\alpha^{n-1} + 1 \\ &< 3\alpha^{n-1}. \end{aligned} \tag{3-9}$$

Dividindo ambos os lados pelo termo $g^2(1+\alpha^2)\alpha^{2n-2}$, e usando novamente as estimativas obteremos a seguinte limitação:

$$\begin{aligned} \left| \frac{g^2\alpha^{2n-2}(1+\alpha^2) - h\beta^{m-1}}{g^2(1+\alpha^2)\alpha^{2n-2}} \right| &< \frac{3\alpha^{n-1}}{g^2(1+\alpha^2)\alpha^{2n-2}} \\ \left| 1 - \frac{h\beta^{m-1}}{g^2(1+\alpha^2)\alpha^{2n-2}} \right| &< \frac{\alpha^{n-1}}{\alpha^{2n-2}} \cdot \frac{3}{g^2(1+\alpha^2)} \\ &< \frac{1}{\alpha^{n-1}} \cdot \frac{3}{g^2(1+\alpha^2)} \\ &< \frac{4}{\alpha^{n-1}}. \end{aligned} \tag{3-10}$$

Onde (3-10) é válido pois $3/(g^2(1+\alpha^2)) < 3,32 < 4$, também utilizando a desigualdade do Lema 2.5 e que $\alpha > (1+\sqrt{5})/2$. Voltando em (3-10), temos:

$$\left| 1 - \frac{h\beta^{m-1}}{g^2(1+\alpha^2)\alpha^{2n-2}} \right| < \frac{4\alpha}{\alpha^n} < \frac{8}{\alpha^n} < \frac{8}{(1,6)^n}, \tag{3-11}$$

onde usamos que $1,6 < \alpha < 2$, para $k \geq 2$. Portanto, temos a seguinte limitação

$$\left| 1 - \frac{h\beta^{m-1}}{g^2(1+\alpha^2)\alpha^{2n-2}} \right| < \frac{8}{(1,6)^n} \tag{3-12}$$

Para aplicarmos o resultado de Matveev (Teorema 2.4), primeiro precisamos

$$\left| 1 - \frac{g(\beta, l)\beta^{m-1}}{g(\alpha, k)^2(1+\alpha^2)\alpha^{2n-2}} \right| \neq 0,$$

isto é, que $g(\beta, l)\beta^{m-1} \neq g(\alpha, k)^2(1 + \alpha^2)\alpha^{2n-2}$. Supondo o contrário, isto é,

$$g(\beta, l)\beta^{m-1} = g(\alpha, k)^2(1 + \alpha^2)\alpha^{2n-2}, \quad (3-13)$$

seja $\mathbb{L} = \mathbb{Q}(\alpha_1, \dots, \alpha_k, \beta_1, \dots, \beta_l)$ o fecho normal de $\mathbb{Q}(\alpha, \beta)$ e $\psi_1, \dots, \psi_l$ os elementos de $\text{Gal}(\mathbb{L}/\mathbb{Q})$ tal que $\psi_i(\beta) = \beta_i$. Como $l > k$, existe $i \neq j \in \{1, \dots, l\}$ tal que $\psi_i(\alpha) = \psi_j(\alpha)$. Aplicando $\psi_j^{-1}\psi_i$ em (3-13), e observando que se $\psi_j^{-1}(\beta_i) = \beta_s$, então $s \neq 1$ (pois, caso contrário, $\psi_j^{-1}(\beta_i) = \beta \Rightarrow \beta_i = \beta_j$, um absurdo já que $i \neq j$), conseguimos

$$1 > |g(\beta_s, l)| |\beta_s|^{m-1} = |g(\alpha, k)|^2 |1 + \alpha^2| \alpha^{2n-2} > \frac{\alpha^{2n}}{4}$$

onde usamos, o Lema 2.5 para $|g(\beta_s, l)| < 1$ e $|g(\alpha, k)| > 1/2$, que $|\beta_s| < 1$, para $s \neq 1$, e $|1 + \alpha^2| > \alpha^2$, já que $\alpha \in \mathbb{R}$ com $1 < \alpha < 2$. Contudo a desigualdade $\alpha^{2n} < 4$ acontece apenas para $n = 1$, o que não está nas nossas hipóteses, pois $n > k + 1 \geq 3$. Logo podemos aplicar o Teorema 2.4. Para isso, tomamos $t = 3$, e

$$\gamma_1 := \alpha, \quad \gamma_2 := \beta, \quad \gamma_3 := \frac{h}{g^2(1 + \alpha^2)}$$

$$b_1 := -2n + 2, \quad b_2 := m - 1, \quad b_3 := 1.$$

Assim consideramos,

$$\Lambda_1 = \frac{h}{g^2(1 + \alpha^2)} \beta^{m-1} \alpha^{-2n+2} - 1.$$

A extensão algébrica $\mathbb{Q}(\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)$ é dada por $\mathbb{K} := \mathbb{Q}(\alpha, \beta)$, cujo grau é $D := [\mathbb{K} : \mathbb{Q}] \leq kl < l^2$. Para o valor de B , temos $B \geq \max\{|b_1|, \dots, |b_t|\}$, $B \geq \max\{2n - 2, m - 1, 1\}$ e temos que $n < m < 2n + 3$, logo podemos tomar $B = 2n + 2$. Agora precisamos estimar as alturas logarítmicas. Para $h(\gamma_1)$, temos $\partial(\gamma_1) = \partial(\alpha) = k$ e $a_0 = 1$. Portanto:

$$\begin{aligned} h(\gamma_1) &= \frac{1}{k} \left(\log 1 + \sum_{i=1}^k \log(\max\{|\alpha_i|, 1\}) \right) \\ &= \frac{\log \alpha}{k} < \frac{0,7}{k}, \end{aligned}$$

onde, no somatório acima, lembramos que para $i \neq 1$ temos $|\alpha_i| < 1$, e para a última desigualdade usamos $\alpha < 2 \Rightarrow \log \alpha < 0,7$. Analogamente, para $h(\gamma_2)$, temos $\partial(\gamma_2) = \partial(\beta) = l$ e $a_0 = 1$.

$$\begin{aligned} h(\gamma_2) &= \frac{1}{l} \left(\log 1 + \sum_{i=1}^l \log(\max\{|\beta_i|, 1\}) \right) \\ &= \frac{\log \beta}{l} < \frac{0,7}{l}. \end{aligned}$$

Para $h(\gamma_3)$, temos $h(\gamma_3) = \frac{h}{g^2(1+\alpha^2)}$, então:

$$\begin{aligned} h(\gamma_3) &= h(h) \cdot h((g^{-2}) \cdot (1 + \alpha^2)^{-1}) \\ &\leq h(h) + h(g^{-2}) + h((1 + \alpha)^{-1}). \end{aligned}$$

Como $h(\eta^{-1}) = h(\eta)$, temos que $h(\eta^2) \leq 2h(\eta)$ e $h(\eta \pm \gamma) \leq h(\eta) + h(\gamma) + \log 2$, todas estas citadas na Seção 2.3, então:

$$\begin{aligned} h(\gamma_3) &\leq h(h) + h(g^2) + h(1 + \alpha^2) \\ &\leq h(h) + 2h(g) + h(\alpha^2) + h(1) + \log 2 \end{aligned}$$

como $h(1) = 0$, então:

$$h(\gamma_3) \leq h(h) + 2h(g) + 2h(\alpha) + \log 2$$

Agora pelo Lema 2.5 temos que $h(g) < 4 \log k$ e $h(h) < 4 \log l$, então:

$$\begin{aligned} h(\gamma_3) &\leq 4 \log l + 2 \cdot 4 \log k + 2h(\alpha) + \log 2 \\ &\leq 4 \log l + 8 \log k + 2 \cdot \frac{0,7}{k} + \log 2, \end{aligned}$$

e como $k < l$, conseguimos

$$h(\gamma_3) \leq 12 \log l + \frac{1,4}{k} + \log 2.$$

Agora, vamos encontrar valores apropriados para os A_i 's, onde lembramos, do Teorema 2.4, que $A_i \geq \max\{Dh(\gamma_i), \log |\gamma_i|, 0, 16\}$, para $i \in \{1, 2, 3\}$. Temos que:

- Precisamos que $A_1 \geq \max\{Dh(\gamma_1), \log |\gamma_1|, 0, 16\}$. Como $D < l^2$, $h(\gamma_1) \leq 0,7/k$, $\log |\gamma_1| = \log \alpha < 0,7$ e $k \geq 2$, nos dá

$$\max\{Dh(\gamma_1), \log |\gamma_1|, 0, 16\} < \max\left\{l^2 \cdot \frac{0,7}{k}, 0, 7, 0, 16\right\} < 0,7l^2,$$

podemos considerar $A_1 := 0,7l^2$.

- Analogamente ao que foi feito no item anterior, precisamos que $A_2 \geq \max\{Dh(\gamma_2), \log |\gamma_2|, 0, 16\}$. Como $D < l^2$, $h(\gamma_2) \leq 0,7/l$ e $\log |\gamma_2| = \log \beta < 0,7$, nos dá

$$\max\{Dh(\gamma_2), \log |\gamma_2|, 0, 16\} < \max\left\{l^2 \cdot \frac{0,7}{l}, 0, 7, 0, 16\right\} < 0,7l,$$

podemos considerar $A_2 := 0,7l$.

