

UNIVERSIDADE FEDERAL DE GOIÁS
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA

OSCAR ALEXANDER RAMÍREZ CESPEDES

**T-Singularidade: Dinâmica,
Estabilidade e Teoria de Controle**

Goiânia
2013

TERMO DE CIÊNCIA E DE AUTORIZAÇÃO PARA DISPONIBILIZAR AS TESES E DISSERTAÇÕES ELETRÔNICAS (TEDE) NA BIBLIOTECA DIGITAL DA UFG

Na qualidade de titular dos direitos de autor, autorizo a Universidade Federal de Goiás (UFG) a disponibilizar, gratuitamente, por meio da Biblioteca Digital de Teses e Dissertações (BDTD/UFG), sem ressarcimento dos direitos autorais, de acordo com a Lei nº 9610/98, o documento conforme permissões assinaladas abaixo, para fins de leitura, impressão e/ou *download*, a título de divulgação da produção científica brasileira, a partir desta data.

1. Identificação do material bibliográfico: ☒ **Dissertação** ☐ **Tese**

2. Identificação da Tese ou Dissertação

Autor (a):		Oscar Alexander Ramírez Cespedes			
E-mail:		ceroalacero@gmail.com			
Seu e-mail pode ser disponibilizado na página? ☒ Sim ☐ Não					
Vínculo empregatício do autor					
Agência de fomento:		Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico		Sigla:	CNPq
País:	Brasil	UF:	GO	CNPJ:	33.654.834/0001-36
Título: T-Singularidade: Dinâmica, Estabilidade e Teoria de Controle.					
Palavras-chave:	Singularidade Teixeira, bifurcações, caos não determinístico, conjuntos invariantes.				
Título em outra língua:	T-Singularity: Dynamics, Stability and Control Theory.				
Palavras-chave em outra língua:	Teixeira singularity, bifurcations, nondeterministic chaos, invariant sets.				
Área de concentração:	Sistemas Dinâmicos				
Data defesa: (dd/mm/aaaa)	22/03/2013				
Programa de Pós-Graduação:	Mestrado em Matemática				
Orientador (a):	Prof. João Carlos da Rocha Medrado				
E-mail:	joaocarlosmedrado@gmail.com				
Co-orientador (a):*					
E-mail:					

*Necessita do CPF quando não constar no SisPG

3. Informações de acesso ao documento:

Concorda com a liberação total do documento ☒ SIM ☐ NÃO¹

Havendo concordância com a disponibilização eletrônica, torna-se imprescindível o envio do(s) arquivo(s) em formato digital PDF ou DOC da tese ou dissertação.

O sistema da Biblioteca Digital de Teses e Dissertações garante aos autores, que os arquivos contendo eletronicamente as teses e ou dissertações, antes de sua disponibilização, receberão procedimentos de segurança, criptografia (para não permitir cópia e extração de conteúdo, permitindo apenas impressão fraca) usando o padrão do Acrobat.

Assinatura do (a) autor (a)

Data: ____ / ____ / ____

¹ Neste caso o documento será embargado por até um ano a partir da data de defesa. A extensão deste prazo suscita justificativa junto à coordenação do curso. Os dados do documento não serão disponibilizados durante o período de embargo.

OSCAR ALEXANDER RAMÍREZ CESPEDES

T-Singularidade: Dinâmica, Estabilidade e Teoria de Controle

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação do Instituto de Matemática e Estatística da Universidade Federal de Goiás, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Área de concentração: Sistemas Dinâmicos.

Orientador: Prof. João Carlos da Rocha Medrado

Goiânia
2013

**Dados Internacionais de Catalogação na Publicação na (CIP)
GPT/BC/UFG**

Ramírez Cespedes, Oscar Alexander.
R177t T-Singularidade: Dinâmica, Estabilidade e Teoria de
Controle [manuscrito] / Oscar Alexander Ramírez Cespedes.
- 2013.

xv, 76 f. : il., figs, tabs.

Orientador: Prof. Dr. João Carlos da Rocha Medrado.
Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal de Goiás,
Instituto de Matemática e Estatística, 2013.

Bibliografia.

Inclui lista de figuras, abreviaturas, siglas e tabelas.

Apêndices.

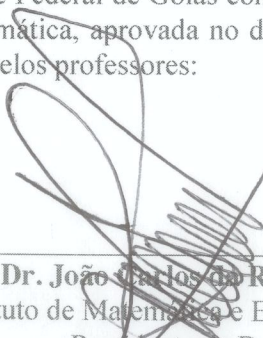
1. Singularidade Teixeira. 2. Bifurcações. 3. Caos não
determinístico. 4. Conjuntos invariantes.

CDU: 517.938

OSCAR ALEXANDER RAMÍREZ CESPEDES

**T-SINGULARIDADE: DINÂMICA, ESTABILIDADE E TEORIA
DE CONTROLE**

Dissertação defendida no Programa de Pós-Graduação do Instituto de Matemática e Estatística da Universidade Federal de Goiás como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática, aprovada no dia 22 de março de 2013, pela Banca Examinadora constituída pelos professores:



Prof. Dr. João Carlos da Rocha Medrado
Instituto de Matemática e Estatística-UFG
Presidente da Banca



Prof. Dr. Ricardo Miranda Martins
Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica-UNICAMP



Prof. Dr. Durval José Tonon
Instituto de Matemática e Estatística-UFG

Todos os direitos reservados. É proibida a reprodução total ou parcial do trabalho sem autorização da universidade, do autor e do orientador(a).

Oscar Alexander Ramírez Cespedes

Bacharel em Matemática pela Universidad Distrital Francisco José de Caldas,
Bogotá, Colômbia.

Este trabalho foi orientado na parte gramatical e ortográfica pelo Daniel
Pimenta.

a meus pais, Maria Teresa e Jose Mauricio, e minha irmã Paola.

"No nos enseñan a amar ni a morir.
(Não nos ensina amar nem morrer)."

Mario Mendoza,

.

Agradecimentos

Ao professor João Carlos, por aceitar o desafio de ser meu orientador, por seus conselhos e incondicional apoio.

A minha família e amigos, por ter sido meu principal estímulo.

Finalmente, a todas aquelas pessoas que de alguma forma colaboraram e alentaram na finalização deste trabalho.

Ào CNPq pelo apoio financeiro.

Resumo

Ramírez Cespedes, Oscar Alexander. **T-Singularidade: Dinâmica, Estabilidade e Teoria de Controle**. Goiânia, 2013. 76p. Dissertação de Mestrado. Instituto de Matemática e Estatística, Universidade Federal de Goiás.

Quando um campo vetorial não suave é definido por partes, sobre uma variedade regular de codimensão um, esse pode ser simultaneamente tangente a ambos os lados, em pontos de dobra, visíveis ou invisíveis. Neste trabalho é estudada a dinâmica local da singularidade; tipo dobra-dobra invisível-invisível conhecida como Singularidade Teixeira, revelando novos cenários de bifurcações e os efeitos não lineares em torno da bifurcação já conhecida, determinando condições para a existência de conjuntos invariantes (ciclos limite), e a possível existência de um conjunto com uma forma não-determinística do caos. Além disso, discute-se a ocorrência de tal singularidade em sistemas de controle com retroalimentação comutante. Algumas simulações numéricas são apresentadas.

Palavras-chave

Singularidade Teixeira, bifurcações, caos não determinístico, conjuntos invariantes.

Abstract

Ramírez Cespedes, Oscar Alexander. **T-Singularity: Dynamic, stability and Control theory.** Goiânia, 2013. 76p. MSc. Dissertation. Instituto de Matemática e Estatística, Universidade Federal de Goiás.

Consider a nonsmooth vector fields in $\mathbb{R}^3$ defined by parts on a smooth manifold of dimension one, such that it is tangent to both sides simultaneously, in fold points, visibles or invisibles. In this paper we study a local dynamics of the singularity type two-fold invisible-invisible known as Teixeira singularity, revealing new scenes of bifurcations and the nonlinear effects around the bifurcation already known, determining conditions for the existence of invariant sets (limit cycles) and the possible existence of a set with a nondeterministic chaos. Furthermore, we discuss the occurrence of this singularity in switched feedback control systems and some numerical simulations are presented.

Keywords

Teixeira singularity, bifurcations, nondeterministic chaos, invariant sets.

Sumário

Lista de Figuras	9
1 Preliminares	13
1.1 Campos descontínuos	13
1.2 O Problema Dobra-Dobra	15
2 T-Singularidade	18
2.1 Aproximação Local	19
2.2 Dinâmica Deslizante	21
2.2.1 Efeito dos Termos de Ordem Superior	23
2.3 Dinâmica Costurante	24
2.3.1 Número de Pontos de Costuras	27
2.3.2 Bifurcações.	33
2.3.3 Efeito dos Termos de Ordem Superior	33
2.4 Dinâmica da T-Singularidade próxima da bifurcação $v^+v^- = 1$ e $v^\pm < 0$.	38
2.4.1 Uma forma de Caos Não-Determinístico	40
2.5 Simulações Numéricas	42
2.5.1 Número de Pontos de Costura	42
2.5.2 Dinâmica incluindo o efeito dos termos de ordem superior	44
3 Sistemas de Controle com Retroalimentação Comutante	48
3.0.3 Sistemas de Controle com Retroalimentação Comutante	49
3.0.4 Caso I: (SISO) Sistemas de controle com uma entrada e uma saída.	50
3.0.5 Caso II: Sistemas de Controle com Múltiplas Saídas	51
3.1 Exemplos Numéricos	53
3.1.1 SISO, SIMO e MIMO	53
3.1.2 Um controlador PID	57
A Aproximação de um campo com uma T-singularidade.	60
B Dinâmica do campo restrita à variedade central.	63
C Perturbação genérica da aplicação de Poincaré.	66
D Forma normal da Aplicação de Poincaré.	69
E Aproximação da Aplicação de Poincaré por um fluxo.	73
Referências Bibliográficas	75

Lista de Figuras

1.1	O campo deslizando f^s .	14
1.2	Dinâmica ao redor da singularidade tipo elíptico	16
1.3	Dinâmica ao redor da singularidade tipo parabólico	17
1.4	Dinâmica ao redor da singularidade tipo hiperbólico	17
2.1	Representação geométrica dos parâmetros v^+ e v^- .	20
2.2	Divisão Local da Variedade da Descontinuidade.	20
2.3	Retratos de fase do campo deslizando.	22
2.4	Retratos de fase da dinâmica do campo deslizando para o caso $(s1)$.	24
2.5	Retratos de fase da dinâmica do campo deslizando para o caso $(s2)$.	24
2.6	Aplicações de Primeiro Retorno.	25
2.7	O diábolo não-suave: Variedades Invariantes próximas à singularidade	26
2.8	Pontos de costura no caso $k = 2m - 1$, $\mathbf{RE}' = \varphi^+(\mathbf{RE}) = (-\infty, 1/2v^+)$ é onde acontece o primeiro ponto costurante e em $\mathbf{RS}' = \varphi^+(rs) = (2v^-, 0)$ o último	30
2.9	Pontos de costura no caso $k = 2m$, $\mathbf{RE}' = \varphi^+(\mathbf{RE}) = (\infty, 1/2v^+)$ é onde acontece o primeiro ponto costurante e em $\mathbf{RS}' = \varphi^+(rs) = (2v^+, 0)$ o último.	31
2.10	O número de pontos costurantes para $2m - 1 < r < 2m$ é $k = 2m$ ou $k = 2m - 1$ com $m \in \mathbb{N}$	33
2.11	Diagrama Parcial das Bifurcações na Dinâmica Costurante. (a) k é o número de vezes que qualquer órbita costura a variedade da descontinuidade próximo à origem para diferentes $v^\pm$. (b) Os correspondentes retratos de fase da dinâmica costurante.	34
2.12	Domínio da Aplicação de Poincaré restrita a uma das regiões de costura	34
2.13	Os correspondentes retratos de fase da dinâmica costurante de $(c1)$.	37
2.14	Os correspondentes retratos de fase da dinâmica costurante de $(c2)$.	37
2.15	Os correspondentes retratos de fase da dinâmica costurante para $p > 0$ e $p < 0$ de $(c3)$.	37
2.16	Catálogo completo da dinâmica na T-Singularidade quando $p = v^+v^- - 1 \sim 0$.	39
2.17	Composição dos retratos de fase $(c3_u)$ com $(s1)$ para $p < 0$.	40
2.18	Composição dos retratos de fase $(c3_u)$ com $(s1)$ para $p > 0$, exibindo um conjunto invariante, na forma de um ciclo limite costurante.	40
2.19	Órbita costurante, espiralando com um número finito de impactos, ao redor da singularidade, alcançando a origem na região de deslize em tempo finito e encontrando em seguida $\mathbf{RE}$, onde sua evolução no futuro não é única.	41

2.22	Órbita com condição inicial y_0 espiralando de RE a RS com 75 pontos costurantes.	44
3.1	Diagrama em blocos de um sistema na forma de Lur'e.	49
3.2	Linhas de tangência de um sistema SISO.	51
3.3	Possíveis linhas de tangencia de um sistema MIMO que se intersectam.	52
3.4	Órbita do sistema SISO com condição inicial $(1000^{-20}, -0.51, 1.51)$. A superfície da cor cinza é a região de deslize com fronteiras paralelas.	54
3.5	Órbitas do sistema SIMO com condições iniciais $(1000^{-20}, -0.5, 1.51)$ (azul) e $(-100010^{-20}, -0.5, 1.51)$ (vermelha)	55
3.7	Diagrama em blocos de um controlador PID, com estrutura variável	58

Introdução

Modelos híbridos e de comutação estão sendo cada vez mais utilizados para descrever uma grande variedade de fenômenos, que vão desde sistemas mecânicos com fricção e retrocesso, circuitos elétricos e eletrônicos, robôs que andam e pulam. Inclusive os sistemas biológicos, neurológicos e econômicos [2, 3, 9]. Muitos destes modelos, podem ser descritos por um conjunto de equações diferenciais ordinárias, cujo espaço de fase é particionado por variedades de comutação ou descontinuidade.

A dinâmica deste tipo de sistemas foi formalizada por Filippov em [7], usando inclusões diferenciais. Entretanto, um entendimento geral destes tipos de sistemas em dimensões maiores que dois é truncado, a partir do surgimento de vários fenômenos interessantes. Entre estes o da singularidade tipo dobra-dobra, que é simplesmente uma singularidade topológica genérica ¹, que rusticamente falando, é um ponto onde o campo associado ao sistema é quadraticamente tangente a ambos os lados de uma variedade da descontinuidade no caso dela ser de codimensão um.

Nos últimos anos, temos notado um crescente interesse no estudo da teoria das singularidades em sistemas suaves por partes tridimensionais, que têm mostrado ser uma rica fonte de novas dinâmicas. Em particular, estamos interessados em estudar a T-Singularidade que é um tipo de dobra-dobra de um sistema, onde a variedade da descontinuidade é localmente uma superfície regular. Esta singularidade foi estudada pela primeira vez, pelo que sabemos, por M. A. Teixeira em [18], exibindo algumas das suas propriedades.

Na atualidade não existe ainda um consenso sobre a noção de equivalência topológica destes tipos de sistemas, ou, como estes refletem a robustez da dinâmica em modelos não-suaves. Por essa razão, estudaremos a dinâmica diretamente segundo recentes trabalhos de Jeffrey em [10, 4, 11], sem depender das noções de equivalencia, revelando assim, o comportamento explícito local, que deve ser refletido nas teorias gerais, sobre estabilidade

¹ é típico isso ocorrer em sistemas desta natureza

estrutural para estes tipos de sistemas. Com esse objetivo este trabalho tem sido dividido em três capítulos e seis apêndices:

Capítulo 1: Conceitos Preliminares introduzimos alguns dos conceitos que são úteis no decorrer do texto. Posteriormente, definimos o problema da singularidade dobradobra.

Capítulo 2: T-Singularidade Nós definimos a T-Singularidade, fornecendo uma aproximação linear local desta singularidade previamente discutidas em [4], proporcionando explicitamente as mudanças de variáveis usadas. Em seguida, analisamos a dinâmica do fluxo em termos de dois sistemas sobre a variedade da descontinuidade, incluindo os resultados obtidos em [4] e [10]. Em particular, na Subseção 2.3.1, discutimos o caso quando o número de rotações ² do fluxo é finito, nas proximidades da singularidade, antes de entrar na região de deslize, mostrando que o número máximo e mínimo destas só difere por uma unidade e aumenta de forma gradual com um só parâmetro. Nas Subseções 2.2.1) e 2.3.3, introduzimos termos de ordem superior da aproximação que permitem desdobrar a bifurcação já conhecida. Logo após, na Seção 2.4, colocamos os resultados obtidos para determinar os retratos de fases globais em torno à singularidade, revelando um caso particularmente interessante de uma forma não-determinística do caos, que é tratada na Subseção 2.4.1, e finalmente são exibidas algumas simulações numéricas.

Capítulo 3: T-Singularidade em Sistemas de Controle com Retroalimentação.

Mostramos que a T-Singularidade não pode ocorrer em um sistema de controle na forma de Lur'e com uma entrada e uma saída. No entanto, é um fenômeno que pode acontecer num sistema de controle, com múltiplas saídas. A derivação teórica é ilustrada por meio de exemplos representativos simulados em Matlab.

²isto é, o número de impactos na variedade de descontinuidade

Preliminares

Neste capítulo estabelecemos as definições e os resultados necessários para a compreensão do restante do trabalho.

Introduzimos inicialmente o conceito de um campo em $\mathbb{R}^3$, cujas descontinuidades são de primeira espécie, e, estão concentradas sobre uma variedade de codimensão um. Logo, definimos suas órbitas solução, segundo a convenção estabelecida por Filippov em [7]. Em seguida, enunciamos as condições para garantir um contato quadrático dos campos com a variedade da descontinuidade.

1.1 Campos descontínuos

Definição 1.1 *Seja $0 \in M$ e $h : (\mathbb{R}^3, M) \rightarrow (\mathbb{R}, 0)$ uma representação implícita de classe C^r com $r \geq 1$ de M em p com $dh(p) \neq 0$. Denotemos por $\mathcal{X}^r$ o conjunto de todos os germes em 0, dos campos de vetores C^r sobre $(\mathbb{R}^3, 0)$ com a topologia C^r . Consideremos $\Omega(3)$ o espaço de todos os germes dos campos de vetores Z em $(\mathbb{R}^3, 0)$ tais que,*

$$Z(\mathbf{x}) = \begin{cases} \mathbf{X}(\mathbf{x}) & \text{se } h(\mathbf{x}) > 0 \\ \mathbf{Y}(\mathbf{x}) & \text{se } h(\mathbf{x}) < 0 \end{cases} \quad (1-1)$$

onde $\mathbf{X}, \mathbf{Y} \in \mathcal{X}^r$.

É claro que quando escrevemos $Z = (\mathbf{X}, \mathbf{Y})$, estamos assumindo que o campo $\mathbf{X}$ está definido, e, é suave sobre $M^+ = h^{-1}(0, \infty)$, assim como $\mathbf{Y}$ está definido, e, é suave em $M^- = h^{-1}(-\infty, 0)$. Denotaremos o campo por $Z(\mathbf{X}, \mathbf{Y})$ ou simplesmente Z , quando não tivermos problema de ambiguidade. Seja $\Omega(3) = \mathcal{X}^r \times \mathcal{X}^r$, dotado com a topologia produto, isto é, $C^r \times C^r$.

Segundo as convenções estabelecidas por Filippov [7], é possível distinguir as seguintes regiões abertas em M :

Região de Costura (RC) : Caracterizada por $(\mathbf{X}.h)(\mathbf{Y}.h) > 0$, onde $\mathbf{X}.h$ denota a derivada de Lie ao longo do fluxo do campo $\mathbf{X}$ e, é dada em $p \in M$ por $\langle X(p), \nabla h(p) \rangle$. Quando seja conveniente denotamos $\mathbf{RC}^+ = \{p \in M | \mathbf{X}.h(p) > 0, \mathbf{Y}.h(p) > 0\}$ e $\mathbf{RC}^- = \{p \in M | \mathbf{X}.h(p) < 0, \mathbf{Y}.h(p) < 0\}$;

Região de Escape (RE) : Caracterizada por $(\mathbf{X}.h) > 0$ e $(\mathbf{Y}.h) < 0$.

Região de Deslize (RS) : Caracterizada por $(\mathbf{X}.h) < 0$ e $(\mathbf{Y}.h) < 0$.

As solução de (1-1), engloba todas as soluções da inclusão diferencial

$$\dot{\mathbf{x}} \in f := \mathbf{Y} + \lambda(\mathbf{X} - \mathbf{Y}), \quad (1-2)$$

onde,

$$\lambda = \begin{cases} 0, & \text{se } h(\mathbf{x}) < 0 \\ 1, & \text{se } h(\mathbf{x}) > 0 \end{cases}, \quad (1-3)$$

e $\lambda \in [0, 1]$ se $h(\mathbf{x}) = 0$, assim f está definida como uma combinação convexa de $\mathbf{X}$ e $\mathbf{Y}$ sobre M .

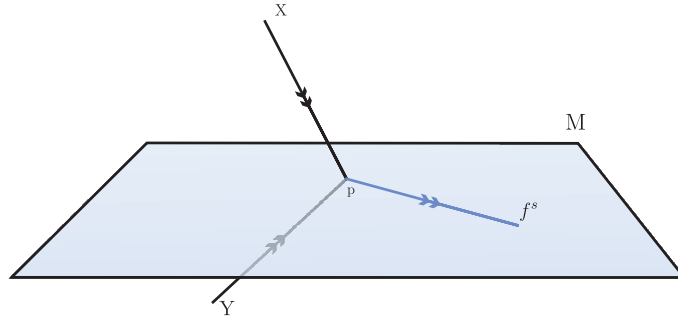


Figura 1.1: O campo deslizante f^s .

Em particular, quando as componentes normais de $\mathbf{X}$ e $\mathbf{Y}$, em relação a M tem direções opostas, f admite uma solução que é tangente à esta variedade, (Figura 1.1) satisfazendo-a:

$$\dot{\mathbf{x}} = f^s(\mathbf{x}) \quad \text{e} \quad h(\mathbf{x}) = 0, \quad (1-4)$$

usualmente f^s é chamado de *campo vetorial deslizante*, sendo definido como:

$$f^s = \mathbf{Y} + \frac{\mathbf{Y}.h}{(\mathbf{Y} - \mathbf{X}).h}(\mathbf{X} - \mathbf{Y}), \quad (1-5)$$

E esté pode ser estendido numa vizinhança da origem, basta multiplicar anterior por $\mathbf{Y}.h$. De modo que a dinâmica em geral do sistema suave por partes (1-1) é uma composição das dinâmicas de $\mathbf{X}$, $\mathbf{Y}$ e f^s .

Definição 1.2 (Órbita) Um segmento de órbita é qualquer caminho $\mathbf{x} = \mathbf{x}(t)$ satisfazendo (1-2), inteiramente contido numa das regiões $\{\mathbf{x} : h(\mathbf{x}) < 0\}$, $\{\mathbf{x} : h(\mathbf{x}) > 0\}$ ou $\{\mathbf{x} : h(\mathbf{x}) = 0\}$. Uma **órbita** é qualquer caminho $\mathbf{x} = \mathbf{x}(t)$ satisfazendo (1-1), formada pela concatenação de segmentos de órbita.

Definição 1.3 (Fluxo) Um **Fluxo** de (1-1) junto a um ponto $\hat{x}$ num tempo t é dado por todos os pontos $\mathbf{x}(t + \tau)$ com $\mathbf{x}(\tau) = \hat{x}$, para algum $\tau \in \mathbb{R}$, $\mathbf{x}(t)$ satisfazendo (1-1).

Definição 1.4 (M-equivalência) Dois campos $Z, \tilde{Z} \in \Omega(3)$ são C^0 M – equivalentes se existe um homeomorfismo M – invariante $g : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ que leva órbitas de Z em órbitas $\tilde{Z}$, preservando a orientação.

Definição 1.5 (M-estruturalmente estável) Um campos $Z \in \Omega(3)$ é M -estruturalmente estável, ou simplesmente estável, se existe uma vizinhança U de Z em $\Omega(3)$ tal que se $\tilde{Z} \in U$ então $\tilde{Z}$ é C^0 – M equivalente a Z .

