

UNIVERSIDADE FEDERAL DE GOIÁS
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA

MARCOS TULIO ALVES DE CARVALHO

**Hipersuperfícies de Rotação com
Curvatura Escalar Constante
em \mathbb{R}^n e \mathbb{H}^n**

Goiânia
2014

TERMO DE CIÊNCIA E DE AUTORIZAÇÃO PARA DISPONIBILIZAR AS TESES E DISSERTAÇÕES ELETRÔNICAS (TEDE) NA BIBLIOTECA DIGITAL DA UFG

Na qualidade de titular dos direitos de autor, autorizo a Universidade Federal de Goiás (UFG) a disponibilizar, gratuitamente, por meio da Biblioteca Digital de Teses e Dissertações (BDTD/UFG), sem ressarcimento dos direitos autorais, de acordo com a Lei nº 9610/98, o documento conforme permissões assinaladas abaixo, para fins de leitura, impressão e/ou *download*, a título de divulgação da produção científica brasileira, a partir desta data.

1. Identificação do material bibliográfico: **Dissertação** **Tese**

2. Identificação da Tese ou Dissertação

Autor (a):		Marcos Tulio Alves de Carvalho	
E-mail:		marcostulio.mat@gmail.com	
Seu e-mail pode ser disponibilizado na página? <input checked="" type="checkbox"/> Sim <input type="checkbox"/> Não			
Vínculo empregatício do autor		Professor substituto Pela UFG/IME	
Agência de fomento:		Conselho Nacional de Pesquisa	Sigla: CNPq
País:	Brasil	UF:GO	CNPJ: 33654831-0001/36
Título:		Hipersuperfícies de Rotação com Curvatura Escalar Constante em R^n e H^n	
Palavras-chave:		Hipersuperfícies de Rotação, Subgrupo de Isometria, Curvatura Escalar	
Título em outra língua:		Rotational Hypersurfaces with scalar curvature constant in R^n e H^n	
Palavras-chave em outra língua:		Rotational Hypersurfaces, Subgroup of Isometry, Scalar Curvature	
Área de concentração:		Geometria	
Data defesa: (dd/mm/aaaa)		25/02/2014	
Programa de Pós-Graduação:		Mestrado em Matemática	
Orientador (a):		Romildo da Silva Pina	
E-mail:		romildo@ufg.br	

*Necessita do CPF quando não constar no SisPG

3. Informações de acesso ao documento:

Concorda com a liberação total do documento SIM NÃO¹

Havendo concordância com a disponibilização eletrônica, torna-se imprescindível o envio do(s) arquivo(s) em formato digital PDF ou DOC da tese ou dissertação.

O sistema da Biblioteca Digital de Teses e Dissertações garante aos autores, que os arquivos contendo eletronicamente as teses e ou dissertações, antes de sua disponibilização, receberão procedimentos de segurança, criptografia (para não permitir cópia e extração de conteúdo, permitindo apenas impressão fraca) usando o padrão do Acrobat.

Marcos Tulio Alves de Carvalho

Assinatura do (a) autor (a)

Data: 25/02/2014

¹ Neste caso o documento será embargado por até um ano a partir da data de defesa. A extensão deste prazo suscita justificativa junto à coordenação do curso. Os dados do documento não serão disponibilizados durante o período de embargo.

MARCOS TULIO ALVES DE CARVALHO

Hipersuperfícies de Rotação com Curvatura Escalar Constante em \mathbb{R}^n e \mathbb{H}^n

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação do Instituto de Matemática e Estatística da Universidade Federal de Goiás, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Área de concentração: Geometria.

Orientador: Prof. Romildo da Silva Pina

Goiânia
2014

**Dados Internacionais de Catalogação na Publicação na (CIP)
GPT/BC/UFG**

C331h Carvalho, Marcos Tulio Alves.
Hipersuperfícies de Rotação com Curvatura Escalar
Constante em R^n e H^n [manuscrito] / Marcos Tulio Alves
de Carvalho. - 2014.
71 f. : il., figs.

Orientador: Prof. Dr. Romildo da Silva Pina.
Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal de Goiás,
Instituto de Matemática e Estatística, 2014.

Bibliografia.

Inclui lista de figuras.

1. Hipersuperfícies – Curvatura escalar 2. Grupos de
rotação 3. Isometria. 4. Curvatura escalar. I. Título.

CDU: 514.7

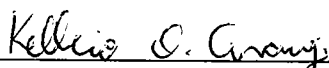
MARCOS TÚLIO ALVES DE CARVALHO

**HIPERSUPERFÍCIES DE ROTAÇÃO COM CURVATURA
ESCALAR CONSTANTE EM R^N E H^N**

Dissertação defendida no Programa de Pós-Graduação do Instituto de Matemática e Estatística da Universidade Federal de Goiás como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática, aprovada no dia 25 de fevereiro de 2014, pela Banca Examinadora constituída pelos professores:



Prof. Dr. Romildo da Silva Pina
Instituto de Matemática e Estatística-UFG
Presidente da Banca



Prof. Dr. Kellcio Oliveira Araújo
Departamento de Matemática - UnB



Prof. Dr. Maurício Donizetti Pieterzack
Instituto de Matemática e Estatística-UFG

Todos os direitos reservados. É proibida a reprodução total ou parcial do trabalho sem autorização da universidade, do autor e do orientador(a).

Marcos Tulio Alves de Carvalho

Graduou-se Bacharel em Matemática na UFG - Universidade Federal de Goiás. Durante sua graduação, foi monitor e aluno de iniciação científica no departamento de matemática, com orientação no professor Armando Vasquez Corro, no mestrado foi bolsista do CNPq.

In Memoriam, ao meu Papai Antônio.

Agradecimentos

Agradeço a Deus o autor e consumidor da minha vida, pelo folego de vida a cada dia, saúde, e tantas bênçãos que ele tem proporcionado na minha vida.

Agradeço ao meu pai Antônio e minha mãe Luzia, meus grandes incentivadores, meu pai que faleceu quando eu tinha 15 anos, sempre colocou na minha cabeça que o caminho para crescer na vida era estudando e continuo levando seus ensinamentos para sempre, e minha mamãe Luzia que continuou me apoiando e me dando todo o suporte que eu precisava. Os dois mesmo tendo cursado apenas o ensino fundamental, foram meus grandes incentivadores a estudar, Muito Obrigado mesmo!!

Agradeço ao meu Orientador Romildo, pelos grandes ensinamentos durante esse período juntos, pela paciência e sempre disponibilidade em me atender, é um paizão!!

Agradeço a todos os meus colegas de mestrado, Adriana, Bruno, Cid, Dassael, Dioscoros, Jhoncito, Mailinny, Mônica e Thiago, foram dois anos em que crescemos muito, quantas discussões, brigas, problemas, mutirões para estudarmos juntos, sempre houve cooperação na nossa turma, um ajudando ao outro, foi muito bom conviver com vocês durante esse período.

Agradeço a UFG - Universidade Federal de Goiás - em especial a todos os funcionários do Instituto de Matemática e Estatística, por sempre estarem prontos a atender, e resolver os problemas burocráticos que agente sempre tem.

Agradeço a todos os amigos que sempre me apoiaram e torceram pelo meu sucesso nessa caminhada.

Agradeço em especial a minha Amada, Princesa, Julianny Marques que entrou na minha vida no inicio do mestrado e dividiu comigo muitas vezes as minhas aflições, medos, e sempre me apoio e me suportou mesmo eu sendo bem chato as vezes (hehehehe), e me ofereceu seu amor sincero, e além do titulo de mestre, levo um companheirona para a vida toda.

Agradeço por fim ao apoio financeiro do CNPq.

Apenas quando somos instruídos pela realidade é que podemos mudá-la.

Bertolt Brecht.

Resumo

Carvalho, M.T.A.. **Hipersuperfícies de Rotação com Curvatura Escalar Constante em \mathbb{R}^n e \mathbb{H}^n** . Goiânia, 2014. 71p. Dissertação de Mestrado. Instituto de Matemática e Estatística, Universidade Federal de Goiás.

Neste trabalho, baseado nos artigos de Maria Luíza Leite e Ocas Palmas, classificamos as hipersuperfícies de rotação completas, com curvatura escalar constante, em \mathbb{R}^n e \mathbb{H}^n com $n > 3$.

Palavras-chave

Hipersuperfícies de rotação, Subgrupo de isometrias, Curvatura escalar.

Abstract

Carvalho, M.T.A.. **Rotational hypersurfaces with constant scalar curvature in \mathbb{R}^n and \mathbb{H}^n** . Goiânia, 2014. 71p. MSc. Dissertation. Instituto de Matemática e Estatística, Universidade Federal de Goiás.

In this work, based on the articles Maria Luíza Leite and Ocas Palmas, we presented the classification of the complete rotation hypersurfaces with constant scalar curvature, in \mathbb{R}^n e \mathbb{H}^n with $n > 3$.

Keywords

Rotational hypersurfaces, Subgroup of isometry, Scalar curvature.

Sumário

Lista de Figuras	10
1 Preliminares	13
1.1 Variedades Diferenciáveis	13
1.2 Métricas Riemannianas	18
1.3 Conexões	20
1.4 Geodésicas	21
1.5 Curvaturas	23
1.6 Imersões Isométricas	25
1.7 O Espaço Hiperbólico	27
1.8 Outros Resultados	31
2 Hipersuperfícies de Rotação com Curvatura Escalar constante em \mathbb{R}^n	33
2.1 Curvas de Nível	42
2.2 Teorema de Classificação em \mathbb{R}^n	47
3 Hipersuperfícies de Rotação com Curvatura Escalar constante em \mathbb{H}^n	54
3.1 Teorema de Classificação em \mathbb{H}^n	64
Referências Bibliográficas	70

Lista de Figuras

1.1	Mudança de Coordenada	14
1.2	Expressão de φ no sistema de Coordenadas	15
1.3	Espaço Tangente	16
1.4	Aplicação Diferenciável	17
1.5	Geodésicas de G passando por p	29
1.6	Planos totalmente geodésicos	30
1.7	Superfícies equidistantes	30
1.8	Horoesferas	31
2.1	Cilindro em \mathbb{R}^n	42
2.2	Curva de Nível para $S = 0$	45
2.3	Curva de Nível para $S > 0$	45
2.4	Curva de Nível para $S < 0$	46
2.5	Hipersuperfícies de \mathbb{R}^n com $S > 0$	52
3.1	Curvas de nível para $S < 0$	61
3.2	Curvas de nível para $S = 0$	62
3.3	Curvas de nível para $S \in (0, 1)$	62
3.4	Curvas de nível para $S = 1$	63
3.5	Curvas de nível para $S > 1$	63

Introdução

É usual nos cursos de graduação em matemática, principalmente nas disciplinas de cálculo e geometria, tratar das superfícies de rotação. A razão é que tais superfícies são muito úteis para construções de exemplos e nos esclarecem muitos conceitos importantes da teoria. Fato menos conhecido é que as superfícies de rotação são casos particulares de superfícies invariantes por um subgrupo a um parâmetro de isometrias do \mathbb{R}^3 .

A grande vantagem de uma superfície ser invariante por um subgrupo a um parâmetro de isometrias provém do fato de que suas propriedades podem ser obtidas a partir do estudo de sua curva geradora, como acontece com as superfícies de rotação. Essa ideia de considerar superfícies invariantes por subgrupos de isometrias é chamada de Geometria Equivariante.

Esta área de pesquisa da geometria, iniciou-se com a classificação das superfícies rotacionais com curvatura média constante em \mathbb{R}^3 , obtidas por Delaunay em 1841, ver [3]. Recentemente, outros matemáticos como Back, do Carmo e Hsiang, dedicaram-se ao estudo deste tema, adaptando as técnicas do \mathbb{R}^3 para dimensões maiores e considerando hipersuperfícies em outros espaços. Outro fator importante em nosso estudo é a curvatura escalar de uma variedade Riemanniana, que constitui um tema muito pesquisado em geometria diferencial, pois a curvatura escalar é um importante invariante geométrico, e, portanto, o interesse nas variedades com curvatura escalar constante, e em particular estudar hipersuperfícies em \mathbb{R}^n e \mathbb{H}^n , com esta propriedade.

Maria Luiza Leite, em [13], classificou as hipersuperfícies de rotação completas, com curvatura escalar constante em \mathbb{R}^n e \mathbb{H}^n , com $n > 3$. Oscar Palmas em [17], classificou as hipersuperfícies de rotação completas, nas formas espaciais, estudando as r -ésimas curvaturas médias H_r constantes, que incluiu [13] como um caso particular.

Um outro resultado importante é um teorema de A. Ros em [1], onde ele demonstra que as únicas hipersuperfícies compactas em \mathbb{R}^n com curvatura escalar constante são as esferas. Para as não-compactas há o teorema de Cheng-Yau em [19], afirmando que os únicos exemplos completos com curvaturas seccionais $K \geq 0$ são $\mathbb{S}^{n-1} \times \mathbb{R}^{n-k}$, $1 \leq k \leq n$. Em [10] e [11], Hsiang analisou hipersuperfícies de rotação em formas espaciais, com uma das funções de simetria, σ_j , constantes, o que inclui a curvatura escalar constante quando $j = 2$. Ele obteve vários exemplos de hipersuperfícies completas em \mathbb{R}^n

e \mathbb{H}^n com curvatura escalar positiva, mas até então não havia nenhum teorema de classificação. Em [16] temos um belo estudo sobre hipersuperfícies invariantes de curvatura média constante onde estabelecem a existência, via geometria equivariante, de hipersuperfícies compactas difeomorfas a esferas 3-dimensionais de curvatura média constante em \mathbb{R}^4 , não congruentes a esferas euclidianas.

Nosso trabalho está baseado nos artigos [13] e [17] e está organizado em três capítulos. No Capítulo 1, apresentamos alguns conceitos preliminares de geometria Riemanniana e espaço hiperbólico, necessários para demonstração dos resultados dos capítulos subsequentes, além de contribuir para um melhor entendimento do trabalho.

No Capítulo 2, definimos hipersuperfície de rotação e trabalhamos com um subgrupo do grupo das isometrias do \mathbb{R}^n , onde mostramos como se dá a ação do grupo $O(n-1)$, além de calcularmos a curvatura escalar intrinsecamente. Apresentamos vários resultados preliminares que nos ajudaram a demonstrar o principal teorema do capítulo, que é o teorema de classificação das hipersuperfícies de rotação completas com curvatura escalar constante em \mathbb{R}^n .

No Capítulo 3, apresentamos um teorema de classificação para as hipersuperfícies de rotação completas, com curvatura escalar constante em \mathbb{H}^n . Neste capítulo, calculamos a curvatura escalar extrinsecamente, usando a Fórmula de Gauss.

Preliminares

1.1 Variedades Diferenciáveis

Neste capítulo inicial, introduzimos algumas definições e fatos básicos sobre geometria Riemanniana, que serão usados ao longo do trabalho. Começamos definindo variedades diferenciáveis, que são fundamentais para o desenvolvimento da geometria Riemanniana.

Definição 1.1 *Uma variedade diferenciável de dimensão n é um conjunto M e uma família de aplicações biunívocas $\mathbf{x}_\alpha : U_\alpha \subset \mathbb{R}^n \rightarrow M$ tais que:*

$$(1) \bigcup_{\alpha} \mathbf{x}_\alpha(U_\alpha) = M.$$

(2) *Para todo par α, β , com $\mathbf{x}_\alpha(U_\alpha) \cap \mathbf{x}_\beta(U_\beta) = W \neq \emptyset$, os conjuntos $\mathbf{x}_\alpha^{-1}(W)$ e $\mathbf{x}_\beta^{-1}(W)$ são abertos em \mathbb{R}^n e as aplicações $\mathbf{x}_\beta^{-1} \circ \mathbf{x}_\alpha$ são diferenciáveis (figura 1.1).*

(3) *A família $\{(U_\alpha, \mathbf{x}_\alpha)\}$ é máxima relativamente às condições (1) e (2).*

O par $(U_\alpha, \mathbf{x}_\alpha)$ com $p \in \mathbf{x}_\alpha(U_\alpha)$ é chamado uma parametrização (ou sistema de coordenadas) de M em p ; $\mathbf{x}_\alpha(U_\alpha)$ é então chamada uma vizinhança coordenada em p . Uma família $(U_\alpha, \mathbf{x}_\alpha)$ satisfazendo (1) e (2) é chamada uma estrutura diferenciável em M .

Observação 1.2 *Uma estrutura diferenciável em um conjunto M induz de maneira natural uma topologia em M . Basta definir que $A \subset M$ é um aberto de M se $\mathbf{x}_\alpha^{-1}(A \cap \mathbf{x}_\alpha(U_\alpha))$ é um aberto de \mathbb{R}^n para todo α . É imediato verificar que M e o vazio são abertos, que a união de abertos é aberto e que a intersecção finita de abertos é aberto. Observe que a topologia é definida de tal modo que os conjuntos $\mathbf{x}_\alpha(U_\alpha)$ são abertos e as aplicações \mathbf{x}_α são contínuas.*

Em geral a topologia natural de uma variedade poder ser bastante estranha, por isso vamos exigir que as variedades diferenciáveis satisfaçam, além da Definição (1.1), as seguintes condições:

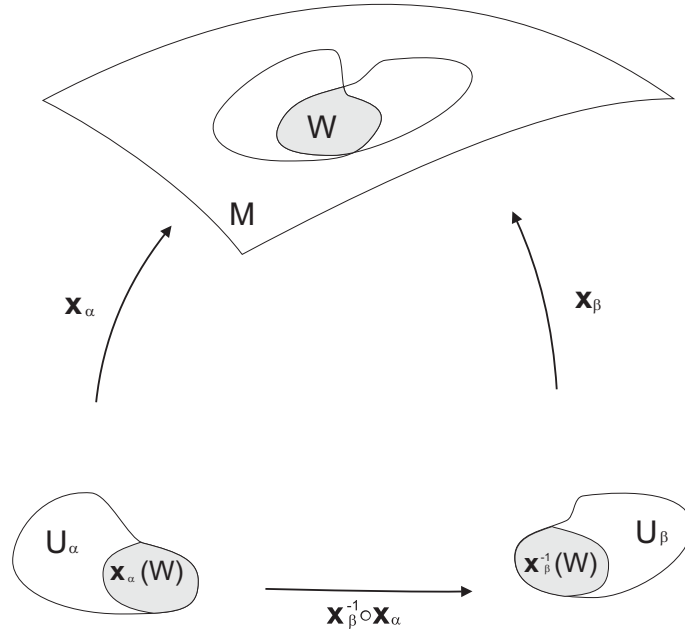


Figura 1.1: Mudança de Coordenada

Axioma 1.3 (Hausdorff) Dados dois pontos distintos em M existem vizinhanças destes dois pontos que não se intersectam.

Axioma 1.4 (Base Enumerável) M pode ser coberta por uma quantidade enumerável de vizinhanças coordenadas (diz-se então que M tem base enumerável).

A partir de agora sempre que falarmos de variedades diferenciáveis estaremos considerando, sem mais referências que elas satisfazem estes dois axiomas.

Definição 1.5 Sejam M_1^n e M_2^m variedades diferenciáveis uma aplicação $\varphi : M_1 \rightarrow M_2$ é diferenciável em $p \in M_1$, se dada uma parametrização $y : V \subset \mathbb{R}^m \rightarrow M_2$ em $\varphi(p)$ existe uma parametrização $x : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow M_1$ em p tal que $\varphi(x(U)) \subset y(V)$ e a aplicação

$$y^{-1} \circ \varphi \circ x : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m \quad (1-1)$$

é diferenciável em $x^{-1}(p)$. φ é diferenciável em um aberto de M_1 se é diferenciável em todos os pontos deste aberto. Em particular, isso define o conceito de funções diferenciáveis $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ sobre a variedade M , onde nesse caso \mathbb{R} carrega a parametrização padrão (identidade). O conjunto das funções de M diferenciáveis em p é denotado por $\tau(M)$.

Decorre da condição (2) da definição (1.1) que a definição dada é independente da escolha das parametrizações. A aplicação dada na equação (1-1) é chamada expressão de φ nas parametrizações x e y .

Com o objetivo de estender os métodos do Cálculo Diferencial para variedades, iremos estender às variedades a noção de vetor tangente.

