

UNIVERSIDADE FEDERAL DE GOIÁS
INSTITUTO DE FÍSICA

**Estudo de Soluções Localizadas na Equação Não Linear de
Schrödinger Logarítmica, Saturada e com Efeitos de Altas
Ordens**

Luciano Calaça Alves

GOIÂNIA

2018

TERMO DE CIÊNCIA E DE AUTORIZAÇÃO PARA DISPONIBILIZAR VERSÕES ELETRÔNICAS DE TESES E DISSERTAÇÕES NA BIBLIOTECA DIGITAL DA UFG

Na qualidade de titular dos direitos de autor, autorizo a Universidade Federal de Goiás (UFG) a disponibilizar, gratuitamente, por meio da Biblioteca Digital de Teses e Dissertações (BDTD/UFG), regulamentada pela Resolução CEPEC nº 832/2007, sem ressarcimento dos direitos autorais, de acordo com a Lei nº 9610/98, o documento conforme permissões assinaladas abaixo, para fins de leitura, impressão e/ou *download*, a título de divulgação da produção científica brasileira, a partir desta data.

1. Identificação do material bibliográfico: Dissertação Tese

2. Identificação da Tese ou Dissertação:

Nome completo do autor: Luciano Calaça Alves

Título do trabalho: Estudo de Soluções Localizadas na Equação Não Linear de Schrödinger Logarítmica, Saturada e com Efeitos de Altas Ordens

3. Informações de acesso ao documento:

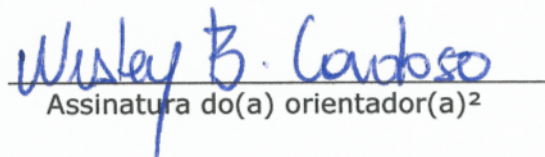
Concorda com a liberação total do documento SIM NÃO¹

Havendo concordância com a disponibilização eletrônica, torna-se imprescindível o envio do(s) arquivo(s) em formato digital PDF da tese ou dissertação.



Assinatura do(a) autor(a)²

Ciente e de acordo:



Assinatura do(a) orientador(a)²

Data: 22 / 05 / 2018

¹ Neste caso o documento será embargado por até um ano a partir da data de defesa. A extensão deste prazo suscita justificativa junto à coordenação do curso. Os dados do documento não serão disponibilizados durante o período de embargo.

Casos de embargo:

- Solicitação de registro de patente
- Submissão de artigo em revista científica
- Publicação como capítulo de livro
- Publicação da dissertação/tese em livro

²A assinatura deve ser escaneada.

UNIVERSIDADE FEDERAL DE GOIÁS
INSTITUTO DE FÍSICA

**Estudo de Soluções Localizadas na Equação Não Linear de
Schrödinger Logarítmica, Saturada e com Efeitos de Altas
Ordens**

Luciano Calaça Alves

*Tese apresentada ao Programa de Pós-Graduação
em Física da Universidade Federal de Goiás como
parte dos requisitos necessários para a obtenção do
título de Doutor em Física.*

ORIENTADOR: *Prof. Dr. Wesley Bueno Cardoso*
COORIENTADOR: *Prof. Dr. Ardiley Torres Avelar*

GOIÂNIA

2018

Ficha de identificação da obra elaborada pelo autor, através do Programa de Geração Automática do Sistema de Bibliotecas da UFG.

Calaça Alves, Luciano

Estudo de Soluções Localizadas na Equação Não Linear de Schrödinger Logarítmica, Saturada e com Efeitos de Altas Ordens [manuscrito] / Luciano Calaça Alves. - 2018.

55, iv f.: il.

Orientador: Prof. Dr. Wesley Bueno Cardoso; co-orientador Dr. Ardiley Torres Avelar.

Tese (Doutorado) - Universidade Federal de Goiás, Instituto de Física (IF), Programa de Pós-Graduação em Física, Goiânia, 2018.

Bibliografia.

Inclui lista de figuras.

1. Equação Não Linear de Schrödinger. 2. Sólitons . 3. Não Linearidade. 4. Instabilidade Modulacional. I. Bueno Cardoso, Wesley, orient. II. Título.