- Para $A_3 \geq \{Dh(\gamma_3), \log |\gamma_3|, 0, 16\}$, como $D < l^2$, $h(\gamma_3) \leq 12 \log l + 1, 4/k + \log 2$ e $1, 4/k + \log 2 \leq 0, 7 + \log 2 < 2 \log l$, temos

$$\max \{Dh(\gamma_3), \log |\gamma_3|, 0, 16\} \leq \max \left\{ 14l^2 \log l, \log \left| \frac{h}{g^2(1+\alpha^2)} \right|, 0, 16 \right\}.$$

Já que, pelo Lema 2.5, $|h| < 3/4$, $|g|^2 > 1/4$ e $|1 + \alpha^2| > \alpha^2 > (3/2)^2$, então

$$\log \left(\left| \frac{h}{g^2(1+\alpha^2)} \right| \right) < \log \left(\frac{(3/4)}{(1/4)(9/4)} \right) = \log \left(\frac{4}{3} \right) < 0,3,$$

o que nos dá

$$\max \left\{ 14l^2 \log l, \log \left| \frac{h}{g^2(1+\alpha^2)} \right|, 0, 16 \right\} < 14l^2 \log l,$$

donde podemos tomar $A_3 := 14l^2 \log l$.

Agora, já temos todos os “ingredientes” necessários para aplicar o resultado de Matveev (Teorema 2.4). Relembramos que o limitante inferior para $|\Lambda_1|$ dado pelo resultado é:

$$|\Lambda_1| > \exp(-1,4 \cdot 30^{t+3} \cdot t^{4,5} \cdot D^2 \cdot (1 + \log D)(1 + \log B) \cdot A_1 \cdots A_t)$$

Deste modo, substituindo os valores de $t = 3$, $A_1 = 0,7l^2$, $A_2 = 0,7l$, $A_3 = 14l^2 \log l$, $B = 2n + 2$, e usando o limitante superior $D < l^2$, obtemos:

$$\begin{aligned} |\Lambda_1| &> \exp(-1,4 \cdot 30^6 \cdot 3^{4,5} \cdot l^4 (1 + \log l^2)(1 + \log(2n + 2)) \cdot 0,7l^2 \cdot 0,7l \cdot 14l^2 \log l) \\ &> \exp(-1,44 \cdot 10^{11} \cdot (l^4)(1 + 2 \log l)(1 + \log(2n + 2))(6,86l^5 \log l)) \\ &> \exp(-9,83 \cdot 10^{11} l^9 \log l \cdot (1 + 2 \log l)(1 + \log(2n + 2))). \end{aligned}$$

Usando agora que $1 + 2 \log l < 3 \log l$, para $l \geq 3$, e que $1 + \log(2n + 2) = 1 + \log 2 + \log(n + 1) < 2,9 \log n$, para $n \geq 3$

$$\begin{aligned} |\Lambda_1| &> \exp(-9,83 \cdot 10^{11} l^9 \log l \cdot 3 \log l \cdot 2,9 \log n) \\ |\Lambda_1| &> \exp(-8,56 \cdot 10^{12} l^9 \log^2 l \log n) \end{aligned}$$

Portanto, temos pela última desigualdade e por (3-12), que:

$$\frac{8}{(1,6)^n} > \left| 1 - \frac{h\beta^{m-1}}{g^2(1+\alpha^2)\alpha^{2n-2}} \right| > \exp(-8,56 \cdot 10^{12} l^9 \log^2 l \log n) \quad (3-14)$$

Agora, vamos usar o seguinte argumento, mostrado por Luca e Oyono [10], que nos permitirá obter um limitante para n em função de l .

Como a função $x \mapsto \frac{x}{\log x}$ é crescente para $x > e$, temos que:

$$\frac{x}{\log x} < A \Rightarrow x < 2A \log A. \quad (3-15)$$

De fato, suponha por absurdo que $x \geq 2A \log A$, então,

$$A = \frac{2A \log A}{2 \log A} = \frac{2A \log A}{\log A^2} < \frac{2A \log A}{\log(2A \log A)} \leq \frac{x}{\log x}$$

onde usamos que $A > 2 \log A \Rightarrow A^2 > 2A \log A$ para todo $A \geq 3$, o que contradiz a nossa hipótese.

Voltando à desigualdade (3-14),

$$\begin{aligned} \exp(-8,56 \cdot 10^{12} l^9 \log^2 l \log n) &< \frac{8}{(1,6)^n} \\ \log[\exp(-8,56 \cdot 10^{12} l^9 \log^2 l \log n)] &< \log \left[\frac{8}{(1,6)^n} \right] \\ -8,56 \cdot 10^{12} l^9 \log^2 l \log n &< \log 8 - n \cdot \log 1,6 \\ n \log 1,6 &< \log 8 + 8,56 \cdot 10^{12} l^9 \log^2 l \log n \\ n &< \frac{\log 8}{\log 1,6} + \frac{8,56}{\log 1,6} \cdot 10^{12} l^9 \log^2 l \log n \\ n &< 4,43 + 18,212 \cdot 10^{12} l^9 \log^2 l \log n \\ n &< 1,83 \cdot 10^{13} l^9 \log^2 l \log n \\ \frac{n}{\log n} &< 1,83 \cdot 10^{13} l^9 \log^2 l \end{aligned}$$

Assim, por (3-15), tomando $x := n$ e $A = 11,83 \cdot 10^{13} l^9 \log^2 l$, obtemos,

$$\begin{aligned} n &< 2 \cdot (1,83 \cdot 10^{13} l^9 \log^2 l) \cdot \log(1,83 \cdot 10^{13} l^9 \log^2 l) \\ n &< 3,66 \cdot 10^{13} l^9 \log^2 l \cdot (\log 1,83 + 13 \log 10 + 9 \log l + 2 \log \log l), \end{aligned}$$

e usando a desigualdade $\log 128,88 + 11 \log 10 + 9 \log l + 2 \cdot \log \log l < 32 \log l$, satisfeita para $l \geq 4$, concluímos que $n < 3,66 \cdot 10^{13} l^9 \log^2 l \cdot 32 \log l$, donde,

$$n < 1,18 \cdot 10^{15} l^9 \log^3 l. \quad (3-16)$$

para todo $l \geq 3$.

Usando a estimativa de (3-6), temos:

$$m < 2 \cdot (1,18 \cdot 10^{15} l^9 \log^3 l) + 3$$

$$m < 2,36 \cdot 10^{15} \cdot l^9 \cdot \log^3 l + 3$$

$$m < 2,37 \cdot 10^{15} \cdot l^9 \cdot \log^3 l.$$

Com isso, finalizamos a demonstração do Lema 3.2. □

3.2 O caso l grande

Nessa secção vamos assumir que $l > 1454$. Temos que, para tais valores de l , é válida a última desigualdade de $m < 2,37 \cdot 10^{15} \cdot l^9 \cdot \log^3 l < 2^{\frac{l}{2}}$.

Usaremos um argumento chave devido a Bravo e Luca, que utiliza a rapidez na convergência da sequência de raízes dominantes para 2, e nos dá uma nova forma linear em logaritmos. Apresentaremos esse argumento aqui para que nosso trabalho fique mais completo.

Defina $\beta = 2 - \lambda$, onde $0 < \lambda < \frac{1}{2^{l-1}}$. Então,

$$\begin{aligned} \beta^{m-1} &= (2 - \lambda)^{m-1} \\ &= \left[2 \left(1 - \frac{\lambda}{2} \right) \right]^{m-1} \\ &= 2^{m-1} \left(1 - \frac{\lambda}{2} \right)^{m-1}, \end{aligned}$$

e usando a desigualdade $(1 - x)^m > 1 - 2mx$, válida para todo $m \geq 1$ e $0 < x < 1$, conseguimos

$$\begin{aligned} \beta^{m-1} &> 2^{m-1} \cdot \left(1 - 2(m-1)\frac{\lambda}{2} \right) \\ &> 2^{m-1} \cdot (1 - (m-1)\lambda). \end{aligned}$$

Como estamos no caso $m < 2^{\frac{l}{2}}$, e tomamos $\lambda < \frac{1}{2^{l-1}}$, podemos concluir que

$$\begin{aligned}
1 - (m-1)\lambda &> 1 - \left(2^{\frac{l}{2}} - 1\right) \frac{1}{2^{l-1}} \\
&> 1 - \left(\frac{1}{2^{\frac{l}{2}-1}} - \frac{1}{2^{l-1}}\right) \\
&> 1 - \frac{1}{2^{\frac{l}{2}-1}} + \frac{1}{2^{l-1}} \\
&> 1 - \frac{2}{2^{\frac{l}{2}}} + \frac{1}{2^{l-1}} \\
\Rightarrow -(m-1)\lambda &> -\frac{2}{2^{\frac{l}{2}}} + \frac{1}{2^{l-1}}.
\end{aligned}$$

Com isso, temos que $\beta^{m-1} > 2^{m-1} \cdot (1 - (m-1)\lambda)$, e $-(m-1)\lambda > \frac{-2}{2^{\frac{l}{2}}}$, o que nos dá,

$$\begin{aligned}
\beta^{m-1} &> 2^{m-1} \cdot \left(1 - \frac{2}{2^{\frac{l}{2}}}\right) \\
&> 2^{m-1} - \frac{2^m}{2^{\frac{l}{2}}}.
\end{aligned}$$