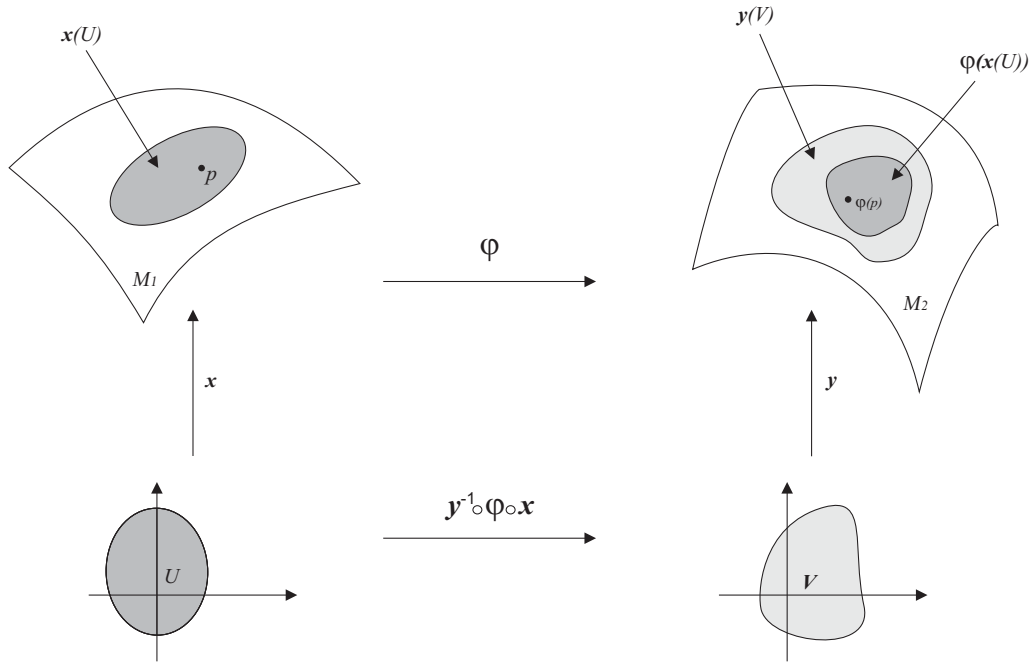


Figura 1.2: Expressão de φ no sistema de Coordenadas

Definição 1.6 Seja M uma variedade diferenciável. Uma aplicação diferenciável $\alpha : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow M$ é chamada uma curva (diferenciável) em M . Suponha $\alpha(0) = p \in M$. O vetor tangente à curva α em $t = 0$ é a função $\alpha'(0) : \tau(M) \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$\alpha'(0)f = \left. \frac{d(f \circ \alpha)}{dt} \right|_{t=0}, \quad f \in \tau.$$

Um vetor tangente em p é o vetor tangente em $t = 0$ de alguma curva $\alpha : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow M$ com $\alpha(0) = p$. O conjunto dos vetores tangentes a M em p será indicado por T_pM .

Dado um parametrização $\mathbf{x} : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow M^n$ em $p = \mathbf{x}(0)$, podemos exprimir a função f e a curva α nesta parametrização por

$$f \circ \mathbf{x}(q) = f(x_1, \dots, x_n), \quad q = (x_1, \dots, x_n) \in U,$$

e

$$\mathbf{x}^{-1} \circ \alpha(t) = (x_1(t), \dots, x_n(t)),$$

respectivamente. Portanto, restringindo f a α , obteremos

$$\begin{aligned} \alpha'(0)f &= \left. \frac{d}{dt}(f \circ \alpha) \right|_{t=0} = \left. \frac{d}{dt} f(x_1(t), \dots, x_n(t)) \right|_{t=0} \\ &= \sum_{i=1}^n x'_i(0) \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \right)_0 = \left(\sum_i x'_i(0) \left(\frac{\partial}{\partial x_i} \right)_0 \right) f. \end{aligned}$$

Em outras palavras, o vetor $\alpha'(0)$ pode ser expresso na parametrização \mathbf{x} por

$$\alpha'(0) = \sum_i x'_i(0) \left(\frac{\partial}{\partial x_i} \right)_0. \quad (1-2)$$

Observe que $\left(\frac{\partial}{\partial x_i} \right)_0$ é o vetor tangente em p à "curva coordenada" (Fig 1.3):

$$x_i \rightarrow \mathbf{x}(0, \dots, 0, x_i, 0, \dots, 0).$$

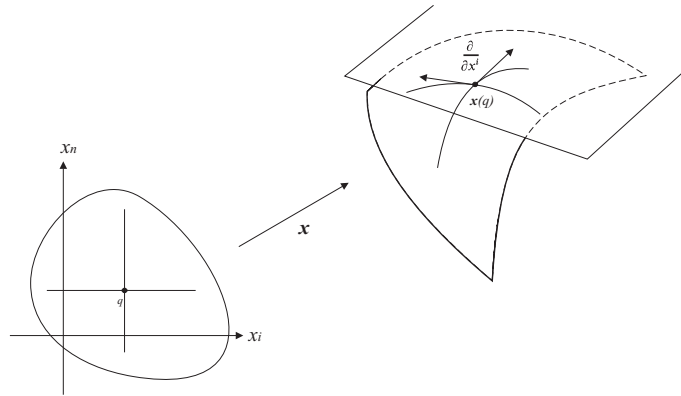


Figura 1.3: Espaço Tangente

A expressão (1-2) mostra que o vetor tangente a uma curva α em p depende apenas das derivadas de α em um sistema de coordenadas. Decorre também de (1-2) que o conjunto T_pM , com as operações usuais de funções, forma um espaço vetorial de dimensão n , e que a escolha de uma parametrização $\mathbf{x} : U \rightarrow M$ determina uma base associada $\left\{ \left(\frac{\partial}{\partial x_1} \right)_0, \dots, \left(\frac{\partial}{\partial x_n} \right)_0 \right\}$ em T_pM (Fig 1.3). A estrutura linear em T_pM assim definida não depende da parametrização \mathbf{x} . O espaço vetorial T_pM é chamado o espaço tangente de M em p .

Definição 1.7 Seja $\varphi : M_1 \rightarrow M_2$ uma aplicação diferenciável, e sejam p, q dois pontos fixados com $\varphi(p) = q$, então a diferencial de φ em p é definida como sendo a aplicação

$$d\varphi|_p : T_pM_1 \rightarrow T_qM_2$$

cujos valor em $v \in T_pM_1$ é dado por $(d\varphi|_p v)f := v(f \circ \varphi)(p)$ para cada $f \in \tau(M_2)$, que implica automaticamente a relação $f \circ \varphi \in \tau(M_1)$

Sejam M_1 e M_2 variedades diferenciáveis. Uma aplicação $\varphi : M_1 \rightarrow M_2$ é um difeomorfismo se ela é diferenciável, biunívoca, sobrejetiva e sua inversa φ^{-1} é diferenciável. φ é um difeomorfismo local em $p \in M$ se existem vizinhanças U de p e V de $\varphi(p)$ tais que $\varphi : U \rightarrow V$ é um difeomorfismo.

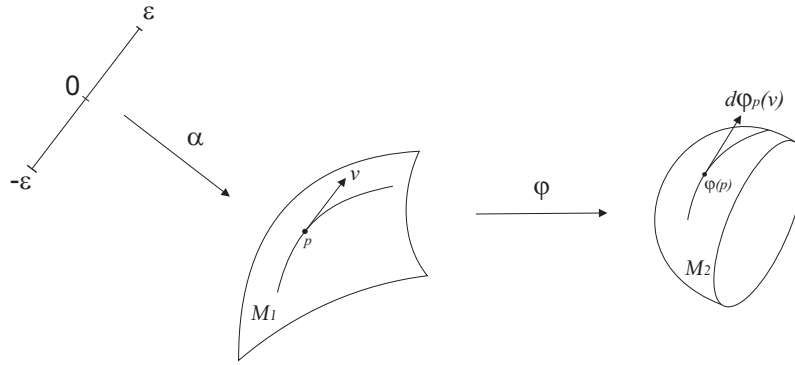


Figura 1.4: Aplicação Diferenciável

A noção de difeomorfismo é a noção natural de equivalência entre variedades diferenciáveis. É uma consequência imediata do teorema da função inversa que se $\varphi : M_1 \rightarrow M_2$ é um difeomorfismo, então $d\varphi_p : T_p M_1 \rightarrow T_{\varphi(p)} M_2$ é um isomorfismo para todo $p \in M_1$, em particular as dimensões de M_1 e M_2 são iguais. Uma recíproca local deste fato é o seguinte teorema.

Proposição 1.8 *Seja $\varphi : M_1^n \rightarrow M_2^n$ uma aplicação diferenciável e seja $p \in M_1$ tal que $d\varphi_p : T_p M_1 \rightarrow T_{\varphi(p)} M_2$ é um isomorfismo, então φ é um difeomorfismo local em p .*

Demonstração. Ver [6].

Definição 1.9 *Sejam M^m e N^n variedades diferenciáveis. Uma aplicação diferenciável $\varphi : M \rightarrow N$ é uma imersão se $d\varphi_p : T_p M \rightarrow T_{\varphi(p)} N$ é injetiva $\forall p \in M$. Se além disso, φ é um homeomorfismo sobre $\varphi(M) \subset N$, onde $\varphi(M)$ tem a topologia induzida por N , diz-se que φ é um mergulho. Se $M \subset N$ e a inclusão $i : M \hookrightarrow N$ é um mergulho, diz-se que M é uma subvariedade de N .*

Observação 1.10 *Se $\varphi : M^m \rightarrow N^n$ é uma imersão, então $m \leq n$; e a diferença é chamada a codimensão da imersão φ .*

Definição 1.11 *Seja M uma variedade diferenciável. Diz-se que M é orientável se M admite uma estrutura diferenciável $\{(U_\alpha, \mathbf{x}_\alpha)\}$ tal que:*

- (i) *para todo par α, β , com $\mathbf{x}_\alpha(U_\alpha) \cap \mathbf{x}_\beta(U_\beta) = W \neq \emptyset$, a diferencial da mudança de coordenadas $\mathbf{x}_\beta \circ \mathbf{x}_\alpha^{-1}$ tem determinante positivo.*

Caso contrário, diz-se que M é não-orientável.

Definição 1.12 *Um campo de vetores X em uma variedade diferenciável M é uma correspondência que para cada ponto $p \in M$ associa um vetor $X(p) \in T_p M$. Considerando uma parametrização $\mathbf{x} : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow M$ é possível escrever*

$$X(p) = \sum_{i=1}^n a_i(p) \frac{\partial}{\partial x_i},$$

one cada $a_i : U \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função em U e $\left\{\frac{\partial}{\partial x_i}\right\}$ é uma base associada a \mathbf{x} , $i = 1, \dots, n$. É claro que X é diferenciável se, e somente se, as funções a_i são diferenciáveis para alguma (e, portanto, para qualquer) parametrização.

Lema 1.13 *Sejam X e Y campos diferenciáveis de vetores em uma variedade diferenciável M , então existe um único campo vetorial Z tal que, para toda $f \in \tau$, $Zf = (XY - YX)f$. Demonstração. Ver [6].*

O campo vetorial Z dado pelo Lema (1.13) é chamado o colchete de X e Y , nós o denotamos por $[X, Y] = XY - YX$. Observamos que Z é diferenciável, pois é a diferença de campos diferenciáveis. A operação colchete possui as seguintes propriedades:

Proposição 1.14 *Se X, Y e Z são campos diferenciáveis em M , a, b são números reais, e, f, g são funções diferenciáveis, então:*

- (a) $[X, Y] = -[Y, X]$,
- (b) $[aX + bY, Z] = a[X, Z] + b[Y, Z]$,
- (c) $[[X, Y], Z] + [[Y, Z], X] + [[Z, X], Y] = 0$,
- (d) $[fX, gY] = fg[X, Y] + fX(g)Y - gY(f)X$.

Demonstração. Ver [6].

1.2 Métricas Riemannianas

Definição 1.15 *Uma métrica Riemanniana (ou estrutura Riemanniana) em uma variedade diferenciável M é um correspondência que associa a cada ponto p de M um produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle_p$ (isto é, uma forma bilinear simétrica, positiva definida) no espaço tangente T_pM , que varia diferencialmente no seguinte sentido: Se $\mathbf{x} : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow M$ é um sistema de coordenadas locais em torno de p , com $\mathbf{x}(x_1, x_2, \dots, x_n) = q \in \mathbf{x}(U)$ e $\frac{\partial}{\partial x_i}(q) = d\mathbf{x}(0, \dots, 1, \dots, 0)$ então $\left\langle \frac{\partial}{\partial x_i}(q), \frac{\partial}{\partial x_j}(q) \right\rangle_q = g_{ij}(x_1, \dots, x_n)$ é uma função diferenciável em U .*

Observamos que esta definição não depende da escolha do sistema de coordenadas. As funções g_{ij} são chamadas expressão da métrica Riemanniana no sistema de coordenadas $\mathbf{x} : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow M$. Uma variedade diferenciável com uma dada métrica Riemanniana chama-se uma variedade Riemanniana.

A seguir vamos estabelecer uma noção de equivalência entre duas variedades Riemannianas.

Definição 1.16 *Sejam M e N variedades Riemannianas. Um difeomorfismo $f : M \rightarrow N$ é chamado um isometria se:*

$$\langle u, v \rangle_p = \langle df_p(u), df_p(v) \rangle_{f(p)}, \text{ para todo } p \in M, u, v, \in T_p M \quad (1-3)$$

Definição 1.17 *Sejam M e N variedades Riemannianas. Uma aplicação diferenciável $f : M \rightarrow N$ é uma isometria local em $p \in M$ se existe uma vizinhança $U \subset M$ de p tal que $f : U \rightarrow f(U)$ é um difeomorfismo satisfazendo a equação (1-3)*

Exemplo 1.18 *Variedades imersas. Seja $f : M^n \rightarrow N^{n+k}$ uma imersão. Se N tem uma estrutura Riemanniana, f induz uma estrutura Riemanniana em M por $\langle u, v \rangle_p = \langle df_p(u), df_p(v) \rangle_{f(p)}$, $u, v, \in T_p M$. Como df_p é injetiva, $\langle \cdot, \cdot \rangle_p$ é positivo definido. As demais condições da definição (1.15) são facilmente verificadas. A métrica de M é chamada então a métrica induzida por f , e f é uma imersão isométrica.*

Mostraremos agora como uma métrica Riemanniana pode ser usada para calcular comprimentos de curvas.

Definição 1.19 *Uma aplicação diferenciável $c : I \rightarrow M$ de um intervalo aberto $I \subset \mathbb{R}$ em uma variedade diferenciável M chama-se uma curva (parametrizada).*

Definição 1.20 *Um campo vetorial V ao longo de uma curva $c : I \rightarrow M$ é uma aplicação que a cada $t \in I$ associa um vetor tangente $V(t) \in T_{c(t)}M$. Diz-se que V é diferenciável se para toda a função diferenciável f em M , a função $t \rightarrow V(t)f$ é uma função diferenciável em I .*

Observação 1.21 *A noção de ângulo e comprimento de vetores no espaço tangente de uma variedade M são determinados pelo produto interno da definição 1.15. O comprimento ou a norma de um vetor v é dado por $\|v\| := \sqrt{g(v, v)}$ e o ângulo α entre dois vetores v e w é definido pela equação $\cos \alpha \cdot \|v\| \cdot \|w\| = \langle v, w \rangle$.*

Se $\alpha : [a, b] \rightarrow M$ é uma curva parametrizada, definimos o comprimento da curva por:

$$l_a^b(c) = \int_a^b \left\langle \frac{dc}{dt}, \frac{dc}{dt} \right\rangle^{1/2} dt.$$

Proposição 1.22 *Uma variedade diferenciável M (de Hausdorff e com base enumerável) possui uma métrica Riemanniana.*

Demonstração. Ver [6].

Definição 1.23 *Seja M uma variedade diferenciável. Duas métricas Riemannianas g e \bar{g} em M são conformes se existe um função positiva $\mu : M \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $\bar{g}(X, Y) = \mu g(X, Y)$, para todo par $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$.*

1.3 Conexões

Generalizando agora a noção de derivada covariante de uma superfície, vamos definir a Conexão afim e a conexão de Levi-Civita (ou Riemanniana). Denotaremos por $\mathfrak{X}(M)$ o conjunto de todos os campos de vetores de classe C^∞ em M e por $\tau(M)$ o anel das funções reais de classe C^∞ definidas em M .

Definição 1.24 *Uma conexão afim ∇ em um variedade diferenciável M é uma aplicação*

$$\nabla : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \rightarrow \mathfrak{X}(M)$$

que se indica por $(X, Y) \xrightarrow{\nabla} \nabla_X Y$ e que satisfaz as seguintes propriedades:

- (i) $\nabla_{fX+gY}Z = f\nabla_X Z + g\nabla_Y Z$,
- (ii) $\nabla_X(Y+Z) = \nabla_X Y + \nabla_X Z$,
- (iii) $\nabla_X(fY) = f\nabla_X Y + X(f)Y$,

onde $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$ e $f, g \in \tau(M)$.

Proposição 1.25 *Seja M uma variedade Riemanniana. Uma conexão ∇ em M é compatível com a métrica se, e somente se, para todo par V e W de campos de vetores ao longo da curva diferenciável $c : I \rightarrow M$ tem-se*

$$\frac{d}{dt} \langle V, W \rangle = \left\langle \frac{DV}{dt}, W \right\rangle + \left\langle V, \frac{DW}{dt} \right\rangle, \quad t \in I.$$

Demonstração. Ver [6].

Corolário 1.26 *Uma conexão ∇ em uma variedade Riemanniana M é compatível com a métrica se, e somente se*

$$X \langle Y, Z \rangle = \langle \nabla_X Y, Z \rangle + \langle Y, \nabla_X Z \rangle, \quad X, Y, Z, \in \mathfrak{X}(M).$$

Demonstração. Ver [6].

Definição 1.27 *Uma conexão afim ∇ em uma variedade diferenciável M é dita simétrica quando*

$$\nabla_X Y - \nabla_Y X = [X, Y] \text{ para todo } X, Y \in \mathfrak{X}(M).$$

Demonstração. Ver [6].

Teorema 1.28 (Levi-Civita). *Dada uma variedade Riemanniana M , existe uma única conexão afim ∇ em M satisfazendo as condições:*

- (a) ∇ é simétrica.
 (b) ∇ é compatível com a métrica Riemanniana.

Demonstração. Ver [6].

Escrevendo em um sistema de coordenadas (U, \mathbf{x}) , é conveniente dizer que as funções definidas em U por $\nabla_{X_i} X_j = \sum_k \Gamma_{ij}^k X_k$ são os coeficientes da conexão ∇ em U ou os símbolos de Christoffel da conexão e satisfazem a seguinte equação:

$$\sum_l \Gamma_{ij}^l g_{lk} = \frac{1}{2} \left\{ \frac{\partial}{\partial x_i} g_{jk} + \frac{\partial}{\partial x_j} g_{ki} - \frac{\partial}{\partial x_k} g_{ij} \right\}$$

Como a matriz (g_{km}) admite inversa (g^{km}) , teremos que:

$$\Gamma_{ij}^m = \frac{1}{2} \sum_k \left\{ \frac{\partial}{\partial x_i} g_{ik} + \frac{\partial}{\partial x_j} g_{ki} - \frac{\partial}{\partial x_k} g_{ij} \right\} g^{km}$$

1.4 Geodésicas

Nesta seção vamos introduzir a noção de curvas geodésicas de uma variedade Riemanniana. Elas desempenham um papel muito importante no desenvolvimento da geometria Riemanniana.

Definição 1.29 Uma curva parametrizada $\gamma : I \rightarrow M$ é uma geodésica em $t_0 \in I$ se $\frac{D}{dt} \left(\frac{d\gamma}{dt} \right) = 0$ no ponto t_0 ; se γ é uma geodésica em t , para todo $t \in I$, dizemos que γ é uma geodésica. Se $[a, b] \subset I$ e $\gamma : I \rightarrow M$ é uma geodésica, a restrição de γ a $[a, b]$ é chamada (segmento de) geodésica ligando $\gamma(a)$ a $\gamma(b)$.

Às vezes, por abuso de linguagem, chamaremos de geodésica à imagem $\gamma(I)$ de uma geodésica γ .

Se $\gamma : I \rightarrow M$ é uma geodésica, então

$$\frac{d}{dt} \left\langle \frac{d\gamma}{dt}, \frac{d\gamma}{dt} \right\rangle = 2 \left\langle \frac{D}{dt} \frac{d\gamma}{dt}, \frac{d\gamma}{dt} \right\rangle = 0,$$

isto é, o comprimento do vetor tangente $\frac{d\gamma}{dt}$ é constante. Consideraremos de agora em diante, que $\left| \frac{d\gamma}{dt} \right| = c \neq 0$, isto é, excluiremos as geodésicas que se reduzem a pontos. O comprimento de arco s de γ , a partir de uma origem fixa, digamos $t = t_0$, é então dado por

$$s(t) = \int_{t_0}^t \left| \frac{d\gamma}{dt} \right| dt = c(t - t_0).$$

Portanto, o parâmetro de uma geodésica é proporcional ao comprimento de arco. Quando o parâmetro é o próprio comprimento de arco, isto é, $c = 1$, diremos que a geodésica γ está normalizada.

O teorema de existência para geodésicas afirma que por cada ponto e direção de uma variedade Riemanniana passa uma geodésica.

Teorema 1.30 *Seja M uma variedade Riemanniana. Para cada ponto p de M e cada $v \in T_p M$ com $\|v\| = 1$, existe um $\varepsilon > 0$ e uma única geodésica $\alpha : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow M$ parametrizada pelo comprimento de arco, tal que $\alpha(0) = p$ e $\alpha'(0) = v$.*

Demonstração. Ver [6].

Desejamos estabelecer certas propriedades de minimização das geodésicas. Para isso necessitamos de algumas definições.