1.2 O Problema Dobra-Dobra

Em particular, estamos interessados em estudar a dinâmica ao redor de um tipo de singularidade genérica de um campo $Z \in \Omega(3)$, que reúne todas as dinâmicas que podem acontecer na variedade da descontinuidade em um sistema suave, por partes, e, que foram descritas por Filippov em [7], que é chamada de singularidade *Dobra – Dobra*. Sendo definida formalmente em [18]:

Definição 1.6 (Caso Dobra-Dobra) Seja $\Omega_0(d)$, o conjunto de todos os $Z(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) \in \Omega(3)$, tal que:

- $\mathbf{X}$ e $\mathbf{Y}$ em (1-1) têm um contato quadrático com a variedade da descontinuidade na origem, isto é:

$$\mathbf{X}.h(0) = 0 \quad e \quad \mathbf{X}^2.h(0) \neq 0, \quad (1-6)$$

$$\mathbf{Y}.h(0) = 0 \quad e \quad \mathbf{Y}^2.h(0) \neq 0. \quad (1-7)$$

isso é o mesmo que dizer que os campos são dobras no zero.

- A origem é uma singularidade isolada, portanto $\mathbf{X}$ e $\mathbf{Y}$ não têm pontos singulares próximo ao zero;

$$\mathbf{X}(\mathbf{p}) \neq 0 \quad e \quad \mathbf{Y}(\mathbf{p}) \neq 0 \quad \forall \mathbf{p} \in V(0) \setminus \{0\}, \quad (1-8)$$

onde $V(0)$ é uma vizinhança do ponto 0.

- O par de curvas dadas por $S_X = \mathbf{X}.h = 0$ e $S_Y = \mathbf{Y}.h = 0$, sobre M intersectam-se transversalmente na origem, isto é:

$$\det(dh(0), d\mathbf{X}.h(0), d\mathbf{Y}.h(0)) \neq 0. \quad (1-9)$$

- A origem é um ponto hiperbólico, do campo deslizante estendido, e seus autovalores são transversais às curvas de dobra, S_X e S_Y no zero.

Definição 1.7 Se $Z \in \Omega_0(d)$, dizemos neste caso que 0 é uma singularidade tipo dobra – dobra de Z .

Os tipos de dobras estão determinados pela segunda derivada de Lie e portanto é,

(d1) Visível, se $\mathbf{X}^2.h(0) > 0$ ou $\mathbf{Y}^2.h(0) < 0$.

(d2) Invisível, se $\mathbf{X}^2.h(0) < 0$ ou $\mathbf{Y}^2.h(0) > 0$.

Desta forma é possível distinguir três tipos de singularidades tipo dobra-dobra que resultaram da combinação de (d1) e (d2);

- *Caso elíptico*: $\Omega_0(d.1) = \{Z \in \Omega_0(d) | \mathbf{X}^2.h(0) < 0 \text{ e } \mathbf{Y}^2.h(0) > 0\}$. Temos duas tangências invisíveis, (dobra-dobra invisível-invisível).

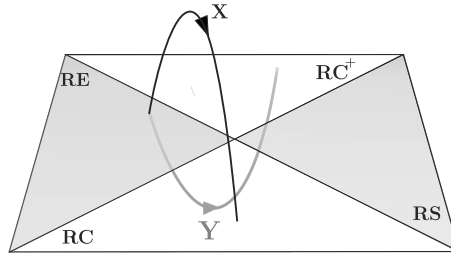


Figura 1.2: Dinâmica ao redor da singularidade tipo elíptico

- *Caso parabólico*: $\Omega_0(d.2) = \{Z \in \Omega_0(d) | \mathbf{X}^2.h(0). \mathbf{Y}^2.h(0) > 0\}$. Temos uma tangência visível e uma invisível, (dobra visível-dobra invisível).

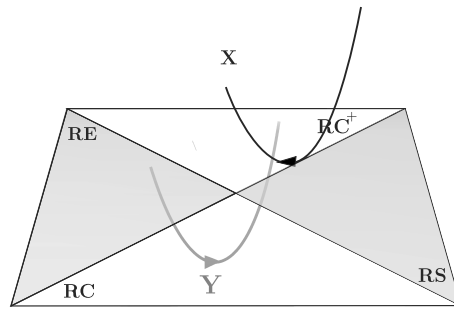


Figura 1.3: Dinâmica ao redor da singularidade tipo parabólico

- *Caso hiperbólico:* $\Omega_0(d.3) = \{Z \in \Omega_0(d) | \mathbf{X}^2 \cdot h(0) > 0 \text{ e } \mathbf{Y}^2 \cdot h(0) < 0\}$. Temos duas tangências visíveis, (dobra-dobra visível-visível).

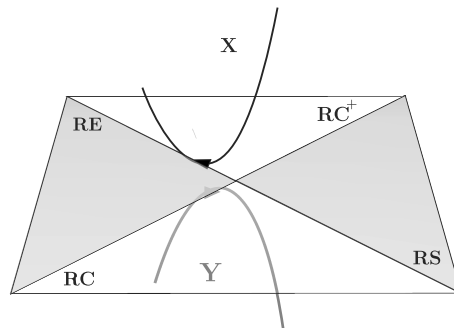


Figura 1.4: Dinâmica ao redor da singularidade tipo hiperbólico

T-Singularidade

Se $Z \in \Omega_0(d,1)$, dizemos que a origem é uma T-Singularidade de Z ¹. Neste caso os fluxos suaves de $\mathbf{X}$ e $\mathbf{Y}$, são compostos por órbitas, as quais retornam à variedade da descontinuidade, espiralando ao redor da singularidade, em meio de uma série de impactos sobre M , dando origem a uma dinâmica intrínseca. O que implica que, pode-se definir uma aplicação de Poincaré, ϕ , sobre M . Em [18], M. A. Teixeira provou que:

T1: Uma singularidade dobra-dobra é estruturalmente instável, se, ao menos uma das suas dobras é visível.

T2: A T-Singularidade é A-estável² se:

- Os autovalores da aplicação de Poincaré na origem são do tipo elíptico ($\lambda^\pm = a \pm ib$ com $|\lambda^\pm| \neq 0$).
- O campo deslizando estendido de f^s é hiperbólico na origem, e o autovetor associado com o autovalor de menor valor absoluto, está na região de deslize.

Nos casos onde pelo menos uma das dobras de $Z \in \Omega_d(0)$, é visível, a dinâmica resultante é menos complexa. Neste caso, a A-estabilidade dependerá exclusivamente do campo deslizando f^s . Os campos que apresentam estes tipos de singularidades têm sido amplamente estudados em [17]. A partir de agora, voltaremos a atenção para o caso da

¹Em homenagem a M. A. Teixeira que no trabalho [18], estudou pela primeira vez, pelo que sabemos, esta singularidade exibindo algumas propriedades.

²Os conceitos da A-estabilidade e L-estabilidade foram introduzidos formalmente em [18], para sistemas dinâmicos não suaves, que são ligeiras variações respectivamente dos conceitos clássicos de estabilidade assintótica e estabilidade no sentido de Lyapunov, pois estes dois últimos não admitem uma extensão direta para estes tipos de campos, (considere o fluxo $\phi_Z(t, \cdot)$ associado ao sistema descontínuo $Z = (X, Y)$).

- O campo Z é dito, *L-estável* em x_0 , se, para toda vizinhança $N_\epsilon(x_0)$ existe $\delta > 0$, tal que, para todo $x \in N_\delta(x_0)$ e $t \geq 0$, tem-se que $\phi_Z(t, x) \in N_\epsilon(x_0)$.
- O campo Z é dito, **A-estável** em x_0 (ou um atrator local), se, este for L-estável em x_0 , e também, satisfazer uma das condições seguintes :
 - $\lim_{t \rightarrow +\infty} \phi_Z(t, x) = x_0$, para todo $x \in N_\delta(x_0)$;
 - Existe $t_0 > 0$ tal que $\phi_Z(t_0, x) = x_0$.

T-Singularidade, que de acordo com as condições [T1] e [T2] é estruturalmente instável e possui, A-estabilidade em circunstâncias específicas. O principal objetivo deste é estudar alguns resultados recentes, ([10, 11]), sobre a dinâmica local, que revelam novos cenários de bifurcações, assim como, os efeitos não lineares em torno de uma bifurcação já conhecida, que irão determinar algumas das condições para a existência de conjuntos invariantes e a possível existência de uma forma de caos.

No próximo subtópico, relataremos sobre a aproximação linear, que será usada da T-Singularidade, que já foi previamente antecipada na introdução.

2.1 Aproximação Local

Por simplicidade vamos supor $h(x) = x$ em (1-1), pois toda variedade determinada por $h(\mathbf{x}) = 0$, tem localmente essa forma, considerando uma mudança de variáveis apropriada. Logo, o sistema correspondente será:

$$Z(x) = \begin{cases} \mathbf{X}(\mathbf{x}) & \text{se } x > 0, \\ \mathbf{Y}(\mathbf{x}) & \text{se } x < 0, \end{cases} \quad (2-1)$$

a variedade da descontinuidade é $M = h^{-1}(0) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; x = 0\}$. Las series de Taylor do campo $Z \in \Omega_0(d.1)$ na da forma (2-1) em torno da singularidade podem ser simplificadas em duas mudanças de variáveis: a primeira, envia as curvas das dobras, $S_{\mathbf{X}}$ e $S_{\mathbf{Y}}$, localmente ao longo dos eixos y e z respectivamente. Já a segunda, fará um reescalonamento no sistema de coordenadas resultante. Mais um reescalonamento do tempo que faz-se separadamente para cada campo, (isso troca a velocidade das órbitas, mas preserva os retratos de fase). Estes detalhes são reportados no Apêndice A. Logo, a forma local em torno da origem é:

$$\mathbf{X} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -y \\ 1 \\ v^+ \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} O(x, \|(y, z)\|^2) \\ O(\|(x, y, z)\|) \\ O(\|(x, y, z)\|) \end{pmatrix} \quad (2-2a)$$

$$\mathbf{Y} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z \\ v^- \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} O(x, \|(y, z)\|^2) \\ O(\|(x, y, z)\|) \\ O(\|(x, y, z)\|) \end{pmatrix} \quad (2-2b)$$

Os parâmetros v^+ e v^- que aparecem na expressão anterior, indicam a tangente dos

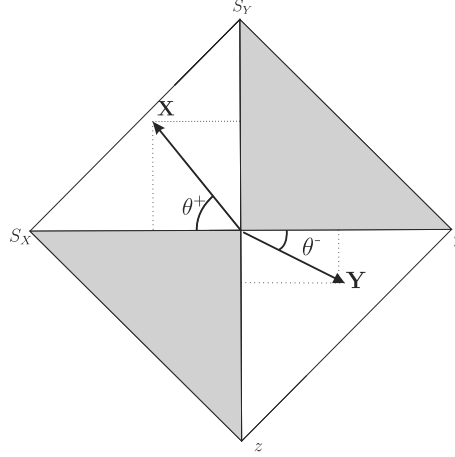


Figura 2.1: Representação geométrica dos parâmetros v^+ e v^- .

ângulos $\theta^\pm$, de $\mathbf{X}$ e $\mathbf{Y}$, em relação à linha $S_{\mathbf{X}}$ no ponto zero:

$$v^+ = \frac{\mathbf{X} \cdot \mathbf{Y} \cdot h(0)}{\sqrt{-\mathbf{X}^2 \cdot h(0) \mathbf{Y}^2 \cdot h(0)}} = \tan(\theta^+), \quad (2-3)$$

$$v^- = \frac{-\mathbf{Y} \cdot \mathbf{X} \cdot h(0)}{\sqrt{-\mathbf{X}^2 \cdot h(0) \mathbf{Y}^2 \cdot h(0)}} = \frac{1}{\tan(\theta^-)}, \quad (2-4)$$

$$v^+ v^- = \frac{\tan(\theta^+)}{\tan(\theta^-)}, \quad (2-5)$$

o quociente acima é chamado em [11], de "*raio de tangentes*".

Localmente M é dividida em quatro regiões, como será apresentado na Fig.(2.2), que reunirá todas as dinâmicas que foram descritas por Filippov em [7];

RS, A região de deslize, $\{(x, y, 0) \in \mathbb{R}^3 | y > 0, z > 0\}$;

RE, A região de escape $\{(x, y, 0) \in \mathbb{R}^3 | y < 0, z < 0\}$;

RC⁺, Uma região de costura, $\{(x, y, 0) \in \mathbb{R}^3 | y < 0, z > 0\}$;

RC⁻, Uma região de costura, $\{(x, y, 0) \in \mathbb{R}^3 | y > 0, z < 0\}$.

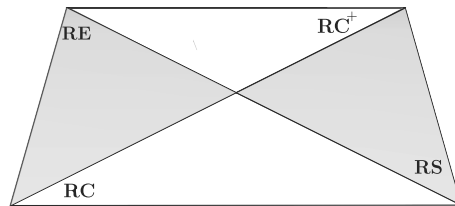


Figura 2.2: Divisão Local da Variedade da Descontinuidade.

É importante notar que nas regiões de costura o fluxo é contínuo e invertível, mas as órbitas têm vértices, onde elas costuram a variedade da descontinuidade. Enquanto, na regiões de deslize e de escape isto não acontece. Pois, existe só uma órbita definida no futuro, que será associada a uma condição inicial na região de deslize. No entanto, existirá um número infinito de órbitas no passado, que chegam na condição inicial, desde M^+ , M^- e M . Da mesma forma, a região de escape terá uma situação equivalente.

Na sequência trabalharemos o fluxo ao redor da singularidade, através de dois sistemas dinâmicos restritos a M :

- um destes no tempo contínuo em **RS** e **RE**, ($\dot{\mathbf{x}} = f^s(\mathbf{x})$), cujas soluções são órbitas deslizantes que moram na variedade da descontinuidade (Subseção 2.2),
- e o outro no tempo discreto, (a concatenação dos fluxos de **X** e **Y**, induz uma aplicação de retorno em M), cujas soluções são órbitas costurantes que envolvem a singularidade (Subseção 2.3).

2.2 Dinâmica Deslizante

Nas regiões de deslize e de escape os componentes normais de **X** e **Y**, com respeito a M , possuem direções opostas, portanto as soluções do campo Z em M estão determinadas pelo campo deslizante f^s dado por (1-4). Substituindo (2-2), em (1-4), obtemos a expressão explícita deste campo em volta da singularidade.

$$f^s = \frac{1}{d(y,z)} \begin{pmatrix} 0 \\ v^-y + z + O(\|y,z\|^2) \\ y + v^+z + O(\|y,z\|^2) \end{pmatrix}, \quad (2-6)$$

sendo que, $d(y,z) = y + z + O(\|y,z\|^2)$.

Na origem não está definida a expressão (2-6), pois nesse ponto os campos são tangentes a M . Segundo [4], definimos um campo vetorial planar regularizado $\check{f}^s$, que resulta em multiplicar (2-6) por $d(y,z)$, omitindo a componente³ x .

$$\check{f}^s = \begin{pmatrix} v^- & 1 \\ 1 & v^+ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix} + O(\|y,z\|^2) \quad (2-7)$$

Observa-se que $d(y,z) > 0$ se $(y,z) \in \mathbf{RS}$ e $d(y,z) < 0$ se $(y,z) \in \mathbf{RE}$, logo (2-6) e (2-7) tem o mesmo retrato de fase em **RS**. O mesmo acontece em **RE**, mas com tempo invertido.

³É um campo de vetores restrito à variedade de descontinuidade

Além disso, como temos $d(0,0) = 0$, então $\check{f}^s$ terá um equilíbrio na origem, onde (2-6), não está bem definido.

A partir da observação anterior, concluímos que, enquanto as órbitas de $\check{f}^s$ chegam à singularidade em tempo infinito, as mesmas chegam de f^s em tempo finito na origem.

No ponto zero, os autovalores da parte linear de $\check{f}^s$ são:

$$\mu_{\pm} = \frac{1}{2} \left(v^+ + v^- \pm \sqrt{(v^+ - v^-)^2 + 4} \right) \quad (2-8)$$

sendo que estes são reais, pois $(v^+ - v^-)^2 + 4 > 0$. Os autovetores associados são:

$$\begin{pmatrix} \mu_{\pm} - v^+ \\ 1 \end{pmatrix} \quad (2-9)$$

Alguns cálculos simples mostram que os dois vetores de (2-9) são ortogonais. Pelo fato de $\mathbf{X}$ e $\mathbf{Y}$ intersectar transversalmente as linhas de dobra. Sempre teremos um autovetor em $\mathbf{RE} \cup \mathbf{RS}$ e o outro em $\mathbf{RC}^- \cup \mathbf{RC}^+$, e:

- (a) Se $v^{\pm} > 0$ e $v^+v^- > 1$, então os dois autovetores são instáveis;
- (b) Se $v^+v^- < 1$, o autovetor contido em $\mathbf{RS} \cup \mathbf{RE}$ será instável, enquanto o contido em $\mathbf{RC}^- \cup \mathbf{RC}^+$ é estável;
- (c) Se $v^{\pm} < 0$ e $v^+v^- > 1$, os dois autovalores serão estáveis.

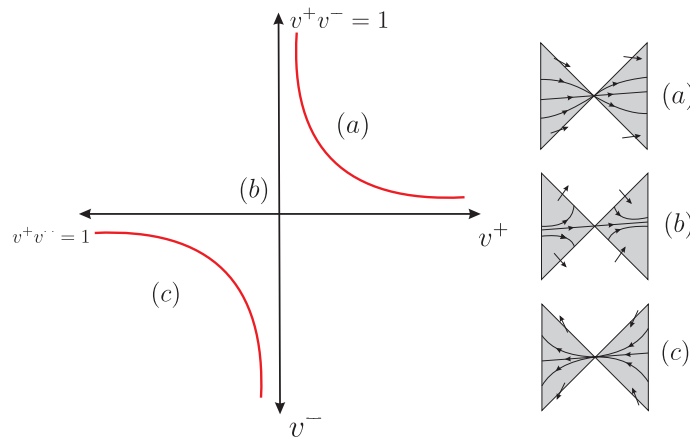


Figura 2.3: Retratos de fase do campo deslizante.

Se o autovetor que está na região de deslize ou de escape é estável, este será associado com o autovalor de menor módulo. O que implica que as soluções de (2-7) são atraídas

assintoticamente na direção do mesmo, aproximando da singularidade.

De acordo com as definições de órbitas e fluxo para sistemas descontínuos abordados no capítulo anterior, chegamos à conclusão que as órbitas vão cruzar em tempo finito a singularidade:

- de **RS** para **RE** em (c). Portanto as órbitas que possuem condições iniciais num conjunto suave, distante de M, poderão entrar na região de deslize e alcançar em um tempo finito o ponto zero. A partir desse instante adentrarão a região de escape, onde se evoluirão de forma não única, no futuro. Deste modo, todas as informações ao respeito das condições iniciais serão perdidas. Na Subseção 2.4, apresentaremos algumas implicações desta situação.
- de **RE** para **RS** em (a)-(b).

Resumindo, obtivemos o seguinte resultado, que foi demonstrado em [4], a respeito da dinâmica deslizante.

Teorema 2.1 *Nas regiões deslizantes*

- qualquer órbita passa da região de escape à de deslize, se $v^\pm > 0$ e $v^+v^- > 1$;
- uma única órbita passa da região de escape à de deslize, se $v^+v^- < 1$;
- qualquer órbita passa da região de deslize à de escape, se $v^\pm < 0$ e $v^+v^- > 1$.

*Em cada um dos casos anteriores, o passo entre **RE** e **RS**, é feito diretamente através da singularidade.*

2.2.1 Efeito dos Termos de Ordem Superior

A estabilidade estrutural de f^s pode ser determinada considerando a mesma para $\check{f}^s$. O Jacobiano de (2-7), no ponto zero é singular quando $v^+v^- = 1$. Nesta situação os campos **X** e **Y**, serão paralelos. O autovetor $(-v^+, 1)$ associado com $\mu^- = 0$ está sempre em **RS**, se $v^\pm < 0$ e em **RC**⁺, se $v^\pm > 0$. Desta forma, surgirá uma bifurcação ao longo da parte negativa pertencente à hipérbole, $v^+v^- = 1$, pois ali, o campo deslizante regularizado é estruturalmente instável. Neste caso, o comportamento das órbitas de (2-7), perto da origem e próximo da bifurcação, é capturado pela dinâmica do campo $\check{f}^s$, restrita à variedade central unidimensional, com a expansão de Taylor de segunda ordem, na forma normal:

$$\dot{u} = \frac{v^+}{(v^+)^2 + 1}((v^+v^- - 1)u + a_2u^2) + O(u^3) \quad (2-10)$$

sendo $a_2 = c_{22}^+ v^+ - c_{23}^+ - c_{32}^+ + c_{33}^+ / v^+ - c_{22}^-(v^+)^2 + c_{23}^- v^+ + c_{32}^- v^+ - c_{33}^-$, onde c_{ij}^+ e c_{ij}^- , são entradas das matrizes jacobianas de $\mathbf{X}$ e $\mathbf{Y}$ respectivamente (detalhes da forma normal estão dadas no Apêndice B).

Uma bifurcação transcritical é exibida por: (2-10) quando $v^+ v^- = 1$, o que implica que o campo f^s tem um ponto singular (conhecido como pseudo-equilíbrio⁴) que cruza a origem na bifurcação, mudando sua estabilidade. No caso $v^\pm < 0$, se deduz que o eixo positivo de u está em **RS**. E que o pseudo-equilíbrio possui as formas seguintes:

- (s1) se, $a_2 > 0$ em (2-10), uma sela em **RE** para $v^+ v^- > 1$, e um nó estável em **RS**, se $v^+ v^- < 1$,

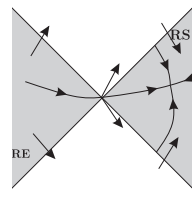


Figura 2.4: Retratos de fase da dinâmica do campo deslizante para o caso (s1).

- (s2) se, $a_2 < 0$ em (2-10), uma sela em **RS** para $v^+ v^- > 1$, e um nó instável em **RE**, se $v^+ v^- < 1$,

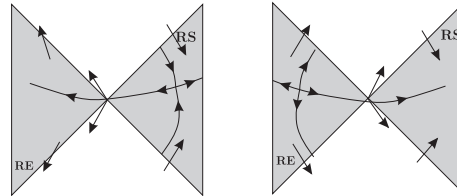


Figura 2.5: Retratos de fase da dinâmica do campo deslizante para o caso (s2).

Observação: É importante notar, que a bifurcação transcritical, exibida em (2-10), muda também a quantidade das órbitas que passam entre **RE** e **RS** pela singularidade.

2.3 Dinâmica Costurante

Nas regiões de costura, os segmentos da órbita de $\mathbf{X}$ e $\mathbf{Y}$ induzem aplicações φ^+ e φ^- da variedade da descontinuidade, sobre ela mesma numa vizinhança da origem, pois ali os campos têm um contato quadrático.

⁴os pontos de equilíbrio (2-6) que não são zeros dos campos (2-2) veja [8]

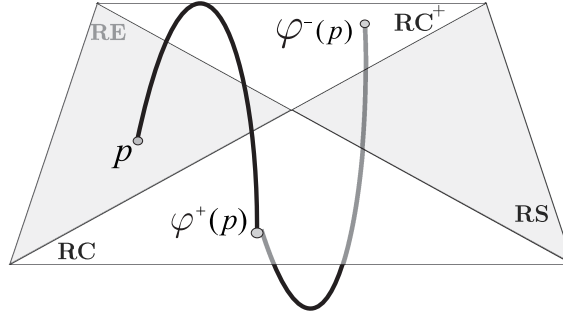


Figura 2.6: Aplicações de Primeiro Retorno.