Por outro lado, $\beta < 2$, então, $\beta^{m-1} < 2^{m-1}$. Juntando tais informações, $\beta^{m-1} < 2^{m-1}$ e $\beta^{m-1} > 2^{m-1} - \frac{2^m}{2^{\frac{l}{2}}}$, Concluimos então que:

$$2^{m-1} - \frac{2^m}{2^{\frac{l}{2}}} < \beta^{m-1} < 2^{m-1} \Rightarrow 2^{m-1} - \frac{2^m}{2^{\frac{l}{2}}} < \beta^{m-1} < 2^{m-1} + \frac{2^m}{2^{\frac{l}{2}}},$$

donde conseguimos $|\beta^{m-1} - 2^{m-1}| < \frac{2^m}{2^{\frac{l}{2}}}$. Agora, definimos, para $x > 2(1 - 2^{-l})$, a função

$$f_1(x) := g(x, l) = \frac{x-1}{2 + (l+1)(x-2)},$$

que é diferenciável no intervalo $[\beta, 2]$. Pelo Teorema do Valor Médio existe $\xi \in (\beta, 2)$ tal que $f_1(\beta) - f_1(2) = f'_1(\xi)(\beta - 2)$. Assim, como

$$2 - \frac{2}{2^l} < \beta < 2 \Rightarrow |\beta - 2| < \frac{2}{2^l}$$

e $|f'_1(\xi)| < l$, pois

$$f'_1(\xi) = \frac{1-l}{[2 + (l+1)(\xi-2)]^2}, \quad (3-17)$$

e temos, lembrando que $\xi \geq \beta > 2 - 2/2^l$, a seguinte desigualdade

$$2 + (l+1)(\xi - 2) = 2 - (l+1)(2 - \xi) > 2 - \frac{(l+1)}{2^{l-1}} \geq 1,$$

para todo $l \geq 3$, o que faz com que o denominador de (3-17) seja estritamente maior que 1, e com isso $|f'_1(\xi)| < |l-1| < l$, para todo $l \geq 3$. Assim, voltando à igualdade conseguida com o Teorema do Valor Médio, concluímos que

$$|f_1(\beta) - f_1(2)| < \frac{2l}{2^l}. \quad (3-18)$$

Para não deixarmos os cálculos que seguirão com a notação tão complicada quanto realmente é necessário, vamos denotar $\delta_1 := \beta^{m-1} - 2^{m-1}$, $\eta_1 := f_1(\beta) - f_1(2) = f_1(\beta) - 1/2$ e lembramos que $h = f_1(\beta)$. Então, temos,

$$\begin{aligned} h\beta^{m-1} - 2^{m-1}\eta_1 - \frac{\delta_1}{2} - \delta_1\eta_1 &= h\beta^{m-1} - 2^{m-1} \cdot \left(f_1(\beta) - \frac{1}{2}\right) - \left(\frac{\beta^{m-1} - 2^{m-1}}{2}\right) \\ &\quad - (\beta^{m-1} - 2^{m-1}) \cdot \left(f_1(\beta) - \frac{1}{2}\right) \\ &= h\beta^{m-1} - 2^{m-1} \cdot \left(h - \frac{1}{2}\right) - \left(\frac{\beta^{m-1} - 2^{m-1}}{2}\right) \\ &\quad - \left(h - \frac{1}{2}\right)(\beta^{m-1} - 2^{m-1}) \\ &= h\beta^{m-1} - 2^{m-1}h + 2^{m-2} - \frac{\beta^{m-1}}{2} + 2^{m-2} - h\beta^{m-1} \\ &\quad + 2^{m-1}h + \frac{\beta^{m-1}}{2} - 2^{m-2} \\ \Rightarrow h\beta^{m-1} - 2^{m-1}\eta_1 - \frac{\delta_1}{2} - \delta_1\eta_1 &= 2^{m-2} \\ \therefore 2^{m-2} - h\beta^{m-1} &= -2^{m-1}\eta_1 - \frac{\delta_1}{2} - \delta_1\eta_1 \end{aligned}$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned} |2^{m-2} - g^2(1 + \alpha^2)\alpha^{2n-2}| &= |2^{m-2} - h\beta^{m-1} + h\beta^{m-1} + g^2(1 + \alpha^2)\alpha^{2n-2}| \\ &\leq \left| -2^{m-2}\eta_1 - \frac{\delta_1}{2} - \delta_1\eta_1 \right| + |h\beta^{m-1} - g^2(1 + \alpha^2)\alpha^{2n-2}| \\ &\leq |h\beta^{m-1} - g^2(1 + \alpha^2)\alpha^{2n-2}| + 2^{m-1} \cdot |\eta_1| + \frac{|\delta_1|}{2} + |\delta_1||\eta_1|. \end{aligned}$$

Agora, interrompemos o desenvolvimento do método de Bravo-Luca, para mostrar um fato que vai nos permitir utilizar o argumento citado na nossa demonstração.

Lema 3.3 Temos que $3\alpha^{n-1} < 2^{\frac{5}{2}} \frac{2^{m-2}}{2^{\frac{l}{2}}}$

Demonstração. Sabemos que $\alpha^{2n-2} < \beta^{m-1} < 2^{m-1}$, pelos argumentos mostrados no início da Seção 3.1 que levam à desigualdade (3-7). Daí,

$$\begin{aligned} \alpha^{2n-2} &< 2^{m-1} \\ \Rightarrow \alpha^{n-1} &< 2^{\frac{(m-1)}{2}} \\ \Rightarrow 3 \cdot \alpha^{n-1} &< 4 \cdot 2^{\frac{m-1}{2}} \\ \Rightarrow 3\alpha^{n-1} &< 2^{\frac{m-1}{2}+2} \\ \Rightarrow 3\alpha &< 2^{\frac{m+3}{2}} \end{aligned}$$

Por outro lado, também temos as seguintes implicações a partir da desigualdade $m \geq l+2$,

$$\begin{aligned} m-l &\geq 2 \\ \Rightarrow m-l+1 &\geq 3 \\ \Rightarrow m+(m-l+5-4) &\geq m+3 \\ \Rightarrow 2m-l+5-4 &\geq m+3, \end{aligned}$$

daí,

$$\begin{aligned} \Rightarrow \frac{m+3}{2} &\leq \frac{2m-l+5-4}{2} \\ \Rightarrow 2^{\frac{m+3}{2}} &\leq 2^{m-\frac{l-5}{2}} - 2 \\ \Rightarrow 2^{\frac{m+3}{2}} &\leq 2^{\frac{5}{2}} \cdot \frac{2^{m-2}}{2^{\frac{l}{2}}} \end{aligned}$$

Agora vamos combinar $3\alpha^{n-1} = 2^{\frac{m+3}{2}}$ e $2^{\frac{m+3}{2}} \leq 2^{\frac{5}{2}} \cdot \frac{2^{m-2}}{2^{\frac{l}{2}}}$

$$3\alpha^{n-1} \leq 2^{\frac{5}{2}} \cdot \frac{2^{m-2}}{2^{\frac{l}{2}}}$$

□

Voltando à desigualdade obtida antes do Lema 3.3,

$$|2^{m-2} - g^2(1 + \alpha^2)\alpha^{2n-2}| < |h\beta^{m-1} - g^2(1 + \alpha^2)\alpha^{2n-2}| + 2^{m-1}|\eta_1| + \left|\frac{\delta_1}{2}\right| + |\delta_1\eta_1|$$

e usando a relação 3-9, dada por $|g^2(1 + \alpha^2)\alpha^{2n-2} - h\beta^{m-1}| < 3\alpha^{n-1}$, temos,

$$|2^{m-2} - g^2(1 + \alpha^2)\alpha^{2n-2}| < 3\alpha^{n-1} + 2^{m-1}|\eta_1| + \left|\frac{\delta_1}{2}\right| + |\delta_1\eta_1|.$$

Assim, pelo Lema 3.3, e pelos limitantes $|\beta^{m-1} - 2^{m-1}| < 2^m/2^{\frac{l}{2}}$ e $|f_1(\beta) - f_1(2)| < 2l/2^l$, conseguimos,

$$\begin{aligned} |2^{m-2} - g^2(1 + \alpha^2)\alpha^{2n-2}| &< 2^{\frac{5}{2}} \cdot \frac{2^{m-2}}{2^{l/2}} + 2^{m-1} \cdot \frac{2l}{2^l} + \frac{2^m/2^{l/2}}{2} + \frac{2^m}{2^{l/2}} \cdot \frac{2l}{2^l} \\ &< 2^{\frac{5}{2}} \cdot \frac{2^{m-2}}{2^{l/2}} + 2^{m-1} \cdot \frac{2l}{2^l} + \frac{2^{m-1}}{2^{l/2}} + \frac{4l}{2^l} \cdot \frac{2^{m-1}}{2^{l/2}}. \end{aligned}$$

Dividindo ambos os lados por 2^{m-2} , e notando que as seguintes desigualdades $4l < 2^{\frac{l}{2}} < 2^l$, são válidas para todo $l > 11$, então:

$$\begin{aligned} \left|1 - \frac{g^2(1 + \alpha^2)\alpha^{2n-2}}{2^{m-2}}\right| &< 2^{\frac{5}{2}} \cdot \frac{1}{2^{l/2}} + 2 \cdot \frac{2l}{2^l} + \frac{2}{2^{l/2}} + \frac{4l}{2^l} \cdot \frac{2}{2^{l/2}} \\ &< 2^{\frac{5}{2}} \cdot \frac{1}{2^{l/2}} + \frac{1}{2^{l/2}} \cdot \frac{4l}{2^{l/2}} + \frac{2}{2^{l/2}} + \frac{4l}{2^l} \cdot \frac{2}{2^{l/2}} \\ &< 2^{\frac{5}{2}} \cdot \frac{1}{2^{l/2}} + \frac{1}{2^{l/2}} + \frac{2}{2^{l/2}} + \frac{2}{2^{l/2}} \\ &< \frac{11}{2^{l/2}} \end{aligned} \tag{3-19}$$

Para concluir nosso resultado, para l grande, precisamos subdividir nossa prova em dois casos. A saber, quando $n < 2^{k/2}$ e $n > 2^{k/2}$.