Definição 1.31 *Uma curva diferenciável por partes é uma aplicação contínua $\alpha : [a, b] \rightarrow M$ de um intervalo fechado $[a, b] \subset \mathbb{R}$ em M satisfazendo a seguinte condição: existe uma partição $a = t_0 < t_1 < \dots < t_{k-1} < t_k = b$ de $[a, b]$ tal que as restrições $c|_{[t_i, t_{i+1}]}$, $i = 0, \dots, k-1$, são diferenciáveis. Dizemos que α liga os pontos $\alpha(a)$ e $\alpha(b)$.*

As geodésicas tem a propriedade de serem minimizantes. Por isso, dizemos que as geodésicas tem, nas variedades Riemannianas, a mesma função de realizar distância que as retas têm no espaço \mathbb{R}^n .

Proposição 1.32 *Se uma curva parametrizada por partes em uma variedade Riemanniana $\gamma : [a, b] \rightarrow M$, com parâmetro proporcional ao comprimento de arco, tem comprimento menor ou igual ao comprimento de qualquer outra curva diferenciável por partes ligando $\gamma(a)$ a $\gamma(b)$ então γ é uma geodésica. Em particular γ é regular.*

Demonstração. Ver [6].

Com a ideia de minimizar comprimento de curvas é conveniente introduzir uma distância em uma variedade Riemanniana.

Definição 1.33 *Seja M uma variedade Riemanniana. Definimos a distância de dois pontos $p, q \in M$, $d(p, q)$, como sendo o ínfimo dos comprimentos de todas as curvas diferenciáveis por partes ligando p a q .*

A distância, como foi definida, faz com que M seja um espaço métrico. Assim temos que:

Proposição 1.34 *Seja M uma variedade Riemanniana. M com a distância definida acima é um espaço métrico, isto é:*

$$(i) \quad d(p, r) \leq d(p, q) + d(q, r),$$

- (ii) $d(p, q) = d(q, p)$,
 (iii) $d(p, q) \geq 0$ e $d(p, q) = 0 \Leftrightarrow p = q$

para todo $p, q, r \in M$.

Proposição 1.35 *Uma variedade Riemanniana M é completa se, e somente se, todas as geodésicas $\gamma(t)$ em M estão definidas para todos os valores do parâmetro $t \in \mathbb{R}$.*

Demonstração. Ver [6].

Outro fato que aparece da ideia de completude é a existência de uma geodésica minimizante ligando quaisquer dois pontos da Variedade Riemanniana.

Proposição 1.36 *Se M é uma variedade Riemanniana completa, então para quaisquer dois pontos $p, q \in M$ existe uma geodésica minimizante ligando p a q .*

Demonstração. Ver [6].

Em seguida definiremos a curvatura em uma variedade Riemanniana M .

1.5 Curvaturas

Nesta seção apresentaremos uma definição de curvatura que intuitivamente, mede o quanto uma variedade Riemanniana deixa de ser euclidiana. Definiremos também algumas outras curvaturas especiais, como a de Ricci e a escalar que é um dos principais objetos de estudo deste trabalho.

Definição 1.37 *A Curvatura R de uma variedade Riemanniana M é uma correspondência que associa a cada par $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ uma aplicação $R(X, Y) : \mathfrak{X}(M) \rightarrow \mathfrak{X}(M)$ dada por*

$$R(X, Y)Z = \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_X \nabla_Y Z + \nabla_{[X, Y]} Z, \quad Z \in \mathfrak{X}(M),$$

onde ∇ é a conexão Riemanniana de M .

Observe que se $M = \mathbb{R}^n$ então $R(X, Y)Z = 0, \forall X, Y, Z \in \mathfrak{X}(\mathbb{R}^n)$.

Podemos olhar esta definição em um sistema de coordenadas $\{x_i\}$ em torno de $p \in M$. Como $\left[\frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j} \right] = 0$, temos que

$$R\left(\frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j}\right) \frac{\partial}{\partial x_k} = \left(\nabla_{\partial/\partial x_j} \nabla_{\partial/\partial x_i} - \nabla_{\partial/\partial x_i} \nabla_{\partial/\partial x_j}\right) \frac{\partial}{\partial x_k},$$

isto é, a curvatura mede a não-comutatividade da derivada covariante.

Em um sistema de coordenadas (U, \mathbf{x}) em torno de $p \in M$, indicaremos, como de costume, $\frac{\partial}{\partial x_i} = X_i$ e temos que

$$R(X_i, X_j)X_k = \sum_l R^l_{ijk} X_l.$$

Assim R^l_{ijk} são as componentes da curvatura R em (U, \mathbf{x}) . Se $X = \sum_i u^i X_i$, $Y = \sum_j v^j X_j$, $Z = \sum_k w^k X_k$, obtemos, pela linearidade de R , que:

$$R(X, Y)Z = \sum_{i,j,k,l} R^l_{ijk} u^i v^j w^k X_l,$$

onde R^l_{ijk} se expressa em termos de Γ^k_{ij} por:

$$R^s_{ijk} = \sum_l \Gamma^l_{ik} \Gamma^s_{jl} - \sum_l \Gamma^l_{jk} \Gamma^s_{il} + \frac{\partial}{\partial x_j} \Gamma^s_{ik} - \frac{\partial}{\partial x_i} \Gamma^s_{jk}. \quad (1-4)$$

Relacionada com o operador R , está a curvatura seccional que definimos da seguinte maneira.

Definição 1.38 Dado $p \in M$, $\sigma \subset T_p M$ um subespaço de dimensão dois, o número real

$$K(\sigma) = K(x, y) = \frac{(x, y, x, y)}{|x \wedge y|^2},$$

onde $\{x, y\}$ é uma base qualquer de σ , é chamado a curvatura seccional de σ em p .

Consideramos $x = z_n$ um vetor unitário em $T_p M$, tomemos uma base ortogonal $\{z_1, \dots, z_{n-1}\}$ do hiperplano de $T_p M$ ortogonal a x e consideremos as seguintes médias:

$$Ric_p(x) = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n-1} \langle R(x, z_i)x, z_i \rangle, \quad i = 1, 2, \dots, n-1 \quad (1-5)$$

$$S(p) = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n Ric_p(z_j) = \frac{1}{n(n-1)} \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=1}^n \langle R(z_j, z_i)z_j, z_i \rangle, \quad j = 1, \dots, n. \quad (1-6)$$

As expressões acima não dependem da escolha das correspondentes bases ortonormais; elas são chamadas *curvatura de Ricci* na direção x e *curvatura escalar* em p , respectivamente.

A noção de curvatura é um caso particular da noção de tensor que é um objeto útil em geometria diferencial. A ideia de tensor é uma generalização natural da ideia de campos de vetores e o ponto importante é que os tensores podem ser derivados covariantemente.

Para o que se segue convém observar que $\mathfrak{X}(M)$ é um módulo sobre $\tau(M)$, isto é, $\mathfrak{X}(M)$ tem uma estrutura linear quando tomamos como "escalares" os elementos de $\tau(M)$.

Definição 1.39 *Um tensor T de ordem r em uma variedade Riemanniana é um aplicação multilinear*

$$T : \underbrace{\mathfrak{X}(M) \times \cdots \times \mathfrak{X}(M)}_{r \text{ fatores}} \rightarrow \tau(M).$$

Isto quer dizer que, dados $Y_1, \dots, Y_r \in \mathfrak{X}(M)$, $T(Y_1, \dots, Y_r)$, é uma função diferenciável em M , e que T é linear em cada argumento, isto é,

$$\begin{aligned} T(Y_1, \dots, fX + gY, \dots, Y_r) &= fT(Y_1, \dots, X, \dots, Y_r) \\ &+ gT(Y_1, \dots, Y, \dots, Y_r), \end{aligned}$$

Para todo $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$, $f, g \in \tau(M)$.

Exemplo 1.40 *O tensor curvatura*

$$R : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \rightarrow \tau(M)$$

é definido por

$$R(X, Y, Z, W) = \langle R(X, Y)Z, W \rangle, \quad X, Y, Z, W \in \mathfrak{X}(M).$$

verificamos que R é um tensor de ordem 4, cujas componentes no referencial $\left\{ X_i = \frac{\partial}{\partial x_i} \right\}$ associado a sistemas de coordenadas (x_i) são

$$R(X_i, X_j, X_k, X_l) = R_{ijkl}$$

Na próxima seção, vamos estudar as relações entre as geometrias das variedades M e \bar{M} . Veremos como as relações entre as métricas Riemannianas de M e \bar{M} se exprimem por meio da segunda forma fundamental, entre estas relações, uma das mais importantes que vemos é a fórmula de Gauss, que relaciona as curvaturas seccionais de M e \bar{M} com a segunda forma fundamental.

1.6 Imersões Isométricas

Consideremos agora $f : M^n \rightarrow \bar{M}^{n+k}$ uma imersão isométrica. Para cada $p \in M$ existe uma vizinhança $U \subset M$ de p tal que $f(U) \subset \bar{M}$ é uma subvariedade de \bar{M} . Ao identificarmos U com $f(U)$ e $v \in T_q M$, $q \in U$ com $df_q(v) \in T_{f(q)} \bar{M}$, para cada $p \in M$, o produto interno em $T_p \bar{M}$ decompõe $T_p \bar{M}$ na soma direta $T_p \bar{M} = T_p M \oplus (T_p M)^\perp$, onde

$(T_pM)^\perp$ é o complemento ortogonal de T_pM em $T_p\bar{M}$. Assim se $v \in T_p\bar{M}$, $p \in M$, podemos escrever

$$v = v^T + v^N, \quad v^T \in T_pM, \quad v^N \in (T_pM)^\perp.$$

Indicaremos a conexão Riemanniana de \bar{M} por $\bar{\nabla}$ e definiremos $\nabla_X Y = (\bar{\nabla}_{\bar{X}} \bar{Y})^T$, onde \bar{X} , \bar{Y} são extensões locais de X , Y a \bar{M} e $B(X, Y) = \bar{\nabla}_{\bar{X}} \bar{Y} - \nabla_X Y$ é um campo local em \bar{M} normal a M . Temos que $B(X, Y)$ está bem definida pois não depende das extensões X e Y e por propriedades da conexão, $H_\eta : T_pM \times T_pM \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$H_\eta(x, y) = \langle B(x, y), \eta \rangle, \quad x, y \in T_pM \text{ e } \eta \in (T_pM)^\perp$$

é uma forma bilinear simétrica.

Definição 1.41 A forma quadrática II_η definida em T_pM por

$$II_\eta(x) = H_\eta(x, x)$$

é chamada a segunda forma fundamental de f em p segundo o vetor normal η .

Observamos que à aplicação bilinear H fica associada uma aplicação linear auto-adjunta $S_\eta : T_pM \rightarrow T_pM$ dada por

$$\langle S_\eta(x), y \rangle = H_\eta(x, y) = \langle B(x, y), \eta \rangle.$$

Consideremos o caso particular em que a codimensão da imersão é 1, i.e., $f : M^n \rightarrow \bar{M}^{n+1}$; $f(M) \subset \bar{M}$ é então denominada uma hipersuperfície. (Observe que uma hipersuperfície pode ter auto intersecções, mas as hipersuperfícies que iremos trabalhar, são todas mergulhadas).

Seja $p \in M$ e $\eta \in (T_pM)^\perp$, $|\eta| = 1$. Como $S_\eta : T_pM \rightarrow T_pM$ é simétrica, existe uma base ortonormal de vetores próprios $\{e_1, \dots, e_n\}$ de T_pM com valores próprios reais $\lambda_1, \dots, \lambda_n$, i.e., $S_\eta(e_i) = \lambda_i e_i$, $1 \leq i \leq n$. Se M e \bar{M} são ambas orientáveis e estão orientadas (i.e., escolhemos orientações para M e \bar{M}) então o vetor η fica univocamente determinado se exigirmos que, sendo $\{e_1, \dots, e_n\}$ uma base na orientação de M , $\{e_1, \dots, e_n, \eta\}$ seja uma base na orientação de \bar{M} . Neste caso, denominamos os e_i direções principais e os $\lambda_i = k_i$ curvaturas principais de f . As funções simétricas de $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ são invariantes da imersão. Por exemplo: $\det(S_\eta) = \lambda_1 \cdots \lambda_n$ é denominada a curvatura de Gauss-Kronecker de f e $\frac{1}{n}(\lambda_1 + \cdots + \lambda_n)$ é denominada a curvatura média de f .

As curvaturas de M e \bar{M} podem ser relacionadas com a segunda forma fundamental.

Teorema 1.42 (Formula de Gauss). *Sejam $p \in M$ e x, y vetores ortonormais de T_pM . Então*

$$K(x, y) - \bar{K}(x, y) = \langle B(x, x), B(y, y) \rangle - |B(x, y)|^2.$$

Demonstração. Ver [6].

No caso de hipersuperfícies $f: M^n \rightarrow \bar{M}^{n+1}$, a formula de Gauss nos fornece uma relação entre as curvaturas seccionais de M e \bar{M} e as curvaturas principais, da seguinte forma:

$$K(e_i, e_j) - \bar{K}(e_i, e_j) = \lambda_i \lambda_j. \quad (1-7)$$

As variedades Riemannianas de curvatura seccional constante, a saber, o espaço euclidiano \mathbb{R}^n com $K = 0$, a esfera unitária $S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ com $K = 1$, e o espaço hiperbólico $\mathbb{H}^n \subset \mathbb{L}^{n+1}$ que tem curvatura seccional $K = -1$ são as únicas variedades Riemannianas completas e simplesmente conexas com curvatura seccional constante. Isto permite reduzir o problema de achar todas as variedades completas de curvatura constante ao problema de determinar certos subgrupos dos grupos das isometrias de \mathbb{R}^n , \mathbb{H}^n e S^n , respectivamente.

Na próxima seção, falaremos sobre uma dessas variedades Riemannianas com curvatura seccional constante, que é o espaço hiperbólico \mathbb{H}^n .

1.7 O Espaço Hiperbólico

Estudaremos agora o espaço hiperbólico. Veremos quais são as suas geodésicas e apresentaremos uma classe especial de superfícies que são, as superfícies umbílicas.

Considere o semi-espaço do \mathbb{R}^n dado por

$$\mathbb{H}^n = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n; x_n > 0\}$$

e introduza em \mathbb{H}^n a métrica

$$g_{ij}(x_1, \dots, x_n) = \frac{\delta_{ij}}{x_n^2}.$$

\mathbb{H}^n é chamado de espaço hiperbólico de dimensão n . Chamaremos de plano do infinito a fronteira de \mathbb{H}^n , denotada por $\partial\mathbb{H}^n$.

Algumas vezes, quando for necessário, usaremos outro modelo para o espaço hiperbólico, que é o modelo do hiperboloide, mas antes de falar desse modelo, precisamos definir o espaço de Lorentz de dimensão n , que é o espaço vetorial real, dado por

$$\mathbb{L}^n = \{(x_1, \dots, x_n) : x_i \in \mathbb{R}\},$$

munido das operações usuais de soma e multiplicação por escalar do \mathbb{R}^n e do produto interno

$$g(x, y) = \langle x, y \rangle = -x_n y_n + \sum_{i=1}^{n-1} x_i y_i,$$

onde $x = (x_1, \dots, x_n)$ e $y = (y_1, \dots, y_n)$.

Uma subvariedade de \mathbb{L}^n é obtida considerando o semi-espaço do \mathbb{R}^n dado por

$$\mathbb{H}^n = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n; \langle x, x \rangle = -1 \text{ e } x_n > 0\}.$$

Note que a equação $\langle x, x \rangle = -1$ representa geometricamente um hiperbolóide de duas folhas em \mathbb{R}^n e \mathbb{H}^n como foi definido acima é uma das folhas desse hiperbolóide. Observamos que esses dois modelos são isométricos e quando for mais conveniente usaremos um ou o outro modelo, para tornar os cálculos mais simples.

Agora, vamos falar sobre quais são as geodésicas do espaço hiperbólico. Temos a seguinte proposição:

Proposição 1.43 *As retas perpendiculares ao hiperplano $x_n = 0$, e os círculos de \mathbb{H}^n contidos em planos que são perpendiculares ao hiperplano $x_n = 0$ e cujos centros estão neste hiperplano são geodésicas de \mathbb{H}^n .*

Demonstração. Observe que uma isometria de \mathbb{R}^n que só envolve as variáveis x_1, \dots, x_{n-1} não altera a métrica g_{ij} e é, portanto, uma isometria de \mathbb{H}^n . Decorre daí que basta considerar retas e círculos no plano $x_n = 0$. Assim temos o seguinte resultado:

Seja G o semi-plano superior, isto é, $G = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; y > 0\}$ com a métrica Riemanniana $g_{11} = g_{22} = \frac{1}{y^2}$, $g_{12} = g_{21} = 0$.

Mostramos que o segmento $\gamma : [a, b] \rightarrow G$, $a > 0$, do eixo dos y , dado por $\gamma(t) = (0, t)$ é a imagem de uma geodésica. De fato, para qualquer arco $c : [a, b] \rightarrow G$ dado por $c(t) = (x(t), y(t))$ com $c(a) = (0, a)$ e $c(b) = (0, b)$, temos que

$$\begin{aligned} l(c) &= \int_a^b \left| \frac{dc}{dt} \right| dt = \int_a^b \sqrt{\left(\frac{dx}{dt} \right)^2 + \left(\frac{dy}{dt} \right)^2} \frac{dt}{y} \\ &\geq \int_a^b \left| \frac{dy}{dt} \right| \frac{dt}{y} \geq \int_a^b \frac{dy}{y} = l(\gamma). \end{aligned}$$

Segue-se que γ minimiza arcos diferenciáveis por partes, e, da proposição (1.32), que a imagem de γ é uma geodésica. Temos que a transformação

$$z \longrightarrow \frac{az + b}{cz + d}, \quad z = x + iy, \quad ad - bc = 1,$$

transforma o eixo Oy em semi-círculos superiores ou em semi-retas $x = x_0, y > 0$. Estas curvas são, portanto, geodésicas em G . em verdade, estas são todas as geodésicas de G , pois por cada $p \in G$ e cada direção em $T_p G$ passa um tal círculo com centro Ox .

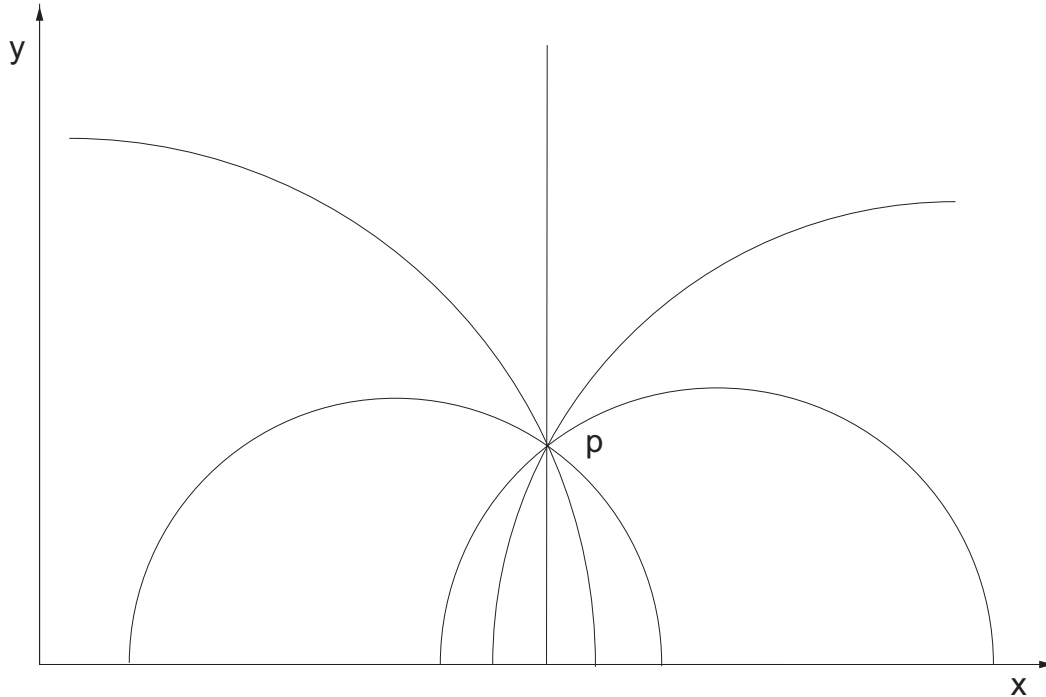


Figura 1.5: Geodésicas de G passando por p

□

Agora falaremos de superfícies umbílicas no espaço hiperbólico para uma melhor compreensão dos conceitos. Mostramos como são as superfícies umbílicas em \mathbb{H}^3 .

Superfícies umbílicas do espaço hiperbólico

Definição 1.44 Seja (\bar{M}^{n+1}, g) uma variedade com métrica Riemanniana g e seja ∇ a sua conexão Riemanniana. Diz-se que uma imersão $x : M^n \rightarrow \bar{M}^{n+1}$ é umbílica se, para todo $p \in M$ a segunda forma fundamental B de x em p satisfaz

$$\langle B(X, Y), \eta \rangle(p) = \lambda(p) \langle X, Y \rangle, \quad \lambda(p) \in \mathbb{R},$$

para todo par $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ e todo campo unitário η normal a $x(M)$; aqui estamos usando \langle, \rangle para indicar a métrica g em \bar{M} e a métrica induzida por x em M .