CDU 53



Universidade Federal de Goiás
Instituto de Física
Programa de Pós-Graduação em Física

Ata Nº 37 de defesa de tese de
Luciano Calaça Alves para
obtenção do título de Doutor em
Física.

Aos 07 dias do mês de junho de 2018, às 14h00min, no Miniauditório do Instituto de Física da UFG, reuniu-se a Banca Examinadora designada pela Coordenadoria do Programa de Pós-Graduação em Física, composta pelo **Prof. Dr. Wesley Bueno Cardoso** (orientador e presidente da Banca – IF/UFG), **Prof. Dr. Dionisio Bazeia Filho** (CCEN/UFPB), **Prof. Dr. Clodoaldo Valverde** (UNUCET/UEG), **Prof. Dr. Ricardo Costa de Santana** (IF/UFG) e **Prof. Dr. Lauro June Queiroz Maia** (IF/UFG) para julgar a tese de doutorado de **Luciano Calaça Alves**, intitulada: “**Estudo de soluções localizadas na equação não linear de Schrödinger logarítmica, saturada e com efeitos de altas ordens**”. O Presidente abriu os trabalhos agradecendo a presença dos membros da Banca Examinadora e concedeu a palavra a **Luciano Calaça Alves**, que expôs detalhadamente seu trabalho. Em seguida, os membros da Banca fizeram suas considerações e procederam à arguição do candidato. Concluída essa etapa, a Banca, em sessão fechada, deu prosseguimento ao julgamento do trabalho, atribuindo os seguintes conceitos:

Prof. Dr. Wesley Bueno Cardoso (orientador)

APROVADO

Prof. Dr. Dionisio Bazeia Filho (CCEN/UFPB)

APROVADO

Prof. Dr. Clodoaldo Valverde (UNUCET/UEG)

APROVADO

Prof. Dr. Ricardo Costa de Santana (IF/UFG)

APROVADO

Prof. Dr. Lauro June Queiroz Maia (IF/UFG)

APROVADO

Novamente em sessão aberta, o presidente da Banca anunciou o resultado final do julgamento, declarando o candidato **Luciano Calaça Alves** APROVADO pela Banca Examinadora. Nada mais havendo a tratar, a sessão foi encerrada e lavrou-se a presente ata que segue assinada pelos membros da Banca Examinadora.

Goiânia, 07 de junho de 2018.

Wesley B. Cardoso

Prof. Dr. Wesley B. Cardoso

Dionisio B. Filho
Prof. Dr. Dionisio B. Filho

Clodoaldo Valverde
Prof. Dr. Clodoaldo Valverde

Ricardo Costa de Santana

Prof. Dr. Ricardo C. de Santana

Lauro J. Q. Maia
Prof. Dr. Lauro J. Q. Maia

Aos meus pais, José e Cleonice, e à vó Lurdes.

Agradecimentos

- Ao Prof. Dr. Wesley Bueno Cardoso pela orientação, paciência, amizade e por transmitir de maneira clara e concisa todo conhecimento e sabedoria;
- Ao Prof. Dr. Ardiley Torres Avelar pela amizade e por todas contribuições e discussões sobre o tema;
- Aos colaboradores desse trabalho;
- Ao Instituto de Física da UFG e todos os professores;
- A Deus, que me deu força e saúde em minha vida;
- Aos meus pais, José e Cleonice, por todo amor e dedicação;
- À minha “vó” Lurdes e aos meus irmãos Lucas e Luan;
- À minha esposa Giullia, pelo amor, paciência e companheirismo;
- Aos amigos Luizmar Adriano, Harley Rodrigues e Kelly Fernandes, pela amizade, apoio e pelas horas de estudo.
- Agradeço também aos amigos Sebastião Mendanha, Marcus Carrião, Guilherme Colherinhas por todas as discussões e momentos de descontração;
- Ao Instituto Federal de Goiás, Campus Aparecida de Goiânia, e todos colegas de trabalho;

O presente trabalho foi realizado com apoio da Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de Goiás (FAPEG), do Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq) e da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES).