Os campos de vetores (2-2a) e (2-2b), truncados são facilmente integrados obtendo as aplicações do primeiro retorno,

$$\begin{aligned} \varphi^+ : \mathbb{R}^- \times \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R} \\ (y, z) &\longrightarrow \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -2v^+ & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix} + O(\|y, z\|^2), \end{aligned} \quad (2-11a)$$

$$\begin{aligned} \varphi^- : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^- &\longrightarrow \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+ \\ (y, z) &\longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -2v^- \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix} + O(\|y, z\|^2), \end{aligned} \quad (2-11b)$$

Portanto, o fluxo de $\mathbf{X}$ aplica pontos da região $\{(0, y, z) \in \mathbb{R}^3 | y < 0\}$, para $\{(0, y, z) \in \mathbb{R}^3 | y > 0\}$, através de uma reflexão no eixo y ao longo da direção $(0, 1, v^+) + O(\|(x, y, z)\|)$. Do mesmo modo, o fluxo de $\mathbf{Y}$ aplica pontos da região $\{(0, y, z) \in \mathbb{R}^3 | z < 0\}$ para $\{(0, y, z) \in \mathbb{R}^3 | z > 0\}$, através de uma reflexão no eixo z ao longo da direção $(0, v^-, 1) + O(\|(x, y, z)\|)$.

Para entender a dinâmica das órbitas ao redor da singularidade, costurando através de $\mathbf{RC}^+$ e $\mathbf{RC}^-$, estudaremos a aplicação de Poincaré, em M . Esta aplicação é resulta da composição dos fluxos de $\mathbf{X}$ e $\mathbf{Y}$:

$$\begin{aligned} \varphi = \varphi^+ \circ \varphi^- : \mathbf{RE} \cup \mathbf{RC}^+ &\longrightarrow \mathbf{RS} \cup \mathbf{RC}^- \\ (y, z) &\longrightarrow \begin{pmatrix} -1 & 2v^- \\ -2v^+ & 4v^+v^- - 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix} + O(\|y, z\|^2), \end{aligned} \quad (2-12a)$$

$$\begin{aligned} \varphi = \varphi^- \circ \varphi^+ : \mathbf{RE} \cup \mathbf{RC}^- &\longrightarrow \mathbf{RS} \cup \mathbf{RC}^+ \\ (y, z) &\longrightarrow \begin{pmatrix} 4v^+v^- - 1 & -2v^- \\ 2v^+ & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix} + O(\|y, z\|^2), \end{aligned} \quad (2-12b)$$

As expressões acima são amplamente estudadas nas diversas formas em [4], onde foi provado o seguinte:

Teorema 2.2 *Antes de entrar na região de deslize, toda órbita irá costurar a variedade da descontinuidade,*

- *no máximo uma vez de M^+ para M^- se $v^- > 0$ ou de M^- para M^+ se $v^+ > 0$;*
- *no mínimo uma vez de $M^\pm$ para $M^\mp$ se $v^+v^- < 1$ e $v^\pm < 0$;*
- *infinitas vezes se $v^\pm < 0$ e $v^+v^- > 1$, gerando um par de superfícies invariantes que interceptam-se na singularidade (Figura 2.7), uma delas é assintoticamente atratora no sentido clássico. Encerrado a região de escape dentro do domínio da repulsão na origem. Porém, a outra é assintoticamente repulsora, e encerra a região de deslize dentro de um domínio de atração.*

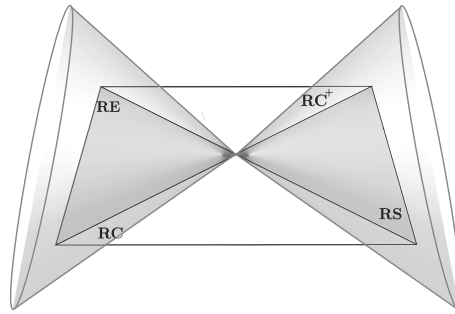


Figura 2.7: *O diábolo não-suave: Variedades Invariantes próximas à singularidade*

As seguintes propriedades de φ^+ e φ^- , são discutidas em [4]. São elas:

1. A parte linear das expressões (2-12a) e (2-12b) são equivalentes por meio da transformação:

$$(y, z, v^\pm) \longmapsto (z, y, v^\mp), \quad (2-13)$$

2. As aplicações de retorno localmente, preservam as retas através da origem.

estas propriedades permitem simplificar a análise das aplicações de Poincaré, por exemplo, é suficiente que analize (2-12a), a partir dos resultados encontrados neste, é possível inferir os correspondentes em (2-12b) aplicando (2-13).

2.3.1 Número de Pontos de Costuras

Do Teorema (2.2) deixa claro que a dinâmica local costurante depende crucialmente de um parâmetro único: a direção do campo na origem. Esta determina quando uma órbita do fluxo ao redor da T-Singularidade, costura, "no máximo uma vez", "no mínimo uma vez" ou "infinitas vezes", a variedade da descontinuidade antes de entrar na região de deslize.

A seguir apresentamos um teorema e um corolário, que mostra o número exato de pontos de costura, relacionados com o caso: "no mínimo uma vez",

Teorema 2.3 *Se $v^+v^- = \cos^2 \frac{\pi}{k+1}$ onde $k \geq 2$ é um inteiro, e $v^\pm < 0$ então qualquer órbita com condição na região de escape costura M , exatamente k vezes antes de entrar na região de deslize.*

Corolário 2.4 *Se $v^+v^- = \cos^2 \frac{\pi}{r+1}$ e $r > 1$ não é um inteiro, e se $v^\pm < 0$, então:*

1. *Qualquer órbita com condição na região escape costura M entre k ou $k+1$ vezes antes de entrar na região de deslize, (onde k é o inteiro mais próximo a r).*
2. *Na forma normal (2-2), o número de costuras muda entre k e $k+1$ onde: $z = y\tau_{(k+1)/2}^+$ ou $y = z\tau_{(k+1)/2}^-$,*

$$\tau_0 = 0, \quad \tau_m^\pm = \frac{v^\pm}{G_m(\arccos(\sqrt{v^+v^-}))}, \quad (2-14)$$

e

$$G_m(\theta) = \frac{\sin((2m-1)\theta)}{\sin((2m)\theta)} \cos(\theta). \quad (2-15)$$

A seguir serão expostas as ferramentas para a demonstração do Teorema (2.3) e do Corolário (2.4) segundo [11].

A Aplicação Tangente Dado qualquer ponto $\mathbf{y}_m \in M$ as coordenadas de seu primeiro retorno $\mathbf{y}_{m+1}$, são dadas por (2-11):

$$\mathbf{y}_{m+1} = \Phi^+(\mathbf{y}_m) = B^+ \mathbf{y}_m, \quad B^+ = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -2v^+ & 1 \end{pmatrix}, \quad (2-16a)$$

$$\mathbf{y}_{m+1} = \Phi^-(\mathbf{y}_m) = B^- \mathbf{y}_m, \quad B^- = \begin{pmatrix} 1 & -2v^- \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad (2-16b)$$

isso implica que as aplicações de Poincaré, (2-12), no ponto $\mathbf{y}_m$ são:

$$\mathbf{y}_{m+2} = \varphi^- \circ \varphi^+(\mathbf{y}_m) = A^+ \mathbf{y}_m \quad A^+ = B^- B^+, \quad (2-17a)$$

$$\mathbf{y}_{m+2} = \varphi^+ \circ \varphi^-(\mathbf{y}_m) = A^- \mathbf{y}_m \quad A^- = B^+ B^-, \quad (2-17b)$$

As soluções da equação de diferenças $\mathbf{y}_m = A^\pm \mathbf{y}_0$, foram estudadas recentemente de forma explícita em [11], e são dadas claramente por:

$$\mathbf{y}_{2m} = (\varphi^- \circ \varphi^+)^m(\mathbf{y}_0) = (A^+)^m \mathbf{y}_m, \quad (2-18a)$$

$$\mathbf{y}_{2m} = (\varphi^+ \circ \varphi^-)^m(\mathbf{y}_0) = (A^-)^m \mathbf{y}_m, \quad (2-18b)$$

realizando a substituição $v^+ v^- = \cos^2 \theta$, segue-se indutivamente que,

$$(A^\pm)^m = \frac{\sin(2m\theta)}{\sin(2\theta)} A^\pm - \frac{\sin((2m-1)\theta)}{\sin(2\theta)} I, \quad (2-19)$$

onde, I denota a matriz identidade 2×2 .

O fato de que as aplicações φ^+ e φ^- preservam retas através da origem implica, que, é suficiente analisar o ângulo dos pontos relativos às curvas de dobra $y = 0$ e $z = 0$, e como eles rotacionam ao redor da singularidade pelas matrizes $A^\pm$.

Dado um ponto $\mathbf{y}_i \in M$ com componentes (y_i, z_i) ⁵ definimos sua tangente com respeito a S_X e S_Y , que correspondem aos eixos y e z respectivamente, (segundo a convenção em [4] qualquer iteração par $\mathbf{y}_{2k}$ mora no domínio φ^+ e as interações ímpares $\mathbf{y}_{2k+1}$ no de φ^-), como:

$$T_{2m} = \frac{z_{2m}}{y_{2m}}, \quad T_{2m+1} = \frac{y_{2m+1}}{z_{2m+1}}, \quad \text{com } m \in \mathbb{Z}, \quad (2-20)$$

Assim T_m é positivo para os pontos $\mathbf{y}_m$, nas regiões de deslize e de escape, negativo nas regiões de costura e zero ou infinito, nas curvas de dobra. Podemos denotar os conjuntos dos valores das tangentes T_i dos pontos sobre **RS**, **RE**, **RC**⁺ e **RC**⁻ por:

$$T_{\mathbf{RS}} = T_{\mathbf{RE}} = (0, \infty) \quad \text{e} \quad T_{\mathbf{RC}^+} = T_{\mathbf{RC}^-} = (-\infty, 0), \quad (2-21)$$

de (2-17a)-(2-17b) segue-se;

$$T_{2m+2} = \frac{T_{2m} - 2v^+}{1 + 2v^- T_{2m} - 4v^+ v^-}, \quad (2-22)$$

⁵Por simplicidade identificamos a variedade da descontinuidade com o plano em $\mathbb{R}^2$, portanto $(0, y, z) \sim (y, z)$

$$T_{2m+1} = \frac{T_{2m-1} - 2v^-}{1 + 2v^-T_{2m-1} - 4v^+v^-}, \quad (2-23)$$

além disso, temos a partir de (2-18a)-(2-19) a seguinte expressão:

$$T_{2m} = \frac{v^+ - T_0 G_m(\theta)}{2v^+v^- - G_m(\theta) - v^-T_0}, \quad (2-24)$$

onde, $\theta = \arccos(\sqrt{v^+v^-})$. Definimos a função,

$$G_m(\theta) = \frac{\sin((2m-1)\theta)}{\sin(2m\theta)} \cos(\theta). \quad (2-25)$$

A aplicação tangente $T_0 \mapsto T_{2m}$ dada por (2-24) é a ferramenta principal na demonstração do teorema e do seu corolário.

Estrutura da Região $v^\pm < 0$ e $v^+v^- < 1$. O Teorema é provado, considerando como **RE** é aplicada por meio da ação de φ^+ e φ^- . Sem perda da generalidade, podemos aplicar φ^+ a um ponto $\mathbf{y}_0 \in \mathbf{RE}$, (resultados análogos para φ^- , são obtidos para $\mathbf{y}_0 \in \mathbf{RE}$ pela transformação (2-13)). A órbita associada a esta condição inicial induz uma subsequência dos pontos costurantes $\mathbf{y}_{1,\dots,2m-1} \in \mathbf{RC}^-$ e $\mathbf{y}_{2,\dots,2m-2} \in \mathbf{RC}^+$ para algum inteiro m , logo, temos dois casos possíveis:

- $\mathbf{y}_{2m} \in \mathbf{RS}$, o que implica que a órbita tem um número ímpar de pontos costurantes $2m-1$.
- $\mathbf{y}_{2m} \in \mathbf{RC}^+$ e $\mathbf{y}_{2m+1} \in \mathbf{RS}$, o que implica que a órbita tem um número par de pontos costurantes $2m$.

Determinamos que para certos valores de v^+v^- as fronteiras de **RE** são aplicadas exatamente sobre as fronteiras de **RS** e para isso é preciso o mesmo número de costuras (número de iterações em $\mathbf{RC}^+$ e $\mathbf{RC}^-$). Já que φ^+ e φ^- são lineares, então qualquer ponto em **RE** é aplicado em **RS** com esse mesmo número de costuras.

A seguir expomos a demonstração do Teorema (2.3) usando as ferramentas esboçadas,

Demonstração.[Teorema (2.3)] Seja $v^+v^- = \cos^2 \frac{\pi}{k+1}$, onde, k é um inteiro e consideremos por comodidade $\pi_k = \frac{\pi}{k+1}$. Se $\mathbf{y}_0$ mora sobre a fronteira de **RE**, é equivalente a dizer que $T_0 = 0$ ou $T_0 = \infty$, então a tangente da iteração $\mathbf{y}_{2m}$ é:

$$T_{2m}|_{T_0=0} = \frac{\sin(2m\pi_k) \cos \pi_k}{\sin((2m+1)\pi_k)v^-} = \frac{1}{v^-} G_{m+\frac{1}{2}}(\pi_k), \quad (2-26)$$

$$T_{2m}|_{T_0=\infty} = \frac{\sin((2m-1)\pi_k) \cos \pi_k}{\sin(2m\pi_k)v^-} = \frac{1}{v^-} G_m(\pi_k), \quad (2-27)$$

agora seja $\mathbf{y}_0 \in \mathbf{RE}$ com tangente $T_0 \in T_{\mathbf{RE}}$, e tomamos a aplicação $\mathbf{y}_0 \mapsto \mathbf{y}_{2m} = (\varphi^- \circ \varphi^+)^m(\mathbf{y}_0)$, que envia $T_0 \mapsto T_{2m}$.

Quando assumimos $k \geq 2$, surgem dois casos:

- k é ímpar, da forma $2m - 1$ para algum $m \in \mathbb{Z}$. Logo, se $\mathbf{y}_0$ mora na fronteira de $\mathbf{RE}$, por (2-26)-(2-27) o ponto $\mathbf{y}_{2m} = (\varphi^- \circ \varphi^+)^m(\mathbf{y}_0)$, tem tangente $T_{2m}|_{T_0=0} = 0$ ou $T_{2m}|_{T_0=\infty} = \pm\infty$, é o mesmo que dizer que, mora nas fronteiras de $\mathbf{RS}$, e já que as aplicações φ^+ e φ^- são lineares, segue-se que: $\mathbf{y}_{2m} = (\varphi^- \circ \varphi^+)^m(\mathbf{y}_0) \in \mathbf{RS}$ para qualquer $\mathbf{y}_0 \in \mathbf{RE}$. Além disso, por (2-22)-(2-23) a iteração $\mathbf{y}_{2m-1}$ tem tangente $T_{2m-1} \in (-\infty, 2v^-) \subset \mathbf{RC}^-$ portanto, é o último ponto costurante da sequência $\mathbf{y}_1, \dots, \mathbf{y}_{2m-1} \in \mathbf{RC}^+$ e $\mathbf{y}_{2, \dots, 2m-2} \in \mathbf{RC}^-$, a qual tem $2m - 1$ elementos.

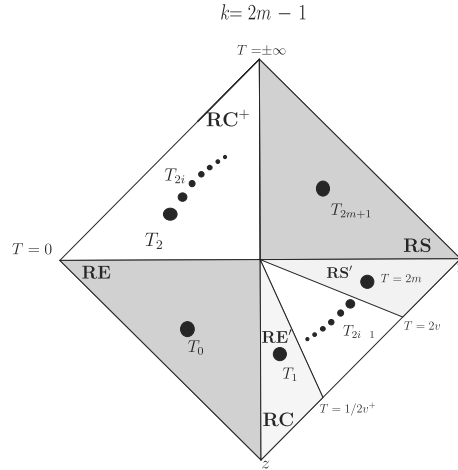


Figura 2.8: Pontos de costura no caso $k = 2m - 1$, $\mathbf{RE}' = \varphi^+(\mathbf{RE}) = (-\infty, 1/2v^+)$ é onde acontece o primeiro ponto costurante e em $\mathbf{RS}' = \varphi^+(\mathbf{RS}) = (2v^-, 0)$ o último

Isto implica que, uma órbita com uma condição inicial em $\mathbf{RE}$ e $v^+v^- = \cos^2 \frac{\pi}{k+1}$, com $k = 2m - 1$, ira costurar exatamente k vezes a variedade da descontinuidade antes de entrar em $\mathbf{RS}$, como ilustrado na Figura 2.8.

- Se $k = 2m$ para algum $m \in \mathbb{Z}$, então para $\mathbf{y}_0$ pertencente à fronteira de $\mathbf{RE}$ segue de (2-26)-(2-27) que $T_{2m}|_{T_0} = \pm\infty$ e $T_{2m}|_{T_\infty} = 2v^+$, portanto pelo fato da linearidade nas aplicações φ^+ e φ^- , $\mathbf{y}_{2m}$ está associado à sequência de pontos costurantes $\mathbf{y}_1, \dots, \mathbf{y}_{2m-1} \in \mathbf{RC}^-$ e $\mathbf{y}_{2, \dots, 2m} \in \mathbf{RC}^+$. Uma aplicação adicional de φ^+ envia $T_{2m} \in (-\infty, 2v^+)$ a $T_{2m+1} \in (0, \infty) = T_{\mathbf{RS}}$, e, assim leva as fronteiras de $\mathbf{RE}$ às fronteiras de $\mathbf{RS}$ e a qualquer $\mathbf{y}_0 \in \mathbf{RE}$ a $\mathbf{y}_{2m+1} = \varphi^+ \circ (\varphi^- \circ \varphi^+)^m(\mathbf{y}_0) \in \mathbf{RS}$, o que implica que existem $2m$ pontos costurantes no total.

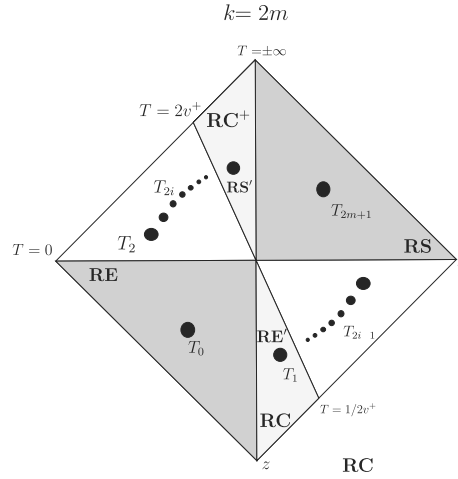


Figura 2.9: Pontos de costura no caso $k = 2m$, $\mathbf{RE}' = \varphi^+(\mathbf{RE}) = (\infty, 1/2v^+)$ é onde acontece o primeiro ponto costurante e em $\mathbf{RS}' = \varphi^+(rs) = (2v^+, 0)$ o último.

Disto temos que uma órbita com uma condição inicial em $\mathbf{RE}$ e $v^+v^- = \cos^2 \frac{\pi}{k+1}$, com $k = 2m$, costura exatamente k vezes a variedade da descontinuidade antes de entrar em $\mathbf{RS}$, ver Figura 2.9.

Em ambos os casos uma vizinhança da singularidade consiste em órbitas que conectam $\mathbf{RE}$ a $\mathbf{RS}$, via um número fixo k de costuras dado por $v^+v^- = \cos^2 \frac{\pi}{k+1}$, com k inteiro. Finalmente aplicando a transformação (2-13), a qual reflete a topologia sobre a linha $y = z$, produz trivialmente o mesmo resultado quando é aplicado primeiro φ^- em vez de φ^+ sobre $\mathbf{RE}$. $\square$

Demonstração.[Corolário (2.4)] No Teorema (2.3), as fronteiras de $\mathbf{RE}$ são enviadas exatamente sobre as fronteiras de $\mathbf{RS}$, se $v^+v^- = \cos^2(\frac{\pi}{k+1})$, onde, k é um inteiro. Uma consequência imediata disto é que se $v^+v^- = \cos^2(\frac{\pi}{r+1})$ para um não inteiro $r > 1$, então o número de pontos costurantes de um órbita pode só tomar os valores k e $k+1$, sendo k o máximo inteiro inferior a r . Para provar isto explicitamente, consideremos as órbitas que são aplicadas desde $\mathbf{RE}$ às fronteiras de $\mathbf{RS}$ e desde as fronteiras de $\mathbf{RE}$ à $\mathbf{RS}$.

Seja a iteração zero ($\mathbf{y}_0$), o ponto inicial de uma órbita, se $\mathbf{y}_0 \in \mathbf{RE}$ ou $\mathbf{y}_0 = \varphi^-(\mathbf{y}_{-1}) \in \mathbf{RC}^+$ para algum $\mathbf{y}_{-1} \in \mathbf{RE}$, (este último é o mesmo que dizer, o primeiro ponto costurante de uma órbita). No primeiro caso temos $T_0 \in T_{\mathbf{RE}}$, e no segundo aplicando (2-16a)-(2-16b), resulta $T_0 \in (1/2v^-, 0)$. Da mesma forma, vamos supor que alguma iteração $\mathbf{y}_i$ é um ponto final se: $\mathbf{y}_i \in \mathbf{RS}$ ou $\mathbf{y}_i \in \mathbf{RC}^+$ tal que $\mathbf{y}_{i+1} = \varphi^+(\mathbf{y}_i) \in \mathbf{RS}$. Respectivamente $T_i \in T_{\mathbf{RS}}$ e $T_i \in (-\infty, 2v^+)$. Afirmaremos assim, que uma órbita completa é aquela que tem um ponto inicial ($\mathbf{y}_0$) e um ponto final ($\mathbf{y}_i$) para algum $i \in \mathbb{N}$.

Seja $\theta = \frac{\pi}{r+1}$ para algum $r > 1$ e assumamos que k é o maior inteiro inferior a r de modo que $k < r < k + 1$. Suponhamos primeiro que $k = 2m - 1$ para algum $m \in \mathbb{Z}$. Determinamos os valores T_0 para os quais T_{2m} mora nas fronteiras de $T_{\mathbf{RS}}$, solucionando $T_{2m}|_{T_0} = 0$ e $T_{2m}|_{T_0} = \pm\infty$ e a partir de (2-24) segue-se que:

$$T_{2m}|_{T_0} = 0 \implies T_0 = \tau_m \quad T_{2m}|_{T_0} = \pm\infty \implies T_0 = \tau_{m+\frac{1}{2}}, \quad (2-28)$$

onde, $\tau_m = v^+ / G_m(\theta)$, por outra parte deduzimos que:

$$\frac{1}{2v^-} < \tau_m < 0 < \tau_{m+\frac{1}{2}} \quad (2-29)$$

Se $T_0 \in (1/2v^-, 0) \subset T_{\mathbf{RC}^+}$ ou $T_0 \in (0, \infty) = T_{\mathbf{RE}}$, então (2-29) particiona o conjunto de valores de T_0 em quatro diferentes regiões;

- Se $T_0 \in (\frac{1}{2v^-}, \tau_m) \subset T_{\mathbf{RC}^+}$, a partir de (2-24) deduzimos que, $T_{2m-2} \in (\frac{1}{v^- G_m(\theta)}, 2v^+) \in T_{\mathbf{RC}^+}$, ao usar (2-16b), resulta que a iteração $\mathbf{y}_{2m-1}$ tem tangente $T_{2m-1} \in T_{\mathbf{RS}}$. Portanto, $\mathbf{y}_0 = \varphi^-(\mathbf{y}_{-1})$ para um $\mathbf{y}_{-1} \in \mathbf{RE}$ e $\varphi^+ \circ (\varphi^- \circ \varphi^+)^{m-1}(\mathbf{y}_0) \in T_{\mathbf{RS}}$, permite nós concluir que, a órbita completa, $\mathbf{y}_{-1} \mapsto \varphi^+ \circ (\varphi^- \circ \varphi^+)^{m-1}(\mathbf{y}_0)$, tem $2m - 1$ pontos costurantes, $\mathbf{y}_{0,1,\dots,2m-2} \in \mathbf{RC}^\pm$.
- Se $T_0 \in (\tau_m, 0) \subset T_{\mathbf{RC}^+}$, logo $T_{2m} \in (0, \frac{1}{v^-} G_{m+\frac{1}{2}}) \subset T_{\mathbf{RS}}$. De (2-16a)-(2-16b) obtemos que as iterações $\mathbf{y}_{2m-1}$ e $\mathbf{y}_{2m-2}$ têm tangentes $T_{2m-1} \in T_{\mathbf{RC}^-}$ e $T_{2m-2} \in T_{\mathbf{RC}^+}$. Devido aos fatos de que: $\mathbf{y}_0 = \varphi^-(\mathbf{y}_{-1})$ para algum $\mathbf{y}_{-1} \in \mathbf{RE}$ e $\varphi^+ \circ (\varphi^- \circ \varphi^+)^{m-1}(\mathbf{y}_0) \in T_{\mathbf{RS}}$. É possível concluir que, a órbita completa, $\mathbf{y}_{-1} \mapsto \varphi^+ \circ (\varphi^- \circ \varphi^+)^{m-1}(\mathbf{y}_0)$, tem $2m$ pontos costurantes, $\mathbf{y}_{0,1,\dots,2m-1} \in \mathbf{RC}^\pm$.
- Se $T_0 \in (0, \tau_{m+\frac{1}{2}}) \subset T_{\mathbf{RE}}$, então $T_{2m} \in (\frac{1}{v^-} G_{m+\frac{1}{2}}, \infty) \subset T_{\mathbf{RS}}$. Quando usamos (2-16a)-(2-16b) resulta que as iterações $\mathbf{y}_{2m-1}$ e $\mathbf{y}_{2m-2}$ têm tangentes $T_{2m-1} \in T_{\mathbf{RC}^-}$ e $T_{2m-2} \in T_{\mathbf{RC}^+}$. Deduzimos que a órbita completa, $\mathbf{y}_0 \mapsto (\varphi^- \circ \varphi^+)^m(\mathbf{y}_0)$, possui $2m - 1$ pontos costurantes, $\mathbf{y}_{1,\dots,2m-1} \in \mathbf{RC}^\pm$.
- Se $T_0 \in (\tau_{m+\frac{1}{2}}, \infty) \subset T_{\mathbf{RE}}$, logo $T_{2m} \in (-\infty, 2v^+) \subset T_{\mathbf{RC}^+}$, ao aplicar (2-16a) inferimos que a iteração $\mathbf{y}_{2m+1}$ tem tangente $T_{2m+1} \in T_{\mathbf{RS}}$. Assim é possível observar que, a órbita completa, $\mathbf{y}_0 \mapsto \varphi^+ \circ (\varphi^- \circ \varphi^+)^{m-1}(\mathbf{y}_0)$, tem $2m$ pontos costurantes, $\mathbf{y}_{1,\dots,2m} \in \mathbf{RC}^\pm$.