Mostra-se que quando \bar{M}^{n+1} tem curvatura seccional constante, λ não depende de p . Além disso, se mudarmos a métrica g para a métrica $\bar{g} = \mu g$, conforme a g , a imersão

$x : M^n \rightarrow (\overline{M}^{n+1}, \overline{g})$ continua a ser umbílica (observamos que a métrica hiperbólica é conforme a euclidiana). Logo, tomando $\overline{M}^{n+1} = \mathbb{R}^{n+1}$ com a métrica euclidiana, mostra-se que se $x : M^n \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ é umbílica, então $x(M)$ está contida em um n – *plano* ou uma n – *esfera* de \mathbb{R}^{n+1} , assim as hipersuperfícies umbílicas do espaço hiperbólico, no modelo do semi-espço superior \mathbb{H}^n , são as intersecções com \mathbb{H}^n de n – *planos* ou n – *esferas* de \mathbb{R}^{n+1} .

Portanto, as hipersuperfícies umbílicas do espaço hiperbólico são os planos totalmente geodésicos, as esferas geodésicas, as horoesferas e as hiperesferas (ou superfícies equidistantes), que também tem curvatura seccional constante.

Os planos totalmente geodésicos são os semi-planos Euclidianos verticais, contidos em \mathbb{H}^3 , ortogonais ao plano do infinito e são isométricos aos hemisférios, contidos em \mathbb{H}^3 ortogonais ao plano do infinito (Conforme figura 1.6).

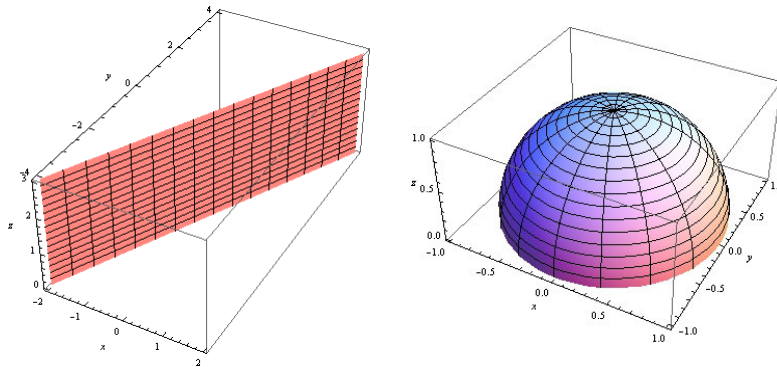


Figura 1.6: Planos totalmente geodésicos

Superfícies equidistantes são superfícies tal que seus pontos estão a uma distância fixa de um plano totalmente geodésico. No modelo do semi-espço, elas são representadas por semi-planos inclinados em relação a $\partial\mathbb{H}^3$ ou por calotas esféricas cujo bordo é uma circunferência contida no $\partial\mathbb{H}^3$ (figura 1.7).

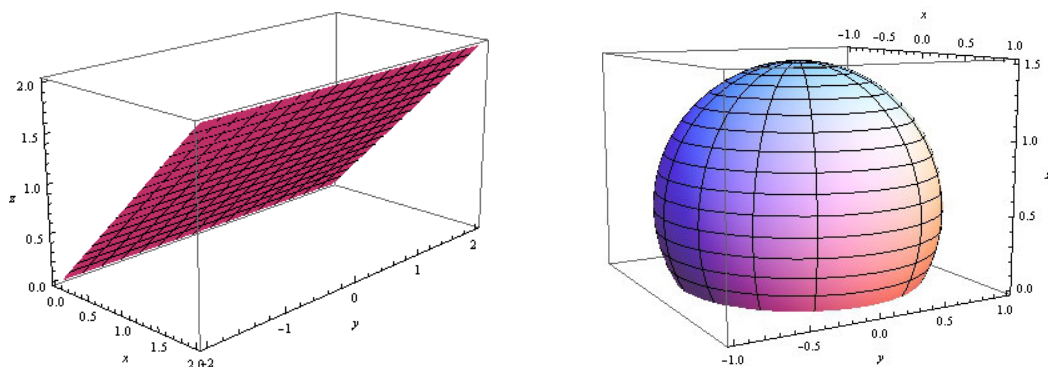


Figura 1.7: Superfícies equidistantes

Na figura (1.7), vemos do lado esquerdo uma superfície equidistante do plano $x = 0$ e do lado esquerdo vemos uma equidistante a um plano dado por um hemisfério.

As horoesferas de \mathbb{H}^3 são representadas por uma esfera tangente à $\partial\mathbb{H}^3$ (contida em $\mathbb{H}^3 \cup \partial\mathbb{H}^3$) ou por planos paralelos à $\partial\mathbb{H}^3$ (figura 1.8).

As esferas geodésicas são esferas totalmente contidas em \mathbb{H}^3 . Elas são definidas da mesma forma que no espaço Euclidiano, como os pontos que equidistam de um ponto dado. No entanto, devido a métrica em \mathbb{H}^3 ser diferente da métrica Euclidiana, o seu centro fica deslocado em relação ao centro Euclidiano.

Na figura abaixo a esquerda temos uma horoesfera dada por um plano horizontal, e a direita a horoesfera está representada por uma esfera tangente à $\partial\mathbb{H}^3$.

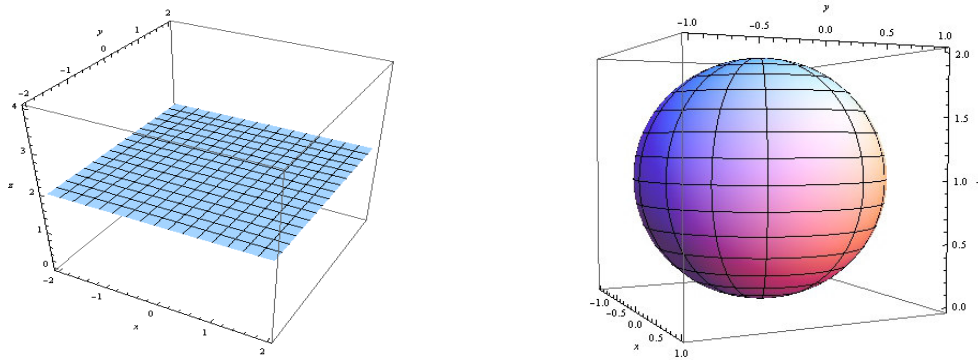


Figura 1.8: *Horoesferas*

1.8 Outros Resultados

Trabalharemos com um subgrupo das isometrias no espaço ambiente e por isso são necessárias algumas definições. Aqui M denotada o espaço ambiente.

Definição 1.45 *Uma transformação ortogonal em M é uma aplicação linear $T : M \rightarrow M$ que satisfaz*

$$\langle T(u), T(v) \rangle = \langle u, v \rangle \quad \forall u, v \in M$$

Aqui denotamos o grupo das isometrias de M com a operação composição por $ISO(M)$.

Proposição 1.46 *O grupo $ISO(M)$ é isomorfo ao grupo das matrizes $(n + 1) \times (n + 1)$, com a operação de multiplicação, do seguinte tipo*

$$G_1 = \begin{bmatrix} A & v \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

onde A é uma matriz $n \times n$ ortogonal, v é um vetor $n \times 1$ e 0 é a matriz nula $1 \times n$.

Demonstração. Ver [18].

□

Hipersuperfícies de Rotação com Curvatura Escalar constante em \mathbb{R}^n

Neste capítulo, vamos classificar as hipersuperfícies de rotação com curvatura escalar constante, que são invariantes pela ação de um subgrupo do grupo das isometrias do espaço ambiente. A fim de classificar essas hipersuperfícies, vamos definir e enunciar alguns resultados que nos ajudarão a entender e demonstrar o teorema de classificação, que veremos no final do capítulo.

Tomamos como sendo o grupo das transformações ortogonais com determinante positivo $G = O(n-1)$ (que é um subgrupo das isometrias de \mathbb{R}^n), atuando sobre as $n-1$ primeiras coordenadas de \mathbb{R}^n .

Definição 2.1 *Uma hipersuperfície (Esférica) de Rotação $M^{n-1} \subseteq \overline{M}^n(c)$ é uma hipersuperfície invariante pela ação do grupo ortogonal $G = O(n-1)$.*

Acrescentamos a palavra esférica à definição de hipersuperfícies de rotação visando o caso no espaço hiperbólico, pois são definidas outros tipos de rotações, que dão origem as hipersuperfícies parabólicas e hipersuperfícies hiperbólicas que não são o nosso caso.

Dado o grupo G , a órbita de um ponto $p \in \mathbb{R}^n$ é o conjunto

$$G(p) = \{g(p); g \in G\}$$

Se $p = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, a órbita de p sobre a ação de G é uma esfera $(n-2)$ -dimensional de raio $r(s)$ que é perpendicular a ζ , que é o eixo de rotação. Uma hipersuperfície de rotação $M^{n-1} \subset \mathbb{R}^n$ gerada pela curva α em torno do eixo ζ que não encontra α é obtida, fixando o elemento mais simples de cada órbita para ser o representante da classe. Assim pegamos as transformações ortogonais de \mathbb{R}^n que deixam fixos os pontos de ζ .

Assim temos que toda órbita de G contém um único ponto do tipo $p = (x, 0, \dots, 0, y); x > 0$ de modo que existe um correspondência biunívoca entre o conjunto $P^2 = \{(x, 0, \dots, 0, y) \in \mathbb{R}^n; x > 0\}$ e o conjunto das órbitas de G . Por essa bijeção então

temos que se $p = (x_1, 0, \dots, 0, x_n)$; $x_1 > 0$ a órbita de p sobre a ação de G é uma esfera $(n-2)$ -dimensional de raio $r(s)$.

Seja $o \in O(n-1)$, a curva $o(\alpha)$ é chamada de meridiano de M^{n-1} , e a órbita de um ponto de α sob a ação de $O(n-1)$ é chamada de paralelo de M^{n-1} . Além disso, temos que as hipersuperfícies de rotação invariantes por $O(n-1)$ são dadas pela união das órbitas $G_{\alpha(s)}$.

Assim, consideremos um curva α mergulhada em P^2 de equações paramétricas $\alpha(s) = (r(s), 0, \dots, 0, h(s))$; $r(s) > 0$ parametrizada pelo comprimento de arco, ou seja, $r'^2 + h'^2 = 1$. A ação de G sobre esta curva gera um hipersuperfície G invariante em \mathbb{R}^n e fixamos como origem do sistema de coordenadas o ponto $(0, 0, \dots, 0, 0) \in \mathbb{R}^n$.

Admitindo $\gamma(\theta_1, \dots, \theta_{n-2})$ uma parametrização ortogonal da esfera unitária $(n-2)$ -dimensional, uma parametrização de M pode ser dada por

$$\beta(\theta_1, \dots, \theta_{n-2}, s) = r(s)[\gamma(\theta_1, \dots, \theta_{n-2}, s), 0] + (0, \dots, 0, h(s)).$$

Sendo γ uma parametrização ortogonal, onde os coeficientes da métrica \tilde{g}_{ij} da esfera são dados por

$$\tilde{g}_{ij} = \left\langle \frac{\partial \gamma}{\partial \theta_i}, \frac{\partial \gamma}{\partial \theta_j} \right\rangle \delta_{ij}; \quad 1 \leq i, j \leq n-2,$$

e os vetores tangentes às curvas coordenadas de M^{n-1} , nesta parametrização são dados por

$$\begin{aligned} \frac{\partial \beta}{\partial \theta_i} &= r(s) \left(\frac{\partial \gamma}{\partial \theta_i}, 0 \right) \\ \frac{\partial \beta}{\partial s} &= r'(s)[\gamma(\theta_1, \dots, \theta_{n-2}), 0] + (0, \dots, 0, h'(s)). \end{aligned}$$

Neste caso, os g_{ij} na parametrização β tem a seguinte expressão:

$$\begin{aligned} g_{ij} &= \left\langle \frac{\partial \beta}{\partial \theta_i}, \frac{\partial \beta}{\partial \theta_j} \right\rangle = \left\langle r(s) \frac{\partial \gamma}{\partial \theta_i}, r(s) \frac{\partial \gamma}{\partial \theta_j} \right\rangle = r^2(s) \left\langle \frac{\partial \gamma}{\partial \theta_i}, \frac{\partial \gamma}{\partial \theta_j} \right\rangle \delta_{ij} = r^2(s) \tilde{g}_{ij} \\ g_{is} &= \left\langle \frac{\partial \beta}{\partial \theta_i}, \frac{\partial \beta}{\partial s} \right\rangle = r(s)r'(s) \left\langle \frac{\partial \gamma}{\partial \theta_i}, \gamma \right\rangle + r(s) \left\langle \left(\frac{\partial \gamma}{\partial \theta_i}, 0 \right), (0, \dots, 0, h'(s)) \right\rangle = 0 \\ g_{ss} &= \left\langle \frac{\partial \beta}{\partial s}, \frac{\partial \beta}{\partial s} \right\rangle = (r'(s))^2 [\gamma(\theta_1, \dots, \theta_{n-2})]^2 + (h'(s))^2 = 1 \end{aligned} \quad (2-1)$$

onde $1 \leq i, j \leq n-2$.

Consideramos Γ_{ij}^k como sendo os símbolos de Christoffel na parametrização β e $\tilde{\Gamma}_{ij}^k$ na parametrização γ da esfera unitária.

Sabemos que

$$\Gamma_{ij}^m = \frac{1}{2} \sum_k \left\{ \frac{\partial}{\partial x_i} g_{kj} + \frac{\partial}{\partial x_j} g_{ki} - \frac{\partial}{\partial x_k} g_{ij} \right\} g^{km}.$$

Como a matriz (g_{ij}) é diagonal, segue que

$$g^{km} = 0 \text{ para } k \neq m \text{ e } g^{mm} = \frac{1}{g^{mm}}.$$

Logo

$$\Gamma_{ij}^m = \frac{1}{2} \left\{ \frac{\partial}{\partial x_i} g_{jm} + \frac{\partial}{\partial x_j} g_{mi} - \frac{\partial}{\partial x_m} g_{ij} \right\} \frac{1}{g^{mm}}.$$

Consideremos agora os seguintes casos:

1) Se $i \neq j \neq k$

$$\Gamma_{ij}^m = 0. \quad (2-2)$$

2) Se $i = j$, $m \neq i$

$$\Gamma_{ii}^m = \frac{1}{2} \left\{ -\frac{\partial}{\partial x_m} g_{ii} \right\} \frac{1}{g^{mm}}. \quad (2-3)$$

3) Se $i = m$ e $j \neq i$

$$\Gamma_{ij}^i = \Gamma_{ji}^i = \frac{1}{2} \left\{ \frac{\partial}{\partial x_j} g_{ii} \right\} \frac{1}{g^{ii}}. \quad (2-4)$$

4) Se $i = j = m$

$$\Gamma_{ii}^i = \frac{1}{2} \left\{ \frac{\partial}{\partial x_i} g_{ii} \right\} \frac{1}{g^{ii}}. \quad (2-5)$$

Observamos que $\Gamma_{ij}^m = \tilde{\Gamma}_{ij}^m$ para $1 \leq i, j, m \leq n-2$. Em seguida, calcularemos as curvaturas seccionais de M^{n-1} .

Proposição 2.2 *As curvaturas seccionais de M^{n-1} em \mathbb{R}^n são dadas por*

$$K \left(\frac{\partial}{\partial \theta_i}, \frac{\partial}{\partial \theta_j} \right) = \frac{1 - (r'(s))^2}{(r(s))^2} \quad (2-6)$$

$$K \left(\frac{\partial}{\partial \theta_i}, \frac{\partial}{\partial s} \right) = \frac{-r''(s)}{r(s)}$$

onde $1 \leq i < j \leq n-2$.

Demonstração. Temos que

$$K \left(\frac{\partial}{\partial \theta_i}, \frac{\partial}{\partial s} \right) = \frac{\left\langle R \left(\frac{\partial}{\partial \theta_i}, \frac{\partial}{\partial s} \right) \frac{\partial}{\partial \theta_i}, \frac{\partial}{\partial s} \right\rangle}{g_{ii}g_{ss} - \cancel{g_{is}^2}^0} = \frac{R_{isi}^s \cancel{g_{ss}}^1}{g_{ii}} = \frac{R_{isi}^s}{g_{ii}},$$

onde

$$\begin{aligned} R \left(\frac{\partial}{\partial \theta_i}, \frac{\partial}{\partial s} \right) \frac{\partial}{\partial \theta_i} & \stackrel{\text{def}}{=} \nabla_{\frac{\partial}{\partial s}} \nabla_{\frac{\partial}{\partial \theta_i}} \frac{\partial}{\partial \theta_i} - \nabla_{\frac{\partial}{\partial \theta_i}} \nabla_{\frac{\partial}{\partial s}} \frac{\partial}{\partial \theta_i} + \nabla_{\left[\frac{\partial}{\partial \theta_i}, \frac{\partial}{\partial s} \right]_0} \frac{\partial}{\partial \theta_i} \\ & = \nabla_{\frac{\partial}{\partial s}} \sum_l \Gamma_{ii}^l \frac{\partial}{\partial \theta_l} - \nabla_{\frac{\partial}{\partial \theta_i}} \sum_l \Gamma_{si}^l \frac{\partial}{\partial \theta_l} \\ & = \sum_l \Gamma_{ii}^l \nabla_{\frac{\partial}{\partial s}} \frac{\partial}{\partial \theta_l} + \frac{\partial}{\partial s} \left(\sum_l \Gamma_{ii}^l \frac{\partial}{\partial s} \right) - \sum_l \Gamma_{si}^l \nabla_{\frac{\partial}{\partial \theta_i}} \frac{\partial}{\partial \theta_l} - \frac{\partial}{\partial \theta_i} \left(\sum_l \Gamma_{si}^l \frac{\partial}{\partial s} \right) \\ & = \sum_l \Gamma_{ii}^l \sum_s \Gamma_{sl}^s \frac{\partial}{\partial s} + \frac{\partial}{\partial s} \left(\Gamma_{ii}^l \frac{\partial}{\partial s} \right) - \sum_l \Gamma_{si}^l \sum_s \Gamma_{il}^s \frac{\partial}{\partial s} - \frac{\partial}{\partial \theta_i} \left(\Gamma_{si}^l \frac{\partial}{\partial s} \right) \\ & = \left\{ \sum_l \Gamma_{ii}^l \sum_s \Gamma_{sl}^s - \sum_l \Gamma_{si}^l \sum_s \Gamma_{il}^s + \frac{\partial}{\partial s} \Gamma_{ii}^l - \frac{\partial}{\partial \theta_i} \Gamma_{si}^l \right\} \frac{\partial}{\partial s} = R_{isi}^s \frac{\partial}{\partial s}. \end{aligned}$$

Por (1-4) temos que

$$R_{isi}^s = \Gamma_{ii}^i \Gamma_{si}^s + \Gamma_{ii}^s \Gamma_{ss}^s - \Gamma_{si}^i \Gamma_{ii}^s - \Gamma_{si}^s \Gamma_{is}^s + \sum_{l \neq i, s} \Gamma_{ii}^l \Gamma_{sl}^s + \frac{\partial}{\partial s} \Gamma_{ii}^s - \frac{\partial}{\partial \theta_i} \Gamma_{si}^s$$

que é equivalente a:

$$R_{isi}^s = \Gamma_{si}^s (\Gamma_{ii}^i - \Gamma_{is}^s) + \Gamma_{ii}^s (\Gamma_{ss}^s - \Gamma_{si}^i) + \frac{\partial}{\partial s} \Gamma_{ii}^s - \frac{\partial}{\partial \theta_i} \Gamma_{si}^s + \sum_{l \neq i, s} \Gamma_{ii}^l \Gamma_{sl}^s.$$

Usando as relações (2-1) a (2-5) obtemos

$$\begin{aligned} \Gamma_{si}^s & = \frac{1}{2} \left\{ \frac{\partial}{\partial \theta_i} g_{ss} \right\} \frac{1}{g_{ss}} = 0 \\ \Gamma_{ii}^s & = \frac{1}{2} \left\{ -\frac{\partial}{\partial s} g_{ii} \right\} \frac{1}{g_{ss,1}} = \frac{1}{2} \{ -2r'(s)r(s)\tilde{g}_{ii} \} \\ & = -r'(s)r(s)\tilde{g}_{ii} \\ \Gamma_{si}^i & = \frac{1}{2} \left\{ -\frac{\partial}{\partial s} g_{ii} \right\} \frac{1}{g_{ii}} = \frac{1}{2} \{ 2r'(s)r(s)\tilde{g}_{ii} \} \frac{1}{g_{ii}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2} \{2r'(s)r(s)\tilde{g}_{ii}\} \frac{1}{(r(s))^2\tilde{g}_{ii}} \\
&= \frac{r'(s)}{r(s)} \\
\Gamma_{ss}^s &= \frac{1}{2} \left\{ \frac{\partial}{\partial \theta_i} g_{ss} \right\} \frac{1}{g_{ss}} = 0
\end{aligned}$$

Como $\Gamma_{si}^s = 0$, segue que $\sum_{l \neq i, s} \Gamma_{ii}^l \Gamma_{sl}^s = 0$. Portanto

$$\begin{aligned}
R_{isi}^s &= -r'(s)r(s)\tilde{g}_{ii} \left\{ \frac{-r'(s)}{r(s)} \right\} + \frac{\partial}{\partial s} \{-r'(s)r(s)\tilde{g}_{ii}\} \\
&= (r'(s))^2\tilde{g}_{ii} - r'(s)r(s)\tilde{g}_{ii} - (r'(s))^2\tilde{g}_{ii} \\
&= -r''(s)r(s)\tilde{g}_{ii}.
\end{aligned}$$