Sumário

Lista de Figuras	i
1 Introdução	1
2 Modulação de soluções localizadas: Equação Logarítmica de Schrödinger	6
2.1 Modelo Teórico	8
2.2 Resultados Analíticos	12
2.2.1 Potencial Nulo	12
2.2.2 Potencial Linear	12
2.2.3 Potencial Quadrático	14
2.2.4 Potencial Misto	15
2.3 Análise de Estabilidade	17
3 Modulação de Soluções Localizadas: Equação Não Linear de Schrödinger Saturada	20
3.1 Modelo Teórico	21
3.2 Aproximação Variacional	23
3.3 Resultados Analíticos e Numéricos	24
3.3.1 Considerações Analíticas	24
3.3.2 Análise da Estabilidade Linear	27
3.3.3 Simulações Numéricas Diretas	29
4 Modulação de Soluções Localizadas: Equação Não Linear de Schrödinger de Altas Ordens (Efeito Raman)	32
4.1 Modelo Teórico	34
4.2 Instabilidade Modulacional	35
4.3 Simulações Numéricas	36
4.3.1 Potencial Nulo	37
4.3.2 Potencial Linear	38
4.3.3 Potencial Quadrático	40
5 Considerações Finais e Perspectivas	43
Referências Bibliográficas	46

Lista de Figuras

2.1	Solução para o caso do potencial nulo. Consideramos $G = -1$ e $\mu = -G$	13
2.2	(a) Coeficiente linear (Potencial) e (b) Solução modulada para o potencial linear. Consideramos $G = -1, \mu = -G$ e $\omega = \sqrt{2}$	14
2.3	Coeficiente linear (Potencial) e (b) Solução modulada para o potencial quadrático. Consideramos $G = -1, \mu = -G$ e $\omega = 1$	15
2.4	Coeficiente linear (Potencial) e (b) Solução modulada para o potencial misto. Consideramos $G = -1, \mu = -G$ e $\omega_2 = 2\omega_1 = 1$	16
2.5	Perfil da solução do caso do potencial linear (a) no plano $x - t$ e (b) comparação entre a solução de entrada (linha escura) e saída (linha cinza) na direção x . O estado de entrada é tomado em $t = 0$ enquanto o de saída é em $t = 1000$. Note em (b) para este valor final de t observado, a entrada e a saída possuem o mesmo perfil com os picos em diferentes posições devido às oscilações na solução modulada. Isto implica na estabilidade da solução, pelo menos até o valor observado de t	18
2.6	Perfil da solução do caso do potencial quadrático (a) no plano $x - t$ e (b) comparação entre a solução de entrada (linha escura) e saída (linha cinza) na direção x . O estado de entrada é tomado em $t = 0$ enquanto o de saída é em $t = 1000$. Note em (b) que a entrada e a saída possuem diferentes picos de amplitude devido a oscilações na solução modulada.	19
2.7	Perfil da solução do caso com potencial misto (a) no plano $x - t$ e (b) comparação entre a solução de entrada (linha escura) e saída (linha cinza) na direção x . O estado de entrada é tomado em $t = 0$ enquanto o de saída é em $t = 20$. Note que neste caso a modulação induz a um comportamento instável.	19
3.1	Perfil da solução $ \psi ^2$ como função das coordenadas x e t para o caso do potencial nulo. Usamos os valores dos parâmetros $G = -1, \Gamma = 0.1$ e $\mu = -1$	25
3.2	Perfil da solução $ \psi ^2$ como função das coordenadas x e t para o caso do potencial linear na coordenada x e oscilatório na coordenada t , para $G = -1, \Gamma = 0.1, \omega = 1$ e $\mu = -1$	26
3.3	Perfil da solução $ \psi ^2$ como função das coordenadas x e t para o caso do potencial quadrático na coordenada x e oscilatório na coordenada t , para $G = -1, \Gamma = 0.1, \sigma = 0.25, \omega = 1$ e $\mu = -1$	26
3.4	Perfil da solução $ \psi ^2$ como função das coordenadas x e t para o caso do potencial misto (quadrático e linear na coordenada x e oscilatório na coordenada t), para $G = -1, \Gamma = 0.1, \sigma = 0.25, \omega = 1$ e $\mu = -1$	27