3.2.1 O caso $n < 2^{k/2}$

Aplicamos novamente o argumento devido a Bravo e Luca. Entretanto, agora usamos a raiz dominante de $F_n^{(k)}$, e observamos que tudo que for feito para n é também válido para $n + 1$. Vamos repetir o argumento para conveniência do leitor.

Defina $\alpha = 2 - \lambda$ e $0 < \lambda < \frac{1}{2^{k-1}}$. Então

$$\begin{aligned} \alpha^{n-1} &= (2 - \lambda)^{n-1} \\ &= \left[2 \left(1 - \frac{\lambda}{2}\right)\right]^{n-1} \\ &= 2^{n-1} \left(1 - \frac{\lambda}{2}\right)^{n-1}. \end{aligned}$$

Usando novamente o fato que $(1 - x)^n > 1 - 2nx$ é válido para todo $n \geq 1$ e $0 < x < 1$,

conseguimos

$$\begin{aligned}\alpha^{n-1} &> 2^{n-1} \left(1 - 2(n-1) \cdot \frac{\lambda}{2} \right) \\ \Rightarrow \alpha^{n-1} &> 2^{n-1} \cdot (1 - (n-1)\lambda).\end{aligned}\tag{3-20}$$

Agora, como estamos no caso $n < 2^{k/2}$ e tomamos λ no intervalo $(0, 1/2^{k-1})$, temos que $(n-1)\lambda < 2^{k/2}/2^{k-1} = 2/2^{k/2}$. Logo, voltando à (3-20),

$$\begin{aligned}\alpha^{n-1} &> 2^{n-1} \cdot (1 - (n-1)\lambda) \\ &> 2^{n-1} \cdot \left(1 - \frac{2}{2^{k/2}} \right) \\ \Rightarrow \alpha^{n-1} &> 2^{n-1} - \frac{2^n}{2^{k/2}}.\end{aligned}\tag{3-21}$$

Por outro lado, como $\alpha < 2$, então, $\alpha^{n-1} < 2^{n-1}$, o que combinado com a desigualdade (3-21), nos dá

$$2^{n-1} - \frac{2^n}{2^{k/2}} < \alpha^{n-1} < 2^{n-1} \implies 2^{n-1} - \frac{2^n}{2^{k/2}} < \alpha^{n-1} < 2^{n-1} + \frac{2^n}{2^{k/2}},$$

donde concluímos

$$|\alpha^{n-1} - 2^{n-1}| < \frac{2^n}{2^{k/2}}.\tag{3-22}$$

Usamos o mesmo argumento para $n+1$, e obtemos

$$|\alpha^n - 2^n| < \frac{2^{n+1}}{2^{k/2}}.\tag{3-23}$$

Agora, considere a função $f_2(x) := g(x, k)$, para $x > 2(1 - 2^{-k})$. Essa função é diferenciável em $[\alpha, 2]$. Novamente, o Teorema do valor Médio garante a existência de $\gamma \in (\alpha, 2)$ tal que $f_2(\alpha) - f_2(2) = f_2'(\gamma)(\alpha - 2)$. Assim,

$$|f_2(\alpha) - f_2(2)| < \frac{2k}{2^k},$$

onde usamos que $|\alpha - 2| < 1/2^{k-1}$ e $|f_2'(\gamma)| < k$. Definimos $\delta := \alpha^{n-1} - 2^{n-1}$, $\tilde{\delta} := \alpha^n - 2^n$

e $\eta = f_2(\alpha) - f_2(2) = f_2(\alpha) - 1/2$. Logo,

$$\begin{aligned}
 2^{n-2} + 2^{n-1}\eta + \frac{\delta}{2} + \delta\eta &= 2^{n-2} + 2^{n-1} \cdot \left(f_2(\alpha) - \frac{1}{2}\right) + \frac{\alpha^{n-1} - 2^{n-1}}{2} \\
 &\quad + (\alpha^{n-1} - 2^{n-1}) \cdot \left(f_2(\alpha) - \frac{1}{2}\right) \\
 &= 2^{n-2} + 2^{n-1}f_2(\alpha) - 2^{n-2} - 2^{n-2} + \frac{\alpha^{n-1}}{2} - 2^{n-2} \\
 &\quad + \alpha^{n-1}f_2(\alpha) + 2^{n-2} \\
 2^{n-2} + 2^{n-1}\eta + \frac{\delta}{2} + \delta\eta &= \alpha^{n-1}f_2(\alpha) \\
 \Rightarrow f_2(\alpha)\alpha^{n-1} &= 2^{n-2} + 2^{n-1}\eta + \frac{\delta}{2} + \delta\eta.
 \end{aligned}$$

Analogamente,

$$\begin{aligned}
 2^{n-1} + 2^n\eta + \frac{\tilde{\delta}}{2} + \tilde{\delta}\eta &= 2^{n-1} + 2^n \cdot \left(f_2(\alpha) - \frac{1}{2}\right) + \frac{\alpha^n - 2^n}{2} + (\alpha^n - 2^n) \cdot \left(f_2(\alpha) - \frac{1}{2}\right) \\
 &= 2^{n-1} + 2^n f_2(\alpha) - 2^{n-1} + \frac{\alpha^n}{2} - 2^{n-1} + \alpha^n f_2(\alpha) - \frac{\alpha^n}{2} \\
 &\quad - 2^n f_2(\alpha) + 2^{n-1} \\
 2^{n-1} + 2^n\eta + \frac{\tilde{\delta}}{2} + \tilde{\delta}\eta &= \alpha^n f_2(\alpha) \\
 \Rightarrow f_2(\alpha)\alpha^n &= 2^{n-1} + 2^n\eta + \frac{\tilde{\delta}}{2} + \tilde{\delta}\eta
 \end{aligned}$$

Elevando ao quadrado a relação encontrada para $f_2(\alpha)\alpha^{n-1}$, temos

$$\begin{aligned}
 (f_2(\alpha)\alpha^{n-1})^2 &= \left(2^{n-2} + \eta 2^{n-1} + \frac{\delta}{2} + \delta\eta\right)^2 \\
 f_2^2(\alpha)\alpha^{2n-2} &= 2^{2n-4} + \eta^2 2^{2n-2} + \frac{\delta^2}{4} + \delta^2\eta^2 + 2 \cdot (\eta 2^{2n-3} + \delta 2^{n-3} + \delta\eta 2^{n-2} + \eta\delta 2^{n-2} \\
 &\quad + 2^{n-1}\delta\eta^2 + \frac{\delta^2\eta}{2}) \\
 &= 2^{2n-4} + \eta^2 2^{2n-2} + \frac{\delta^2}{4} + \delta^2\eta^2 + \eta 2^{2n-2} + \delta 2^{n-2} + \delta\eta 2^n + 2^n\delta\eta^2 + \delta^2\eta \\
 \therefore f_2^2(\alpha)\alpha^{2n-2} - \left(\eta^2 2^{2n-2} + \frac{\delta^2}{4} + \delta^2\eta^2 + \eta 2^{2n-2} + \delta 2^{n-2} + \delta\eta 2^n + 2^n\delta\eta^2 + \delta^2\eta\right) &= 2^{2n-4}.
 \end{aligned}$$

Da mesma forma, agora elevando ao quadrado a relação encontrada para $f_2(\alpha)\alpha^n$, temos

$$\begin{aligned}
 (f_2(\alpha)\alpha^n)^2 &= \left(2^{n-1} + \eta 2^n + \frac{\tilde{\delta}}{2} + \tilde{\delta}\eta\right)^2 \\
 f_2^2(\alpha)\alpha^{2n} &= 2^{2n-2} + \eta^2 2^{2n} + \frac{\tilde{\delta}^2}{4} + \tilde{\delta}^2 \eta^2 + 2 \cdot \left(\eta 2^{2n-1} + \tilde{\delta} 2^{n-2} + \tilde{\delta}\eta 2^{n-1} + \eta \tilde{\delta} 2^{n-1} \right. \\
 &\quad \left. + 2^n \tilde{\delta}\eta^2 + \frac{\tilde{\delta}^2 \eta}{2}\right) \\
 &= 2^{2n-2} + \eta^2 2^{2n} + \frac{\tilde{\delta}^2}{4} + \tilde{\delta}^2 \eta^2 + \eta 2^{2n} + \tilde{\delta} 2^{n-1} + \tilde{\delta}\eta 2^{n+1} + 2^{n+1} \tilde{\delta}\eta^2 + \tilde{\delta}^2 \eta \\
 \therefore f_2^2(\alpha)\alpha^{2n} - \left(\eta^2 2^{2n} + \frac{\tilde{\delta}^2}{4} + \tilde{\delta}^2 \eta^2 + \eta 2^{2n} + \tilde{\delta} 2^{n-1} + \tilde{\delta}\eta 2^{n+1} + 2^{n+1} \tilde{\delta}\eta^2 + \tilde{\delta}^2 \eta\right) &= 2^{2n-2}.
 \end{aligned}$$