Assim temos que

$$K \left(\frac{\partial}{\partial \theta_i}, \frac{\partial}{\partial s} \right) = \frac{-r''(s)r(s)\tilde{g}_{ii}}{(r(s))^2\tilde{g}_{ii}} = \frac{-r''(s)}{r(s)}.$$

Consideramos agora $1 \leq i < j \leq n-2$, por definição temos que

$$K \left(\frac{\partial}{\partial \theta_i}, \frac{\partial}{\partial \theta_j} \right) = \frac{\left\langle R \left(\frac{\partial}{\partial \theta_i}, \frac{\partial}{\partial \theta_j} \right) \frac{\partial}{\partial \theta_i}, \frac{\partial}{\partial \theta_j} \right\rangle}{g_{ii}g_{jj} - \cancel{g_{ij}^2}} = \frac{R_{iji}^j \cancel{g_{ij}}}{g_{ii}g_{jj}} = \frac{R_{iji}^j}{g_{ii}},$$

Segue que

$$g_{ii}K \left(\frac{\partial}{\partial \theta_i}, \frac{\partial}{\partial \theta_j} \right) = R_{iji}^j \quad (2-7)$$

onde

$$\begin{aligned}
R_{iji}^j &= \sum_l \Gamma_{ii}^l \Gamma_{jl}^j - \sum_l \Gamma_{ji}^l \Gamma_{il}^j + \frac{\partial}{\partial \theta_j} \Gamma_{ii}^j - \frac{\partial}{\partial \theta_i} \Gamma_{ji}^j \\
&= \Gamma_{ii}^i \Gamma_{ji}^j + \Gamma_{ii}^j \Gamma_{jj}^j - \Gamma_{ji}^i \Gamma_{ii}^j - \Gamma_{ji}^j \Gamma_{ij}^j + \sum_{l \neq i, j, s} \Gamma_{ii}^l \Gamma_{jl}^j \\
&\quad + \frac{\partial}{\partial \theta_j} \Gamma_{ii}^j - \frac{\partial}{\partial \theta_i} \Gamma_{ji}^j + \Gamma_{ii}^s \Gamma_{js}^j.
\end{aligned}$$

Como $\Gamma_{ij}^k = \tilde{\Gamma}_{ij}^k$ para $1 \leq i, j, k \leq n-2$, usando o fato que a curvatura seccional da esfera

unitária é 1, temos

$$1 = \tilde{K} \left(\frac{\partial}{\partial \theta_i}, \frac{\partial}{\partial \theta_j} \right) = \frac{\left\langle \tilde{R} \left(\frac{\partial}{\partial \theta_i}, \frac{\partial}{\partial \theta_j} \right) \frac{\partial}{\partial \theta_i}, \frac{\partial}{\partial \theta_j} \right\rangle}{\tilde{g}_{ii} \tilde{g}_{jj} - \tilde{g}_{ij}^2} \\ = \frac{\tilde{R}_{iji}^j \tilde{g}_{jj}}{\tilde{g}_{ii} \tilde{g}_{jj}} = \frac{\tilde{R}_{iji}^j}{\tilde{g}_{ii}},$$

ou seja

$$\tilde{R}_{iji}^j = \tilde{g}_{ii}.$$

Portanto,

$$R_{iji}^j = \tilde{\Gamma}_{ii}^i \tilde{\Gamma}_{ji}^j + \tilde{\Gamma}_{ii}^j \tilde{\Gamma}_{jj}^j - \tilde{\Gamma}_{ji}^i \tilde{\Gamma}_{ii}^j - \tilde{\Gamma}_{ji}^j \tilde{\Gamma}_{ij}^j \\ + \sum_{l \neq i, j, s} \tilde{\Gamma}_{ii}^l \tilde{\Gamma}_{jl}^j + \frac{\partial}{\partial \theta_j} \tilde{\Gamma}_{ii}^j - \frac{\partial}{\partial \theta_i} \tilde{\Gamma}_{ji}^j + \tilde{\Gamma}_{ii}^s \tilde{\Gamma}_{js}^j \\ = \tilde{R}_{iji}^j + \tilde{\Gamma}_{ii}^s \tilde{\Gamma}_{js}^j = \tilde{g}_{ii} + \tilde{\Gamma}_{ii}^s \tilde{\Gamma}_{js}^j$$

Temos que

$$\tilde{\Gamma}_{ii}^s \tilde{\Gamma}_{js}^j = \left(\frac{1}{2} \{ -2r'(s)r(s)\tilde{g}_{ii} \} \right) \left(\frac{1}{2} \{ 2r'(s)r(s)\tilde{g}_{ii} \} \frac{1}{(r(s))^2 \tilde{g}_{ii}} \right) \\ = (-r'(s)r(s)\tilde{g}_{ii}) \left(\frac{r'(s)}{r(s)} \right) \\ = -(r'(s))^2 \tilde{g}_{ii}.$$

Segue de (2-1) e (2-7) que

$$(r(s))^2 \tilde{g}_{ii} = K \left(\frac{\partial}{\partial \theta_i}, \frac{\partial}{\partial \theta_j} \right) = \tilde{g}_{ii} - (r'(s))^2 \tilde{g}_{ii}$$

e portanto

$$K \left(\frac{\partial}{\partial \theta_i}, \frac{\partial}{\partial \theta_j} \right) = \frac{1 - (r'(s))^2}{(r(s))^2}.$$

□

Proposição 2.3 A Curvatura Escalar S de uma Hipersuperfície de Rotação M^{n-1} em \mathbb{R}^n é constante ao longo das órbitas e é dada por

$$S = \frac{-2r''(s)}{(n-1)r(s)} + \frac{(n-3)(1-r'^2(s))}{(n-1)r^2(s)}, \quad (2-8)$$

onde s é o comprimento de arco da curva.

Demonstração. Temos que S é a média da media normalizada das curvaturas Seccionais em uma base de subespaços bidimensionais ortogonais do espaço tangente em um dado ponto $p \in M$. Nas coordenadas (s, Θ) , temos que as curvaturas seccionais são dadas em (2-6). Vamos agora calcular a curvatura de Ricci no ponto p na direção de cada vetor da base. Temos por (1-5) que a curvatura de Ricci no vetor $\frac{\partial}{\partial \theta_1}$ é dada por

$$\begin{aligned} Ric_p \left(\frac{\partial}{\partial \theta_1} \right) &= \frac{1}{n-2} \sum_i \langle R \left(\frac{\partial}{\partial \theta_1}, z_i \right) \frac{\partial}{\partial \theta_1}, z_i \rangle, \quad i \neq 1 \\ &= \frac{1}{n-2} \left((n-3) \left(\frac{1 - (r'(s))^2}{(r(s))^2} \right) - \frac{r''(s)}{r(s)} \right). \end{aligned}$$

Seguindo assim sucessivamente, temos que para cada $\frac{\partial}{\partial \theta_i}$ com $i = 1, \dots, n-2$ a curvatura de Ricci será a mesma, onde em $\frac{\partial}{\partial \theta_{n-2}}$ temos

$$Ric_p \left(\frac{\partial}{\partial \theta_{n-2}} \right) = \frac{1}{n-2} \left((n-3) \left(\frac{1 - (r'(s))^2}{(r(s))^2} \right) - \frac{r''(s)}{r(s)} \right).$$

Resta agora calcular a ultima curvatura de Ricci em $\frac{\partial}{\partial \theta_s}$ que é dada por

$$\begin{aligned} Ric_p \left(\frac{\partial}{\partial s} \right) &= \frac{1}{n-2} \sum_i \langle R \left(\frac{\partial}{\partial s}, z_i \right) \frac{\partial}{\partial s}, z_i \rangle, \quad i \neq s \\ &= \frac{-1}{n-2} (n-2) \left(\frac{r''(s)}{r(s)} \right). \end{aligned}$$

Agora, vamos calcular a curvatura escalar S que é dada em (1-6) por

$$S(p) = \frac{1}{n-1} \sum_{j=1}^{n-1} Ric_p(z_j).$$

Somando as $n - 1$ curvaturas de Ricci calculadas acima temos,

$$\begin{aligned} S(p) &= \frac{1}{(n-1)(n-2)} \left((n-2)(n-3) \left(\frac{1 - (r'(s))^2}{(r(s))^2} \right) - 2(n-2) \left(\frac{r''(s)}{r(s)} \right) \right) \\ &= (n-3) \left(\frac{1 - (r'(s))^2}{(n-1)(r(s))^2} \right) - 2 \left(\frac{r''(s)}{(n-1)r(s)} \right). \end{aligned}$$

Assim

$$S(p) = \frac{-2r''}{(n-1)r} + \frac{(n-3)(1-r'^2)}{(n-1)r^2}.$$

□

A partir de agora vamos supor que a curvatura escalar S é constante.

A proposição anterior nos mostra que encontrar uma hipersuperfície invariante por $O(n-1)$, com curvatura escalar constante S , e gerada por um curva $\alpha(s)$, parametrizada pelo comprimento de arco, corresponde a encontrar uma solução $r(s)$ da equação diferencial de segunda ordem

$$S = \frac{-2r''}{(n-1)r} + \frac{(n-3)(1-r'^2)}{(n-1)r^2},$$

que é equivalente a

$$2rr'' - (n-3)(1-r'^2) + (n-1)Sr^2 = 0. \quad (2-9)$$

A fim de determinar $\alpha(s)$ a partir de uma solução de (2-9) fazemos o uso da geometria das orbitas espaciais. Como $\alpha(s)$ está parametrizada pelo comprimento de arco temos que

$$r'^2 + h'^2 = 1, \quad (2-10)$$

onde $h(s)$ mede a altura Riemanniana com relação ao hiperplano $x_n = 0$. Neste caso, a curva $\alpha(s)$ fica completamente determinada por (2-9) e (2-10). Assim o problema de classificação é reduzido a determinar as curvas integráveis, do sistema dado pelas equações (2-9) e (2-10). Incluímos nesse conjunto as curvas de reunião ortogonal a fronteira das órbitas espaciais, isto é, as soluções onde $r(s) \rightarrow 0$, juntamente com $r'^2(s) \rightarrow 1$, quando $s \rightarrow s_0$.

A partir de agora assumimos que $n \geq 4$, pois o caso $n = 3$ corresponde às superfícies invariantes pela ação do grupo $O(2)$, que são as de revolução, e tem uma natureza diferente devido ao não aparecimento do fator $(n-3)(1-r'^2)$ na equação (2-9).

Proposição 2.4 A equação (2-9) é equivalente a equação diferencial de primeira ordem

$$r^{n-3}(1-r'^2) - Sr^{n-1} = K, \quad (2-11)$$

onde K é uma constante. Além disso, para uma solução constante igual a r_0 tem-se que $S > 0$, $r_0^2 = \frac{(n-3)}{(n-1)S}$ e

$$K_0 = \frac{2}{(n-1)} \left[\frac{(n-3)}{(n-1)S} \right]^{\frac{n-3}{2}}$$

Demonstração. Multiplicando a equação (2-9) por $-r'r^{n-4}$ obtemos

$$-2r'r''r^{n-3} + (n-3)(1-r'^2)r^{n-4}r' - (n-1)Sr'r^{n-2} = 0.$$

Observamos que o lado esquerdo da expressão acima é justamente a derivada da função $r^{n-3}(1-r'^2) - Sr^{n-1}$, logo

$$(r^{n-3}(1-r'^2) - Sr^{n-1})' = 0.$$

Integrando em ambos os lados temos que,

$$r^{n-3}(1-r'^2) - Sr^{n-1} = K,$$

onde K é uma constante. Fazendo $r(s) = r_0$ na equação (2-9) segue que

$$\begin{aligned} -(n-3) + (n-1)Sr_0^2 &= 0, \quad \text{assim} \\ r_0^2 &= \frac{(n-3)}{(n-1)S}, \end{aligned} \quad (2-12)$$

e substituindo r_0 na equação (2-11) temos,

$$r_0^{n-3} - Sr_0^{n-1} = K_0,$$

que é equivalente a

$$(r_0^2)^{\frac{n-3}{2}}(1 - Sr_0^2) = K_0.$$

Logo,

$$\left[\frac{n-3}{(n-1)S} \right]^{\frac{n-3}{2}} \left(1 - S \left(\frac{n-3}{(n-1)S} \right) \right) = K_0 \quad e$$

assim temos que

$$K_0 = \frac{2}{n-1} \left[\frac{(n-3)}{(n-1)S} \right]^{\frac{n-3}{2}}.$$

Observamos que se r_0 é uma solução constante de (2-9), então por (2-12) temos que $S = \frac{n-3}{(n-1)r_0^2} > 0$, concluindo assim a demonstração. \square

Corolário 2.5 *As soluções constantes do sistema formado por (2-9) e (2-10) correspondem aos cilindros equidistantes de ζ , isto é, as hipersuperfícies isométricas a $\zeta \times S^{n-2}(r_0)$. Além disso, a curvatura escalar constante S varia no intervalo $(0, \infty)$.*

Demonstração. Das equações (2-9) e (2-10) para $r(s) = r_0$, são dadas por:

$$-(n-3) + (n-1)Sr_0^2 = 0 \quad e \quad h'^2 = 1.$$

Logo temos que $h'(s) = \pm 1$, assim $h(s) = s$, pois $h(s) > 0$. Temos que a órbita é isométrica a um esfera de raio r_0 .

Observamos que as hipersuperfícies de rotação são produtos Riemannianos de ζ pela órbita constante. Como $r_0^2 = \frac{(n-3)}{(n-1)S}$ temos que a curvatura escalar S é sempre positiva para uma solução constante, ou seja, $S \in (0, \infty)$. \square

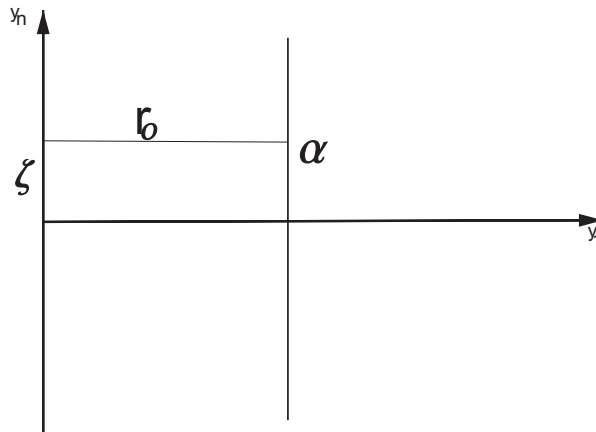


Figura 2.1: Cilindro em \mathbb{R}^n

Vamos agora fazer um estudo qualitativo do comportamento das curvas de nível da equação (2-11).

2.1 Curvas de Nível

Definição 2.6 *Seja $H : D \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ uma função de duas variáveis, definida em um domínio D . Dado um número (nível) $K \in \mathbb{R}$, definimos a curva de nível associada a K como o conjunto*

$$\{(u, v) \in D \subset \mathbb{R}^2; H(u, v) = K\},$$

isto é, o conjunto de todos os pontos do domínio de H para os quais o valor da função é K .

Continuando o estudo da curvatura escalar de M , temos pela equação (2-11), que uma solução local $r(s)$ de (2-9) juntamente com a sua derivada $r'(s)$, denotado por (r, r') é um subconjunto das curvas de nível da função H (subconjunto no sentido que há restrições para $r(s)$ e $r'(s)$) definida por

$$H(u, v) = u^{n-3}(1 - v^2 - Su^2)$$

onde $u > 0$.

Observamos que essa função possui um único ponto crítico que é dado quando $S > 0$ e pertence ao eixo horizontal. De fato, temos que o gradiente de $H(u, v)$ é

$$\nabla H = u^{n-4}((n-3)(1-v^2) - (n-1)Su^2, -2uv).$$

Queremos encontrar os pontos críticos dessa função, ou seja, resolver o sistema

$$\begin{cases} (n-3)(1-v^2) - (n-1)Su^2 = 0 \\ -2uv = 0. \end{cases}$$

Pela 2ª equação temos $v = 0$, pois $u \neq 0$.

$$\text{Assim, } (n-3)(1-v^2) - (n-1)Su^2 = 0, \text{ ou seja, } u_0 = \sqrt{\frac{n-3}{(n-1)S}}.$$

Logo, temos que o ponto crítico é $c_0 = \left(\sqrt{\frac{n-3}{(n-1)S}}, 0\right)$. Vamos analisar que tipo de ponto é c_0 . Calculando a matriz hessiana obtemos,

$$\frac{\partial^2 H}{\partial u^2} = u^{n-5}(n-4)(n-3)(1-v^2) - (n-1)(n-2)Su^{n-3}$$

$$\frac{\partial^2 H}{\partial v^2} = -2u^{n-3}$$

$$\frac{\partial^2 H}{\partial v \partial u} = \frac{\partial^2 H}{\partial u \partial v} = -2vu^{n-4}(n-3).$$

Substituindo o ponto crítico c_0 nas equações acima, obtemos a matriz

$$H(c_0) = u_0^{n-3} \begin{bmatrix} (n-4)(n-3)u_0^{-2} - (n-1)(n-2)S & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$$

observamos que $u_0^{-2} = \frac{(n-1)S}{n-3}$, assim

$$\begin{aligned}
H(c_0) &= u_0^{n-3} \begin{bmatrix} S(n-1)(n-4) - S(n-1)(n-2) & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} \\
&= u_0^{n-3} \begin{bmatrix} S(n-1)[(n-4) - (n-2)] & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} \\
&= u_0^{n-3} \begin{bmatrix} -2S(n-1) & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}.
\end{aligned}$$

Logo, $\det[H(c_0)] = -2S(n-1) \cdot (-2) = 4S(n-1) > 0$ e como $a_{11} < 0$ na matriz acima, temos que, c_0 é ponto de máximo.

Definição 2.7 Dizemos que uma solução $r(s) > 0$ de (2-11) é completa se $r(s)$ está definida para todo s , ou se (r, r') admite apenas $(0, 1)$ e $(0, -1)$ como valores limites (observamos que essa mesma definição é válida no espaço hiperbólico).

Lema 2.8 Todas as soluções da equação (2-11) podem ser estendidas para soluções completas. O subconjunto (r, r') são as componentes conexas das curvas de nível, indicadas nas figuras 2.2, 2.3 e 2.4.

Demonstração. Tomemos o semi-plano aberto $\{(u, v) : u > 0\}$ com as curvas de nível $H(u, v) = K$. Cada curva é uma união suave de dois gráficos

$$v = \pm \sqrt{1 - Su^2 - \frac{K}{u^{n-3}}}$$

exceto para o nível K_0 dado pela proposição (2.4), quando $S > 0$. A curva de nível $H = K_0$ possui um único ponto crítico, que está no eixo horizontal, como foi demonstrado acima.

Para $K = 0$, as curvas de nível de equação são $v^2 + Su^2 = 1$ é uma cônica limitada no semi-plano por $(0, 1)$ e $(0, -1)$.

Para $K \neq 0$, note que a curva de nível é fechada no semi plano aberto (no semi círculo para $u > 0$). Portanto, é um subconjunto completo. De fato, se $u \rightarrow 0^+$ tem-se que $v^2 \rightarrow \infty$ assim a curva de nível assintota o eixo vertical a uma distancia positiva.

Consideremos a folheação do semi-plano aberto por curvas de nível $H = K$ para $S = 0$, $S > 0$ e $S < 0$:

Caso $S = 0$. Observamos que $v^2 = 1 - \frac{K}{u^{n-3}}$. Aqui K assume todos os valores e $H(u, v)$ não possui pontos críticos. Para $K = 0$ temos duas assíntotas em $v = 1$ e $v = -1$. Para $K > 0$ quando $u \rightarrow \infty$ a curva tende para as assíntotas horizontais, já quando $K < 0$ e $u \rightarrow 0$ a curva vai para o infinito, e quando $u \rightarrow \infty$ a curva tende por cima para as assíntotas verticais (Figura 2.2).