Ao assumir $k = 2m$, foram procurados os valores T_0 para os quais T_{2m+1} mora nas fronteiras de $T_{\mathbf{RS}}$, determinando quatro regiões que são equivalentes ao substituir $m \mapsto m + \frac{1}{2}$ nas obtidas em $k = 2m - 1$.

Finalmente, quando φ^- é aplicado primeiro, se obtém resultados análogos mediante a transformação (2-13), onde $\tau_m = \frac{v^-}{G_m(\theta)}$. Independentemente de aplicar φ^- ou φ^+ , o

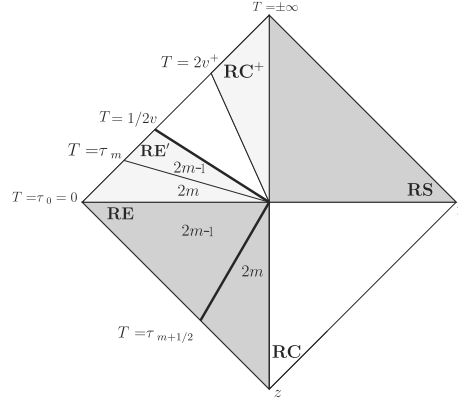


Figura 2.10: O número de pontos costurantes para $2m - 1 < r < 2m$ é $k = 2m$ ou $k = 2m - 1$ com $m \in \mathbb{N}$

número de pontos costurantes mudará entre k e $k + 1$, surgindo assim a parte um do Corolário e as mudanças vão acontecer em $T = \tau_{(k+1)/2} = v^\pm / G_{(k+1)/2}(\pi_r)$, dando a parte dois.

□

2.3.2 Bifurcações.

O Teorema (2.2) exibe uma bifurcação da dinâmica costurante que ocorre quando $v^+v^- = 1$ e $v^\pm < 0$. O Teorema (2.3) mostra que esta dinâmica na singularidade é topologicamente instável quando $v^+v^- = \cos^2(\frac{\pi}{k+1})$ para algum inteiro k , já que o fluxo envia as fronteiras de **RE** exatamente nas fronteiras de **RS** com k pontos de costura. Enquanto, os casos intermediários em $v^+v^- = \cos^2(\frac{\pi}{r+1})$, para um não inteiro $r > 1$, são topologicamente estáveis de acordo o Corolário. Dado que as fronteiras de **RE** são enviadas em **RS** e intervalos abertos de pontos iniciais com tangentes T_0 , que são aplicados com o mesmo número de costuras. A análise anterior revela uma quantidade infinita de bifurcações.

Na Subseção seguinte nós introduziremos os termos de ordem superior da aproximação (2-2), para desdobrar a bifurcação que acontece quando $v^+v^- = 1$ e $v^\pm < 0$.

2.3.3 Efeito dos Termos de Ordem Superior

Para entender o efeito dos termos de ordem superior na dinâmica das órbitas ao redor da singularidade, costurando através de **RC**⁺ e **RC**⁻ estudaremos a aplicação de Poincaré, restrita a uma região costurante nela mesma, para este caso consideramos a forma (2-12a) em **RC**⁻. O domínio desta aplicação é o conjunto $D \subseteq \mathbf{RC}^-$ com $\varphi^-(D) \subseteq \mathbf{RC}^+$, o que implica que uma órbita com condição inicial em D costura M em **RC**⁺ e retorna a **RC**⁻ ou entra na região de deslize, **RS**, portanto D está entre o eixo negativo de z e a pré-imagem do eixo positivo z por φ^- , (como as aplicações são involuções então a

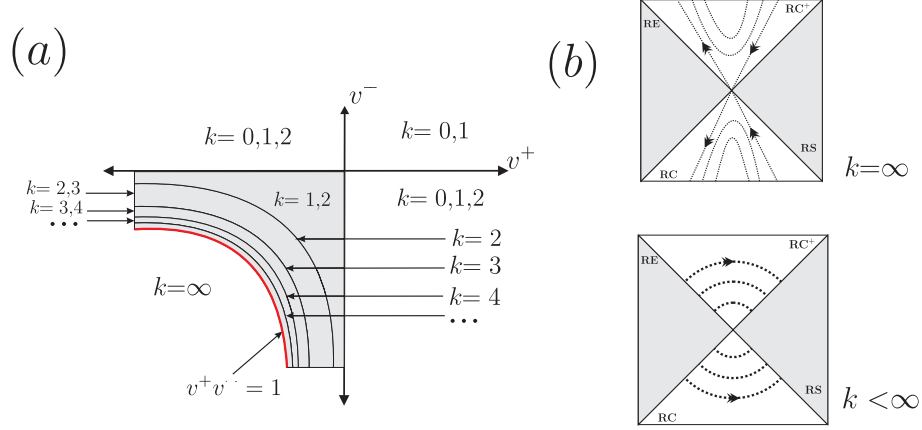


Figura 2.11: Diagrama Parcial das Bifurcações na Dinâmica Costurante. (a) k é o número de vezes que qualquer órbita costura a variedade da descontinuidade próximo à origem para diferentes $v^\pm$. (b) Os correspondentes retratos de fase da dinâmica costurante.

pré-imagem é $\varphi^-(y=0, z>0)$).

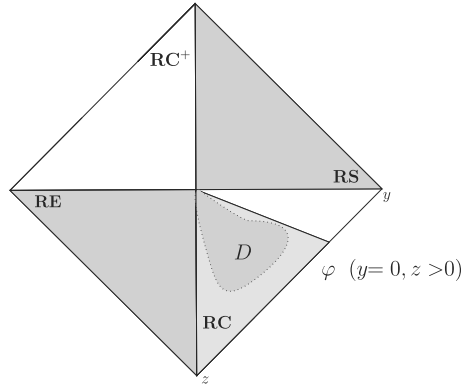


Figura 2.12: Domínio da Aplicação de Poincaré restrita a uma das regiões de costura

A aplicação (2-12a) tem um ponto fixo na origem com autovalores,

$$\lambda^\pm = 2v^+v^- - 1 \pm 2 + 2\sqrt{v^+v^-(v^+v^- - 1)}, \quad (2-30)$$

logo,

- Se $v^+v^- > 1$ ou $v^+v^- < 0$, o ponto é tipo sela, que seus autovalores são reais e distintos.
- Se $v^+v^- = 1$, o ponto fixo tem autovalores reais, iguais a um.
- Se $0 < v^+v^- < 1$, o ponto é do tipo elíptico, sendo do tipo centro para a parte linear, com autovalores conjugados complexos sobre o círculo unitário.

Os autovetores correspondentes aos dois primeiros casos são:

$$\begin{pmatrix} 2v^- \\ 1 + \lambda^\pm \end{pmatrix} \quad (2-31)$$

Enquanto $v^+v^- < 1$ ou $v^\pm > 0$ segue como já foi exposto no Teorema (2.2), que qualquer órbita suficientemente perto da singularidade entra em **RS**. Depois de um número finito de costuras, que esta determinado por um parâmetro segundo o Teorema (2.3) e seu Corolário. Além disso, uma bifurcação da dinâmica costurante ocorre quando $v^+v^- = 1$ e $v^\pm < 0$, nestas condições o jacobiano da aplicação de Poincaré na origem é não-diagonalizável e seus autovalores são, iguais a um.

As aplicações completas φ^+ e φ^- , cujas expansões de Taylor de terceira ordem são reportadas no Apêndice C, são recuperadas como perturbações genéricas impondo que elas preservam as correspondentes curvas de dobra e que sejam involuções. Deste modo, φ pode ser reduzido a uma forma normal simétrica que exhibe uma bifurcação degenerada de ressonância 1 : 1.

$$\begin{aligned} \mu &\rightarrow \mu + \omega + O(\|(\mu, \omega)\|^4), \\ \omega &\rightarrow 4p\mu + (1 + 4p)\omega + B_{11}\mu\omega + B_{30}\mu^3 + B_{21}\mu^2\omega + B_{03}\omega^3 + O(\|(\mu, \omega)\|^4), \end{aligned} \quad (2-32)$$

sendo, $p = v^+v^- - 1$, por meio de uma série de mudanças de variáveis e parâmetros, as quais são tratadas explicitamente no Apêndice D. Na bifurcação e na origem, o eixo μ está na direção do vetor $(v^+, 1)$ ⁶, e a direção positiva em $\mathbf{RC}^+$, enquanto o eixo ω é tangente ao eixo y nas coordenadas originais.

A aplicação (2-32) possui um ponto fixo em zero para qualquer valor de p , e mais dois pontos fixos localizados em:

$$(\mu, \omega) = \left(\pm 2\sqrt{\frac{-p}{B_{30}}}, 0 \right) \quad (2-33)$$

que surgirão quando $\frac{-p}{B_{30}}$ for positivo.

Se $v^+v^- \approx 1$ e $v^\pm < 0$, (isto é o mesmo que dizer $p \simeq 0$), a parte negativa do eixo μ esta em $\mathbf{RC}^-$ e mora em D , que é o domínio da aplicação de Poincaré, permitindo concluir que o ponto (2-33), pertence a uma órbita periódica costurante em torno da singularidade.

Os autovalores deste ponto fixo são:

⁶ é o autovetor singular do Jacobiano de (2-12)

$$1 - B_{11} \sqrt{\frac{-p}{B_{30}}} \pm \sqrt{\frac{-p}{B_{30}} (8B_{30} + B_{11}^2)} + O(p), \quad (2-34)$$

de modo que;

(c1) Se $B_{30} > 0$ e $p < 0$, a norma de um dos autovalores será maior do que um e o outro menor, então o ponto fixo é do tipo sela;

(c2) Se $B_{30} < 0$ e $|8B_{30}| \leq B_{11}^2$ os autovalores são reais e;

- Se $B_{11} > 0$, eles estarão dentro do círculo unitário,
- Se $B_{11} < 0$, encontrarão fora do círculo unitário.

(c3) Se $B_{30} < 0$ e $|8B_{30}| > B_{11}^2$ os autovalores serão complexos e conjugados;

- Se $B_{11} > 0$, estarão dentro do círculo unitário,
- Se $B_{11} < 0$, ficarão fora do círculo unitário.

As órbitas de (2-32) são aproximadas para $p = 0$, por um deslocamento em tempo unitário no fluxo do sistema planar de equações, (2-35), que é determinado via sucessivas iterações de Picard, como é explicado no Apêndice E.

$$\begin{aligned} \dot{\rho} &= \zeta + O(\|(\rho, \zeta)\|^4), \\ \dot{\zeta} &= B_{11}\rho\zeta + B_{30}\rho^3 + \left(\frac{B_{11}}{2} + B_{21} - 3B_{30}\right)\rho^2\zeta + O(\|(\rho, \zeta)\|^4), \end{aligned} \quad (2-35)$$

Esta forma normal exibe uma bifurcação degenerada de Bogdanov Takens, que foi discutida em [13] e desdobrada em três parâmetros [16]. Logo, se $B_{11} > 0$ e:

(c1) $B_{30} > 0$, a origem é topologicamente uma sela;

(c2) $B_{30} < 0$, $B_{11}^2 + 8B_{30} > 0$, a origem tem um setor elíptico;

(c3) $B_{30} < 0$, $B_{11}^2 + 8B_{30} < 0$ e $\left(\frac{B_{11}}{2} + B_{21} - 3B_{30}\right) \neq 0$, a origem será topologicamente um foco;

- estável, se $\left(\frac{B_{11}}{2} + B_{21} - 3B_{30}\right) < 0$,
- instável, se $\left(\frac{B_{11}}{2} + B_{21} - 3B_{30}\right) > 0$.

São chamados respectivamente de casos sela, foco e elíptico. (Se aplicar a reflexão $(\rho, \zeta) \rightarrow -(\rho, \zeta)$ quando $B_{11} < 0$, são achados resultados análogos).

Variando p ao redor de 0, exploramos uma curva unidimensional junto a um desdobramento tridimensional. Globalmente os casos (c1), (c2) e (c3) dão origem aos seguintes cenários de bifurcação da dinâmica nas regiões de costura numa vizinhança da origem;

- (c1)
- Se $p \geq 0$, a origem é topologicamente uma sela para φ ;
 - Se $p < 0$, a origem é um centro de φ e um ciclo sela emerge, perto da singularidade.



Figura 2.13: *Os correspondentes retratos de fase da dinâmica costurante de (c1).*

- (c2)
- Se $p > 0$, a origem é topologicamente uma sela para φ e um ciclo sela emerge, perto da singularidade;
 - Se $p = 0$, φ na singularidade pode exibir um setor elíptico, (uma região na qual toda órbita converge ao ponto zero, no passado e futuro);
 - Se $p < 0$, a origem é um centro de φ .

Figura 2.14: *Os correspondentes retratos de fase da dinâmica costurante de (c2).*

- (c3)
- Se $p > 0$, a origem é topologicamente uma sela para φ , e um ciclo foco emerge, perto da singularidade,
 - Se $p \leq 0$, a origem é um centro de φ .

Figura 2.15: *Os correspondentes retratos de fase da dinâmica costurante para $p > 0$ e $p < 0$ de (c3).*

É importante notar que, embora nós derivamos a dinâmica, nas regiões de costura, desde formas genéricas das aplicações $\varphi^\pm$, ela pode ser derivada diretamente por integração

da expansão local em séries de Taylor dos campos $\mathbf{X}$ e $\mathbf{Y}$. Permitindo assim comparar diretamente com a dinâmica do campo deslizante f^s já estudada. Além disso, nas expressões achadas para $\varphi^\pm$, não foram encontradas condições que proibam alguma das combinações com os casos determinados, na Subseção 2.2.

2.4 Dinâmica da T-Singularidade próxima da bifurcação

$$v^+v^- = 1 \text{ e } v^\pm < 0.$$

Uma vez que as dinâmicas nas regiões de escape (**RE**), deslize (**RS**) e de costuras $\mathbf{RC}^\pm$ tem sido decodificadas, elas podem ser juntadas para obter o retrato de fase global ao redor da singularidade.

A dinâmica em **RS** e **RE** é completamente descrita na Subseção 2.2.1 e pode ser somente de dois tipos, (s1) e (s2), dependendo do sinal no parâmetro a_2 em (2-10).

Enquanto, a dinâmica em $\mathbf{CR}^\pm$ é derivada diretamente da aplicação, (2-32), as mudanças das variáveis que dão lugar à aplicação genérica de Poincaré (2-12), na forma (2-32), garantem que para p suficientemente próximo ao zero, o eixo negativo μ mora estritamente dentro do domínio (D) de φ . Concluindo assim que, a origem e a solução negativa de (2-33) são pontos fixos desta aplicação. Nos termos da dinâmica de (2-1) o primeiro é um conjunto limite, (no passado ou futuro), das órbitas de costura, o segundo pertence a um ciclo da costura, cujo tipo pode ser: foco/nó/sela, (estável/instável), como vimos na Subseção 2.3.3.

Combinando essas considerações, podemos esboçar as órbitas costurantes do sistema (2-1), ou mais precisamente, suas intersecções com a variedade da descontinuidade. Os retratos de fase descritos são obtidos tomando as dinâmicas de (2-32), restritos a $\mathbf{CR}^-$ e refletida na linha $y = z$ (pois localmente temos que as aplicações de Poincaré têm intrínseca, uma reflexão com respeito aos eixos; veja mais detalhadamente as propriedades mencionadas depois do Teorema, (2.2)). Nos casos (c2) e (c3), a aplicação possui um nó ou foco que pode ser estável, $(c2_s)$ e $(c3_s)$, ou instável, $(c2_u)$ e $(c3_u)$.

A dinâmica completa ao redor da T-Singularidade é obtida juntando um dos retratos (s1) ou (s2) com um dos correspondentes (c1), (c2) ou (c3), resultando assim um total de dez retratos de fase, qualitativamente diferentes (veja na Figura 2.16).

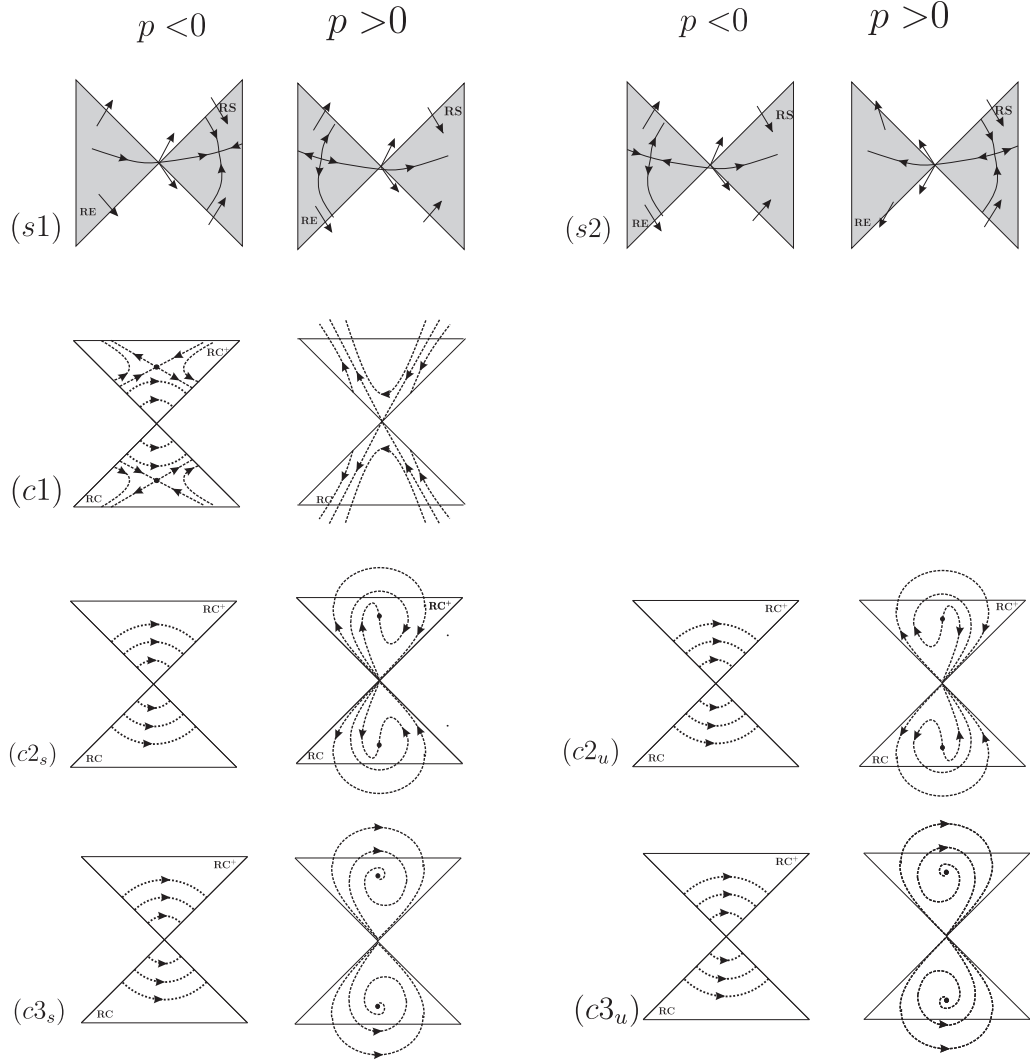


Figura 2.16: *Catálogo completo da dinâmica na T-Singularidade quando $p = v^+v^- - 1 \sim 0$.*

Um número interessante de características, qualitativas da dinâmica, podem agora ser inferidas do catálogo exibido na Figura 2.16,

- Para $p < 0$, a dinâmica numa vizinhança da singularidade, nas regiões de costura é similar em cada casos, (c1), (c2) e (c3). Neles um número finito de pontos de costuras levam órbitas de **RE** para **RS** e ao chegar na região de deslize se afastam da singularidade e convergem na direção de um pseudo-nó em (s1), ou deixam tal vizinhança em (s2). Um ciclo sela vai emergir próximo à origem para (c1).
- Para $p > 0$, (c1) é fundamentalmente diferente de (c2) e (c3). Pois naquele, as órbitas costurantes se afastam da origem, num tempo passado ou futuro e, portanto, não existem localmente órbitas que passam de **RE** a **RS**. Nos casos em (c2) e (c3) ocorre o contrário, nestes é sempre possível garantir a passagem de órbitas, elas coexistirão com um novo ponto fixo do tipo nó ou foco, que pode ser estável em, (c2_s) e (c3_s), ou instável em (c2_u) e (c3_u). Se for estável todas as órbitas costu-

Figura 2.17: *Composição dos retratos de fase $(c3_u)$ com $(s1)$ para $p < 0$.*

rantes que surgem de **RE**, que estão suficientemente próximas da singularidade convergem para a origem. Sendo instável, essas irão alcançar **RS** em tempo finito.

Além disso, todas as órbitas deslizantes perto do ponto zero, passam de **RS** a **RE**, por meio da singularidade. Especialmente em $(s2)$, também, existem órbitas que vão se aproximar assintoticamente à variedade instável da pseudo-sela que está contida em **RS**.

Figura 2.18: *Composição dos retratos de fase $(c3_u)$ com $(s1)$ para $p > 0$, exibindo um conjunto invariante, na forma de um ciclo limite costurante.*

2.4.1 Uma forma de Caos Não-Determinístico

Um caso particularmente interessante é revelado, se tomarmos os retratos costurantes, $(c2_u)$ ou $(c3_u)$, juntamente com o retrato deslizante $(s1)$, (veja na Figura 2.18), os quais fornecerão o seguinte resultado:

Proposição 2.5 *Se um sistema exibe uma T-Singularidade com retratos costurantes $(c2_u)$ ou $(c3_u)$ e o retrato deslizante $(s1)$ com $p > 0$, então localmente tem-se que todas as órbitas;*

- *costurantes alcançam **RS**, com exceção de um ciclo limite instável,*
- *alcançam **RE**, através da singularidade e portanto,*
- *irão visitar a singularidade recorrentemente.*

Figura 2.19: *Órbita costurante, espiralando com um número finito de impactos, ao redor da singularidade, alcançando a origem na região de deslize em tempo finito e encontrando em seguida **RE**, onde sua evolução no futuro não é única.*

Nestas condições, a evolução de uma órbita que alcança a singularidade não será única no futuro. Podemos caracterizar esse comportamento dizendo que o sistema exibe uma forma **não-determinística do caos**. Este termo apareceu anteriormente em [5], mas com uma colocação diferente, embora referindo a uma perda de unicidade, na qual uma infinidade de órbitas passam recorrentemente, através de um único ponto em tempo finito.