Assim, em resumo, conseguimos as duas identidades:

$$2^{2n-4} = f_2^2(\alpha)\alpha^{2n-2} - \left(\eta^2 2^{2n-2} + \frac{\delta^2}{4} + \delta^2 \eta^2 + \eta 2^{2n-2} + \delta 2^{n-2} + \delta\eta 2^n + 2^n \delta\eta^2 + \delta^2 \eta\right)$$

e

$$2^{2n-2} = f_2^2(\alpha)\alpha^{2n} - \left(\eta^2 2^{2n} + \frac{\tilde{\delta}^2}{4} + \tilde{\delta}^2 \eta^2 + \eta 2^{2n} + \tilde{\delta} 2^{n-1} + \tilde{\delta}\eta 2^{n+1} + 2^{n+1} \tilde{\delta}\eta^2 + \tilde{\delta}^2 \eta\right),$$

donde somando-as, lembrando que $f_2(\alpha) = g$, e aplicando a desigualdade triangular, temos

$$|2^{2n-2} + 2^{2n-4} - g^2 \alpha^{2n-2}(\alpha^2 + 1)| < |A| + |\tilde{A}|, \quad (3-24)$$

onde,

$$A = \eta^2 2^{2n-2} + \frac{\delta^2}{4} + \delta^2 \eta^2 + \eta 2^{2n-2} + \delta 2^{n-2} + \delta\eta 2^n + 2^n \delta\eta^2 + \delta^2 \eta$$

e

$$\tilde{A} = \eta^2 2^{2n} + \frac{\tilde{\delta}^2}{4} + \tilde{\delta}^2 \eta^2 + \eta 2^{2n} + \tilde{\delta} 2^{n-1} + \tilde{\delta}\eta 2^{n+1} + 2^{n+1} \tilde{\delta}\eta^2 + \tilde{\delta}^2 \eta.$$

Como estamos no caso $n < 2^{k/2}$, então $3 \leq k+1 < n < 2^{k/2} \implies k \geq 4$. Tendo isso em mente, lembrando que $|\delta| < 2^n/2^{k/2}$, $|\tilde{\delta}| < 2^{n+1}/2^{k/2}$ e $|\eta| < 2k/2^k$, estimamos os valores absolutos de A e $\tilde{A}$:

$$\begin{aligned}
 |A| &\leq |\eta|^2 2^{2n-2} + \frac{|\delta|^2}{4} + |\delta|^2 |\eta|^2 + |\eta| 2^{2n-2} + |\delta| 2^{n-2} + |\delta| |\eta| 2^n + 2^n |\delta| |\eta|^2 + |\delta|^2 |\eta| \\
 &< \frac{4k^2}{2^{2k}} 2^{2n-2} + \frac{2^{2n}}{2^{k+2}} + \frac{2^{2n}}{2^k} \frac{4k^2}{2^{2k}} + \frac{2k}{2^k} 2^{2n-2} + \frac{2^n}{2^{k/2}} 2^{n-2} + \frac{2^n}{2^{k/2}} \frac{2k}{2^k} 2^n + 2^n \frac{2^n}{2^{k/2}} \frac{4k^2}{2^{2k}} \\
 &\quad + \frac{2^{2n}}{2^k} \frac{2k}{2^k}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow |A| &< 4 \cdot \frac{\overbrace{4k^2}^{\leq 1}}{2^{3k/2}} \cdot \frac{2^{2n-4}}{2^{k/2}} + \frac{\overbrace{4}^{\leq 1}}{2^{k/2}} \cdot \frac{2^{2n-4}}{2^{k/2}} + 2 \cdot \frac{\overbrace{32k^2}^{\leq 1}}{2^{5k/2}} \cdot \frac{2^{2n-4}}{2^{k/2}} + 8 \cdot \frac{\overbrace{k}^{\leq 1}}{2^{k/2}} \cdot \frac{2^{2n-4}}{2^{k/2}} \\
&+ 4 \cdot \frac{2^{2n-4}}{2^{k/2}} + 16 \cdot \frac{\overbrace{2k}^{\leq 1}}{2^k} \cdot \frac{2^{2n-4}}{2^{k/2}} + 8 \cdot \frac{\overbrace{8k^2}^{\leq 1}}{2^{2k}} \cdot \frac{2^{2n-4}}{2^{k/2}} + 4 \cdot \frac{\overbrace{8k}^{\leq 1}}{2^{3k/2}} \cdot \frac{2^{2n-4}}{2^{k/2}} \\
&\leq 4 \cdot \frac{2^{2n-4}}{2^{k/2}} + \frac{2^{2n-4}}{2^{k/2}} + 2 \cdot \frac{2^{2n-4}}{2^{k/2}} + 8 \cdot \frac{2^{2n-4}}{2^{k/2}} + 4 \cdot \frac{2^{2n-4}}{2^{k/2}} + 16 \cdot \frac{2^{2n-4}}{2^{k/2}} \\
&+ 8 \cdot \frac{2^{2n-4}}{2^{k/2}} + 4 \cdot \frac{2^{2n-4}}{2^{k/2}} \\
&= 47 \cdot \frac{2^{2n-4}}{2^{k/2}},
\end{aligned}$$

onde as desigualdades evidenciadas acima, são válidas para $k \geq 4$. Analogamente, fazendo os mesmos cálculos para $|\tilde{A}|$:

$$\begin{aligned}
|\tilde{A}| &\leq |\eta|^2 2^{2n} + \frac{|\tilde{\delta}|^2}{4} + |\tilde{\delta}|^2 |\eta|^2 + |\eta| 2^{2n} + |\tilde{\delta}| 2^{n-1} + |\tilde{\delta}| |\eta| 2^{n+1} + 2^{n+1} |\tilde{\delta}| |\eta|^2 + |\tilde{\delta}|^2 |\eta| \\
&< \frac{4k^2}{2^{2k}} 2^{2n} + \frac{2^{2n+2}}{2^{k+2}} + \frac{2^{2n+2}}{2^k} \frac{4k^2}{2^{2k}} + \frac{2k}{2^k} 2^{2n} + \frac{2^{n+1}}{2^{k/2}} 2^{n-1} + \frac{2^{n+1}}{2^{k/2}} \frac{2k}{2^k} 2^{n+1} \\
&+ 2^{n+1} \frac{2^{n+1}}{2^{k/2}} \frac{4k^2}{2^{2k}} + \frac{2^{2n+2}}{2^k} \frac{2k}{2^k} \\
&= 16 \cdot \frac{\overbrace{4k^2}^{\leq 1}}{2^{3k/2}} \cdot \frac{2^{2n-4}}{2^{k/2}} + 4 \cdot \frac{\overbrace{4}^{\leq 1}}{2^{k/2}} \cdot \frac{2^{2n-4}}{2^{k/2}} + 8 \cdot \frac{\overbrace{32k^2}^{\leq 1}}{2^{5k/2}} \cdot \frac{2^{2n-4}}{2^{k/2}} + 32 \cdot \frac{\overbrace{k}^{\leq 1}}{2^{k/2}} \cdot \frac{2^{2n-4}}{2^{k/2}} \\
&+ 16 \cdot \frac{2^{2n-4}}{2^{k/2}} + 64 \cdot \frac{\overbrace{2k}^{\leq 1}}{2^k} \cdot \frac{2^{2n-4}}{2^{k/2}} + 32 \cdot \frac{\overbrace{8k^2}^{\leq 1}}{2^{2k}} \cdot \frac{2^{2n-4}}{2^{k/2}} + 16 \cdot \frac{\overbrace{8k}^{\leq 1}}{2^{3k/2}} \cdot \frac{2^{2n-4}}{2^{k/2}} \\
&\leq 16 \cdot \frac{2^{2n-4}}{2^{k/2}} + 4 \cdot \frac{2^{2n-4}}{2^{k/2}} + 8 \cdot \frac{2^{2n-4}}{2^{k/2}} + 32 \cdot \frac{2^{2n-4}}{2^{k/2}} + 16 \cdot \frac{2^{2n-4}}{2^{k/2}} + 64 \cdot \frac{2^{2n-4}}{2^{k/2}} \\
&+ 32 \cdot \frac{2^{2n-4}}{2^{k/2}} + 16 \cdot \frac{2^{2n-4}}{2^{k/2}} \\
&= 188 \cdot \frac{2^{2n-4}}{2^{k/2}},
\end{aligned}$$