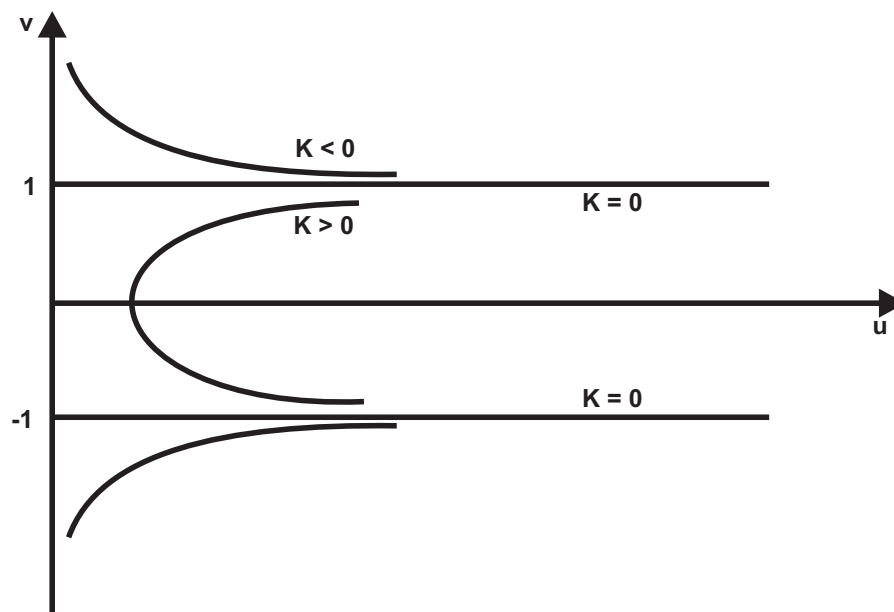


Figura 2.2: Curva de Nível para $S = 0$

Caso $S > 0$. Temos que $H(u, v)$ possui o ponto crítico K_0 que é de máximo. Assim, todo nível K é menor que K_0 . Observamos que para $K = 0$, $v^2 + Su^2 = 1$, descreve a metade de uma elipse, limitada no eixo v por $(0, 1)$ e $(0, -1)$ e no eixo u por $(1/\sqrt{S}, 0)$. Se $K < 0$ quando $u \rightarrow 0$ temos que $v \rightarrow \pm\infty$, assim a curva assintota o eixo vertical. Se $0 \leq K \leq K_0$ a curva de nível é compacta (Figura 2.3).

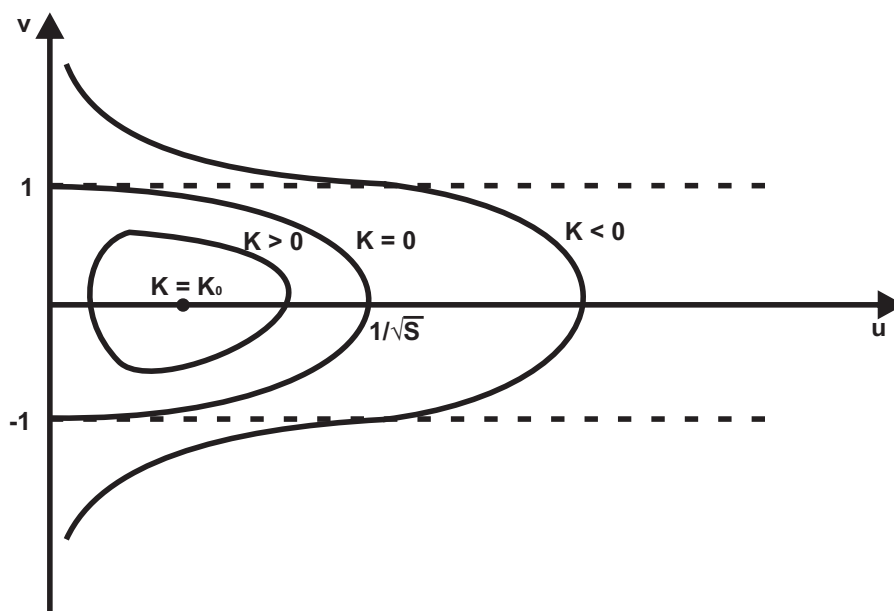


Figura 2.3: Curva de Nível para $S > 0$

Caso $S < 0$. Neste caso, a equação é $v^2 = 1 - Su^2 - \frac{K}{u^{n-3}}$, onde K assume todos os valores e $H(u, v)$ não tem pontos críticos. Para $K = 0$, $v^2 - \frac{u^2}{(1/\sqrt{S})^2} = 1$, a cônica formada são dois ramos de uma hipérbole na região relevante. Para $K > 0$, temos que $v^2 + Su^2 = 1 - K/u^{n-3}$. Assim, $1 - K/u^{n-3} < 1$, e a curva de nível assintota os ramos da hipérbole pelo lado de dentro. Para $K < 0$, se $u \rightarrow 0$ temos que $v \rightarrow \pm\infty$, a curva de nível assintota os ramos da hipérbole pelo lado de fora (Figura 2.4).

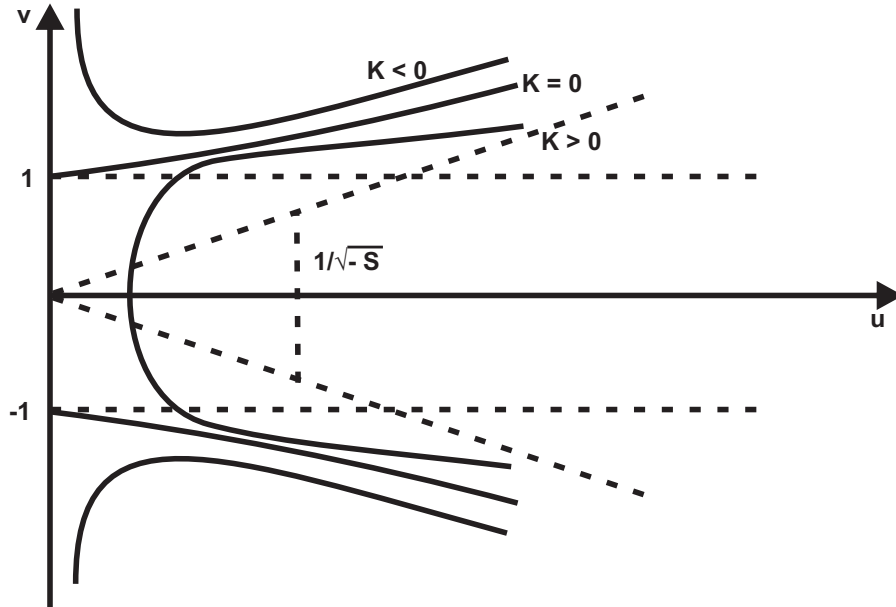


Figura 2.4: Curva de Nível para $S < 0$

□

Segue a partir da teoria de EDO que uma solução local $r(s)$ de (2-11) pode ser estendida através de valores de s para os quais o subconjunto (r, r') está contido no semi-espaço.

Logo, concluímos que se $K = 0$, as soluções são completas no sentido da definição (2.7), e para $K \neq 0$ podem ser estendidas para soluções completas, através das componentes conexas das curvas de nível (r, r') .

Lema 2.9 Dada uma solução $(r(s), h(s))$ do sistema dado pelas equações (2-9) e (2-10), determinamos uma solução $r(s)$ de (2-11) tal que

$$r'^2 \leq 1$$

Demonstração. Segue a partir da equação (2-10) que $r'^2 \leq 1$.

□

Agora, estamos em condições de enunciar e demonstrar o principal teorema do capítulo, que classifica as hipersuperfícies completas de rotação, em \mathbb{R}^n , com curvatura escalar constante S .

2.2 Teorema de Classificação em \mathbb{R}^n

Teorema 2.10 *Classificação das Hipersuperfícies de Rotação em \mathbb{R}^n .*

- (i) *A menos de translações verticais, existe precisamente uma família a um parâmetro de hipersuperfícies de rotação completas, com curvatura escalar constante $S = 0$, convergindo para o hiperplano \mathbb{R}^{n-1} . Em \mathbb{R}^4 , a curva no plano é uma parábola. Em \mathbb{R}^5 , é uma catenária. Em \mathbb{R}^n , $n \geq 6$, ela assintota dois eixos horizontais.*
- (ii) *Para $S > 0$, existe uma família a um parâmetro de hipersuperfícies mergulhadas, completas com curvatura escalar constante S , todas periódicas e cilíndricamente limitadas, que convergem para uma sequência de esferas, duas a duas verticalmente tangentes (veja figura 2.5).*
- (iii) *Não existe hipersuperfície de rotação completa com curvatura escalar constante $S < 0$.*

Demonstração. Pelo Lema (2.9), todas as soluções da equação (2-11) são completas, mas aquelas correspondentes às hipersuperfícies completas em \mathbb{R}^n também devem satisfazer a desigualdade $r'^2(s) \leq 1$, como já foi demonstrado. Assim, apenas as curvas de nível contidas na região $(v(s))^2 \leq 1$ serão levadas em consideração. Os possíveis valores de K são indicados nas figuras 2.2, 2.3, 2.4, dependendo se $S = 0$, $S > 0$ ou $S < 0$.

Em qualquer dos casos temos que $u = r(s)$ e $v = r'(s)$, de modo que a intersecção das curvas de nível com o eixo horizontal $v = 0$ corresponda aos pontos em que a distância da curva geradora α em relação ao eixo de rotação ζ seja crítico; claramente a simetria de todas as curvas de nível permite distâncias críticas apenas do tipo máxima e mínima.

Sem perda de generalidade, vamos tomar $h(0) = 0$ para altura inicial.

Prova do item(i): Para $S = 0$, a figura 2.2, mostra que K assume valores em $[0, \infty)$. Para o valor $S = 0$ e $K = 0$, temos que, substituindo na equação

$$r^{n-3}(1 - (r')^2) - Sr^{n-1} = K ,$$

obtemos,

$$r^{n-3}(1 - (r')^2) = 0 \quad \text{como} \quad r^{n-3} > 0, \text{ temos} \quad 1 - (r')^2 = 0$$

$$(r')^2 = 1 \quad \text{assim,} \quad r' = 1 \quad \text{ou} \quad r' = -1 .$$

Se $r' = 1$, temos $r(s) = s$. Se $r' = -1$, segue $r(s) = -s$, um absurdo pois $r(s) > 0$.

Assim $r(s) = s$, $s \geq 0$.

Pela equação (2-10), temos que

$$(r')^2 + (h')^2 = 1, \quad \text{implica que,} \quad (h')^2 = 1 - (r')^2.$$

Logo,

$$(h')^2 = 0 \quad \text{e} \quad h(s) = s_0 = \text{cte}.$$

Como,

$$h(0) = 0 \quad \text{segue-se que,} \quad h(s) = 0 \quad \forall s.$$

Assim, temos as soluções triviais igual a $r(s) = s$ e $h(s) = 0$, $s \geq 0$, correspondendo ao hiperplano gerado pela reta horizontal $h(s) = 0$.

Fixado $K > 0$, r atinge um único mínimo $r_1 > 0$, que tomamos como distância inicial $r(0)$.

Por (2-10) e (2-11) temos que

$$(h')^2 = 1 - (r')^2 = \frac{K}{r^{n-3}}, \quad \text{onde} \quad K = r_1^{n-3},$$

pois, quando $v = 0$, temos $r^{n-3} = K$, r não tem limite superior, e neste caso, a hipersuperfície não é cilíndricamente limitada.

Longe de r_1 , podemos dividir $(h')^2$ por $(h')^2 + (r')^2$, Obtendo,

$$\begin{aligned} \frac{h'^2}{h'^2 + r'^2} &= \frac{r_1^{n-3}}{r^{n-3}} \quad \text{equivalente a,} \quad h'^2 r^{n-3} = r_1^{n-3} h'^2 + r'^2 r_1^{n-3} \\ &= h'^2 (r^{n-3} - r_1^{n-3}) = r'^2 r_1^{n-3} \\ \frac{h'^2}{r'^2} &= \frac{r_1^{n-3}}{r^{n-3} - r_1^{n-3}} \\ \left(\frac{dh}{ds} \right)^2 &= \left(\frac{dr}{ds} \right)^2 = \frac{r_1^{n-3}}{r^{n-3} - r_1^{n-3}}. \end{aligned}$$

Separando as diferenciais e integrando em ambos os lados, temos que

$$\pm h = \sqrt{r_1^{n-3}} \int_{r_1}^r \frac{dr}{\sqrt{r^{n-3} - r_1^{n-3}}}.$$

Portanto, a curva do plano é formada por dois gráficos simétricos dados acima. Considere-

rando na integral acima, $n = 4$, temos

$$\pm h = \sqrt{r_1} \int_{r_1}^r \frac{dr}{\sqrt{r-r_1}}.$$

Efetuada a mudança de variável $y = r - r_1$ segue que $dy = dr$, logo

$$= \sqrt{r_1} \int \frac{dy}{\sqrt{y}} = 2\sqrt{r_1} \sqrt{y} \Big|_{r_1}^r.$$

Voltando para a variável anterior temos que

$$= 2\sqrt{r_1} \sqrt{r-r_1} \Big|_{r_1}^r = 2\sqrt{r_1} \sqrt{r-r_1}.$$

Logo,

$$\pm h = 2\sqrt{r_1} \sqrt{r-r_1} \quad \text{que é equivalente a,} \quad \frac{h^2}{4r_1} = r - r_1.$$

Assim, a curva no plano são parábolas. Resolvendo agora a integral para $n = 5$, temos

$$\begin{aligned} \pm h &= \sqrt{r_1^2} \int_{r_1}^r \frac{dr}{\sqrt{r^2 - r_1^2}} \\ &= \int_{r_1}^r \frac{dr}{\sqrt{\left(\frac{r}{r_1}\right)^2 - 1}}. \end{aligned}$$

Fazendo a mudança $\frac{r}{r_1} = \sec \theta$, segue-se que $dr = r_1 \sec \theta \tan \theta d\theta$,

$$\begin{aligned} \int_{r_1}^r \frac{dr}{\sqrt{\left(\frac{r}{r_1}\right)^2 - 1}} &= r_1 \int \frac{\sec \theta \tan \theta d\theta}{\tan \theta} \\ &= r_1 \int \sec \theta d\theta. \end{aligned}$$

Assim,

$$= r_1 \ln(\sec \theta + \tan \theta) + C.$$

Portanto,

$$\pm h = r_1 \ln \left(\frac{r}{r_1} \pm \sqrt{\frac{r^2 - r_1^2}{r_1^2}} \right) \Big|_{r_1}^r = \ln \left(\frac{\pm \sqrt{r^2 - r_1^2} + r}{r_1} \right).$$

Desta forma,

$$h = r_1 \ln \left(\frac{\sqrt{r^2 - r_1^2} + r}{r_1} \right) \quad \text{e, portanto,} \quad \frac{h}{e^{r_1}} = \frac{\sqrt{r^2 - r_1^2}}{r_1} + \frac{r}{r_1},$$

e,

$$-h = r_1 \ln \left(\frac{-\sqrt{r^2 - r_1^2} + r}{r_1} \right). \quad \text{Portanto,} \quad \frac{-h}{e^{r_1}} = \frac{-\sqrt{r^2 - r_1^2}}{r_1} + \frac{r}{r_1}.$$

Somando as duas últimas equações obtemos

$$\frac{\frac{h}{e^{r_1}} + \frac{-h}{e^{r_1}}}{2} = \frac{r}{r_1} \quad \text{equivalente a,} \quad \cosh \left(\frac{h}{r_1} \right) = \frac{r}{r_1}.$$

o que mostra que as curvas no plano, são catenárias.

Quando $n \geq 6$, temos que, para $r \geq 2r_1$, obtemos a seguinte estimativa para a integral

$$\begin{aligned} \int_{r_1}^r \frac{dr}{\sqrt{r^{n-3} - r_1^{n-3}}} &\leq \lim_{r \rightarrow \infty} \int_{2r_1}^r \frac{dr}{\sqrt{r^{n-3} - \frac{r^{n-3}}{2}}} = \sqrt{2} \lim_{r \rightarrow \infty} \int_{2r_1}^r \frac{dr}{\sqrt{r^{n-3}}} \\ &= \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{-2\sqrt{2}}{(n-5)\sqrt{r^{(n-5)}}} \Big|_{2r_1}^r = \lim_{r \rightarrow \infty} \left(\frac{-2\sqrt{2}}{(n-5)\sqrt{r^{(n-5)}}} + \frac{2\sqrt{2}}{(n-5)\sqrt{2r_1^{(n-5)}}} \right). \end{aligned}$$

Assim a integral é uniformemente limitada, pois não depende do ponto, e neste caso a curva no plano assintota as duas retas horizontais $\pm h = cte$. Geometricamente, isto nos mostra que exceto para dimensões $n = 4$ e 5 , a distancia de uma hipersuperfície de rotação em \mathbb{R}^n com curvatura escalar zero, a partir do eixo de rotação atinge o infinito num intervalo finito da altura. Esta propriedade também é valida para as hipersuperfícies de rotação em \mathbb{R}^n com curvatura media zero, exceto para $n = 3$, pois temos que o catenoide é a única superfície de revolução que é mínima (ver [12]).

Para o caso $K < 0$ e $S = 0$, temos que as curvas de nível não pertencem a região relevante, dada pelo lema (2.9), e por esse motivo não são levadas em consideração.

As afirmações são claras, desde que os dois gráficos se liguem suavemente em $(r_1, 0)$ com a reta paralela a ζ , e isto completa a prova de (i).

Prova do item(ii): Para $S > 0$ a partir da figura 2.3, temos que o conjunto admissível para K é $[0, K_0]$ e que todas as curvas de nível são compactas. Temos que as curvas de nível correspondentes a valores negativos de K correspondem a hipersuperfícies não completas,

pois não pertencem a região relevante $r'^2 \leq 1$. O valor $K = K_0$ nos dá a solução $r(s) = r_0$ e $h(s) = s$ correspondendo ao cilindro do corolário (2.5). Para o valor $K = 0$ temos a seguinte expressão:

$$\begin{aligned} r^{n-3}(1-r'^2) - Sr^{n-1} &= 0 \Leftrightarrow \\ r^{n-1}(r^{-2}(1-r'^2) - S) &= 0 \end{aligned}$$

Como $r^{n-1} > 0$ temos

$$(1-r'^2)r^2 - S = 0$$

Assim

$$r'^2 + Sr^2 - 1 = 0,$$

que é equivalente a,

$$r'^2 = 1 - Sr^2.$$

Logo,

$$r' = \sqrt{1 - Sr^2} \quad \text{ou} \quad r' = -\sqrt{1 - Sr^2}.$$

Vamos considerar $r' > 0$, e o outro caso segue de maneira análoga. Assim temos,

$$\frac{dr}{ds} = \sqrt{1 - Sr^2} \quad \text{e, portanto,} \quad \int \frac{dr}{\sqrt{1 - (\sqrt{S}r)^2}} = \int_0^s ds.$$

Fazendo $\sqrt{S}r = \sin \theta$, temos que, $\sqrt{S}dr = \cos \theta d\theta$. Logo,

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{S}} \int \frac{\cos \theta d\theta}{\sqrt{1 - \sin^2 \theta}} &= \int_0^s ds \\ \frac{1}{\sqrt{S}} \int \frac{\cos \theta d\theta}{\sqrt{\cos^2 \theta}} &= \int_0^s ds \quad \text{ou seja,} \quad \frac{\theta}{\sqrt{S}} = s. \end{aligned}$$

Assim, $\theta = s\sqrt{S}$, e substituindo a condição inicial $r(0) = 0$, obtemos que

$$r(s) = \frac{\sin \sqrt{S}s}{\sqrt{S}}.$$

Como $r'^2 + h'^2 = 1$, podemos obter a expressão de $h(s)$, da seguinte maneira

$$h' = \sqrt{1 - r'^2} \quad \text{implica que,} \quad h' = \sqrt{1 - \cos^2 \sqrt{S}s}$$

$$\frac{dh}{ds} = \sin \sqrt{S}s \quad \text{logo,} \quad h(s) = \int \sin \sqrt{S}s \, ds .$$

$$h(s) = \frac{-\cos \sqrt{S}s}{\sqrt{S}} + C, \quad \text{como } h(0) = 0, \text{ segue } h(s) = \frac{1}{\sqrt{S}}(1 - \cos \sqrt{S}s) .$$

Logo temos as seguintes soluções quando $K = 0$

$$r(s) = \frac{\sin \sqrt{S}s}{\sqrt{S}}, \quad h(s) = \frac{1}{\sqrt{S}}(1 - \cos \sqrt{S}s) .$$

Suas translações correspondem a uma sequência de $(n-1)$ esferas de raio $\frac{1}{\sqrt{S}}$ duas a duas verticalmente tangentes no ponto de intersecção com o eixo de revolução.

As curvas de nível dadas por $K \in (0, K_0)$ correspondem às completas, periódicas e cilindricamente limitadas hipersuperfícies. De fato, segue a partir da compacidade da curva de nível que a função $r(s)$ é periódica, a partir de um mínimo $r_1 > 0$, a um máximo $r_2 < \frac{1}{\sqrt{S}}$, e como $r'^2 \leq 1$, $h'^2 = 1 - r'^2$ é positiva em toda parte. Assim h é monótona, e a curva geradora está imersa no plano.

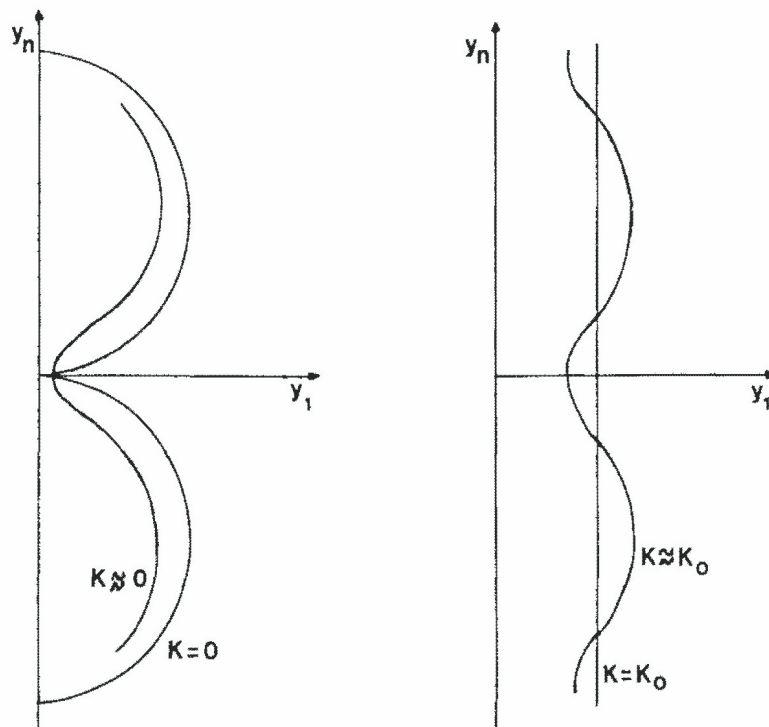


Figura 2.5: Hipersuperfícies de \mathbb{R}^n com $S > 0$

Na figura 2.5, vemos geometricamente como as hipersuperfícies convergem periodicamente de um lado para um cilindro e no outro lado para as esferas.