Para definir este tipo de caos começamos pelo caos determinístico, segundo [14]:

Definição 2.6 *Um fluxo ψ é caótico sobre um conjunto compacto invariante Ω , se ψ é transitivo, e exibir sensibilidade com relação às condições iniciais em Ω .*

De fato, o sistema descrito na proposição (2.5), tem um conjunto invariante Ω próximo da singularidade, gerado pela evolução futura da região em **RE**, limitada pelas linhas de dobra e pela variedade instável da pseudo-sela, incluindo esta. (Veja região sombreada na Fig (2.19))

A seguir apresentaremos as definições, de transitividade e sensibilidade às condições iniciais, para fluxos de sistemas não-determinísticos, que são adaptadas para este tipo de caos:

Definição 2.7 Um fluxo, ψ , é topologicamente transitivo sobre um conjunto invariante, Ω , se para todo par de conjuntos não-vazios e abertos, S e W em Ω , existe um $t > 0$, tal que, $\psi_t(S) \cap W \neq \emptyset$.

Definição 2.8 Um fluxo de um sistema não-determinístico, ψ , exibe uma dependência sensível sobre um conjunto invariante, Ω , se existe um $r > 0$ fixo, tal que, para cada $x \in \Omega$ e todo $\varepsilon > 0$, existe uma vizinhança $H \subset B_\varepsilon(x) \cap \Omega$, cujo diâmetro do conjunto, $\psi_t(H) \cup \psi_t(x)$ é maior do que r para algum $t \geq 0$.

O fluxo da proposição (2.5) satisfaz as duas definições anteriores, pois algum ponto em Ω , gera o conjunto invariante e alcança a singularidade em tempo finito. Assim aquele exibirá dependência sensível em relação às condições iniciais e é topologicamente transitivo. Portanto, Ω é um conjunto caótico não-determinístico.

A única diferença de definição (2.8), com a do caso determinístico em [14], é que usa-se o diâmetro de $\psi_t(H) \cup \psi_t(\mathbf{x})$, no lugar da distância $\|\psi_t(\mathbf{x}) - \psi_t(\mathbf{H})\|$. Naquela definição permite incluir a perda da unicidade de uma órbita depois de alcançar a singularidade e entrar em **RE**. As duas definições coincidem para fluxos no sentido usual, fazendo com que essa seja uma extensão natural.

2.5 Simulações Numéricas

Nesta seção, primeiro exibiremos primeiro algumas simulações numéricas do Teorema (2.3) e do seu Corolário (2.3). Posteriormente apresentaremos um exemplo numérico, que possui uma forma não-determinística do caos. Com esse fim, usamos o software Matlab com um integrador suave por partes introduzido em [15].

2.5.1 Número de Pontos de Costura

Para ilustrar o Teorema (2.3), e seu Corolário simularemos o campo (3-33), na sua forma normal (2-2).

Se, $v^+ = -1$ e $v^- = -0.6$, então $r \approx 3.58$. Portanto, pelo Corolário segue que, o fluxo costura a variedade da descontinuidade, entre 3 e 4 vezes antes de entrar em **RS**. Na Fig (2.20), são mostradas, duas órbitas com condições iniciais em **RE**, $\mathbf{y}_{01} = (0, -0.5, -0.4)$ e $\mathbf{y}_{02} = (0, -0.4, -0.5)$, que possui tangentes, $T_{01} \in (0, \tau_{2+\frac{1}{2}})$ e $T_{02} \in (\tau_{2+\frac{1}{2}}, \infty)$, e essas exibem três e quatro pontos costurantes, respectivamente.

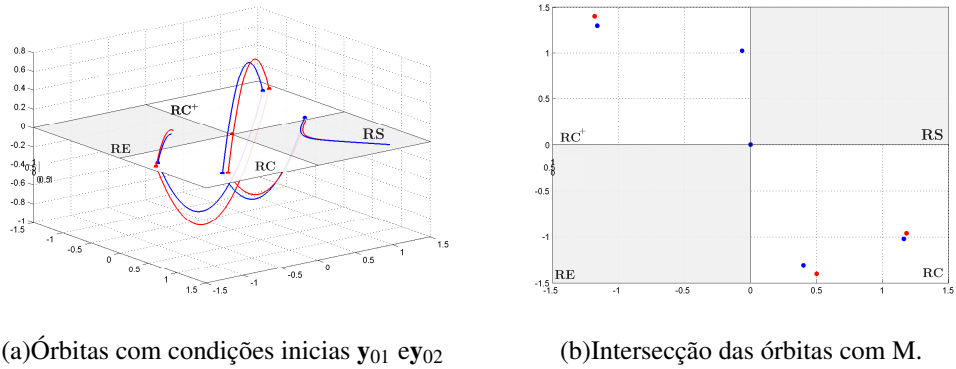


Figura 2.20:

De forma similar temos que, se $v^+ = -1$ e $v^- = -0.8$, então $r \approx 5.75$. Logo, o fluxo costura a variedade da descontinuidade, entre 5 e 6 vezes antes de entrar em **RS**. Na Figura 2.21, são mostradas duas órbitas, com condições iniciais em **RE**, $y_{01} = (0, -1, -0.2)$ e $y_{02} = (0, -0.2, -1) \in \mathbf{RE}$, que possui tangentes, $T_{01} \in (0, \tau_{3+\frac{1}{2}})$ e $T_{02} \in (\tau_{3+\frac{1}{2}}, \infty)$, e essas exibem cinco e seis pontos costurantes, respectivamente.

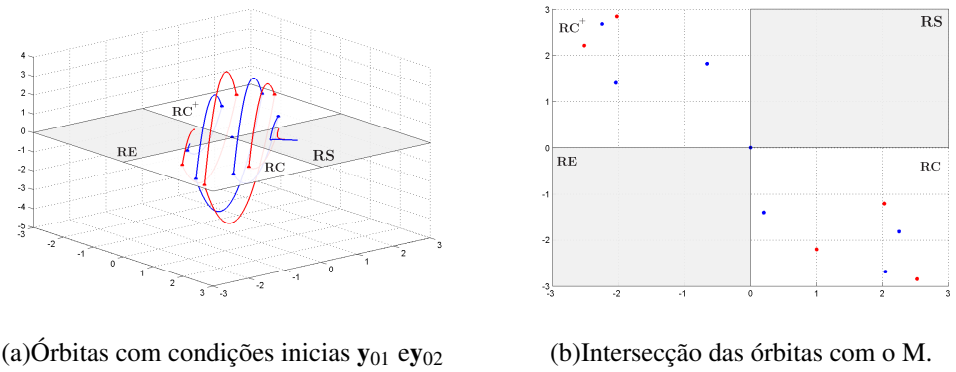


Figura 2.21:

Por último, consideremos o caso, $v^+ = -1$ e $v^- = -0.9983$, demonstrando que, $r \approx 0.9983$, o que implica que o número de pontos costurantes do fluxo está entre 75 e 76 vezes. Na Figura 2.22, apenas uma órbita é representada com condição inicial $y_0 = (0, -0.5, -0.5) \in \mathbf{RE}$, a qual exhibe 75 pontos costurantes.

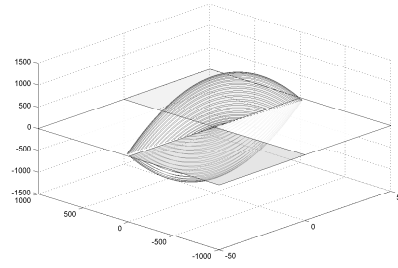
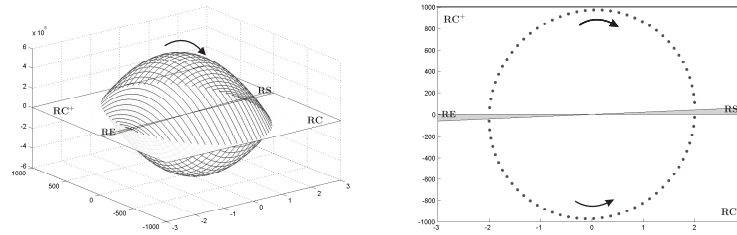


Figura 2.22: Órbita com condição inicial y_0 espiralando de RE a RS com 75 pontos costurantes.



(a)Ampliação da Figura 2.22

(b)Intersecção com M

Figura 2.23:

2.5.2 Dinâmica incluindo o efeito dos termos de ordem superior

A aproximação local de primeira ordem da T-Singularidade, estudada em [4], revela uma bifurcação na forma de um diábolo não suave invariante, (veja Figura 2.7), que se auto-aniquila quando, $p = v^+v^- - 1$ muda de sinal. O estudo dos termos de ordem superior nas subseções (2.3.3) e (2.2.1), revelam comportamentos intrigantes e diversos no desdobramento desta bifurcação.

Um caso particular, como vimos na Subseção 2.4.1, resulta considerando ao mesmo tempo o retrato deslizante ($S1$) com o costurante ($c3_u$), (Fig (2.19)). Para obter a combinação acima basta tomar as expressões, (2-10) e (2-12), com os coeficientes:

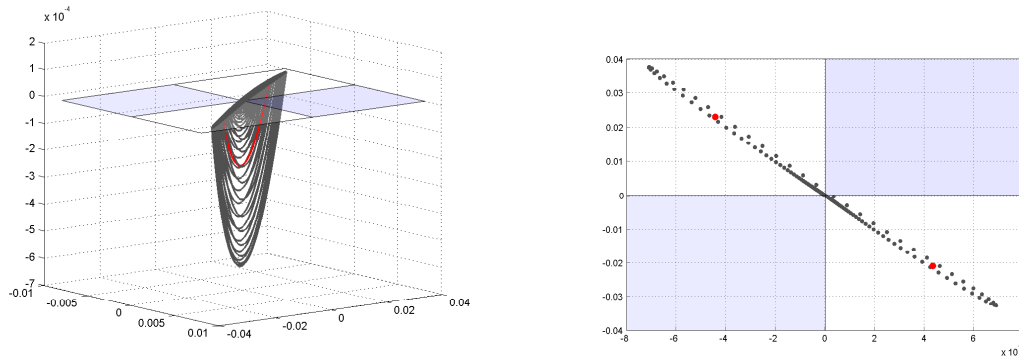
$$B_{11} < 0, \quad B_{30} < 0, \quad |8B_{30}| > B_{11}^2, \quad \text{e} \quad a_2 > 0, \quad (2-36)$$

se $p \simeq 1$ e $p < 0$. Este cenário apresenta um conjunto onde o fluxo é caótico e não determinístico, que pode ser controlado tomando $p > 0$. Um exemplo numérico deste caso é proporcionado pelo seguinte sistema:

$$X = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ v^+ \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -3 & 1 & 0 \\ -1 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \quad (2-37)$$

$$Y = \begin{pmatrix} 0 \\ v^- \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \quad (2-38)$$

sendo, a variedade da descontinuidade $x = 0$. Os coeficientes da forma normal do campo deslizante e da aplicação de Poincaré verificam (2-36), com $p = 0.002$, quando $v^+ = -5.01$ e $v^- = -1/5$. Logo, teremos o caso $(s1) - (c3_u)$ da T-Singularidade. Já que p está próximo da bifurcação, implica que os campos vetoriais abaixo e acima do plano da descontinuidade são, aproximadamente antiparalelos na origem. Isto gera um esmagamento forte das órbitas em um plano transversal a $x = 0$, como se observa na Fig.(2.24), para uma órbita com condição inicial, $(10^{-20}, -10^{-6}, -10^{-6})$.



(a) Órbita com uma condição inicial próxima a **RE**, que espirala em torno da singularidade até entrar em **RS** onde é atraída para a origem

(b) Intersecção da órbita com M.

Figura 2.24:

A órbita impacta depois do último ponto de costura, evoluciona através de uma trajetória quase em linha reta desde o ponto $(y, z) = (0.00025, 0.00005)$, até a singularidade. Na simulação confirmamos que a órbita encontra a origem em um tempo $t \simeq 0.48$, após cair na região de deslize. A partir deste momento não é possível usar o algoritmo, pois a evolução na região de escape não é única. O ciclo foco que surge intercepta a M, nos pontos $(-0.0000, 0.0043, -0.0210)$ e $(0, 0.0044, 0.0229)$.

Na Figura 2.25, mostramos uma ampliação da órbita anterior, que deriva de uma mudança linear das coordenadas em (y, z) e de um reescalonamento de $(1 : 20)$ acima de M. Esta órbita espirala ao redor da singularidade um número finito de vezes, e eventualmente é aplicada na região deslizante, onde é inevitavelmente atraída pela origem. Esta situação é consistente com o retrato de fase predito e ilustrado na Figura 2.18. Depois que encontra este ponto, a órbita seguirá uma quantidade infinita de trajetórias independentemente das condições iniciais. Portanto, demonstramos que as condições para uma forma do caos

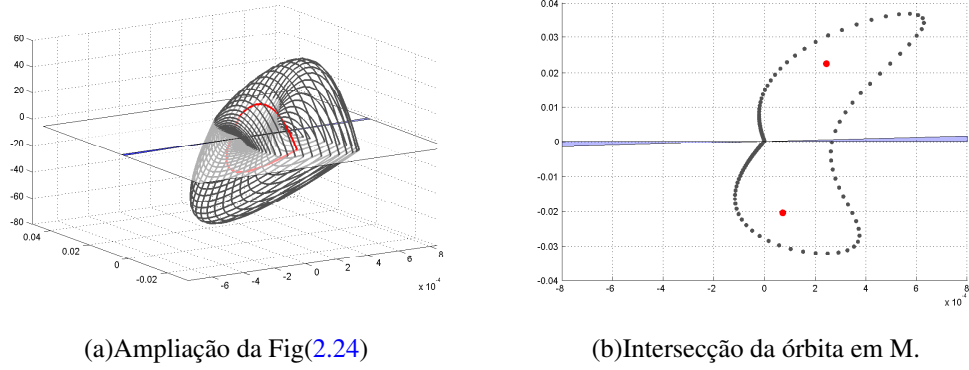


Figura 2.25:

não-determinístico existem.

Finalmente, ressaltamos que este comportamento pode ser controlado mediante variações do parâmetro p . Para ilustrar esta situação, trocaremos v^+ de -5.01 por -4.99 , o que implica, $p = -0.02$. Logo, o sistema estará no caso $(s1) - (c3_u)$. Uma órbita deste sistema com a mesma condição inicial da Fig.(2.24), é simulada nas Fig. (2.26) e Fig.(2.27).

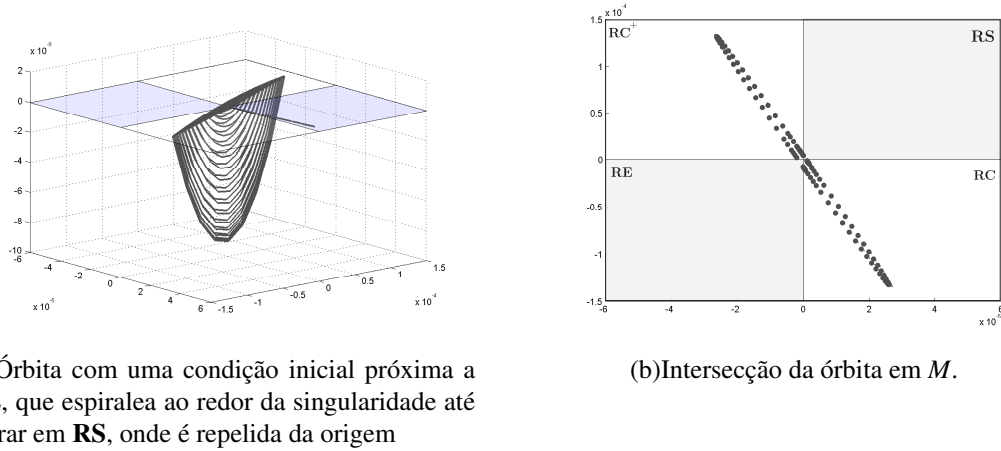


Figura 2.26:

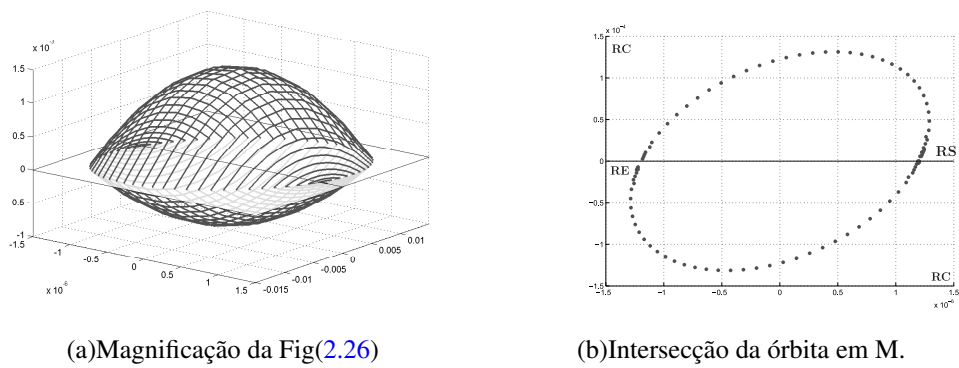


Figura 2.27:

Sistemas de Controle com Retroalimentação Comutante

Uma das mais notáveis aplicações dos sistemas híbridos e de comutação é o desenho de controladores, como por exemplo, os das estruturas variáveis, estudados em [19]. Os trabalhos [12, 20] sugerem que estes tipos de controladores com estado de reatrolimentação comutante, como os PDI,¹ podem ser efetivamente usados para conseguir algum tipo de controle desejado, em presença: das mudanças nas condições da operação, ruído ou dinâmicas não modeladas. Portanto, um problema aberto é: *determinar quando a T-Singularidade, está presente em sistemas de circuito fechado, com uma ação de controle comutante*. Este aspecto tinha passado despercebido em numerosos livros clássicos e artigos sobre o tema. A análise pode ter dois resultados: ou a T-Singularidade não é possível, ou tal fenômeno, pode de fato ocorrer. Nesse caso as condições devem ser dadas, em conjunto com a classificação dos possíveis cenários das dinâmicas.

O parágrafo anterior indica que existe um vácuo na literatura das dinâmicas, dos sistemas de controle com comutação que, vamos tentar preencher neste capítulo, segundo [11], estudando a ocorrência da T-Singularidade, em controladores tridimensionais com retroalimentação comutante. A partir dos sistemas, na forma de **Luré**², analisaremos primeiro o caso clássico dos controladores com uma saída, e, logo, o geral que possui múltiplas saídas.

¹Proportional-Integrate-Derivate

²é dizer, um modelo onde a dinâmica linear e a parte estática não linear são separadas, para mais detalhes veja [6]

3.0.3 Sistemas de Controle com Retroalimentação Comutante

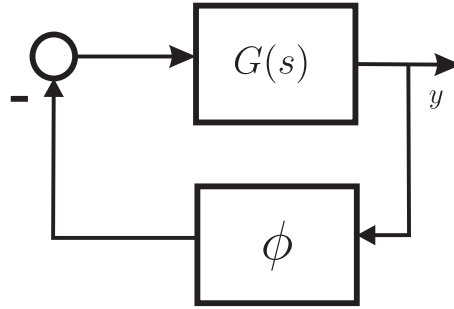


Figura 3.1: Diagrama em blocos de um sistema na forma de Lur'e.

O sistema de controle no qual estamos interessados, é ilustrado na Figura 3.1, que é um sistema tridimensional com m entradas e p saídas. Esse possui um estado de retroalimentação não linear comutante e uma **linear forward path**. No domínio do espaço de estados, a parte linear pode ser descrita como:

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}} &= A\mathbf{x} + Bu \\ \mathbf{y} &= C\mathbf{x},\end{aligned}\tag{3-1}$$

onde, $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$, $u \in \mathbb{R}^m$, $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^p$, $A \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$, $B \in \mathbb{R}^{3 \times m}$ e $C \in \mathbb{R}^{p \times 3}$. A ação da retroalimentação é exposta por: $u = -\phi(\mathbf{y})$, onde $\phi : \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^m$, se assume como uma função seccionalmente contínua, na forma:

$$\phi = \begin{cases} H^+\mathbf{y} + E^+ & \text{se } h(\mathbf{y}) > 0; \\ H^-\mathbf{y} + E^- & \text{se } h(\mathbf{y}) < 0. \end{cases}\tag{3-2}$$

com $H^\pm \in \mathbb{R}^{m \times p}$, $E^\pm \in \mathbb{R}^m$ e $h : \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}$, sendo esta a função escalar linear:

$$h(\mathbf{y}) = S\mathbf{y} + s_0,\tag{3-3}$$

onde $S \in \mathbb{R}^{1 \times p}$ e $s_0 \in \mathbb{R}$. Sem perda da generalidade, assumiremos que $S \neq 0$ e $s_0 = 0$.

Portanto, o sistema resultante está na forma (2-1) com;

$$\begin{aligned}\mathbf{X} &= (A - BH^+C)\mathbf{x} - BE^+ & \text{se } SC\mathbf{x} > 0 \\ \mathbf{Y} &= (A - BH^-C)\mathbf{x} - BE^- & \text{se } SC\mathbf{x} < 0\end{aligned}\tag{3-4}$$

e a variedade da descontinuidade ou de comutação é definida assim;

$$\Sigma = \{x \in \mathbb{R}^3 : SC\mathbf{x} = 0\}.\tag{3-5}$$

Nas próximas subsecções, consideraremos o caso de um sistema de controle, primeiro, com uma entrada e uma saída, (SISO ³) com $C = (1, 0, 0)$, que é correspondente ao problema clássico de Luré, e mostraremos que, as singularidades tipo dobra-dobra, não podem acontecer. Após isso, estudaremos os casos mais gerais, onde este tipo de singularidade pode acontecer, derivaremos as condições necessárias. Os casos mais gerais, incluem:

- Um sistema com múltiplas saídas, onde C é uma matriz retangular geral;
- Um sistema com estado de retroalimentação completo, onde C é a matriz identidade;
- Um sistema com saída bidimensional, onde a retroalimentação depende da saída e da integral desta.

3.0.4 Caso I: (SISO) Sistemas de controle com uma entrada e uma saída.

Neste caso, a saída $y = Cx$, é um escalar. Portanto, $u \in \mathbb{R}$, $B \in \mathbb{R}^{3 \times 1}$, $C \in \mathbb{R}^{1 \times 3}$ e $H^\pm, E^\pm, S \in \mathbb{R}$. É fácil mostrar que a T-Singularidade, não pode acontecer, pois as linhas de dobra, que sempre são paralelas. Exporemos a afirmação anterior usando a condição da transversalidade, (1-9),

$$\det\{dh, d\mathbf{X}.h, d\mathbf{Y}.h\} \neq 0. \quad (3-6)$$

As linhas da tangência de (3-4) são determinadas por:

$$\mathbf{X}.h = \langle (A - BH^+C)\mathbf{x} - BE^+, SC \rangle = 0 \quad \text{e} \quad \mathbf{Y}.h = \langle (A - BH^-C)\mathbf{x} - BE^-, SC \rangle = 0 \quad (3-7)$$

sobre a variedade de comutação $\Sigma = h^{-1}(0)$. Temos que o determinante de uma matriz de 3×3 pode ser expresso em termos do triplo produto escalar, ou seja, $\det(X, Y, Z) = \langle X, Y \times Z \rangle$ para $X, Y, Z \in \mathbb{R}^3$, de modo que:

$$\begin{aligned} \det\{dh, d\mathbf{X}.h, d\mathbf{Y}.h\} &= \langle dh, d\mathbf{X}.h \times d\mathbf{Y}.h \rangle \\ &= \langle SC, SC(A - BH^+C) \times SC(A - BH^-C) \rangle \\ &= \langle SC, SCA \times (SBH^+C - SBH^-C) \rangle \end{aligned} \quad (3-8)$$

Se o produto cruz é diferente do zero, implica que os planos, $\mathbf{X}.h = 0$ e $\mathbf{Y}.h = 0$ não são coplanares, assim a intersecção com Σ deve ser duas retas distintas. No entanto, SH e CB são escalares, de onde segue que:

$$\det\{dh, d\mathbf{X}.h, d\mathbf{Y}.h\} = S^3CB(H^+ - H^-)\langle C, CA \times C \rangle = 0 \quad (3-9)$$

³single input single output.

implicando que as linhas de tangência são paralelas (veja Figura 3.2).