3.5	Máximo da parte real do autovalor λ ($\max[\text{Re}(\lambda)]$) em função da constante de propagação μ obtido a partir do espectro de estabilidade para a onda solitária dada por Eq. (3.20) através do problema da estabilidade linear do autovalor Eq. (3.31) da equação autônoma Eq. (3.2) para três diferentes valores dos parâmetros de saturação, $\Gamma = 0.05$ em círculos (amarelo), $\Gamma = 0.1$ em quadrados (vermelho) e $\Gamma = 0.15$ em triângulos (azul). Aqui também consideramos $G = -1$ em todos os casos.	29
3.6	(a) Amplitude máxima (h_{max}) e (b) largura média ($\langle x^2 \rangle$) em função do tempo de propagação para o potencial linear dado pela Eq. (3.28). Usamos linhas pretas para $\omega = 0.5$, linhas verdes para $\omega = 1.0$ e linhas laranjas para $\omega = 2.0$. Os outros parâmetros são $G = -1$, $\Gamma = 0.1$ e $\mu = -0.1$	30
3.7	(a) Amplitude máxima (h_{max}) e (b) largura média ($\langle x^2 \rangle$) em função do tempo de propagação para o potencial quadrático, dado pela Eq. (3.29). Usamos linhas pretas para $\omega = 0.5$, linhas verdes para $\omega = 1.0$ e linhas laranjas para $\omega = 2.0$. Os outros parâmetros são $G = -1$, $\Gamma = 0.1$, $\sigma = 0.25$ e $\mu = -0.1$	31
3.8	(a) Amplitude máxima (h_{max}) e (b) largura média ($\langle x^2 \rangle$) em função do tempo de propagação para o potencial misto (3.30). Usamos linhas pretas para $\omega = 0.5$, linhas verdes para $\omega = 1.0$ e linhas laranjas para $\omega = 2.0$. Os outros parâmetros são $G = -1$, $\Gamma = 0.1$, $\sigma = 0.25$ e $\mu = -0.1$	31
4.1	Ganho da IM dada pela parte imaginária de Ω . Em (a) apresentamos a parte $\text{Im}[\Omega]$ considerando $A = 1$ e $G = -1$ com $\beta = 0$ na linha sólida (verde), $\beta = 0.3$ na linha tracejada (cinza) e $\beta = 0.5$ com traço ponto (preto). Em (b) é apresentado o perfil de $\text{Im}[\Omega]$ para diferentes valores de K e G , considerando $A = 1$ e $\beta = 0.1$	37
4.2	Evolução dinâmica de $ \psi ^2$ para o potencial nulo e considerando o estado inicial de Φ dado pela Eq. (4.20) em $z = 0$. Os parâmetros usados são (a) $\beta = 0$ e (b) $\beta = 0.3$	37
4.3	Evolução dinâmica de $ \psi ^2$ para o potencial linear $V = \sin(\omega z)x$ com $\omega = 1$. Os parâmetros usados são (a) $\beta = 0$ e (b) $\beta = 0.3$	39
4.4	Evolução dinâmica de $ \psi ^2$ para o potencial linear $V = \sin(\omega z)x$ com $\omega = 2$. Os parâmetros usados são (a) $\beta = 0$ e (b) $\beta = 0.3$	39
4.5	Evolução dinâmica de $ \psi ^2$ para o potencial quadrático dado pela Eq. (4.25) com $\omega = 1$, $\sigma = 1/4$ e (a) $\beta = 0$ ou (b) $\beta = 0.3$	40
4.6	Evolução dinâmica de $ \psi ^2$ para o potencial quadrático dado pela Eq. (4.25) com $\omega = 2$, $\sigma = 1/4$ e (a) $\beta = 0$ ou (b) $\beta = 0.3$	40
4.7	Evolução dinâmica de $ \psi ^2$ para o potencial quadrático dado pela Eq. (4.25) com $\omega = 1$, $\sigma = 1/8$ e (a) $\beta = 0$ ou (b) $\beta = 0.3$	41