Assim, voltando a desigualdade (3-24), obtemos

$$|2^{2n-2} + 2^{2n-4} - g^2 \alpha^{2n-2} (\alpha^2 + 1)| < 235 \cdot \frac{2^{2n-4}}{2^{k/2}}, \quad (3-25)$$

donde, concluimos que

$$\begin{aligned}
 |2^{2n-4} \cdot 5 - h\beta^{m-1}| &= |2^{2n-2} + 2^{2n-4} - h\beta^{m-1}| \\
 &= |2^{2n-2} + 2^{2n-4} - g^2\alpha^{2n-2}(\alpha^2 + 1) + g^2\alpha^{2n-2}(\alpha^2 + 1) - h\beta^{m-1}| \\
 &\leq |2^{2n-2} + 2^{2n-4} - g^2\alpha^{2n-2}(\alpha^2 + 1)| + |g^2\alpha^{2n-2}(\alpha^2 + 1) - h\beta^{m-1}| \\
 &< 235 \cdot \frac{2^{2n-4}}{2^{k/2}} + 3\alpha^{n-1} \\
 &< 235 \cdot \frac{2^{2n-4}}{2^{k/2}} + 2^{5/2} \cdot \frac{2^{m-2}}{2^{l/2}} \\
 &< 235 \cdot \frac{2^{2n-4}}{2^{k/2}} + 2^{5/2} \cdot \frac{2^{2n+1}}{2^{k/2}} \\
 &= 235 \cdot \frac{2^{2n-4}}{2^{k/2}} + 2^{5/2+5} \cdot \frac{2^{2n-4}}{2^{k/2}} \\
 &< 235 \cdot \frac{2^{2n-4}}{2^{k/2}} + 182 \cdot \frac{2^{2n-4}}{2^{k/2}} \\
 &= 417 \cdot \frac{2^{2n-4}}{2^{k/2}} \\
 \therefore |2^{2n-4} \cdot 5 - h\beta^{m-1}| &< 417 \cdot \frac{2^{2n-4}}{2^{k/2}}, \tag{3-26}
 \end{aligned}$$

para todo $k \geq 2$, onde usamos as desigualdades (3-8) e (3-9), dada por,

$$|g^2\alpha^{2n-2}(1 + \alpha^2) - h\beta^{m-1}| < 3\alpha^{n-1} < 182 \frac{2^{2n-4}}{2^{k/2}}.$$

e o Lema 3.3. Utilizando, além de (3-9), a desigualdade (3-19), que relembramos a seguir,

$$\left| 1 - \frac{g^2(1 + \alpha^2)\alpha^{2n-2}}{2^{m-2}} \right| < \frac{11}{2^{l/2}},$$

e (3-26), conseguimos,

$$\begin{aligned}
 |2^{2n-4} \cdot 5 - 2^{m-2}| &< |2^{2n-4} \cdot 5 - h\beta^{m-1}| + |2^{m-2} - g^2(1 + \alpha^2)\alpha^{2n-2}| \\
 &+ |g^2(1 + \alpha^2)\alpha^{2n-2} - h\beta^{m-1}| \\
 &< 417 \cdot \frac{2^{2n-4}}{2^{k/2}} + 11 \cdot \frac{2^{m-2}}{2^{l/2}} + 182 \cdot \frac{2^{2n-4}}{2^{k/2}} \\
 &< 417 \cdot \frac{2^{2n-4}}{2^{k/2}} + 11 \cdot 2^5 \cdot \frac{2^{2n-4}}{2^{k/2}} + 182 \cdot \frac{2^{2n-4}}{2^{k/2}} \\
 &< 417 \cdot \frac{2^{2n-4}}{2^{k/2}} + 352 \cdot \frac{2^{2n-4}}{2^{k/2}} + 182 \cdot \frac{2^{2n-4}}{2^{k/2}} \\
 &= 951 \cdot \frac{2^{2n-4}}{2^{k/2}}
 \end{aligned}$$

Logo,

$$\left| 1 - \frac{2^{m-2}}{2^{2n-4} \cdot 5} \right| = \left| 1 - \frac{2^{m-2n+2}}{5} \right| < \frac{951}{5} \cdot \frac{1}{2^{k/2}} = \frac{190,2}{2^{k/2}}.$$

Lembrando que $m \leq 2n + 2$ e então $m - 2n - 2 \leq 0$. Logo $m - 2n + 2 \leq 4$. Assim,

$$\frac{1}{5} < \left| 1 - \frac{2^{m+2-2n}}{5} \right| < \frac{190,2}{2^{k/2}} \implies 2^{k/2} < 5 \cdot 190,2 = 951$$

Portanto, $k \leq 19$. Como estamos no caso $n < 2^{\frac{k}{2}}$, temos a estimativa $n < 2^{19/2} < 725$ e $m < 1453$ Contradizendo a hipótese de $l > 1454$, pois supomos desde o princípio que $m > l + 1$.

3.2.2 O caso $n > 2^{k/2}$

Nosso plano agora é considerar a desigualdade (3-19) e depois encontrar uma limitação superior para n . O passo seguinte é usar métodos computacionais para encontrar limitações para k, l, m e n .

Lema 3.1 *Se (n, m, k, l) é uma solução inteira não trivial da equação (3-3), com $l > 1454$, $2^{k/2} < n$ e $m > l + 1$, então*

$$n < m < 2,69 \cdot 10^{311},$$

$$l < 2,55 \cdot 10^{32} \text{ e } k \leq 2067.$$

Demonstração. Usando o fato de que $l > 1454$ temos a seguinte cadeia de desigualdade

$$2^{k/2} < n < 1,18 \cdot 10^{15} l^9 \log^3 l < l^{15} \quad (3-27)$$

Em particular temos que

$$2^{k/2} < l^{15} \implies \frac{k}{2} \log 2 < 15 \log l \implies k < 44 \log l. \quad (3-28)$$

Nosso objetivo agora, é usar formas lineares em logaritmo mais uma vez, usando a desigualdade (3-19). Para isso, temos primeiro que provar que $g^2(1 + \alpha^2)\alpha^{2n-2} \neq 2^{m-2}$. De fato, seja $\mathbb{L} = \mathbb{Q}(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ o fecho normal e $\psi_1, \dots, \psi_k$ os elementos de $\text{Gal}(\mathbb{L}/\mathbb{Q})$ tais que $\psi_i(\alpha) = \alpha_i$. Supondo o contrário, $g^2(1 + \alpha^2)\alpha^{2n-2} = 2^{m-2}$, aplicamos o automorfismo ψ_i para qualquer $i \in [2, k]$, e chegamos no seguinte absurdo

$$1 > |g(\alpha_i, k)|^2 (1 + |\alpha_i|^2) |\alpha_i|^{2n-2} = 2^{m-2} > 1.$$

Logo

$$\frac{g^2(1 + \alpha^2)\alpha^{2n-2}}{2^{m-2}} \neq 1.$$

Portanto, podemos aplicar o Teorema 2.4, tomando $t := 3$, e

$$\lambda_1 = \alpha, \lambda_2 = 2, \lambda_3 = g^2(1 + \alpha^2)$$

$$b_1 = 2n - 2, b_2 = -m + 2, b_3 = 1.$$

Assim consideramos $\Lambda_1 = 1 - \frac{g^2(1+\alpha^2)\alpha^{2n-2}}{2^{m-2}}$. O corpo dos números algébricos que contém $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ é $\mathbb{K} := \mathbb{Q}(\alpha, \beta)$, cujo o grau é $D = [\mathbb{Q}(\alpha) : \mathbb{Q}] = k$ e para o valor de B , temos que $B \geq \max\{|b_1|, |b_2|, |b_3|\} = \max\{2n - 2, m - 2, 1\}$, e como $n < m < 2n + 3$, podemos considerar $B = 2n$.

Agora precisamos estimar as alturas logarítmicas. Repetimos o que foi feito na Seção 3.1. Para $h(\lambda_1)$, temos $\partial(\lambda_1) = \partial(\alpha) = k$ e $a_0 = 1$. Portanto:

$$\begin{aligned} h(\lambda_1) &= \frac{1}{k} \left(\log 1 + \sum_{i=1}^k \log(\max\{|\alpha_i|, 1\}) \right) \\ &= \frac{\log \alpha}{k} < \frac{0.7}{k}, \end{aligned}$$

onde, no somatório acima, lembramos que para $i \neq 1$ temos $|\alpha_i| < 1$, e para a última desigualdade usamos $\alpha < 2 \Rightarrow \log \alpha < 0.7$. Já para $h(\lambda_2)$, temos de imediato que $h(\lambda_2) = \log 2 < 0.7$

Agora pelo Lema 2.5 temos que $h(g) < 4 \log k$ e $h(h) < 4 \log l$. Para $h(\lambda_3)$, temos que $\lambda_3 = g^2(1 + \alpha^2)$, então

$$\begin{aligned} h(\lambda_3) &= h((g^2) \cdot (1 + \alpha^2)) \\ &\leq h(g^2) + h(1 + \alpha^2) \end{aligned}$$

como $h(\eta^2) \leq 2h(\eta)$ e $h(\eta \pm \varphi) \leq h(\eta) + h(\varphi) + \log 2$ temos

$$\begin{aligned} h(\lambda_3) &\leq 2h(g) + h(\alpha)^2 + h(1) + \log 2 \\ &\leq 2h(g) + 2h(\alpha) + \log 2 \\ &\leq 8 \log k + \frac{1,4}{k} + \log 2 \end{aligned}$$

Agora vamos calcular os A_i 's, onde lembramos que $A_i \geq \max\{Dh(\lambda_i), \log |\lambda_i|, 0.16\}$ para todo $i \in [1, t]$, então:

- Precisamos que $A_1 \geq \max\{Dh(\lambda_1), \log |\lambda_1|, 0.16\}$. Como $D = k$, $h(\lambda_1) \leq 0.7/k$,

$\log |\lambda_1| = \log \alpha < 0,7$ e $k \geq 2$, nos dá

$$\max \{Dh(\lambda_1), \log |\lambda_1|, 0, 16\} < \max \left\{ k \cdot \frac{0,7}{k}, 0, 7, 0, 16 \right\} < 0,7,$$

podemos considerar $A_1 := 0,7$.

- Analogamente ao que foi feito no item anterior, precisamos que $A_2 \geq \max \{Dh(\lambda_2), \log |\lambda_2|, 0, 16\}$. Como $D = k$, $h(\lambda_2) \leq 0,7$ e $\log |\lambda_2| = \log 2 < 0,7$, nos dá

$$\max \{Dh(\lambda_2), \log |\lambda_2|, 0, 16\} < \max \{0,7k, 0,7, 0, 16\} < 0,7k,$$

podemos considerar $A_2 := 0,7k$.