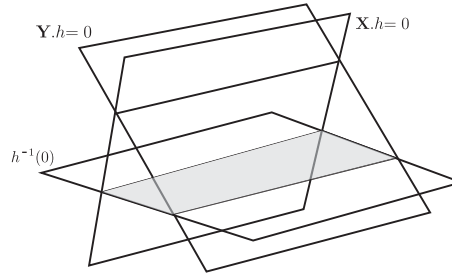


Figura 3.2: Linhas de tangência de um sistema SISO.

Por esta razão, não é permitido obter uma singularidade do tipo dobra-dobra, o que poderia explicar o motivo da T-Singularidade não ter sido observada na literatura clássica, sobre sistemas de controle com comutação, onde os típicos modelos são: sistemas com uma única saída, analisados nesta seção, que acabamos de estudar.

3.0.5 Caso II: Sistemas de Controle com Múltiplas Saídas

Na situação mais geral, o sistema é caracterizado por, m entradas e p saídas, de modo que, C é uma matriz $p \times 3$, S é uma matriz de $1 \times p$ e o $\det\{dh, d\mathbf{X}.h, d\mathbf{Y}.h\}$ não é necessariamente singular. De modo que é possível a ocorrência da T-Singularidade.

Exemplo 1 : Note que o caso de múltiplas saídas inclui um sistema de controle com uma retroalimentação de estado. Nesta situação a matriz da saída, C , é a identidade 3×3 . Assim $y = x$, deste modo as linhas de tangência estão determinadas por:

$$\begin{aligned} \mathbf{X}.h &= \langle (A - BH^+) \mathbf{x} - BE^+, SC \rangle = 0 \\ \mathbf{Y}.h &= \langle (A - BH^-) \mathbf{x} - BE^-, SC \rangle = 0 \\ h(\mathbf{x}) &= S\mathbf{x} = 0. \end{aligned} \quad (3-10)$$

e, a condição da transversalidade, (1-9), é equivalente a;

$$\det\{S, S(A - BH^-), S(A - BH^+)\} \neq 0. \quad (3-11)$$

Exemplo 2 Um caso especialmente interessante é, o de uma planta bidimensional, com uma saída escalar dinâmica, para se retroalimentar. Esta situação pode ser descrita por: $\dot{\bar{\mathbf{x}}} = A\bar{\mathbf{x}} + Bu$, com $\bar{\mathbf{x}} \in \mathbb{R}^2$, possuindo a seguinte função:

$$\phi = \begin{cases} \alpha_1^+ \bar{y} + \alpha_2^+ (f \bar{y}) & \text{se } \beta_1 \bar{y} + \beta_2^+ (f \bar{y}) > 0, \\ \alpha_1^- \bar{y} + \alpha_2^- (f \bar{y}) & \text{se } \beta_1 \bar{y} + \beta_2^+ (f \bar{y}) < 0, \end{cases} \quad (3-12)$$

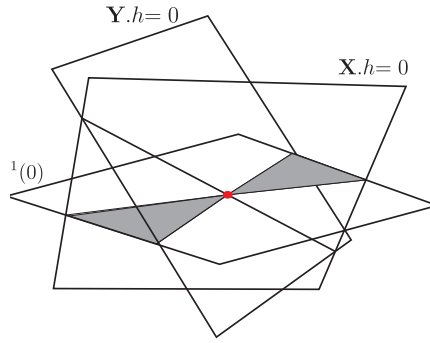


Figura 3.3: Possíveis linhas de tangência de um sistema MIMO que se intersectam.

sendo, $\bar{\mathbf{y}} = C\bar{\mathbf{x}}$, uma saída escalar.

É possível reescalar o sistema anterior, definindo o vetor estendido de estados, $\mathbf{x} = (\bar{\mathbf{x}}^T, \int \bar{\mathbf{y}})^T$. Deste modo o sistema resultante:

- Terá duas saídas;
- Estará na forma, (3-1); onde,

$$A = \begin{pmatrix} \bar{A} & 0 \\ \bar{C} & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} \bar{B} \\ 0 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} \bar{C} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (3-13)$$

- Com ação de retroalimentação, (3-2). Onde,

$$H^\pm = (\alpha_1^\pm, \alpha_2^\pm), \quad E^\pm = 0, \quad (3-14)$$

sendo, $h(\mathbf{y}) = (\beta_1, \beta_2)\mathbf{y}$.

Exemplo 3: As linhas de tangência para um sistema de controle SIMO⁴, estão determinadas por:

$$\begin{aligned} \mathbf{X}.h &= \langle (A - BH^+C)\mathbf{x} - BE^+, SC \rangle = 0 \\ \mathbf{Y}.h &= \langle (A - BH^-C)\mathbf{x} - BE^-, SC \rangle = 0 \\ h(\mathbf{x}) &= SC\mathbf{x} = 0. \end{aligned} \quad (3-15)$$

logo, a condição da transversalidade, (1-9), é equivalente a:

$$\det\{SC, SC(A - BH^-C), SC(A - BH^+C)\} \neq 0. \quad (3-16)$$

É possível concluir que, se $\hat{\mathbf{x}}$ é o ponto de intersecção das linhas de tangência, então,

⁴É um sistema de controle que possui uma só entrada e múltiplas saídas, na forma (3-1).

$$E^{\pm} = \frac{\langle A\hat{\mathbf{x}}, SC \rangle}{\langle B, SC \rangle} - H^{\pm} C\hat{\mathbf{x}}, \quad (3-17)$$

desta maneira, os campos de vetores, na singularidade são iguais a:

$$\mathbf{X} = \mathbf{Y} = A\hat{\mathbf{x}} - B \frac{SCA\hat{\mathbf{x}}}{SCB}, \quad (3-18)$$

Consequentemente, um sistema de controle SIMO, pode exibir uma T-Singularidade, no caso $v^+v^- = 1$ e $v^{\pm} > 0$, porque $\mathbf{Y}.\mathbf{X}.h(\hat{\mathbf{x}}) = \mathbf{X}^2.h(\hat{\mathbf{x}})$ e $\mathbf{X}.\mathbf{Y}.h(\hat{\mathbf{x}}) = \mathbf{Y}^2.h(\hat{\mathbf{x}})$, independentemente da escolha de parâmetros. O que implica que, toda órbita suficientemente próxima à singularidade, encontra a região de deslize depois de um número finito de costuras, na variedade de comutação.

3.1 Exemplos Numéricos

Nesta subsecção, estudaremos três exemplos que mostram o comportamento predito, pela análise anterior, e, posteriormente, examinaremos o modelo de um controlador PDI, que exibe uma T-Singularidade para valores dos parâmetros fisicamente viáveis.

3.1.1 SISO, SIMO e MIMO

Consideremos, como primeiro exemplo, um sistema SISO na forma (3-1) descrito pelas matrizes,

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (3-19)$$

$$H^+ = -1, \quad H^- = 1, \quad E^+ = 1, \quad E^- = -2, \quad S = 1. \quad (3-20)$$

portanto, o sistema associado é:

$$\begin{cases} \mathbf{X} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, & \text{se } x > 0, \\ \mathbf{Y} = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, & \text{se } x < 0, \end{cases} \quad (3-21)$$

e com a variedade da comutação Σ , definida pela equação, $SC\mathbf{x} = x = 0$. As correspondentes linhas de tangência em Σ estão dadas por:

$$\begin{aligned} \mathbf{X}.h &= y - 1 = 0 \\ \mathbf{Y}.h &= y + 2 = 0 \end{aligned} \quad (3-22)$$

sendo, efetivamente retas paralelas, como esperávamos.

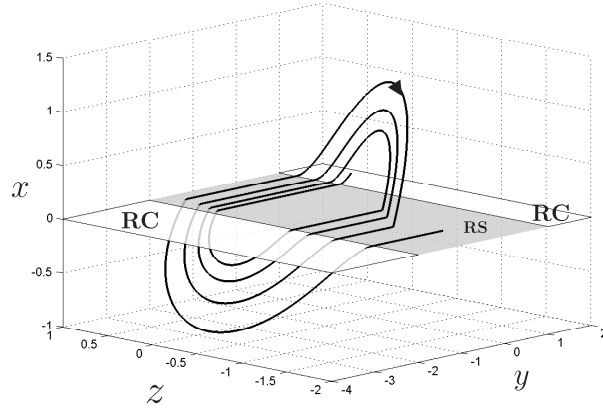


Figura 3.4: Órbita do sistema SISO com condição inicial $(1000^{-20}, -0.51, 1.51)$. A superfície da cor cinza é a região de deslize com fronteiras paralelas.

Analisaremos em seguida, um sistema similar, com uma saída adicional, SIMO, que resulta em mudar (3-19);

$$B = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (3-23)$$

e em (3-20)

$$H^+ = \begin{pmatrix} 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad H^- = \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix} \quad S = (10) \quad (3-24)$$

logo, o campo vetorial descontínuo associado, é:

$$\begin{cases} \mathbf{X} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}, & \text{se } x > 0, \\ \mathbf{Y} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -8 \end{pmatrix}, & \text{se } x < 0, \end{cases} \quad (3-25)$$

e com a variedade da comutação Σ definida pela equação $SC\mathbf{x} = x = 0$. As correspondentes linhas de tangência estão dadas por:

$$\begin{aligned}\mathbf{X}.h &= y - z - 1 = 0 \\ \mathbf{Y}.h &= y + z + 2 = 0\end{aligned}\tag{3-26}$$

que se intersectam no ponto $(0, -1/2, 3/2)^T$. Os campos, são paralelos na singularidade:

$$\mathbf{X} = \mathbf{Y} = \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{1}{2} \\ -2 \end{pmatrix}\tag{3-27}$$

Além disso, $\mathbf{X}^2.h = -5/2 < 0$ e $\mathbf{Y}^2.h = 3/2 > 0$, implicando que este sistema exibe uma T-Singularidade no caso $v^+v^- = 1$ e $v^\pm > 0$, (o resultado, é consequente, com a análise feita nos sistemas do caso SIMO, na secção anterior).

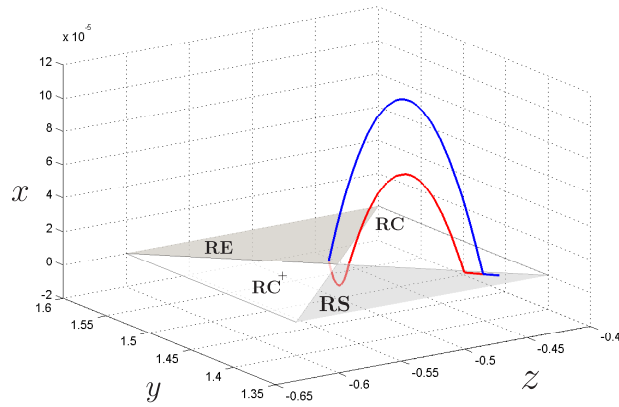


Figura 3.5: Órbitas do sistema SIMO com condições iniciais $(1000^{-20}, -0.5, 1.51)$ (azul) e $(-1000 \cdot 10^{-20}, -0.5, 1.51)$ (vermelha)

Agora, consideremos um sistema, com uma entrada adicional, MIMO, que resulta em mudar, (3-19);

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ -4 & \kappa \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\tag{3-28}$$

e em, (3-20);

$$H^+ = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad H^- = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad E^+ = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad E^- = \begin{pmatrix} -2 \\ -4 \end{pmatrix}, \quad S = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix}.\tag{3-29}$$

logo, o campo vetorial descontínuo associado, é:

$$\begin{cases} \mathbf{X} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & \kappa \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ -\kappa \end{pmatrix}, & \text{se } x > 0, \\ \mathbf{Y} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & -\kappa \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 2\kappa \end{pmatrix}, & \text{se } x < 0, \end{cases} \quad (3-30)$$

e com variedade da comutação Σ , definida pela equação, $SC\mathbf{x} = x = 0$. As correspondentes linhas de tangência estão dadas por:

$$\begin{aligned} \mathbf{X}.h &= y - z - 1 = 0 \\ \mathbf{Y}.h &= y + z + 2 = 0 \end{aligned} \quad (3-31)$$

que se intersectam no ponto $(0, -1/2, 3/2)^T$. Os campos na singularidade são:

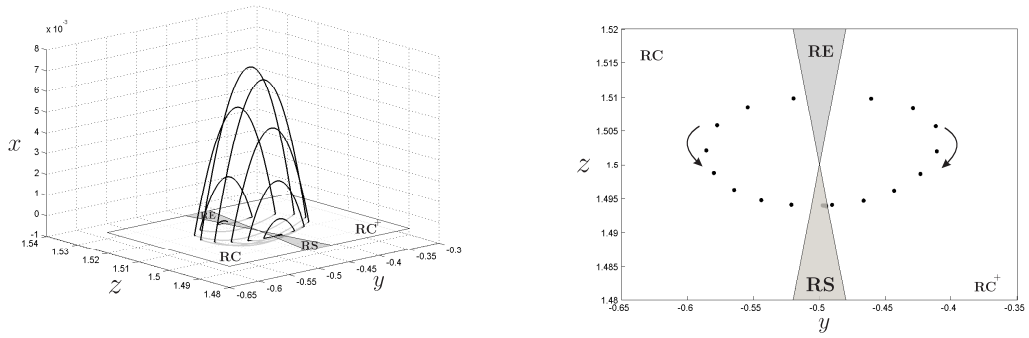
$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{1}{2} \\ \frac{\kappa}{2} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{Y} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{11}{2} \\ \frac{\kappa}{2} \end{pmatrix} \quad (3-32)$$

Além disso, $\mathbf{X}^2.h = (\kappa - 1)/2$ e $\mathbf{Y}^2.h = (11 - \kappa)/2$, o que implica que este sistema exhibe uma T-Singularidade, para $\kappa \in (-\infty, 1)$, em particular:

- Se $\kappa < 0$, então $v^+v^- < 1$;
- Se $\kappa = 0$, então $v^+v^- = 1$ e $v^\pm < 0$;
- Se $\kappa > 0$, então $v^+v^- > 1$.

Para ilustrar o comportamento da dinâmica, do sistema ao redor da T-Singularidade, analisaremos alguns valores numéricos, para o parâmetro κ , juntamente com os resultados no capítulo anterior.

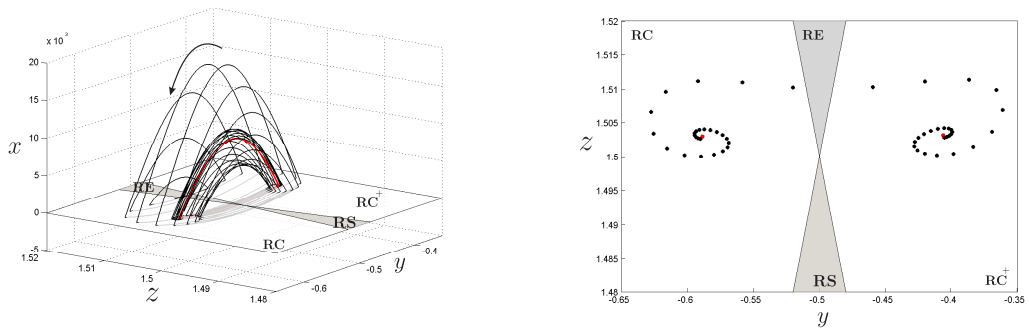
1. Se $\kappa = -0.001$, então $v^+v^- \approx 0.97$ e $v^\pm < 0$. Após, realizar uma série de cálculos, determinamos que, estamos no caso (s2)-(c2), no catálogo (2.16). É o mesmo que dizer: um número finito de pontos de costura levam órbitas de **RE** para **RS**. Quando chegam na região de deslize se afastam da singularidade, enquanto, na região de escape há um nó instável.
2. Se $\kappa = 0.001$, então $v^+v^- \approx 1.022$ e $v^\pm < 0$. Após, realizar uma série de cálculos, determinamos que estamos no caso (s2)-(c3_u), no catálogo (2.16). É o mesmo que dizer: existem localmente órbitas que passam de **RE** a **RS** via um número finito de pontos de costura, há um ponto fixo do tipo foco estável, que da origem a um ciclo limite atrator. Além, de um pseudo-equilíbrio (sela), na região de deslize.



(a) Órbita com uma condição inicial $(1000^{-20}, -0.5, 1.51)$, que espirala ao redor da singularidade, até entrar em **RS** onde é repelida da origem

(b) Intersecção da órbita com a variedade da descontinuidade.

Figura 3.6:



(a) Órbita com uma condição inicial $(1000^{-20}, -0.5, 1.51)$, que espirala ao redor da singularidade, convergindo ao ciclo limite (vermelho)

(b) Intersecção da órbita com a variedade da descontinuidade.

3.1.2 Um controlador PID

Controladores do tipo Proporcional, Integral e Derivativo, são comumente denominados de PID. Estes são amplamente utilizados no cenário industrial, devido a implementação fácil, ao baixo custo e por sua versatilidade. Além da sua capacidade de atingir o estado estacionário do erro zero. Na Figura 3.7, ilustra-se um modelo do sistema derivado, de um controlador PID, com estrutura variável introduzido em [1] para prevenir o integrador windup, que pode causar uma perda significativa no desempenho de controle quando usado em sistemas que têm um atuador com saturação.

Esse sistema consiste de:

- uma planta de segunda ordem G_p , controlada através de um controlador PID;
- um atuador que satura a entrada de controle por acima;
- um laço de retroalimentação anti-windup.

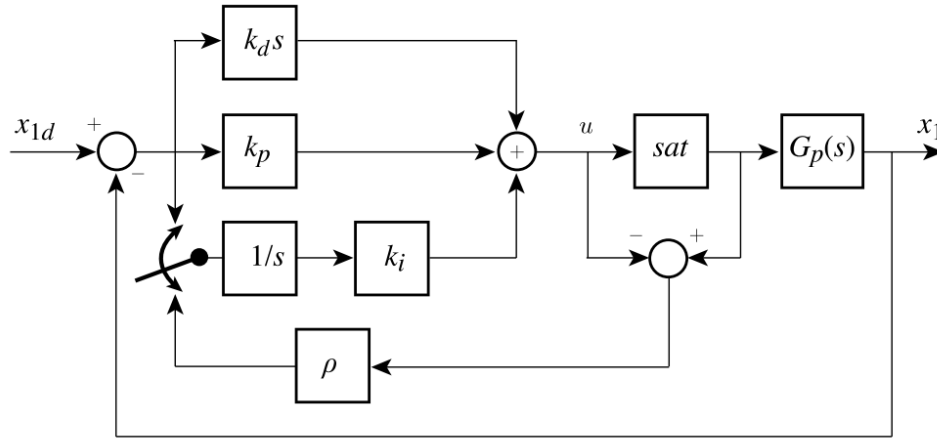


Figura 3.7: Diagrama em blocos de um controlador PID, com estrutura variável

Este sistema pode ser modelado pelo seguinte sistema não suave de equações diferenciais em $\mathbb{R}^3$;

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{cases} \mathbf{X}(\mathbf{x}) & \text{se } h(\mathbf{x}) > 0, \\ \mathbf{Y}(\mathbf{x}) & \text{se } h(\mathbf{x}) < 0, \end{cases} \quad (3-33)$$

onde $\mathbf{x} = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ e

$$\mathbf{X}(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} y \\ -a_1x - a_2y + u_{sat} - h(\mathbf{x}) \\ x_d - x \end{pmatrix} \quad (3-34)$$

$$\mathbf{Y}(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} y \\ -a_1x - a_2y + u_{sat} \\ \rho h(\mathbf{x}) \end{pmatrix} \quad (3-35)$$

sendo $h : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$, definida por,

$$h(\mathbf{x}) = u_{sat} - k_p(x_d - x) + k_d y - k_i z. \quad (3-36)$$

Quando a entrada de controle não estiver saturada, ($h > 0$), o saturador se comporta como a função identidade. No caso contrário ($h < 0$), a saída do saturador é u_{sat} , o que ativa o laço da retroalimentação anti-windup, ao invés de integrar o erro, integramos $\rho h(\mathbf{x})$. Logo, as linhas de tangência estão determinadas por:

$$\begin{aligned} \mathbf{X}.h(\mathbf{x}) &= k_p y - k_d a_1 x - k_d a_2 y + k_d u_s - k_d h - x_d k_i + k_i x = 0 \\ \mathbf{Y}.h(\mathbf{x}) &= k_p y - k_d a_1 x - k_d a_2 y + k_d u_s - \rho h k_i = 0 \\ h(\mathbf{x}) &= 0. \end{aligned} \quad (3-37)$$

e com a condição de transversalidade, (1-9), verificada se e somente se $k_i \neq 0$ e $k_d a_2 - k_p \neq 0$. Neste caso as linhas de tangencia se intersectam, transversalmente em h , (variedade de comutação, definida por $h^{-1}(0)$), no ponto $\hat{\mathbf{x}}$. Onde

$$\hat{\mathbf{x}} = (x_d, \frac{k_d(x_d a_1 - u_s)}{k_p - k_d a_2}), \frac{u_s}{k_i} + \frac{k_d^2(x_d a_1 - u_s)}{k_i(k_p - k_d a_2)} \quad (3-38)$$

que é uma singularidade do tipo T, se as duas dobras definidas pelos campos, $\mathbf{X}$ e $\mathbf{Y}$, foram invisíveis em $\hat{\mathbf{x}}$, o mesmo dizer:

$$\mathbf{X}^2.h(\hat{\mathbf{x}}) = \frac{u_s - x_d a_1}{-k_p + k_d} (-k_d^2 a_1 + k_d k_i + k_d k_p a_2 - k_p^2) < 0 \quad (3-39a)$$

$$\mathbf{Y}^2.h(\hat{\mathbf{x}}) = \frac{x_d a_1 - u_s}{-k_p + k_d a_2} (k_d^2 a_1 - k_d k_p a_2 + k_p^2) > 0 \quad (3-39b)$$

Se as condições acima são verificadas, então $v^+ v^- = 1$ e $v^+ v^- > 0$, para qualquer escolha dos parâmetros, o implicará que toda órbita suficientemente próxima à singularidade encontrará a região de deslize, depois de um número finito de costuras na variedade de comutação. Já que, na singularidade os campos de vetores são paralelos;

$$\mathbf{X}(\hat{\mathbf{x}}) = \mathbf{Y}(\hat{\mathbf{x}}) = \frac{x_d a_1 - u_s}{-k_p + k_d a_2} \begin{pmatrix} -k_d \\ k_p \\ 0 \end{pmatrix} \quad (3-40)$$

de forma que, $\mathbf{X}.\mathbf{Y}.h(\hat{\mathbf{x}}) = \mathbf{Y}^2.h(\hat{\mathbf{x}})$ e $\mathbf{Y}.\mathbf{X}.h(\hat{\mathbf{x}}) = \mathbf{X}^2.h(\hat{\mathbf{x}})$. Porem,

$$v^+ = \frac{\mathbf{X}.\mathbf{Y}.h(\hat{\mathbf{x}})}{\sqrt{-\mathbf{X}^2.h(\hat{\mathbf{x}})\mathbf{Y}^2.h(\hat{\mathbf{x}})}} = \frac{\mathbf{Y}^2.h(\hat{\mathbf{x}})}{\sqrt{-\mathbf{X}^2.h(\hat{\mathbf{x}})\mathbf{Y}^2.h(\hat{\mathbf{x}})}} > 0, \quad (3-41)$$

$$v^- = \frac{-\mathbf{Y}.\mathbf{X}.h(\hat{\mathbf{x}})}{\sqrt{-\mathbf{X}^2.h(\hat{\mathbf{x}})\mathbf{Y}^2.h(\hat{\mathbf{x}})}} = \frac{-\mathbf{X}^2.h(\hat{\mathbf{x}})}{\sqrt{-\mathbf{X}^2.h(\hat{\mathbf{x}})\mathbf{Y}^2.h(\hat{\mathbf{x}})}} > 0, \quad (3-42)$$

na continuação apresentaremos valores numéricos do controlador PID, que satisfarão (3-39),

$$k_p = -11.5 + 3k, \quad k_d = -3.25 + k, \quad k_i = -3.25 + 2k, \quad \text{com } k \in [4.1, 10] \quad (3-43a)$$

$$\rho \in [0.1, 0.5], \quad u_s \in [0, 10), \quad (a_1, a_2) = (10, 6), \quad x_d = 1. \quad (3-43b)$$

Aproximação de um campo com uma T-singularidade.