Resumo

Este trabalho apresenta o estudo de soluções de ondas solitárias, conhecidas como sólitons, em meios não lineares e não homogêneos por meio de equações não lineares de Schrödinger. São estudados três casos: primeiro considerando um termo não linear do tipo logarítmico; segundo com efeito de saturação e por último incluindo efeitos de altas ordens (espalhamento Raman). As soluções são moduladas por três tipos diferentes de potencial. O primeiro, linear na coordenada espacial e oscilatório na coordenada temporal. O segundo, quadrático na coordenada espacial e oscilatório na temporal. Por fim, modula-se também utilizando um potencial misto, que é a junção dos dois potenciais apresentados anteriormente. Depois de incluir heterogeneidades nos coeficientes lineares e não lineares, é utilizada a técnica da transformação de similaridade para converter a equação não linear, não autônoma em uma autônoma que será resolvida analiticamente. Esse campo de estudo tem potenciais aplicações em cristais, fibras ópticas e em condensados de Bose-Einstein, servindo também para o entendimento dos fundamentos relacionados a esse estado da matéria. A estabilidade das soluções são checadas por meio de simulações numéricas.

Abstract

This work presents the study of solitary wave solutions, known as solitons, in non-linear and non-homogeneous media using non-linear Schrödinger equations. Three cases are studied: first considering a logarithmic nonlinear term; second with saturation effect and finally including effects of high orders (Raman scattering). Solutions are modulated by three different types of potential. First, linear in the spatial and oscillatory coordinate in the temporal coordinate. The second, quadratic in the spatial and oscillatory in the temporal coordinates. Finally, it is also modulated using a mixed potential, which is the junction of the two potentials presented above. After including inhomogeneities in linear and nonlinear coefficients, the similarity transformation technique is used to convert the non-linear, non-autonomous equation into an autonomous one that will be solved analytically. This field of study has potential applications in crystals, optical fibers and in Bose-Einstein condensates, also serving to understand the fundamentals related to this state of matter. The stability of the solutions are checked by numerical simulations.

Capítulo 1

Introdução

As ondas solitárias foram inicialmente observados pelo engenheiro escocês James Scott Russell em 1834, no Canal da União em Edimburgo, Escócia. Russell realizava experimentos com o objetivo de determinar o design mais eficiente para barcos e em uma de suas observações constatou que o movimento de um destes barcos, ao ser puxado por cavalos e freado abruptamente, gerou uma onda que continuava seu movimento mantendo sua forma e velocidade por um longo trecho. Esse fenômeno, chamado por Russell de Onda de Translação, foi reproduzido em uma série de experimentos utilizando um tanque com água e sua descrição foi publicada em 1844 [1]. Contudo, o conhecimento científico sobre as ondas lineares na água não conseguia explicar esta observação o que acabou intrigando os cientistas na época. Realizando análises teóricas detalhadas em 1895, Diederik Korteweg e Gustav de Vries conseguiram explicar os experimentos de Russell por meio de uma equação diferencial parcial e não linear. Esta equação, que descreve soluções de ondas solitárias na água, ficou conhecida como equação de Korteweg-de-Vries (KdV). Desta forma, verificaram que quando há um perfeito balanço entre os efeitos de dispersão e os efeitos não lineares, pode se formar uma onda solitária, que se move sem se alterar [2].

O termo sóliton foi criado em 1965 por Zabusky e Krushal para descrever uma classe de soluções localizadas de equações de onda, com domínio espacial ou temporal (ou ambos), que se propagam sem mudar a sua forma e velocidade devido a um perfeito equilíbrio entre os efeitos não lineares e dispersivos no sistema. Em suas palavras, sólitons “passam” um

pelo outro sem perder sua identidade [3]. Desta forma, eles podem interagir com outros sólitons e emergir de uma colisão sem sofrer qualquer mudança, exceto em alguns casos por uma mudança de fase. Existem diversos tipos de sólitons mas geralmente são classificados em brilhantes, cinzas e escuros [4].

Desde a primeira observação feita por Russel, diversos outros sistemas mostraram-se propensos a desenvolver esse mesmo fenômeno e permitir a formação de sólitons. Na década de 70, estudos em sistemas moleculares descreveram excitações coletivas, correspondentes a excitações intramoleculares, em cadeias unidimensionais de moléculas com ligações fracas. Foi apresentado na Ref. [5] que essas excitações se comportam como sólitons propagando-se junto com a deformação local ao longo da cadeia e que a velocidade limite dos sólitons, neste caso, é a velocidade das ondas sonoras correspondentes às vibrações longitudinais das moléculas. Nesse mesmo contexto, foi apresentado na Ref. [6] que os sólitons se comportam como excelentes portadores da energia de hidrólise das moléculas de ATP (adenosina trifosfato), responsável por diversos processos celulares.