Temos ainda que qualquer curva do plano atingindo o eixo y_n atinge ortogonalmente. Este comportamento está em contraste com a dimensão 3, pois existem superfícies de revolução em \mathbb{R}^3 com curvatura Gaussiana constante nula, em que a curva no plano corta o eixo de revolução com um ângulo agudo, como por exemplo os cones, analogamente para curvatura gaussiana positiva.

Prova do item(iii): Para $S < 0$ a figura 2.4, mostra que para $K > 0$ existem soluções locais, embora nenhuma dessas soluções possa ser levada em consideração, pelo fato de que em nenhum caso $r'^2 \leq 1$ em um intervalo finito. Para $K \leq 0$ não existem nem mesmo soluções locais, com isso terminamos a prova do teorema de classificação.

□

Observação 2.11 *Geometricamente as soluções completas de (2-9) dão origem a hipersuperfícies de rotação completas. Quando (r, r') tem $(0, \pm 1)$ como valores limite, temos que a curva corta o eixo de rotação ortogonalmente. De fato, $r'^2 = 1$, substituindo em (2-10) implica que $h'^2 = 0$ e, portanto, temos que $\frac{dh}{ds} = 0$ então $\frac{dh}{dr} = 0$.*

Hipersuperfícies de Rotação com Curvatura Escalar constante em \mathbb{H}^n

No capítulo anterior, classificamos as hipersuperfícies de rotação com curvatura escalar constante em \mathbb{R}^n . Nesse capítulo, obteremos um teorema de classificação considerando hipersuperfícies de rotação, com curvatura escalar constante, no espaço hiperbólico \mathbb{H}^n . A fim de obter tal classificação obteremos alguns resultados preliminares, que serão similares ao caso euclidiano.

Consideramos da mesma forma que no caso euclidiano, como sendo o grupo das transformações ortogonais com determinante positivo $G = O(n-1)$ (que é um subgrupo das isometrias de \mathbb{H}^n), atuando sobre as $n-1$ primeiras coordenadas de \mathbb{H}^n (que age da mesma forma que no caso euclidiano). Como foi definido no capítulo anterior, as rotações que estaremos fazendo no espaço hiperbólico são do tipo esféricas (pois sabemos que existem rotações do tipo parabólica e hiperbólicas em \mathbb{H}^n).

Seja M^{n-1} uma hipersuperfície de rotação em \mathbb{H}^n , isto é, invariante pelo grupo ortogonal $O(n-1)$. Vamos parametrizar a curva $\alpha(s)$ em \mathbb{H}^3 por $y_1 = y_1(s) \geq 0$, $y_n = y_n(s)$ e $y_{n+1} = y_{n+1}(s)$. Tomamos $\varphi(t_1, \dots, t_{n-2}) = (\varphi_1, \dots, \varphi_{n-1})$ como uma parametrização ortogonal da esfera unitária no semi-espaço superior. Segue que uma hipersuperfície de rotação em \mathbb{H}^n , é dada por (ver [15])

$$\begin{aligned} x : M^{n-1} &\hookrightarrow \mathbb{H}^n \subset \mathbb{L}^{n+1} \\ (s, t_1, \dots, t_{n-2}) &\longmapsto (y_1(s)\varphi_1, \dots, y_1(s)\varphi_{n-1}, y_n(s), y_{n+1}(s)), \end{aligned}$$

onde

$$\varphi_i = \varphi_i(t_1, \dots, t_{n-2}), \quad \varphi_1^2 + \dots + \varphi_{n-1}^2 = 1.$$

Acima temos uma parametrização da hipersuperfície de rotação gerada pela curva $y_1(s)$, $y_n(s)$ e $y_{n+1}(s)$. Uma vez que a curva $\{y_1(s), y_n(s), y_{n+1}(s)\} \in \mathbb{H}^3$ e o parâmetro s é escolhido como o comprimento de arco, temos que

$$y_1^2(s) + y_n^2(s) - y_{n+1}^2(s) = -1, \quad y_1'^2(s) + y_n'^2(s) - y_{n+1}'^2(s) = 1, \quad (3-1)$$

onde $'$ denota a derivada com respeito a s . Da equação 3-1 e utilizando o modelo do hiperbolóide, podemos parametrizar a curva $\alpha(s)$ da seguinte maneira:

$$\begin{aligned} y_1(s) &= \sinh(r) \\ y_n(s) &= \cosh(r) \sinh(h) \\ y_{n+1}(s) &= \cosh(r) \cosh(h), \end{aligned}$$

onde $r = r(s)$ é a distância de $\alpha(s)$ até o eixo de rotação ζ realizada por um ponto $p(s)$ em ζ , e $h = h(s)$ denota a altura de $p(s)$ em ζ , com respeito a um ponto fixado em ζ . Observamos que $\alpha(s)$ assim parametrizada, satisfaz a equação do hiperbolóide $y_1^2(s) + y_n^2(s) - y_{n+1}^2(s) = -1$, e, como a curva é P.C.A, $\alpha(s)$ satisfaz $|\alpha'(s)|^2 = 1$. Logo

$$\begin{aligned} y_1'(s) &= r' \cosh(r) \\ y_n'(s) &= r' \sinh(r) \sinh(h) + h' \cosh(r) \cosh(h) \\ y_{n+1}'(s) &= r' \sinh(r) \cosh(h) + h' \cosh(r) \sinh(h). \end{aligned}$$

Portanto $y_1'^2(s) + y_n'^2(s) - y_{n+1}'^2(s) = 1$, e

$$\begin{aligned} &r'^2 \cosh^2(r) + r'^2 \sinh^2(r) \sinh^2(h) + h'^2 \cosh^2(r) \cosh^2(h) - r'^2 \sinh^2(r) \cosh^2(h) \\ &+ 2r'h' \sinh^2(r) \sinh^2(h) \cosh^2(r) \cosh^2(h) - 2r'h' \sinh^2(r) \sinh^2(h) \cosh^2(r) \cosh^2(h) \\ &\quad - h'^2 \sinh^2(h) \cosh^2(r) = 1. \end{aligned}$$

Logo,

$$r'^2 \cosh^2(r) + r'^2 \sinh^2(r) (\sinh^2(h) - \cosh^2(h)) + h'^2 \cosh^2(r) (\cosh^2(h) - \sinh^2(h)) = 1.$$

Assim,

$$r'^2 \cosh^2(r) - r'^2 \cosh^2(r) + h'^2 \cosh^2(r) = 1$$

$$r'^2 (\cosh^2(r) - \sinh^2(r)) + h'^2 \cosh^2(r) = 1$$

$$r'^2 + \cosh^2 r h'^2 = 1 \text{ observando que, } r'^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial r}\right)^2 h'^2 = 1, \quad (3-2)$$

onde temos que $f(r) = y_1(s) = \sinh r$, é o raio da órbita. Observamos que no caso euclidiano as geodésicas são retas, e vimos que a órbita de um ponto em M sob a ação de $O(n-1)$ é uma esfera geodésica $(n-2)$ -dimensional de raio $r(s)$, mas no espaço hiperbólico vimos na seção (1.7), como são as geodésicas do espaço hiperbólico, e neste caso, a órbita de um ponto sob a ação de $O(n-1)$ é uma esfera $(n-2)$ -dimensional de raio $f(s) = \sinh(r(s))$.

Para ficar mais claro, tomamos como exemplo uma parametrização

$$X : M^2 \hookrightarrow \mathbb{H}^3 \subset \mathbb{L}^4 .$$

Consideramos a curva $\alpha(s)$ parametrizada pelo comprimento de arco em \mathbb{H}^3 , tal que $\alpha(s) = (y_1(s), 0, y_3(s), y_4(s))$. Deixando o grupo ortogonal $O(2)$ agir na curva $\alpha(s)$, obtemos a parametrização da superfície de rotação da seguinte maneira:

$$\begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1(s) \\ 0 \\ y_3(s) \\ y_4(s) \end{bmatrix} = X(s, \theta) .$$

Assim temos que

$$X(s, \theta) = (y_1(s) \cos \theta, y_1(s) \sin \theta, y_3(s), y_4(s)) .$$

Para calcular a primeira forma fundamental da superfície, temos que

$$X_\theta = (-y_1(s) \sin \theta, y_1(s) \cos \theta, 0, 0) ,$$

$$X_s = (y_1'(s) \cos \theta, y_1'(s) \sin \theta, y_3'(s), y_4'(s)) . \quad \text{Assim}$$

$$\begin{aligned} g_{11} = \langle X_\theta, X_\theta \rangle &= y_1^2(s) \sin^2 \theta + y_1^2(s) \cos^2 \theta = y_1^2(s) \\ g_{22} = \langle X_s, X_s \rangle &= y_1'^2(s) \cos^2 \theta + y_1'^2(s) \sin^2 \theta + y_3'^2(s) - y_4'^2(s) \\ &= y_1'^2(s) + y_3'^2(s) - y_4'^2(s) = 1 \\ g_{12} = g_{21} &= 0 . \end{aligned}$$

Logo a primeira forma fundamental é dada por

$$I = \sinh^2(r) d\theta \otimes d\theta + ds \otimes ds .$$

De forma análoga, segue de maneira geral que a primeira forma fundamental é dada por

$$I = f^2(r(s)) \sum g_{ij}(\Theta) d\theta_i \otimes d\theta_j + ds \otimes ds$$

onde $\Theta = (\theta_1, \dots, \theta_{n-2})$ e g_{ij} é a métrica da $(n-2)$ - dimensional esfera unitária de curvatura seccional 1 e $f(r) = r$ ou $\sinh(r)$, dependendo se o espaço ambiente é o \mathbb{R}^n ou \mathbb{H}^n .

Teorema 3.1 (Ver [4] e [17]) *As curvaturas principais k_i de M^{n-1} são*

$$k_i = \frac{\sqrt{1 + f^2 - f'^2}}{f}$$

para $i = 1, \dots, n-2$, e

$$k_{n-1} = \frac{-(f'' - f)}{\sqrt{1 + f^2 - f'^2}}$$

As fórmulas do Teorema (3.1) são válidas somente quando $f'^2 \leq 1 + f^2$. O conjunto (f, f') satisfazendo essa restrição e com $f \geq 0$ (pois f é o raio da órbita), será chamada de região relevante.

Temos que S_η definida na seção (1.6) é um operador linear auto-adjunto em cada espaço tangente $T_p M$, e seus autovalores $\lambda_1(p), \dots, \lambda_{n-1}(p)$ são as curvaturas principais de M . Associados ao operador S_η existem n invariantes algébricos dados por

$$S_r(p) = \sigma_r(\lambda_1(p), \dots, \lambda_{n-1}(p)), \quad 1 \leq r \leq n-1;$$

onde $\sigma_r : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ é dada por

$$\sigma_r(x_1, \dots, x_{n-1}) = \sum_{i_1 < \dots < i_r} x_{i_1} \cdots x_{i_r} .$$

Definição 3.2 *A r - ésima curvatura média H_r da hipersuperfície M^{n-1} é definida por*

$$\binom{n-1}{r} H_r(p) = \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_r \leq n-1} k_{i_1} k_{i_2} \cdots k_{i_r} .$$

Observamos que para $r = 2$, obtemos a curvatura escalar S , que é a 2 - sima curvatura média.

$$S(p) = \frac{2}{(n-1)(n-2)} (k_1 k_2 + \cdots + k_1 k_{n-1} + k_2 k_3 + \cdots + k_2 k_{n-1} + \cdots + k_{n-2} k_{n-1}).$$

No capítulo anterior, calculamos a curvatura escalar intrinsecamente. Agora, em termos da geometria extrínseca, temos as $n - 1$ curvaturas principais (dados no Teorema (3.1)) de uma hipersuperfície de rotação. Assim, vamos obter a expressão para a curvatura escalar S , de M^{n-1} , no espaço hiperbólico.

Teorema 3.3 *Seja M^{n-1} uma hipersuperfície de rotação em \mathbb{H}^n com curvatura escalar S . Então f satisfaz a seguinte equação diferencial*

$$2ff'' - (n-3)(1-f'^2) - f^2(n-1)(1-S) = 0. \quad (3-3)$$

Demonstração. Como foi observado acima quando $r = 2$, obtemos a 2ª - ésima curvatura média que é a curvatura escalar S de uma hipersuperfície de rotação, que é definida como

$$\binom{n-1}{2} S(p) = \sum_{1 \leq i < j \leq n-1} k_i k_j.$$

Essa soma pode ser dividida em duas somas, na seguinte maneira:

$$\binom{n-1}{2} S(p) = \sum_{1 \leq i \leq n-1} k_i k_{n-1} + \sum_{\substack{i < j \\ i, j \neq n-1}} k_i k_j.$$

Logo

$$\binom{n-1}{2} S = (n-2)k_i k_{n-1} + \frac{(n-2)(n-3)}{2} k_i k_j.$$

Assim utilizando as curvaturas principais dadas no Teorema 3.1 temos que

$$\begin{aligned} \binom{n-1}{2} S &= (n-2) \frac{\sqrt{1+f^2-f'^2}}{f} \left(\frac{-(f''-f)}{\sqrt{1+f^2-f'^2}} \right) \\ &+ \frac{(n-2)(n-3)}{2} \frac{\sqrt{1+f^2-f'^2}}{f} \frac{\sqrt{1+f^2-f'^2}}{f}. \end{aligned}$$

Logo,

$$\frac{(n-1)(n-2)}{2} S = \frac{-(n-2)(f''-f)}{f} + \frac{(n-2)(n-3)}{2} \frac{(1+f^2-f'^2)}{f^2}$$

$$(n-1)f^2 S = -2(f''-f)f + (n-3)(1+f^2-f'^2).$$

Seque que

$$(n-1)f^2 S = -2f''f + 2f^2 + (n-3)(1-f'^2) + (n-3)f^2$$

$$2f''f - (n-3)(1-f'^2) - (n-1)f^2 + (n-1)Sf^2 = 0.$$

Assim temos que

$$2ff'' - (n-3)(1-f'^2) - f^2(n-1)(1-S) = 0.$$

□

A partir de agora vamos supor que S é constante.

Observamos que a partir equação (3-2) e utilizando o fato que $f(s) = \sinh(r)$ temos que,

$$r'^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial r}\right)^2 h'^2 = 1.$$

Substituindo $f(s)$, obtemos

$$h'^2 = \frac{1-r'^2}{\left(\frac{\partial f}{\partial r}\right)^2} = \frac{1-r'^2}{\cosh^2(r)}$$

$$h'^2 = \frac{1 - \frac{f'^2}{\cosh^2(r)}}{\cosh^2(r)} = \frac{\cosh^2(r) - f'^2}{\cosh^4(r)} = \frac{1 + \sinh^2(r) - f'^2}{(1 + \sinh^2(r))^2},$$

ou seja, temos que

$$h'^2 = \frac{1 + f^2 - f'^2}{(1 + f^2)^2}, \quad (3-4)$$

é chamada a expressão hiperbólica de h'^2 .

Proposição 3.4 A equação (3-3) é equivalente a equação diferencial

$$f^{n-3}(1 - f'^2 + f^2(1 - S)) = K \quad (3-5)$$

onde K é constante. Além disso, para uma solução constante igual a f_0 , tem-se que $S > 1$,

$$f_0^2 = \frac{-(n-3)}{(n-1)(1-S)} e$$

$$K_0 = \frac{2}{(n-1)} \left(\frac{-(n-3)}{(n-1)(1-S)} \right)^{\frac{n-3}{2}}$$

Demonstração. A prova é análoga ao caso euclidiano. Multiplicando a equação (3-3) por

f^{n-4} e integrando obtemos o resultado

$$(n-3)f^{n-4}f'(1-f'^2+f^2(1-S))+f^{n-3}(2ff'(1-S)-2f'f'')=0,$$

que é equivalente,

$$(n-3)(1-f'^2+f^2(1-S))+2f^2(1-S)-2f''f=0.$$

Assim

$$2ff''-(n-3)(1-f'^2)-f^2(n-1)(1-S)=0.$$

Agora, fazendo $f(s) = f_0$ em (3-3) segue que

$$-(n-3)-f_0^2(n-1)(1-S)=0$$

$$f_0^2 = \frac{-(n-3)}{(n-1)(1-S)}, \quad \text{desde que, } S > 1.$$

Substituindo f_0 em (3-5), obtemos

$$f_0^{n-3}(1+f_0^2(1-S))=K_0,$$

$$\left(\frac{-(n-3)}{(n-1)(1-S)}\right)^{\frac{n-3}{2}}\left(1-\frac{-(n-3)(1-S)}{(n-1)(1-S)}\right)=K_0.$$

Dai,

$$K_0 = \frac{2}{(n-1)}\left(\frac{-(n-3)}{(n-1)(1-S)}\right)^{\frac{n-3}{2}}.$$

□

Corolário 3.5 *As soluções constantes do sistema formado por (3-2) e (3-3) correspondem aos cilindros equidistantes de ζ , isto é, as hipersuperfícies isométricas a $\zeta \times S^{n-2}(f_0)$, com f_0 como na proposição (3.4). Além disso, a curvatura escalar S varia no intervalo $(0, \infty)$.*

Demonstração. A prova é análoga ao caso euclidiano. □

Da mesma forma que no caso euclidiano, o par (f, f') é um subconjunto das curvas de nível da função G definida por

$$G(u, v) = u^{n-3}(1+u^2(1-S)-v^2), \quad (3-6)$$

com $u > 0$ e $v^2 - u^2 \leq 1$ que é a região relevante. Análogo ao caso euclidiano temos que a função G possui um ponto crítico quando $S > 1$, e novamente pertence ao eixo horizontal. Assim, temos que o gradiente de $G(u, v)$ é dado por

$$\nabla G = (u^{n-4}(n-3)(1-v^2) + (n-1)(1-S)u^{n-2}, -2vu^{n-3}).$$

Temos que o ponto crítico é $c_0 = \left(\sqrt{\frac{-(n-3)}{(n-1)(1-S)}}, 0 \right)$. Da mesma forma que no caso euclidiano, substituindo o ponto crítico na matriz hessiana, obtemos a seguinte matriz:

$$H(c_0) = u_0^{n-3} \begin{bmatrix} 3(n-1)(1-S) & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}.$$

Como $S > 1$ e o determinante é positivo, temos que c_0 é um ponto de máximo.

Lema 3.6 *O conjunto (f, f') , onde f é uma solução de (3-3) são as componentes conexas das curvas de nível de G , contidas na região relevante.*

Demonstração. Sabemos que uma solução local de (3-3) pode ser estendida para valores nos quais (f, f') estão contidos na região relevante. A situação é análoga ao caso euclidiano com a diferença que agora teremos 5 configurações possíveis para as curvas de nível, como veremos nas figuras (3.1), (3.2), (3.3), (3.4) e (3.5).

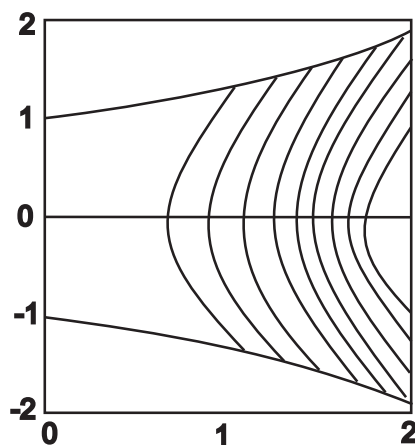


Figura 3.1: Curvas de nível para $S < 0$

Como no caso euclidiano, tomemos o semi-plano aberto $\{(u, v) : u > 0\}$ com as curvas de nível $G(u, v) = K$, onde cada curva é uma união suave de dois gráficos,

$$v = \pm \sqrt{1 + (1-S)u^2 - \frac{K}{u^{n-3}}},$$

exceto para o nível K_0 dado na proposição 3.4, quando $S > 1$. A curva de nível $G = K_0$ possui um único ponto crítico, que está no eixo horizontal, como foi demonstrado.

Consideraremos as folheações do semi-plano aberto por curvas de nível $G(u, v) = K$ para $S < 0$, $S = 0$, $S \in (0, 1)$, $S = 1$ e $S > 1$:

Caso $S < 0$. Nesse caso, temos que as curvas de nível sempre ultrapassam a região relevante, pois pela equação (3-6) temos que $(1 - S)u^2 - v^2 = \frac{K}{u^{n-3}} - 1$ é uma hipérbole no eixo u , e quando $u \rightarrow 0$, temos que $v \rightarrow \pm \infty$ (figura 3.1).