- Para $A_3 \geq \{Dh(\lambda_3), \log |\lambda_3|, 0, 16\}$, como $D = k$, $h(\lambda_3) \leq 8 \log k + 1,4/k + \log 2$ e $1,4/k + \log 2 < 2,5 \log k$, temos $h(\lambda_3) \leq 10,5 \log k$, donde

$$\max \{Dh(\lambda_3), \log |\lambda_3|, 0, 16\} \leq \max \{10,5k \log k, \log |g^2(1 + \alpha^2)|, 0, 16\}.$$

Já que, pelo Lema 2.5, $|g|^2 < 9/16$ e $|1 + \alpha^2| < 5$, então

$$\log |g^2(1 + \alpha^2)| < \log \left(\frac{9}{16} \cdot 5 \right) < 1,03,$$

o que nos dá

$$\max \{10,5k \log k, \log |g^2(1 + \alpha^2)|, 0, 16\} < 10,5k \log k,$$

donde podemos tomar $A_3 := 10,5k \log k$.

Então, pelos limitantes do Teorema 2.4, temos

$$|\Lambda| > \exp(-1,4 \cdot 30^{3+3} \cdot 3^{4,5} \cdot D^2 \cdot (1 + \log D)(1 + \log B)A_1A_2A_3)$$

$$|\Lambda| > \exp(-1,4 \times 30^6 \times 3^{4,5} \times k^2 \times (1 + \log k)(1 + \log 2n)(0,7) \cdot (0,7k) \cdot (10,5k \log k)),$$

e usando que $1 + \log k < 3 \log k$ e $1 + \log 2n < 3 \log n$, para todo $k \geq 2$ e $n \geq 3$, obtemos

$$|\Lambda| > \exp(-6,64 \cdot 10^{12} k^4 \log^2 k \log n). \quad (3-29)$$

Combinando (3-19) e (3-29),

$$\begin{aligned}\frac{11}{2^{l/2}} &> \exp(-6,64 \cdot 10^{12} k^4 \log^2 k \log n) \\ \log\left(\frac{11}{2^{l/2}}\right) &> -6,64 \cdot 10^{12} k^4 \log^2 k \log n \\ \frac{l}{2} \cdot \log 2 - \log 11 &< 6,64 \cdot 10^{12} k^4 \log^2 k \log n \\ \frac{l}{2} \cdot \log 2 &< 6,65 \cdot 10^{12} k^4 \log^2 k \log n \\ \frac{l}{\log n} &< 1,92 \cdot 10^{13} k^4 \log^2 k.\end{aligned}$$

Como $\log n < 15 \log l$, para todo $l > 1454$, temos

$$\frac{l}{15 \log l} < \frac{l}{\log n} < 1,92 \cdot 10^{13} k^4 \log^2 k,$$

donde

$$\frac{l}{\log l} < 2,88 \cdot 10^{14} k^4 \log^2 k. \quad (3-30)$$

Usando novamente que $\frac{x}{\log x} < A \implies x < 2A \log A$, para $x > e$, concluimos que

$$\begin{aligned}l &< 2 \times (2,88 \cdot 10^{14} k^4 \log^2 k) \cdot \log(2,88 \cdot 10^{15} k^4 \log^2 k) \\ l &< 5,76 \cdot 10^{14} k^4 \log^2 k \cdot (\log 2,88 + 15 \log 10 + 4 \log k + 2 \log \log k).\end{aligned}$$

Usando que $\log 2,88 + 15 \log 10 + 4 \log k + 2 \log \log k < 54,3 \log k$, para todo $k \geq 2$, temos

$$l < 3,13 \cdot 10^{16} k^4 \log^3 k \quad (3-31)$$

Agora pela desigualdade (3-27), obtemos

$$\begin{aligned}n &< 1,18 \cdot 10^{15} (3,13 \cdot 10^{16} k^4 \log^3 k)^9 \log^3 (3,13 \cdot 10^{16} k^4 \log^3 k) \\ n &< 3,41 \cdot 10^{163} \cdot k^{36} \log^{27} k \cdot (\log 3,13 + 16 \log 10 + 4 \log k + 3 \log \log k)^3,\end{aligned}$$

e usando que $\log 3,13 + 16 \log 10 + 4 \log k + 3 \log \log k < 57,3 \log k$, para $k \geq 2$, concluimos que

$$n < 1,96 \cdot 10^{165} k^{36} \log^{30} k, \quad (3-32)$$

Como, estamos no caso $n > 2^{k/2}$, pela desigualdade (3-32), temos

$$2^{k/2} < 1,96 \cdot 10^{165} k^{36} \log^{30} k \implies k \leq 2067.$$

Então temos que

$$n < 1,96 \cdot 10^{165} 2067^{36} \log^{30} 2067 \implies n < 1,34 \cdot 10^{311},$$

donde,

$$m < 2n + 3 \implies m < 2,69 \cdot 10^{311}$$

e,

$$l < 3,13 \cdot 10^{16} 2067^4 \log^3 2067 \implies l < 2,55 \cdot 10^{32}$$

□

3.2.3 Prova do teorema principal

Até aqui, conseguimos limitar todas as variáveis da nossa equação Diofantina (3-3), porém isso não a resolve completamente. Infelizmente, como os limitantes encontrados são demasiado grandes para que um computador usual possa testar todos os valores possíveis, retornando ou não soluções, precisamos reduzi-los para que se tornem computacionalmente viáveis. Para isso, vamos utilizar o Método de Redução, descrito na Seção 2.4.

Consideramos anteriormente,

$$\Lambda_1 := 1 - \frac{g^2(1 + \alpha^2)\alpha^{2n-2}}{2^{m-2}},$$

e a partir deste, definimos $\Lambda_2 := (2n-2)\log \alpha - (m-2)\log 2 + \log[g^2(1 + \alpha^2)]$. Por (3-19) temos que

$$|1 - e^{\Lambda_2}| < \frac{11}{2^{l/2}} < \frac{11}{2^{3/2}} < 4$$

Se $\Lambda_2 > 0$, então segue da última desigualdade que

$$0 < \Lambda_2 \leq e^{\Lambda_2} - 1 < \frac{11}{2^{l/2}}.$$

Logo

$$0 < (2n-2)\log \alpha - (m-2)\log 2 + \log[g^2 + (1 + \alpha^2)] \leq \frac{11}{2^{l/2}},$$

então:

$$0 < (2n-2)\log\alpha - (m-2)\log 2 + \log[g^2(1+\alpha^2)] \leq 11 \cdot 1,42^{-l}.$$

Dividindo os membros da desigualdade anterior por $\log 2$, temos

$$0 < (2n-2)\frac{\log\alpha}{\log 2} - m + \left[2 + \frac{\log(g^2(1+\alpha^2))}{\log 2}\right] \leq 15,9 \cdot 1,42^{-l}. \quad (3-33)$$

Por outro lado se $\Lambda_2 < 0$, então $|1 - e^{\Lambda_2}| < 4$ e $e^{|\Lambda_2|} < 5$. Assim,

$$0 < |\Lambda_2| \leq e^{|\Lambda_2|} - 1 = e^{|\Lambda_2|}|e^{\Lambda_2} - 1| < 5 \cdot \frac{11}{2^{l/2}} < \frac{55}{2^{l/2}}$$

o que nos dá,

$$0 < (m-2)\frac{\log 2}{\log\alpha} - 2n + \left[2 + \frac{\log[g^2(1+\alpha^2)]}{\log\alpha}\right] < \underbrace{\frac{55}{\log\alpha}}_{< 114,3} (1,42)^{-l},$$

onde usamos que $\alpha \geq (1 + \sqrt{5})/2$, ou seja

$$0 < (m-2)\frac{\log 2}{\log\alpha} - 2n + \left[2 + \frac{\log[g^2(1+\alpha^2)]}{\log\alpha}\right] < 114,3(1,42)^{-l}$$

O argumento do trabalho para $\lambda_2 > 0$ e $\lambda_2 < 0$ são análogos. Logo, consideramos apenas o caso $\lambda_2 > 0$. Então, reescrevemos a desigualdade (3-33) como

$$0 < (2n-2)\gamma_k - m + \mu_k < 15,9 \cdot (1,42)^{-l}, \quad (3-34)$$

onde $\gamma_k := \frac{\log\alpha}{\log 2}$ e $\mu_k := 2 + \frac{\log(g^2(1+\alpha^2))}{\log 2}$.