Seja $Z(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) \in \Omega_0(d)$, logo as séries de Taylor genéricas da primeira ordem em torno da origem dos campos $\mathbf{X} = (\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2, \mathbf{X}_3)^T$ e $\mathbf{Y} = (\mathbf{Y}_1, \mathbf{Y}_2, \mathbf{Y}_3)^T$, estão dadas por:

$$\mathbf{X} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{X}_{10} \\ \mathbf{X}_{20} \\ \mathbf{X}_{30} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mathbf{X}_{1x0} & \mathbf{X}_{1y0} & \mathbf{X}_{1z0} \\ \mathbf{X}_{2x0} & \mathbf{X}_{2y0} & \mathbf{X}_{2z0} \\ \mathbf{X}_{3x0} & \mathbf{X}_{3y0} & \mathbf{X}_{3z0} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + O(\|(x, y, z)\|^2), \quad (\text{A-1})$$

e,

$$\mathbf{Y} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{Y}_{10} \\ \mathbf{Y}_{20} \\ \mathbf{Y}_{30} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mathbf{Y}_{1x0} & \mathbf{Y}_{1y0} & \mathbf{Y}_{1z0} \\ \mathbf{Y}_{2x0} & \mathbf{Y}_{2y0} & \mathbf{Y}_{2z0} \\ \mathbf{Y}_{3x0} & \mathbf{Y}_{3y0} & \mathbf{Y}_{3z0} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + O(\|(x, y, z)\|^2), \quad (\text{A-2})$$

agora determinamos condições sobre os coeficientes segundo as restrições, consignadas na Definição (1.6).

Da primeira destas, temos que $\mathbf{X}$ e $\mathbf{Y}$ têm um contato quadrático com a variedade da descontinuidade na origem, isto é:

$$\mathbf{X}.h(0) = \mathbf{X}_{10} = 0 \quad \mathbf{X}^2.h(0) = \langle (\mathbf{X}_{1y0}, \mathbf{X}_{1z0}), (\mathbf{X}_{20}, \mathbf{X}_{30}) \rangle \neq 0, \quad (\text{A-3})$$

$$\mathbf{Y}.h(0) = \mathbf{Y}_{10} = 0 \quad \mathbf{Y}^2.h(0) = \langle (\mathbf{Y}_{1y0}, \mathbf{Y}_{1z0}), (\mathbf{Y}_{20}, \mathbf{Y}_{30}) \rangle \neq 0,$$

e portanto, é possível assumir que $\mathbf{X}_{20}, \mathbf{Y}_{30} \neq 0$.

Da segunda, o par de curvas dadas por $S_{\mathbf{X}} = \mathbf{X}.h = 0$ e $S_{\mathbf{Y}} = \mathbf{Y}.h = 0$, sobre M intersectam-se transversalmente na singularidade, porém:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{X}_{1x0} & \mathbf{X}_{1z0} \\ 0 & \mathbf{Y}_{1y0} & \mathbf{Y}_{1z0} \end{vmatrix} \neq 0 \quad (\text{A-4})$$

o que implica que os vetores $(\mathbf{X}_{1y0}, \mathbf{X}_{1z0})$ e $(\mathbf{Y}_{1y0}, \mathbf{Y}_{1z0})$ não são paralelos.

Consideremos a mudança de variáveis diferenciável,

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x \\ -\mathbf{X}_{1x0}x - \mathbf{X}_{1y0}y - \mathbf{X}_{1z0}z \\ \mathbf{Y}_{1x0}x + \mathbf{Y}_{1y0}y + \mathbf{Y}_{1z0}z \end{pmatrix} \quad (\text{A-5})$$

que envia as curvas das dobras, $S_{\mathbf{X}}$ e $S_{\mathbf{Y}}$, localmente ao longo dos eixos y e z respectivamente. De modo que $\mathbf{X}$ e $\mathbf{Y}$ em torno da singularidade são equivalentes a,

$$\mathbf{X} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -y \\ -\mathbf{X}^2.h(0) \\ \mathbf{X}.\mathbf{Y}.h(0) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} O(x, \|(y,z)\|^2) \\ O(\|(x,y,z)\|) \\ O(\|(x,y,z)\|) \end{pmatrix} \quad (\text{A-6})$$

e

$$\mathbf{Y} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z \\ -\mathbf{Y}.\mathbf{X}.h(0) \\ \mathbf{Y}^2.h(0) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} O(x, \|(y,z)\|^2) \\ O(\|(x,y,z)\|) \\ O(\|(x,y,z)\|) \end{pmatrix} \quad (\text{A-7})$$

Realizando uma segunda mudança de variáveis dada por,

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x \\ \frac{y}{\sqrt{-\mathbf{X}^2.h(0)}} \\ \frac{z}{\sqrt{\mathbf{Y}^2.h(0)}} \end{pmatrix} \quad (\text{A-8})$$

e reescalando o tempo separadamente por $t \mapsto \frac{1}{\sqrt{-\mathbf{X}^2.h(0)}}$ e $t \mapsto \frac{1}{\sqrt{\mathbf{Y}^2.h(0)}}$ respectivamente para $\mathbf{X}$ e $\mathbf{Y}$ (isso troca a velocidade das órbitas mas preserva os retratos). Obtemos, a forma local dos campos em torno da origem,

$$\mathbf{X} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -y \\ 1 \\ v^+ \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} O(\|(x, \|(y,z)\|^2)\|^2) \\ O(\|(x,y,z)\|) \\ O(\|(x,y,z)\|) \end{pmatrix} \quad (\text{A-9})$$

e

$$\mathbf{Y} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z \\ v^+ \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} O(x, \|(y,z)\|^2) \\ O(\|(x,y,z)\|) \\ O(\|(x,y,z)\|) \end{pmatrix} \quad (\text{A-10})$$

Onde,

$$v^+ = \frac{\mathbf{X}.\mathbf{Y}.h(0)}{\sqrt{-\mathbf{X}^2.h(0)\mathbf{Y}^2.h(0)}} \quad (\text{A-11})$$

$$v^- = \frac{-\mathbf{Y} \cdot \mathbf{X} \cdot h(0)}{\sqrt{-\mathbf{X}^2 \cdot h(0) \mathbf{Y}^2 \cdot h(0)}} \quad (\text{A-12})$$

Os parâmetros v^+ e v^- que aparecem na expressão anterior, indicam a tangente dos ângulos $\theta^\pm$, de $\mathbf{X}$ e $\mathbf{Y}$, em relação à linha $S_{\mathbf{X}}$ no ponto zero:

Dinâmica do campo restrita à variedade central.

A serie de Taylor do campo deslizante planar regularizado $\check{f}^s$ de ordem dois, é

$$\check{f}(y, z) = \begin{pmatrix} v^- & 1 \\ 1 & v^+ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c_{22}^- y^2 + (c_{22}^+ + c_{23}^-)yz + c_{23}^+ z^2 + O(\|(y, z)\|^3) \\ c_{32}^- y^2 + (c_{32}^+ + c_{33}^-)yz + c_{33}^+ z^2 + O(\|(y, z)\|^3) \end{pmatrix}, \quad (\text{B-1})$$

Se $v^+ v^- = 1$ e $v^\pm < 0$ o sistema anterior é estruturalmente instável na origem, pois este ponto é não hiperbólico. Para estudar a dinâmica do campo em torno deste bifurcação em proximidades do ponto $(0, 0)$, vamos impor: $v^+ < 0$ fixo e $\lambda = v^+ v^-$, portanto:

$$\check{f}(y, z) = \frac{1}{v^+} \begin{pmatrix} \lambda + 1 & v^+ \\ v^+ & (v^+)^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c_{22}^- y^2 + (c_{22}^+ + c_{23}^-)yz + c_{23}^+ z^2 + O(\|(y, z)\|^3) \\ c_{32}^- y^2 + (c_{32}^+ + c_{33}^-)yz + c_{33}^+ z^2 + O(\|(y, z)\|^3) \end{pmatrix}, \quad (\text{B-2})$$

é possível estender o sistema uma a dimensão mais, considerando λ como uma variável, logo,

$$\begin{pmatrix} \dot{y} \\ \dot{z} \\ \dot{\lambda} \end{pmatrix} = \frac{1}{v^+} \begin{pmatrix} \lambda + 1 & v^+ \\ v^+ & (v^+)^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c_{22}^- y^2 + (c_{22}^+ + c_{23}^-)yz + c_{23}^+ z^2 + O(\|(y, z)\|^3) \\ c_{32}^- y^2 + (c_{32}^+ + c_{33}^-)yz + c_{33}^+ z^2 + O(\|(y, z)\|^3) \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (\text{B-3})$$

O Jacobiano de (B-3) no ponto singular $(y, z, \lambda) = (0, 0, 0)$ é a matriz,

$$J = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & v^+ + v^- & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{B-4})$$

Aplicando o Teorema da Variedade Central a (B-3) garante-se a existencia de uma variedade $W^c \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, tal que $\dim W^c = 2$. Esta é tangente na origem ao subespaço gerado pelos autovetores com parte real nula, $\langle (-v^+, 1, 0), (0, 0, 1) \rangle$.

Já que $\dot{\lambda} = 0$, os planos $\Pi_{\lambda_0} = \{(x, y, \lambda) : \lambda = \lambda_0\}$ são também invariantes com respeito a (B-3). Portanto W^c é folheada por variedades unidimensionais,

$$W_\lambda^c = W_\lambda^c \cap \Pi_\lambda \quad (\text{B-5})$$

Como W_0^c é tangente ao subespaço gerado por $T^{v^+} = \langle (-v^+, 1, 0) \rangle$, é possível parametrizar W_λ^c para $|\lambda|$ suficientemente pequeno pelas coordenadas sobre T^{v^+} , usando uma projeção (local).

Com esse objetivo, considere a mudança de variáveis com respeito aos vetores $p = (-v^+, 1)$ e $q = (v^-, 1)$, que são ortogonais pois $v^+v^- = 1$ (autovetores do jacobiano de $\check{f}^s$ na origem com $\lambda = 0$), qualquer vetor $\chi = (y, z) \in \mathbb{R}^2$ pode ser escrito como,

$$\chi = pu + qw, \quad (\text{B-6})$$

as expressões explícitas para $w, u \in \mathbb{R}$ são,

$$\begin{cases} u &= \langle p, \chi \rangle \\ w &= \langle q, \chi \rangle \end{cases} \quad (\text{B-7})$$

O sistema nestas coordenadas é equivalente a:

$$\begin{cases} \dot{u} &= \frac{1}{\|p\|^2} \langle p, \check{f}^s(pu + qw) \rangle \\ \dot{w} &= \frac{1}{\|q\|^2} \langle q, \check{f}^s(pu + qw) \rangle \end{cases} \quad (\text{B-8})$$

Segue-se então que a variedade central local W_λ^c na origem para $|\lambda| < \tau$ com $\tau > 0$ suficientemente pequeno, está dado por:

$$W_\lambda^c = \{up + wq : w = h(u, \lambda) \text{ e } |u| < \delta\}, \quad (\text{B-9})$$

Para algum $\delta > 0$, onde $h \in C^r(N_\delta(0) \times N_\tau(0))$, $h(0, 0) = 0$ e $D_u h(0, 0) = 0$. Portanto a expansão da serie de Taylor de h no ponto zero de ordem dois é:

$$w = h(u, \lambda) = \alpha\lambda + \beta\lambda u + \gamma\lambda^2 + \mu u^2 + o(|\lambda, u|^3) \quad (\text{B-10})$$

cujos coeficientes estão determinados por:

$$\dot{w} = D_u h(u, w)\dot{u} \quad (\text{B-11})$$

esta equação deriva-se de W_λ^c ser invariante em relação ao fluxo induzido por (B-8). Realizando alguns cálculos é possível determinar que,

$$\begin{cases} \alpha &= 0 \\ \gamma &= 0 \\ \beta &= \frac{1}{v^+ + v^-} \\ \mu &= \frac{-1}{(v^+ + v^-)^2} (c_{22}v^+ + c_{32}^-(v^+)^3 - (c_{22}^+ + c_{23}^-)v^+ - (c_{32}^+ + c_{33}^-)(v^+)^2 + c_{23}^+ + c_{33}^+v^+) \end{cases} \quad (\text{B-12})$$

Portanto a dinâmica da variedade central ao longo da reta gerada pelo vetor $(-v^+, 1)$ é,

$$\dot{u} = \frac{v^+}{(v^+)^2 + 1} ((v^+v^- - 1)u + a_2u^2) \quad (\text{B-13})$$

com $a_2 = c_{22}^+v^+ - c_{23}^+ - c_{32}^+ + c_{33}^+/v^+ - c_{22}^-(v^+)^2 + c_{23}^-v^+ + c_{32}^-v^+ - c_{33}^-$. Observe que:

- Se $v^+v^- > 1$ e $a_2 < 0$ ou $a_2 > 0$, (B-13) tem dois pontos de equilíbrio $u = 0$ e $u = (1 - v^+v^-)/a_2$, que são respectivamente estável e instável, pois

$$D_u\dot{u}(0) < 0 \quad \text{e} \quad D_u\dot{u}\left(\frac{1 - v^+v^-}{a_2}\right) > 0. \quad (\text{B-14})$$

- Se $v^+v^- = 1$ e $a_2 > 0$ ou $a_2 < 0$, (B-13) tem um ponto de equilíbrio $u = 0$ que não é hiperbolico, pois;

$$D_u\dot{u}(0) = 0 \quad (\text{B-15})$$

- Se $v^+v^- < 1$ e $a_2 > 0$ ou $a_2 < 0$, (B-13) tem dois pontos de equilíbrio $u = 0$ e $u = (1 - v^+v^-)/a_2$, que são respectivamente instável e estável, pois

$$D_u\dot{u}(0) > 0 \quad \text{e} \quad D_u\dot{u}\left(\frac{1 - v^+v^-}{a_2}\right) < 0 \quad (\text{B-16})$$

Assim os equilíbrios mudam sua estabilidade quando $v^+v^- = 1$ (bifurcação transcritical).

Como o sistema (B-7) é localmente equivalente numa vizinhança do ponto $(w, u, \lambda) = (0, 0, 0)$ a:

$$\begin{cases} \dot{u} = \frac{v^+}{(v^+)^2 + 1} ((1 - v^+v^-)u + a_2u^2) \\ \dot{w} = \frac{1}{v^+ + v^-} w \end{cases} \quad (\text{B-17})$$

É claro que um ponto singular do sistema anterior é induzido por um ponto singular em (B-13), lembrando que estamos supondo $v^\pm < 0$, então para $v^+v^- \simeq 1$, concluímos que:

- Se $v^+v^- > 1$ e $a_2 > 0$ o sistema tem uma sela na Região de escape.
- Se $v^+v^- > 1$ e $a_2 < 0$ o sistema tem uma sela na Região de deslize.
- Se $v^+v^- < 1$ e $a_2 > 0$ o sistema tem um nó estável na Região de deslize.
- Se $v^+v^- < 1$ e $a_2 < 0$ o sistema tem um nó instável na Região de escape.

Perturbação genérica da aplicação de Poincaré.

Assumindo a analiticidade das aplicações de primeiro retorno, é possível desenvolver a série de Taylor de ordem três de φ^+ numa vizinhança da origem, a qual é dada por:

$$\begin{aligned} y &\mapsto -y + \alpha_{20}y^2 + \alpha_{11}yz + \alpha_{02}z^2 + \alpha_{30}y^3 + \alpha_{21}y^2z + \alpha_{12}yz^2 + \alpha_{03}z^3 \\ &\quad + O(\|(y, z)\|^4), \\ z &\mapsto -2v^+z + \beta_{20}y^2 + \beta_{11}yz + \beta_{02}z^2 + \beta_{30}y^3 + \beta_{21}y^2z + \beta_{12}yz^2 + \beta_{03}z^3 \\ &\quad + O(\|(y, z)\|^4), \end{aligned} \tag{C-1}$$

de forma similar para φ^- ,

$$\begin{aligned} y &\mapsto y - 2v^-z + \gamma_{20}y^2 + \gamma_{11}yz + \gamma_{02}z^2 + \gamma_{30}y^3 + \gamma_{21}y^2z + \gamma_{12}yz^2 + \gamma_{03}z^3 \\ &\quad + O(\|(y, z)\|^4), \\ z &\mapsto -z + \delta_{20}y^2 + \delta_{11}yz + \delta_{02}z^2 + \delta_{30}y^3 + \delta_{21}y^2z + \delta_{12}yz^2 + \delta_{03}z^3 \\ &\quad + O(\|(y, z)\|^4), \end{aligned} \tag{C-2}$$

Entretanto, os valores dos coeficientes de φ^+ e φ^- estão restritos ao fato que, as duas aplicações são involuções, e, que seu fluxo induzido é quadraticamente tangente as linhas de dobra S_X e S_Y . Porém, vamos impor que,

- as expressões, (C-1) e (C-2), preservem os eixos $y = 0$ e $z = 0$ respectivamente,
- as composições $\varphi^+ \circ \varphi^+$ e $\varphi^- \circ \varphi^-$, truncados para terceira ordem, sejam a identidade.

de onde segue-se que:

$$\alpha_{02} = \alpha_{03} = \beta_{02} = \beta_{03} = \gamma_{20} = \gamma_{30} = \delta_{20} = \delta_{30} = 0, \tag{C-3}$$

e

$$\begin{aligned}
\alpha_{11} &= \alpha_{12} = \delta_{11} = \delta_{21} = 0, \\
\alpha_{30} &= -(\alpha_{20}^2 + \alpha_{21}v^+), \\
\beta_{20} &= (\alpha_{20} - \beta_{11})v^+, \\
\beta_{21} &= \frac{1}{2}(-\alpha_{20}\beta_{11} + \beta_{11}^2) + (\alpha_{21} - 2\beta_{12})v^+, \\
\gamma_{02} &= (\delta_{02} - \gamma_{11})v^-, \\
\gamma_{12} &= \frac{1}{2}(-\delta_{02}\gamma_{11} + \gamma_{11}^2) + (\delta_{12} - 2\gamma_{21})v^-, \\
\delta_{03} &= -(\delta_{12}v^- + \delta_{02}^2).
\end{aligned} \tag{C-4}$$

O que nos permite diminuir o número de coeficientes de cada aplicação de 15 a 6, de modo que as expressões das series de Taylor de φ^+ e φ^- , ficam respectivamente,

$$\begin{aligned}
y &\mapsto -y + \alpha_{20}y^2 - (\alpha_{20}^2 + \alpha_{21}v^+)y^3 + \alpha_{21}y^2z + O(\|(y,z)\|^4), \\
z &\mapsto -2v^+y + z + (\alpha_{20} - \beta_{11})v^+y^2 + \beta_{11}yz + \beta_{30}y^3 + \beta_{12}yz^2 \\
&\quad + \left(\frac{1}{2}(-\alpha_{20}\beta_{11} + \beta_{11}^2) + (\alpha_{21} - 2\beta_{12})v^+\right)y^2z + O(\|(y,z)\|^4)
\end{aligned} \tag{C-5}$$

$$\begin{aligned}
y &\mapsto y - 2v^-z + \gamma_{11}yz + (\delta_{02} - \gamma_{11})v^-z^2 + \gamma_{21}y^2z + \gamma_{03}z^3 \\
&\quad + \left(\frac{1}{2}(-\delta_{02}\gamma_{11} + \gamma_{11}^2) + (\delta_{12} - 2\gamma_{21})v^-\right)y^2z + O(\|(y,z)\|^4) \\
z &\mapsto -z + \delta_{02}z^2 + \delta_{12}yz^2 - (\delta_{12}v^- + \delta_{02}^2)z^3 + O(\|(y,z)\|^4),
\end{aligned} \tag{C-6}$$

Finalmente, compondo $\varphi^+ \circ \varphi^-$, determinamos a expansão geral da terceira ordem da Aplicação de Poincaré, φ ,

$$\begin{aligned}
y &\mapsto -y + 2v^-z + a_{20}y^2 + a_{11}xy + a_{20}z^2 + a_{30}y^3 + a_{21}y^2z + a_{12}yz^2 + a_{03}z^2 \\
&\quad + O(\|(y,z)\|^4), \\
z &\mapsto -2v^+y + (-1 + 4v^+v^-)z + b_{20}y^2 + b_{11}yz + b_{02}z^2 + b_{30}y^3 + b_{21}y^2z \\
&\quad + b_{12}yz^2 + b_{03}z^3 + O(\|(y,z)\|^4),
\end{aligned} \tag{C-7}$$

com

$$\begin{aligned}
a_{20} &= \alpha_{20}; \\
a_{11} &= -\gamma_{11} - 4\alpha_{20}v^-; \\
a_{02} &= \gamma_{11}v^- - v^-\delta_{02} + 4\alpha_{20}(v^-)^2; \\
a_{30} &= -\alpha_{20}^2 - \alpha_{21}v^+; \\
a_{21} &= -\gamma_{21} + 2\alpha_{20}\gamma_{11} - (6(-\alpha_{20}^2 - \alpha_{21}v^+))v^- - \alpha_{21}; \\
a_{12} &= -4\alpha_{20}v^-\gamma_{11} + 2\alpha_{20}(-\gamma_{11}v^- + v^-\delta_{02}) + 2\gamma_{21}v^- - \frac{1}{2}\gamma_{11}^2 + \frac{1}{2}\gamma_{11}\delta_{02} - v^-\delta_{12} \\
&\quad + (12(-\alpha_{20}^2 - \alpha_{21}v^+))(v^-)^2 + 4\alpha_{21}v^-;
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
a_{03} &= -\gamma_{03} - 4\alpha_{20}v^-(-\gamma_{11}v^- + v^-\delta_{02}) - (8(-\alpha_{20}^2 - \alpha_{21}v^+))(v^-)^3 - 4\alpha_{21}(v^-)^2; \\
b_{20} &= v^+\alpha_{20} - \beta_{11}v^+; \\
b_{11} &= -\beta_{11} - 2v^+\gamma_{11} - 4v^+v^-\alpha_{20} + 4v^-\beta_{11}v^+; \\
b_{02} &= 2v^+\gamma_{11}v^- - 2v^+v^-\delta_{02} + 4(v^-)^2v^+\alpha_{20} - 4(v^-)^2\beta_{11}v^+ + 2v^-\beta_{11} + \delta_{02}; \\
b_{30} &= \beta_{30}; \\
b_{21} &= -2v^+\gamma_{21} + (2(v^+\alpha_{20} - \beta_{11}v^+))\gamma_{11} - \frac{1}{2}\beta_{11}^2 - \alpha_{21}v^+ + 2\beta_{12}v^+ + \frac{1}{2}\beta_{11}\alpha_{20} \\
&\quad - 6\beta_{30}v^-; \\
b_{12} &= -2v^+(-2\gamma_{21}v^- + \frac{1}{2}\gamma_{11}^2 - \frac{1}{2}\gamma_{11}\delta_{02} + v^-\delta_{12}) + \beta_{11}\delta_{02} \\
&\quad + (4(\frac{1}{2}\beta_{12}^2 + \alpha_{2,1}v^+ - 2\beta_{12}v^+ - \frac{1}{2}\beta_{11}\alpha_{20}))v^- + \delta_{12} + \beta_{12} \\
&\quad - (4(v^+\alpha_{20} - \beta_{11}v^+))v^-\gamma_{11} + (2(v^+\alpha_{20} - \beta_{11}v^+))(-\gamma_{11}v^- + v^-\delta_{02}) \\
&\quad - \beta_{11}\gamma_{11} + 12\beta_{30}(v^-)^2; \\
b_{03} &= (4(v^+\alpha_{20} - \beta_{11}v^+))v^-(-\gamma_{11}v^- + v^-\delta_{02}) - 2v^+\gamma_{03} - \beta_{11}(-\gamma_{11}v^- + v^-\delta_{02}) \\
&\quad - 2\beta_{12}v^- - \beta_{03} - (4(\frac{1}{2}\beta_{11}^2 + \alpha_{21}v^+ - 2\beta_{12}v^+ - \frac{1}{2}\beta_{11}\alpha_{20}))(v^-)^2 \\
&\quad - 8\beta_{30}(v^-)^3 - 2\beta_{11}v^-\delta_{02} - v^-\delta_{12} - \delta_{02}^2;
\end{aligned}$$

(C-8)

Forma normal da Aplicação de Poincaré.