Caso $S = 0$. Nesse caso, temos que $u^2 - v^2 = \frac{K}{u^{n-3}} - 1$. Para $\frac{K}{u^{n-3}} - 1 < 0$ as curvas de nível são hipérbolas no eixo v acima da região relevante e para $\frac{K}{u^{n-3}} - 1 > 0$ temos hipérbolas no eixo u , que estão contidas na região relevante (figura 3.2).

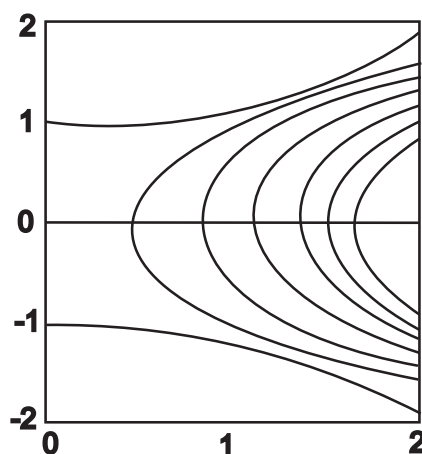


Figura 3.2: Curvas de nível para $S = 0$

Caso $S \in (0, 1)$. Para $K > 0$, observamos que $(1 - S)u^2 - v^2 = \frac{K}{u^{n-3}} - 1$ com a diferença que agora $S \in (0, 1)$, ou seja, a hipérbole é mais fechada (figura 3.3).

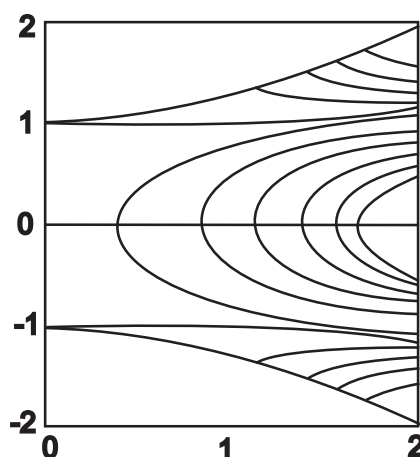


Figura 3.3: Curvas de nível para $S \in (0, 1)$

Caso $S = 1$. Temos que a equação é dada por $u^{n-3} = \frac{K}{1-v^2}$. Quando $K = 0$ temos duas assíntotas horizontais em $v = \pm 1$ e para $K > 0$ temos as parábolas, resultantes dessa função racional (figura 3.4).

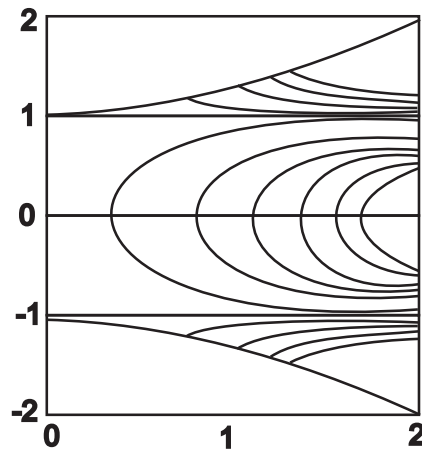


Figura 3.4: *Curvas de nível para $S = 1$*

Caso $S > 1$. Observamos que nesse caso há um ponto crítico c_o de máximo. Assim, todo nível K é menor que K_0 . Logo temos que $(1 - S)u^2 - v^2 = \frac{K}{u^{n-3}} - 1$ descreve a metade de uma elipse (pois consideramos $u \geq 0$). Se $K < 0$, quando $u \rightarrow 0$ temos que $v \rightarrow \pm\infty$, assim a curva assintota o eixo vertical. Para $K = 0$ temos uma elipse cujos valores limites são $(0, \pm 1)$ e se $0 \leq K \leq K_0$, a curva de nível é compacta (figura 3.5).

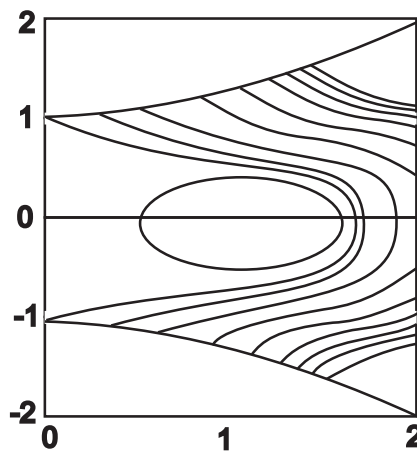


Figura 3.5: *Curvas de nível para $S > 1$*

□

Agora estamos em condições de apresentar um teorema de classificação das hipersuperfícies de rotação com curvatura escalar constante em \mathbb{H}^n .

3.1 Teorema de Classificação em \mathbb{H}^n

Teorema 3.7 *Classificação das Hipersuperfícies de Rotação em \mathbb{H}^n .*

- (i) Não existe hipersuperfície de rotação completa com curvatura escalar constante $S < 0$.
- (ii) A menos de translações verticais existe precisamente uma família a um parâmetro de hipersuperfícies de rotação mergulhadas e completas com curvatura escalar constante $S \in [0, 1)$. Estas hipersuperfícies não são cilíndricamente limitadas e para $S = 0$, elas convergem para uma totalmente geodésica no espaço \mathbb{H}^n . A curva no plano assintota duas geodésicas.
- (iii) A menos de isometrias, existe precisamente uma família a um parâmetro de hipersuperfícies de rotação mergulhadas e completas com $S = 1$. Estas hipersuperfícies não são cilíndricamente limitadas e elas convergem para horoesferas.
- (iv) Para qualquer $S > 1$, existe uma família a um parâmetro de hipersuperfícies de rotação mergulhadas completas com curvatura escalar constante S , todas periódicas e cilíndricamente limitadas que convergem para um sequência de esferas geodésicas.

Demonstração. Novamente vamos estudar as curvas de nível de $G(f, f')$ com as restrições $f'^2 \leq 1 + f^2$ e $f \geq 0$ e as provas são semelhantes ao caso euclidiano.

Prova do item (i): Quando $S < 0$, temos pela figura (3.1) que todas as curvas de nível ultrapassam a região relevante. Como no caso euclidiano, assim temos hipersuperfícies de rotação que não são completas.

Prova do item (ii): Quando $S \in (0, 1)$ (ver figura (3.3)), podemos escrever G da seguinte maneira

$$G(f, f') = f^{n-3}(1 + f^2(1 - S) - f'^2) = K.$$

Se $K = 0$ e $f(0) = 0$ temos que,

$$\begin{aligned} f^{n-3}(1 + f^2(1 - S) - f'^2) &= 0 \text{ como } f^{n-3} \geq 0 \\ 1 + f^2(1 - S) - f'^2 &= 0. \end{aligned}$$

As curvas de nível são uniões suaves de dois gráficos. Logo como $S \in (0, 1)$, consideramos $f' > 0$ e o outro caso segue de maneira análoga. Assim, temos que

$$f' = \sqrt{1 + f^2(1 - S)}.$$

Logo,

$$\int \frac{df}{\sqrt{1 + (f\sqrt{1 - S})^2}} = \int_0^s ds.$$

Fazendo $f\sqrt{1-S} = \operatorname{csc} h(x)$ segue que $df\sqrt{1-S} = -\operatorname{csc} h(x) \operatorname{coth}(x) dx$. Assim temos,

$$\frac{-1}{\sqrt{1-S}} \int \frac{\operatorname{csc} h(x) \operatorname{coth}(x) dx}{\operatorname{coth}(x)} = s \quad e$$

$$-\int \operatorname{csc} h(x) = s\sqrt{1-S} \quad .$$

Multiplicando a integral por $\frac{\operatorname{csc} h(x) + \operatorname{coth}(x)}{\operatorname{csc} h(x) + \operatorname{coth}(x)}$ e integrando temos que,

$$\ln(\operatorname{csc} h(x) + \operatorname{coth}(x)) + C = s\sqrt{1-S} \quad ,$$

onde C é constante. Voltando para a variável anterior, segue que

$$\ln \left(f\sqrt{1-S} + \sqrt{1 + (f\sqrt{1-S})^2} \right) + C = s\sqrt{1-S} \quad ,$$

e aplicando a exponencial em ambos os lados temos

$$\left(f\sqrt{1-S} + \sqrt{1 + (f\sqrt{1-S})^2} \right) e^C = e^{s\sqrt{1-S}} \quad .$$

Elevando ao quadrado ambos os lados, segue que

$$f^2(1-S) + 2f\sqrt{1-S}\sqrt{1 + f^2(1-S)} + 1 + f^2(1-S) = \frac{e^{2s\sqrt{1-S}}}{e^{2C}} \quad e$$

$$2f\sqrt{1-S}\sqrt{1 + f^2(1-S)} = \frac{e^{2s\sqrt{1-S}}}{e^{2C}} - (2f^2(1-S) + 1) \quad .$$

Novamente elevando ao quadrado em ambos os lados, temos

$$\begin{aligned} 4f^2(1-S)(1 + f^2(1-S)) &= \frac{e^{4s\sqrt{1-S}}}{e^{4C}} - \frac{2e^{2s\sqrt{1-S}}}{e^{2C}}(2f^2(1-S) + 1) \\ &+ (2f^2(1-S) + 1)^2 \quad . \end{aligned}$$

Logo,

$$4f^2(1-S)(1 + f^2(1-S)) = \frac{e^{4s\sqrt{1-S}}}{e^{4C}} - \frac{2e^{2s\sqrt{1-S}}}{e^{2C}}(2f^2(1-S) + 1)$$

$$+ 4f^4(1-S)^2 + 4f^2(1-S) + 1 \quad ,$$

que é equivalente a

$$4f^2(1-S)(1+f^2(1-S)) = \frac{e^{4s\sqrt{1-S}}}{e^{4C}} - \frac{2e^{2s\sqrt{1-S}}}{e^{2C}}(2f^2(1-S)+1) \\ + 4f^2(1-S)(1+f^2(1-S)) + 1.$$

Assim temos que,

$$\frac{2e^{2s\sqrt{1-S}}}{e^{2C}}(2f^2(1-S)+1) = \frac{e^{4s\sqrt{1-S}}}{e^{4C}} + 1 \quad e$$

$$2f^2(1-S) = \frac{e^{4s\sqrt{1-S}} + e^{4C}}{2e^{2C}e^{2s\sqrt{1-S}}} - 1.$$

Logo como $f > 0$ temos,

$$f(s) = \sqrt{\frac{e^{4s\sqrt{1-S}} - 2e^{2C}e^{2s\sqrt{1-S}} + e^{4C}}{4e^{2C}e^{2s\sqrt{1-S}}(1-S)}}.$$

Sabendo que $f(0) = 0$, temos que $C = 0$, assim

$$f(s) = \sqrt{\frac{e^{4s\sqrt{1-S}} - 2e^{2s\sqrt{1-S}} + 1}{4e^{2s\sqrt{1-S}}(1-S)}} \quad e$$

$$f(s) = \sqrt{\frac{(e^{2s\sqrt{1-S}} - 1)^2}{(2e^{s\sqrt{1-S}}\sqrt{1-S})^2}},$$

que é equivalente a,

$$f(s) = \frac{e^{2s\sqrt{1-S}} - 1}{2e^{s\sqrt{1-S}}\sqrt{1-S}} = \frac{e^{s\sqrt{1-S}} - e^{-s\sqrt{1-S}}}{2\sqrt{1-S}}.$$

Assim temos que,

$$f(s) = \frac{\sinh \sqrt{1-S}}{\sqrt{1-S}}. \quad (3-7)$$

Para $K \neq 0$ a função f , e consequentemente $r(s)$ não são limitadas superiormente. portanto as hipersuperfícies não são cilíndricamente limitadas. Além disso para cada nível K , f atinge um único mínimo f_1 , e usando (3-5) temos que

$$f'^2 = 1 + f^2 - \left(\frac{K + Sf^{n-1}}{f^{n-3}} \right).$$

Longe de f_1 , podemos dividir h'^2 dada em (3-4) por f'^2 e usando a equação acima vem,

$$\frac{h'^2}{f'^2} = \frac{1 + f^2 - \left(1 + f^2 \left(\frac{K + S f^{n-1}}{f^{n-3}}\right)\right)}{(1 + f^2)^2 \left(1 + f^2 - \left(\frac{K + S f^{n-1}}{f^{n-3}}\right)\right)}.$$

Logo

$$\begin{aligned} \frac{\left(\frac{dh}{ds}\right)^2}{\left(\frac{df}{ds}\right)^2} &= \frac{\frac{K + S f^{n-1}}{f^{n-3}}}{(1 + f^2)^2 \left(\frac{f^{n-3}(1 + f^2) - (K + S f^{n-1})}{f^{n-3}}\right)} \quad e \\ \left(\frac{dh}{df}\right)^2 &= \frac{K + S f^{n-1}}{(1 + f^2)^2 [(1 + f^2)f^{n-3} - (K + S f^{n-1})]}. \end{aligned}$$

Temos que o segundo lado da igualdade quando $f \rightarrow \infty$ vai para 0, assim temos que $h(f)$ é uniformemente limitada, pois não depende do ponto. Assim mostra que a curva no plano assintota as duas geodésicas $h(f) = cte$.

A figura (3.2) mostra o caso $S = 0$, que nas mesmas condições do caso acima temos que, basta fazer $S = 0$ na equação (3-7), assim

$$f(s) = \sinh(s),$$

onde temos que $r(s) = s$ e logo $h(s) = 0$ e a hipersuperfície converge para uma totalmente geodésica no espaço hiperbólico \mathbb{H}^n .

Prova do item (iii): A figura (3.4) mostra que quando $K = 0$ e $S = 1$ de (3-5) temos que $1 - f'^2 = 0$, se $f(0) = 0$ então $f(s) = s$ substituindo em (3-2) temos que

$$\begin{aligned} h'^2 &= \left(\frac{s}{1 + s^2}\right)^2 \quad \text{logo,} \\ \pm h(s) &= \int_0^s \frac{s \, ds}{1 + s^2}. \end{aligned}$$

Fazendo $u = 1 + s^2$ e diferenciando em ambos os lados obtemos, $du = 2s \, ds$, logo

$$\pm h(s) = \frac{1}{2} \int \frac{du}{u} = \frac{1}{2} \ln u + C.$$

É dado que $h(0) = 0$, logo temos que

$$\pm h(s) = \ln \sqrt{1+s^2} .$$

Como $\tan \phi(s) = f(s) = s$ temos

$$\begin{aligned} \sec^2 \phi(s) = 1 + \tan^2 \phi(s) \quad \text{logo,} \quad \frac{1}{\cos^2 \phi(s)} = 1 + s^2 \\ \text{e} \quad \cos^2 \phi(s) = \frac{1}{1+s^2} . \end{aligned} \quad (3-8)$$

Temos duas soluções para diferentes sinais de h' . Se $h' > 0$ temos que

$$e^h(s) = \rho \quad \text{logo,} \quad e^{\ln \sqrt{1+s^2}} = \rho ,$$

obtendo que,

$$\rho = \sqrt{1+s^2} .$$

Por (3-8) temos que

$$\cos \phi(s) = \frac{1}{\sqrt{1+s^2}} \quad \text{assim,} \quad \rho \cos \phi(s) = 1 .$$

Utilizando as coordenadas polares usuais do espaço euclidiano temos que a curva é uma linha horizontal euclidiana dada por $y_n = 1$. Se $h' < 0$ temos que

$$e^h(s) = \rho \quad \text{e,} \quad e^{-\ln \sqrt{1+s^2}} = \rho ,$$

obtendo que,

$$\rho = \frac{1}{\sqrt{1+s^2}} = \cos \phi(s) .$$

Olhando em coordenadas cartesianas temos que

$$\cos \phi(s) = \frac{x}{\rho} \quad \text{assim,} \quad \frac{x}{\rho} = \rho \quad \text{logo,} \quad \rho^2 = x$$

Substituindo ρ , segue que

$$\begin{aligned} x^2 - x + y^2 &= 0 \\ \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + y^2 &= \frac{1}{4} . \end{aligned}$$

A curva no plano é um círculo tangente ao eixo y_n , e as hipersuperfícies correspondentes são chamadas de Horoesferas.

Prova do item (iv): A ultima figura (3.5) mostra o caso $S > 1$. A demonstração é análoga ao caso euclidiano, salvo alguns detalhes que comentaremos agora. Temos que as curvas de nível correspondem a hipersuperfícies completas que são dadas para $K \in (0, K_0)$ onde K_0 é o valor obtido na proposição (3.4), o valor $K = 0$, nos dá a metade de uma elipse

$$(1 - S)f^2 + f'^2 = 1 ,$$

contida na região relevante. Esta curva tem como valores limites $(0, 1)$ e $(0, -1)$ satisfazendo a definição (2.7) e esta hipersuperfície corresponde a uma esfera geodésica, com equação

$$f(s) = \frac{\sinh \sqrt{1 - S}s}{\sqrt{1 - S}} .$$

As translações desta esfera ao longo do eixo de revolução dão uma sequência de esferas geodésicas.

Como dissemos anteriormente o valor $K = K_0$ dá um cilindro, e as curvas de nível dadas por $K \in (0, K_0)$ correspondem a hipersuperfícies completas e cilíndricamente limitadas. \square

Referências Bibliográficas

- [1] A.ROS. **Compact hypersurfaces with constant scalar curvature and a congruence theorem.** J. Diff. Geom. 27, 215-220 (1988).
- [2] COLARES, A. GERVASIO AND PALMAS, OSCAR. **Addendum to: "Complete rotation hypersurfaces with H_k constant in space forms" by Palmas.** Bull. Braz. Math. Soc. (N.S.) 39, n° 1, 11-20, (2008).
- [3] DELAUNAY, C. **Sur la surface de révolution don't la courbure moyenne est constant.** J. Math. pure et appl, Série 16, (1841).
- [4] DO CARMO, M. P. AND DAJCZER, M. **Rotation hypersurfaces in spaces of constant curvature.** Transactions of the American Mathematical Society 277-2, p.685-709, (1993).
- [5] DO CARMO, M. P. **Geometria Diferencial de curvas e Superfícies.** Rio de Janeiro, SBM, (2010).
- [6] DO CARMO, M. P. **Geometria Riemanniana.** Projeto Euclides, Rio de Janeiro. quinta edição, (2011).
- [7] FILHO, R. S. V. A. AND CHAVES, R. M. B. **Noções fundamentais sobre gráficos no espaço hiperbólico \mathbb{H}^3 .** USP.
- [8] GUIMARÃES, TULIO AND SATO, JOCELINO **Hipersuperfícies do \mathbb{R}^4 com curvatura escalar nula invariantes por um subgrupo de isometrias.** Anais do I Congresso de Matemática Aplicada e Computacional da Região Sudeste, (2011).
- [9] HSIANG, W. Y AND LAWSON, H. B. **Minimal submanifolds of low cohomogeneity,** Journal of Differential Geometry. vol. 5, p.1-38, (1971).
- [10] HSIANG, W. Y. **On rotational W-hypersurfaces in spaces of constant curvature and generalized laws of sine and cosine.** Bull. Inst. Math. Acad. Sinica 11, 349-373, (1977).

- [11] HSIANG, W. Y. **On W- hypersurfaces of generalized rotational type in \mathbb{E}^{n+1}** , I, preprint, (1982).
- [12] J. L. BARBOSA AND M. DO CARMO: **Helicoids, catenoids and minimal hypersurfaces of \mathbb{R}^n invariant by an l - parameter group of motions**. An. Acad. Bras. Cienc. 53, 403-408, (1981).
- [13] LEITE, M. L. **Rotation hypersurfaces of space forms with constant scalar curvature**. Manuscripta. 67, 285 - 304, (1990).
- [14] LI, HAIZHONG AND WEI, GUOXIN. **Embedded rotational hypersurfaces with constant scalar curvature in \mathbb{S}^n . A correction to a statement:"Rotational hypersurfaces of space forms with constant scalar curvature" by M. L. LEITE**. Manuscripta Math. 120, n° 3, 319-323, (2006).
- [15] LI, HAIZHONG AND WEI, GUOXIN. **Compact embedded rotation hypersurfaces of \mathbb{S}^n** . Bull. Braz. Math. Soc. (N.S.) 38, n° 1, 81-99, (2007).
- [16] MEDEIROS, N. A. C. AND RIPOLL, J. B. **Hipersuperfícies invariantes de curvatura média constante**. Matemática Universitária, no 13, p. 39-63, Porto Alegre : Instituto de Matemática - UFRGS, (1991).
- [17] PALMAS, OSCAR. **Complete rotation hypersurfaces with H_k constant in space forms**. Bol. Soc. Brasil. Mat. (N.S.) 30, n° 2, 139-161, (1999).
- [18] PINA, ROMILDO. **Hipersuperfícies de rotação com curvatura escalar constante negativa**. Dissertação de Mestrado, UNB - Brasília, (1992).
- [19] S. Y. CHENG AND S. T. YAU: **Hypersurfaces with constant scalar curvature**, Math. Ann. 225, 195-204. (1977).
- [20] SPIVAK, M. **A comprehensive introduction to Differential Geometry**, vol 4, 2nd edn, Publish or Perish, Inc. Berkeley, (1979).