Usando o mesmo argumento visto na Subseção 3.2.2, para mostrar que

$$g^2(1+\alpha^2)\alpha^{2n-2} \neq 2^{m-2}.$$

concluimos que $\gamma_k := \frac{\log\alpha}{\log 2}$ é irracional, para $k \geq 2$. Com efeito, suponha $\gamma_k = p/q \in \mathbb{Q}$, com $q > 0$. Primeiro, note que $\log\alpha/\log 2 > 0$, donde $p > 0$. Então,

$$\frac{\log\alpha}{\log 2} = \frac{p}{q} \Rightarrow \alpha^q = 2^p \Rightarrow 1 > |\alpha_i|^q = 2^p \geq 2,$$

um absurdo. Seja $q_{m,k}$ o denominador do m -ésimo convergente da fração contínua de γ_k . Consideramos $M_k := 3,92 \cdot 10^{165} k^{36} \log^{30} k < M_{2067}$ e usamos o software *Mathematica*

para obtermos que

$$\min_{2 \leq k \leq 2067} (q_{600,k}) > 6M_k \text{ e } \max_{2 \leq k \leq 2067} (q_{600,k}) < 6.6 \cdot 10^{1123}.$$

Definimos $\epsilon_k := ||\mu_k q_{600}|| - M_k ||\gamma_k q_{600}||$, para $2 \leq k \leq 2067$, e obtemos que

$$\min_{2 \leq k \leq 2067} \epsilon_k > 1.2 \cdot 10^{-105}$$

Note que as hipóteses para usar o (2.6) são satisfeitas para $A = 15,9$ e $B = 1,42$. Portanto não existe solução para a desigualdade (3-34) (e então não há solução para a equação Diofantina (3-3)) para n e l satisfazendo

$$2n - 2 < M_k \text{ e } l \geq \frac{\log(Aq/\epsilon)}{\log B}.$$

Como $2n - 2 < M_k$ para todo $2 \leq k \leq 2067$, pela desigualdade (3-32), temos que

$$l < \frac{\log(Aq_{600,k})/\epsilon_k}{\log B} < 8076.$$

Observe que, nesse ponto, estamos sobre a hipótese de $2^{\frac{k}{2}} < n$. Logo, obtemos da relação (3-28), dada por $k < 44 \log l$, que $k \leq 395$. Repetimos o argumento anterior três vezes e conseguimos que

$$l \leq 1621 \text{ e } k \leq 325.$$

Observação 3.4 *Os próximos passos não dependem da hipótese de que $l > 1454$. Portanto, estaremos resolvendo os casos em que l é pequeno também, isto é, quando $l \leq 1454$.*

Suponha que $l \leq 1621$. Segue do Lema 3.2 que

$$n < 1,18 \cdot 10^{15} \cdot 1621^9 \cdot \log^3 1621 < 3,69 \cdot 10^{46};$$

$$m < 2,37 \cdot 10^{15} \cdot 1621^9 \cdot \log^3 1621 < 7,4 \cdot 10^{46}.$$

Agora, definimos a seguinte forma linear,

$$\Lambda'_1 = (m-1) \log \beta - (2n-2) \log \alpha + \log \left[\frac{h}{g^2(1+\alpha^2)} \right].$$

Se $\Lambda'_1 > 0$, então por (3-12),

$$0 < \Lambda'_1 \leq e^{\Lambda'_1} - 1 < \frac{8}{1,6^n}$$

e

$$0 < (m-1)\gamma'_{l,k} - 2n + m\mu'_{l,k} < 16,7 \cdot (1,6)^{-n}.$$

onde $\gamma'_{l,k} := \frac{\log \beta}{\log \alpha}$ e $\mu'_{l,k} := 2 + \frac{\log(h/g^2(1+\alpha^2))}{\log \alpha}$.

Usando o mesmo argumento que o usado na prova de que $\frac{h\beta^{m-1}}{g^2(1+\alpha^2)\alpha^{2n-2}} \neq 1$, concluímos que $\gamma'_{l,k} := \frac{\log \beta}{\log \alpha}$ é irracional, para todo $l > k \geq 2$. Tomamos $M_l := 6,1 \cdot 10^{15} l^9 \log^3 l$ e usamos o software *Mathematica* para obter que

$$\min_{2 \leq k \leq l \leq 1621} (q_{1000,k,l}) > 6M_l \text{ e } \max_{2 \leq k \leq l \leq 1621} (q_{1000,k,l}) < 3,2 \cdot 10^{3210}.$$

Definimos $\varepsilon_{l,k} := ||\mu'_{k,l} q_{1000}|| - M_l ||\gamma'_{k,l} q_{1000}||$. Então

$$\min_{2 \leq k \leq l \leq 1621} (\varepsilon_{l,k}) > 1,2 \cdot 10^{-2110},$$

Agora, podemos aplicar o Lema 2.6 para $A = 16,7$ e $B = 1,6$. Como $m-1 < M_l$, temos

$$n < \frac{\log(16,7 \cdot q_{1000,k,l}/\varepsilon_{k,l})}{\log 1,6} < 26072.$$

Portanto, por (3-8) concluímos que $m < 52144$.

Finalmente usamos um algoritmo no software *Mathematica* que confirma que a equação (3-3) não possui solução para $2 \leq k < l \leq 1621$, $k+1 < n < 26072$ e $l+1 < m < 52144$.

□

Comandos usados no software Mathematica[©]

- Função que gera o n -ésimo número de k -bonacci:

```
Serie[k_] := Series[x/(1 - Sum[x^j, {j, 1, k}])
F[n_, k_] := SeriesCoefficient[Serie[k], {x, 0, 1100}]
```

- O polinômio característico da sequência de k -bonacci, $\psi_k(x)$:

```
psi[x_, k_] := x^k - Sum[x^j, {j, 0, k - 1}]
```

- A raiz dominante de α , com 12000 casas decimais de aproximação:

```
alpha[k_] := x /. Last[NSolve[s[x, k], x, 12000]]
```

- O polinômio dominante de g :

```
g[k_] := (alpha[k] - 1) / (2 + (k + 1) * (alpha[k] - 2))
```

- Denominador do n -ésimo convergente da fração contínua de x :

```
DeFrac[x_, n_] := Last[Denominator[Convergents[x, n]]]$$
```

- A função distância entre x e o inteiro mais próximo $\|x\|$:

```
Near[x_] := Min[Abs[x - Floor[x]], Abs[Ceiling[x] - x]]
```

- A função γ_k :

```
gamma[k_] := Log[alphasd[k]] / Log[2]
```

- A função μ_k :

```
mi[k_] := 2 + Log[g[k]]^2 * (1 + (alpha[k])^2) / Log[2]
```

- O i -ésimo convergente da fração contínua de γ_k , $q_{i,k}$:

```
q[i_, k_] := DeFrac[gamma[k], i]
```

- A variável $\epsilon_{i,k}$:

```
eps[i_, k_] :=
Near[mi[k] * q[i, k]] - 2.68 * 10^(311) * Near[gamma[k] * q[i, k]]
```

Referências Bibliográficas

- [1] BAKER, A. **Linear forms in the logarithms of algebraic numbers. IV.** Mathematika, 15:204–216, 1968.
- [2] BEDNAŘÍK, D; FREITAS, G; MARQUES, D; TROJOVSKÝ, P. **On the sum of squares of consecutive k -bonacci numbers which are l -bonacci numbers.** Colloq. Math., 156(1):153–164, 2019.
- [3] BRAVO, J. J; GÓMEZ, C. A; LUCA, F. **Powers of two as sums of two k -Fibonacci numbers.** Miskolc Math. Notes, 17(1):85–100, 2016.
- [4] BRAVO, J. J; LUCA, F. **Powers of two in generalized Fibonacci sequences.** Rev. Colombiana Mat., 46(1):67–79, 2012.
- [5] BRAVO, J. J; LUCA, F. **On a conjecture about repdigits in k -generalized Fibonacci sequences.** Publ. Math. Debrecen, 82(3-4):623–639, 2013.
- [6] CHAVES, A. P; MARQUES, D. **A Diophantine equation related to the sum of squares of consecutive k -generalized Fibonacci numbers.** Fibonacci Quart., 52(1):70–74, 2014.
- [7] DRESDEN, G. P. B; DU, Z. **A simplified Binet formula for k -generalized Fibonacci numbers.** J. Integer Seq., 17(4):Article 14.4.7, 9, 2014.
- [8] DUJELLA, A; PETHŐ, A. **A generalization of a theorem of Baker and Davenport.** Quart. J. Math. Oxford Ser. (2), 49(195):291–306, 1998.
- [9] GÓMEZ RUIZ, C. A; LUCA, F. **An exponential Diophantine equation related to the sum of powers of two consecutive k -generalized Fibonacci numbers.** Colloq. Math., 137(2):171–188, 2014.
- [10] LUCA, F; OYONO, R. **An exponential Diophantine equation related to powers of two consecutive Fibonacci numbers.** Proc. Japan Acad. Ser. A Math. Sci., 87(4):45–50, 2011.

- [11] MARQUES, D; SELLERS, J. A; TROJOVSKÝ, P. **On divisibility properties of certain Fibonomial coefficients by a prime.** Fibonacci Quart., 51(1):78–83, 2013.
- [12] MARQUES, D; TOGBÉ, A. **On the sum of powers of two consecutive Fibonacci numbers.** Proc. Japan Acad. Ser. A Math. Sci., 86(10):174–176, 2010.
- [13] MARTINEZ, F. B; MOREIRA, C. G; E E. TENGAN, N. S. **Teoria dos números: Um passeio com primos e outros números familiares pelo mundo inteiro.** Projeto Euclides, Associação Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada. ed., 1:457, 2010.
- [14] MATVEEV, E. **An explicit lower bound for a homogeneous rational linear form in the logarithms of algebraic numbers.** Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften, 326, 2000.
- [15] MILES, JR., E. P. **Generalized Fibonacci numbers and associated matrices.** Amer. Math. Monthly, 67:745–752, 1960.
- [16] MILLER, M. D. **Mathematical Notes: On Generalized Fibonacci Numbers.** Amer. Math. Monthly, 78(10):1108–1109, 1971.
- [17] WALDSCHMIDT, M. **Diophantine approximation on linear algebraic groups. II.** Izv. Ross. Akad. Nauk. Ser. Mat., 64, 2000.
- [18] WOLFRAM, D. A. **Solving generalized Fibonacci recurrences.** Fibonacci Quart., 36(2):129–145, 1998.