Quando

$$p := v^+ v^- - 1 = 0, \quad (\text{D-1})$$

a aplicação de Poincaré, φ , tem um ponto fixo, na origem, com uma linearização não-semisimples $1 : 1$. Ela pode ser colocada em uma forma normal de ressonância $1 : 1$ que é simétrica, devido às restrições impostas pelo presuposto de involução.

A redução à forma normal de (C-7) vai ser efetuada, segundo um caminho padrão: uma transformação linear, seguida de uma sequência de transformações próximas a identidade, eliminando os termos não ressonantes de diferentes graus iterativamente.

Primeiro a parte linear de (C-7) é simplificada através de uma mudança de variáveis dependente dos parâmetros $v^\pm$,

$$\begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 - 4v^+ v^- & 1 \\ -2v^+ & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ z_1 \end{pmatrix}, \quad (\text{D-2})$$

tornando-se,

$$\begin{aligned} y_1 &\mapsto y_1 + z_1, \\ z_1 &\mapsto 4py_1 + (1 + 4p)z_1, \end{aligned} \quad (\text{D-3})$$

Esta última expressão coincide com a forma de Jordan da linearização de φ quando $p = 0$.

Nas coordenadas (y, z) e na bifurcação $v^- v^+ = 1$, o eixo coordenado y_1 esta na direção do autovalor singular $(-1, -v^-)$, enquanto o eixo z_2 na direção de y . Assim, a mudança de variáveis alinha o autovetor singular com a direção y_1 , e nas novas coordenadas, este encontra-se estritamente contido nas regiões costurantes em relação às coordenadas originais. O anterior é uma observação importante, pois as aplicações de retorno estão definidas somente em **RE** e **RC**[±].

Continuamos com seguinte mudança de variáveis que em torno do ponto zero é próxima à transformação identidade, com o objetivo de simplificar os termos quadráticos,

$$\begin{aligned} y_1 &= u + c_{20}u^2, \\ z_1 &= w + d_{20}u^2 + d_{11}uw + d_{02}w^2, \end{aligned} \quad (\text{D-4})$$

com,

$$\begin{aligned} c_{20} &= -\frac{b_{20} - a_{20}v^+ + b_{11}v^+ + 2(v^+)^2b_{02}}{v^+(12p+2+16p^2)}, \\ d_{20} &= \frac{2(4b_{20}p + b_{11}v^+ + b_{20} + 2b_{11}v^+p + 4b_{20}p^2 + (v^+)^2b_{02})}{v^+}, \\ d_{11} &= -\frac{-a_{20}v^+ + 3b_{20} + 16b_{20}p + 40b_{20}p^2 + 32p^3b_{20} + 8p^2b_{11}v^+ + 6b_{11}v^+p + 2b_{11}v^+ + 2(v^+)^2b_{02}}{v^+(6p+1+8p^2)}, \\ d_{02} &= \frac{a_{20}v^+ + 6b_{20}p - b_{11}v^+ - 2(v^+)^2b_{02} + 8b_{20}p^2}{v^+(12p+2+18p^2)}, \end{aligned} \quad (\text{D-5})$$

produzindo,

$$\begin{aligned} u &\mapsto u + w + O(||(u, w)^3||), \\ w &\mapsto 4pu + (1 + 4p)w + B_{20}u^2 + B_{11}uw + O(||(u, w)^3||), \end{aligned} \quad (\text{D-6})$$

onde,

$$\begin{aligned} B_{20} &= \frac{2}{(2p+1)v^+} (24a_{20}v^+p^2 - 5b_{11}v^+p - 2b_{20} + 2a_{20}v^+ - 7b_{20}p - 2b_{11}v^+ \\ &\quad - 2(v^+)^2b_{02} - 12b_{20}p^2 + 2a_{11}(v^+)^2 + 2a_{02}(v^+)^3 - 8b_{20}p^3 + 11pa_{20}v^+ \\ &\quad + 8a_{11}(v^+)^2p + 4a_{02}(v^+)^3p - 4b_{11}v^+p^2 - 2(v^+)^2b_{02}p + 8a_{11}(v^+)^2p^2 \\ &\quad + 16a_{20}v^+p^3), \\ B_{11} &= \frac{2}{(4p+1)v^+} (8p^2c_{11}v^+ + 8b_{20}p^2 - 16a_{20}v^+p^2 + 6b_{20}p - 16pa_{20}v^+ \\ &\quad - 4a_{11}(v^+)^2p - 2a_{20}v^+ - a_{11}(v^+)^2 - b_{11}v^+ - 2(v^+)^2b_{02}), \end{aligned} \quad (\text{D-7})$$

em particular para $p = 0$,

$$\begin{aligned} B_{20}|_{p=0} &= 4a_{20} - 4v^+b_{02} - 4b_{20}v^- + 4a_{11}v^+ - 4b_{11} + 4a_{02}(v^+)^2 \\ B_{11}|_{p=0} &= -4v^+b_{02} - 2b_{11} - 2a_{11}v^+ - 4a_{20}, \end{aligned} \quad (\text{D-8})$$

Pela condição de involução o termo $B_{20} = 0$ próximo a $p = 0$, o que implica que a segunda expansão de Taylor é estruturalmente instável. Em ordem de obter a forma topológica normal da aplicação de Poincaré, a expansão de terceira ordem deve ser considerada.

Mais uma vez, aplicamos uma transformação proxima a identidade para simplificar os termos de ordem cúbico,

$$\begin{aligned} u &= \mu + e_{30}(\mu)^3 + e_{21}(\mu)^2\omega, \\ w &= \omega + f_{30}\mu^3 + f_{21}\mu^2\omega + f_{03}\omega^3, \end{aligned} \quad (\text{D-9})$$

com

$$\begin{aligned} e_{30}|_{p=0} &= -\frac{1}{12(v^+)^2}(16(v^+)^4b_{02}^2 + 2a_{20}^2(v^+)^2 - 9b_{11}^2(v^+)^2 - 12b_{30}v^+ - 16(v^+)^3b_{12} \\ &\quad - 24(v^+)^4b_{03} + 12a_{30}(v^+)^2 + 4a_{21}(v^+)^3 - 12b_{21}(v^+)^2 + 2(v^+)^2b_{02}b_{20} \\ &\quad - 12(v^+)^3b_{02}a_{20} - 2(v^+)^3b_{02}b_{11} + 9b_{20}a_{20}v^+ - 17b_{20}b_{11}v^+ \\ &\quad + 7a_{20}(v^+)^2b_{11} - 6a_{20}(v^+)^3a_{11} + 10b_{11}(v^+)^3a_{11} + 12(v^+)^4b_{02}a_{11} \\ &\quad + 12b_{20}a_{11}(v^+)^2 - 9b_{20}^2), \\ e_{21}|_{p=0} &= \frac{1}{8(v^+)^2}(-8(v^+)^4b_{02}^2 - 4a_{20}^2(v^+)^2 - 17b_{11}^2(v^+)^2 - 16(v^+)^3b_{12} \\ &\quad - 24(v^+)^4b_{03} + 12a_{30}(v^+)^2 + 4a_{21}(v^+)^3 - 8b_{21}(v^+)^2 - 22(v^+)^2b_{02}b_{20} \\ &\quad + 12(v^+)^3b_{02}a_{20} - 30(v^+)^3b_{02}b_{11} + 21b_{20}a_{20}v^+ - 25b_{20}b_{11}v^+ \\ &\quad + 21a_{20}(v^+)^2b_{11} - 6a_{20}(v^+)^3a_{11} + 10b_{11}(v^+)^3a_{11} + 12(v^+)^4b_{02}a_{11} \\ &\quad + 12b_{20}a_{11}(v^+)^2 - 3b_{20}^2), \\ f_{30}|_{p=0} &= \frac{1}{2(v^+)^2}(-4(v^+)^4b_{02}^2 + a_{20}^2(v^+)^2 - 7b_{11}^2(v^+)^2 - 8b_{30}v^+ - 8(v^+)^3b_{12} \\ &\quad - 8(v^+)^4b_{03} - 8b_{21}(v^+)^2 - 16(v^+)^2b_{02}b_{20} - 12(v^+)^3b_{02}b_{11} + 2b_{20}a_{20}v^+ \\ &\quad - 18b_{20}b_{11}v^+ + 2a_{20}(v^+)^2b_{11} - 11b_{20}^2), \\ f_{21}|_{p=0} &= -\frac{1}{4(v^+)^2}(-8(v^+)^4b_{02}^2 - 4a_{20}^2(v^+)^2 - 25b_{11}^2(v^+)^2 - 36b_{30}v^+ \\ &\quad - 24(v^+)^3b_{12} - 24(v^+)^4b_{03} + 12a_{30}(v^+)^2 - 28b_{21}(v^+)^2 - 54(v^+)^2b_{02}b_{20} \\ &\quad + 12(v^+)^3b_{02}a_{20} - 38(v^+)^3b_{02}b_{11} + 33b_{20}a_{20}v^+ - 71b_{20}b_{11}v^+ \\ &\quad + 10b_{11}(v^+)^3a_{11} + 12(v^+)^4b_{02}a_{11} + 12b_{20}a_{11}(v^+)^2 - 51b_{20}^2 + 4a_{21}(v^+)^3 \\ &\quad + 25a_{20}(v^+)^2b_{11} - 6a_{20}(v^+)^3a_{11}), \\ f_{03}|_{p=0} &= \frac{1}{24(v^+)^2}(-8(v^+)^4b_{02}^2 - 4a_{20}^2(v^+)^2 - 21b_{11}^2(v^+)^2 + 36b_{30}v^+ - 16(v^+)^3b_{12} \\ &\quad - 24(v^+)^4b_{03} + 12a_{30}(v^+)^2 + 4a_{21}(v^+)^3 - 46(v^+)^2b_{02}b_{20} \\ &\quad + 12(v^+)^3b_{02}a_{20} - 38(v^+)^3b_{02}b_{11} + 33b_{20}a_{20}v^+ - 29b_{20}b_{11}v^+ \\ &\quad + 25a_{20}(v^+)^2b_{11} - 6a_{20}(v^+)^3a_{11} + 10b_{11}(v^+)^3a_{11} \\ &\quad + 12(v^+)^4b_{02}a_{11} + 12b_{20}a_{11}(v^+)^2 + 21b_{20}^2), \end{aligned} \quad (\text{D-10})$$

obtendo a forma normal,

$$\begin{aligned} \mu &\mapsto \mu + \omega + O(\|(\mu, \omega)^4\|), \\ \omega &\mapsto 4p\mu + (1 + 4p)\omega + B_{20}\mu^2 + B_{11}\mu\omega + B_{30}\mu^3 + B_{21}\mu^2\omega + B_{03}\omega^3 + O(\|(\mu, \omega)^4\|), \end{aligned}$$

(D-11)

$$\begin{aligned}
B_{30}|_{p=0} = & -\frac{2}{(v^+)^2}(-4(v^+)^4 b_{03} - 4(v^+)^3 b_{12} + 4a_{30}(v^+)^2 + 4a_{12}(v^+)^4 + 4a_{21}(v^+)^3 \\
& + 4a_{03}(v^+)^5 - 4b_{21}(v^+)^2 - 4(v^+)^4 b_{02}^2 - 3b_{11}^2(v^+)^2 - 4b_{20}^2 - 4b_{30}v^+ \\
& - 8(v^+)^2 b_{02}b_{20} + 6(v^+)^3 b_{02}a_{20} - 7(v^+)^3 b_{02}b_{11} - 7b_{20}b_{11}v^+ \\
& + 4a_{20}(v^+)^2 b_{11} + 2b_{20}a_{20}v^+ + 2(v^+)^4 b_{02}a_{11} - 2b_{20}a_{11}(v^+)^2 \\
& - 2b_{11}(v^+)^4 a_{02} - 4b_{20}a_{02}(v^+)^3),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
B_{21}|_{p=0} = & \frac{1}{2v^+}(8(v^+)^3 b_{02}^2 - 26a_{20}^2 v^+ + 9b_{11}^2 v^+ + 16(v^+)^2 b_{12} + 24(v^+)^3 b_{03} \\
& + 8b_{21}v^+ + 24a_{30}v^+ + 8a_{12}(v^+)^3 + 16a_{21}(v^+)^2 + 8v^+ b_{02}b_{20} \\
& + 18b_{11}(v^+)^2 b_{02} + 46b_{20}a_{20} + 11b_{20}b_{11} + 39a_{20}b_{11}v^+ \\
& + 36(v^+)^3 b_{02}a_{11} + 26a_{11}v^+ b_{20} - 18a_{20}a_{11}(v^+)^2 + 26b_{11}a_{11}(v^+)^2 \\
& + 56a_{20}(v^+)^2 b_{02} - 16a_{20}a_{02}(v^+)^3 + 24b_{11}a_{02}(v^+)^3 + 32(v^+)^4 b_{02}a_{02} \\
& + 24b_{20}a_{02}(v^+)^2),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
B_{03}|_{p=0} = & \frac{1}{4(v^+)^2}(-8(v^+)^4 b_{02}^2 - 16a_{20}^2(v^+)^2 - 13b_{11}^2(v^+)^2 - 24b_{30}v^+ \\
& - 8(v^+)^3 b_{12} - 8(v^+)^4 b_{03} - 12b_{21}(v^+)^2 + 16a_{30}(v^+)^2 + 4a_{21}(v^+)^3 \\
& - 34(v^+)^2 b_{02}b_{20} - 22(v^+)^3 b_{02}b_{11} + 51b_{20}a_{20}v^+ - 43b_{20}b_{11}v^+ \\
& + 37a_{20}(v^+)^2 b_{11} + 36(v^+)^3 b_{02}a_{20} - 6a_{20}(v^+)^3 a_{11} + 10b_{11}(v^+)^3 a_{11} \\
& + 12(v^+)^4 b_{02}a_{11} + 12b_{20}a_{11}(v^+)^2 - 39b_{20}^2).
\end{aligned}$$

(D-12)

Aproximação da Aplicação de Poincaré por um fluxo.

A aplicação de Poincaré (3-1) pode-se ser aproximada por um deslocamento em tempo unitário do fluxo de um sistema planar de equações diferenciáveis, que é determinado via sucessivas iterações de Picard, como explica-se por exemplo em [13]. Em particular, se $p = 0$ temos,

$$\begin{aligned}\dot{\mu} &= \omega - \frac{B_{11}}{2}\mu\omega + \frac{B_{11}}{3}\omega^2 + C_{30}\mu^3 + C_{21}\mu^2\omega + C_{12}\mu\omega^2 + C_{03}\omega^3, \\ \dot{\omega} &= B_{11}\mu\omega - \frac{B_{11}}{2}\omega^2 + D_{30}\mu^3 + D_{21}\mu^2\omega + D_{12}\mu\omega^2 + D_{03}\omega^3,\end{aligned}$$

com,

$$\begin{aligned}C_{30} &= -\frac{B_{30}}{2}, & C_{21} &= \frac{B_{11}^2}{3} + \frac{B_{21}}{2} + B_{30}, & C_{12} &= -\frac{2B_{11}^2}{3} + \frac{2B_{21}}{3} - \frac{B_{30}}{2}, \\ C_{03} &= -\frac{B_{03}}{2} + \frac{3B_{11}^2}{10} - \frac{B_{21}}{6} + \frac{B_{30}}{30}, & D_{30} &= B_{30}, & D_{21} &= -\frac{B_{11}^2}{2} + B_{21} - \frac{3B_{30}}{2}, \\ D_{12} &= \frac{5B_{11}^2}{6} - B_{21} + \frac{B_{30}}{2}, & D_{03} &= B_{30} - \frac{B_{11}^2}{3} + \frac{B_{21}}{6}.\end{aligned}$$

Agora, considere-se a mudança de variáveis que é proxima à transformação identidade em torno da origem,

$$\begin{aligned}\mu &= \xi_1, \\ \omega &= \xi_2 + \frac{B_{11}}{2}\xi_1\xi_2 - \frac{B_{11}}{3}\xi_2^2,\end{aligned}$$

o sistema anterior vai ficar localmente,

$$\begin{aligned}\dot{\xi}_1 &= \xi_2 - \frac{B_{30}}{2}\xi_1^3 + \left(\frac{B_{11}^2}{12} + B_{30} - \frac{B_{21}}{2}\right)\xi_2\xi_1^2 + \left(-\frac{B_{11}^2}{6} - \frac{B_{30}}{2} + \frac{2B_{21}}{3}\right)\xi_2^2\xi_1 \\ &\quad + \left(\frac{7B_{11}^2}{90} + \frac{B_{30}}{30} - \frac{B_{21}}{6} - \frac{B_{03}}{2}\right)\xi_2^3, \\ \dot{\xi}_2 &= -B_{11}\xi_2^2 + B_{11}\xi_2\xi_1 + B_{30}\xi_1^3 + \left(-\frac{B_{11}^2}{2} - \frac{3B_{30}}{2} + B_{21}\right)\xi_1^2\xi_2 + \left(\frac{11B_{11}^2}{12} + \frac{B_{30}}{2} - B_{21}\right)\xi_2^2\xi_1 \\ &\quad + \left(-\frac{B_{11}^2}{3} + \frac{B_{21}}{6} + B_{03}\right)\xi_2^3,\end{aligned}$$

multiplicando o campo resultante pela função escalar $1 + B_{11}\xi_1$ e mudando de novo as coordenadas próximo à origem por,

$$\begin{aligned}\xi_1 &= \varepsilon_1, \\ \xi_2 &= \varepsilon_2 - B_{11}\varepsilon_1\varepsilon_2,\end{aligned}$$

os termos quadráticos são simplificados resultando,

$$\begin{aligned}\dot{\xi}_1 &= \xi_2 - \frac{B_{30}}{2}\xi_1^3 + \left(-\frac{B_{11}^2}{12} + B_{30} - \frac{B_{21}}{2}\right)\xi_2\xi_1^2 + \left(-\frac{B_{11}^2}{6} - \frac{B_{30}}{2} + \frac{2B_{21}}{3}\right)\xi_2^2\xi_1 \\ &\quad + \left(\frac{7B_{11}^2}{90} + \frac{B_{30}}{30} - \frac{B_{21}}{6} - \frac{B_{03}}{2}\right)\xi_2^3, \\ \dot{\xi}_2 &= B_{11}\xi_2\xi_1 + B_{30}\xi_1^3 + \left(\frac{B_{11}^2}{2} - \frac{3B_{30}}{2} + B_{21}\right)\xi_1^2\xi_2 + \left(\frac{11B_{11}^2}{12} + \frac{B_{30}}{2} - B_{21}\right)\xi_2^2\xi_1 \\ &\quad + \left(-\frac{B_{11}^2}{3} + \frac{B_{21}}{6} + B_{03}\right)\xi_2^3,\end{aligned}$$

Os termos não-ressonantes cúbicos são eliminados, definindo

$$\begin{aligned}\rho &= \varepsilon_1 + \left(-\frac{11B_{11}^2}{72} + \frac{5B_{30}}{12} - \frac{B_{21}}{2}\right)\varepsilon_1^3 + \left(\frac{B_{03}}{2} - \frac{B_{11}^2}{4} - \frac{B_{30}}{4} + \frac{5B_{21}}{12}\right), \\ \zeta &= \varepsilon_2 + \frac{B_{30}}{2}\varepsilon_1^3 + \left(\frac{11B_{11}^2}{24} + \frac{B_{30}}{4}\right)\varepsilon_1^2\varepsilon_2 + \left(-\frac{B_{11}^2}{3} + \frac{B_{21}}{6} + B_{03}\right)\varepsilon_1\varepsilon_2^2 \\ &\quad + \left(\frac{B_{03}}{2} - \frac{7B_{11}^2}{90} + \frac{B_{21}}{6} - \frac{B_{30}}{30}\right)\varepsilon_2,\end{aligned}$$

de modo que a forma normal local da aplicação de Poincare é,

$$\begin{aligned}\dot{\rho} &= \zeta + O(\|(\rho, \zeta)\|^4), \\ \dot{\zeta} &= B_{11}\rho\zeta + B_{30}\rho^3 + \left(\frac{B_{11}}{2} + B_{21} - 3B_{30}\right)\rho^2\zeta + O(\|(\rho, \zeta)\|^4),\end{aligned}$$

Referências Bibliográficas

- [1] A.S. HODEL, C. H. **Variable-structure pid control to prevent integrator windup.** IEEE Trans. Ind. Electron, 48:442–451, 2001.
- [2] BROGLIATO, B. **Nonsmooth Mechanics — Models Dynamics and Control.** Springer-Verlag, London, second edition, 1999.
- [3] BROGLIATO, B. **Impacts in Mechanical Systems — Analysis and Modelling in:: Lecture Notes in Physics.** Springer-Verlag, New York, first edition, 2000.
- [4] E A. COLOMBO, M. J. **The two fold singularity of discontinuous vector fields.** SIAM J. Appl. Dyn. Syst., (5):624–640, 2009.
- [5] E. CONTE, A. F; ZBILUT, J. P. **On a simple case of possible non-deterministic chaotic behavior in compartment theory of biological observables,.** Chaos Solitons Fractals, (22):277–284, 2004.
- [6] FEO, O. D. **Modeling diversity by strange attractors with application to temporal pattern recognition.** (Tesis Doctoral):École Polytechnique Fédérale de Lausanne, 2001.
- [7] FILIPPOV, A. F. **Differential Equations with Discontinuous Righthand Sides.** Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, The Netherlands, 1988.
- [8] GATTO, M; MANDRIOLI, D. **Pseudoequilibrium in dynamical systems.** Int. J. Systems Sci., (4):809–824, 1973.
- [9] GUCKENHEIMER, J; HOLMES, P. **Nonlinear Oscillations, Dynamical Systems, and Bifurcations of Vector Fields (Applied Mathematical Sciences; 42).** Springer-Verlag, New York, first edition, 1983.
- [10] JEFFREY, M. R. **Non determinism in the limit of nonsmooth dynamics.** SIAM J. Applied Dynamical Systems, 10(2):423–451, 2011.
- [11] JEFFREY, M; FERNÁNDEZ-GARCÍA, S. **Structural stability of the two-fold singularity.** SIAM J. Appl. Dyn. Syst., (5):624–640, 2012.

- [12] J.P. HESPANHA, A. M. **Switching between stabilizing controllers.** Automatica, volume = 38, number = 11, pages = 1905-1917, 2002.
- [13] KUZNETSOV, Y. A. **Elements of Applied Bifurcation Theory.** Springer-Verlag, New York, third edition, 2004.
- [14] MEISS, J. D. **Differential Dynamical Systems.** AM Monogr. Math. Comput. 14, SIAM, Philadelphia, 2007.
- [15] P. T. PIIROINEN, Y. A. K. **An event-driven method to simulate filippov systems with accurate computing of sliding motions.** ACM Trans. Math. Software, (34):article 13, 2008.
- [16] SOTOMAYOR, J. **Lições de Equações Diferenciais Ordinárias.** Projeto Euclides, Rio de Janeiro, first edition, 1979.
- [17] TEIXEIRA, M. A. **Generic bifurcation of sliding vector fields.** J. Math. Anal. Appl., (176):436–457, 1993.
- [18] TEIXEIRA, M. **Stability conditions for discontinuous vector fields.** J. Differ. Equations, (88):15–29, 1990.
- [19] UTKIN, V. **Variable structure systems with sliding modes.** Automatic Control, IEEE Transactions on, 22(2):212–222, 1977.
- [20] UTKIN, V. **Vss premise in xx century: Evidences of a witness. proceedings of the 6th ieee international workshop on variable structure systems.** World Scientific, p. 1–34, 2000.