Além disso, a formação de sólitons já foi verificada em fibras de cristais fotônicos [7], em fibras de vidro não lineares [8], em um Condensado de Bose-Einstein [9], em sistemas magnéticos [10], em cadeias de DNA [11], em guias de ondas de semicondutores [12], dentre outros. Como exemplo, na Ref. [13] foi demonstrado teórica e experimentalmente a formação de sólitons em um circuito LC não linear agrupado.

A presença de sólitons nesses meios não lineares podem ser descritos através de uma equação diferencial característica para cada meio. Por exemplo, a propagação de um pulso óptico em uma fibra de vidro não linear pode ser descrita através das equações de Maxwell cujo desenvolvimento é apresentado na Ref. [14]. Essas equações diferenciais são do tipo Equação Não Linear de Schrödinger (ENLS). Uma ENLS generalizada, em sua forma unidimensional e simplificada na presença de um potencial de modulação, pode ser representada por

$$i\hbar\psi_t + \frac{\hbar^2}{2m}\psi_{xx} + V(x,t)\psi + F(|\psi|^2)\psi = 0, \quad (1.1)$$

em que $\psi = \psi(x, t)$, com ψ_t sendo a forma compacta da derivada parcial $\partial\psi/\partial t$ e de maneira análoga temos que $\psi_{xx} \equiv \partial^2\psi/\partial^2x$. A função $V(x, t)$ representa o potencial de modulação (coeficiente linear) do sistema e a função $F(|\psi|^2)$ representa o comportamento não linear da equação e depende das características do meio onde o sóliton será formado. Existem vários tipos de não linearidades da função $F(s)$ conhecidas até hoje e para o caso padrão o termo não linear é $F(s) = s$, conhecida como não linearidade do tipo Kerr ou não linearidade cúbica. Desta forma, a ENLS padrão para o campo $\psi(x, t)$, reescalada para coordenadas adimensionais e livre de potenciais de aprisionamento, é dada por

$$i\psi_t + \frac{1}{2}\psi_{xx} + |\psi|^2\psi = 0. \quad (1.2)$$

Esta equação é completamente integrável pelo método da transformada do espalhamento inverso. Uma característica das soluções obtidas por este método é a existência de sólitons contendo infinitas leis de conservação. De maneira geral, para a ENLS apresentada na Eq. (1.1), somente três dessas quantidades conservadas possuem significado físico e podem ser escritas como

$$P = \int_{-\infty}^{\infty} |\psi|^2 dx, \quad (1.3)$$

$$M = i \int_{-\infty}^{\infty} (\psi^* \psi_x - \psi \psi_x^*) dx, \quad (1.4)$$

$$E = \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{2} |\psi_x|^2 + V |\psi|^2 - f(|\psi|^2) \right) dx, \quad (1.5)$$

conhecidas como norma (ou potência), momento linear e energia, respectivamente, onde a função f é definida por $f(|\psi|^2) = \int_0^{|\psi|^2} F(s) d(s)$ [15, 16].

No entanto a maioria dos sistemas físicos são não integráveis e revelam que a dinâmica das soluções em tais sistemas podem ser muito mais ricas e muito mais complexas. A quebra da integrabilidade pode ocorrer com a inclusão de coeficientes não homogêneos, diferentes formas de não linearidades, e/ou termos de altas ordens na Eq. (1.1). Coeficientes não homogêneos na ENLS podem ser experimentalmente implementados em condensados de Bose-Einstein usando a ressonância de Feshbach [17, 18], para controlar as não linearidades, além dos potenciais magnético ópticos externos controlando os termos lineares. Em

fibras ópticas, este controle pode ser feito por mudanças em sua geometria e/ou sua não homogeneidade devido a diferenças nos elementos de fabricação [19]. Desta forma, a ENLS cúbica pode ser representada por

$$i\psi_t + \frac{1}{2}\psi_{xx} + V(x,t)\psi + g(x,t)|\psi|^2\psi = 0, \quad (1.6)$$

no qual $V(x,t)$ e $g(x,t)$ são os coeficientes linear e não linear, respectivamente, dependentes tanto das coordenadas temporais quanto das espaciais. Soluções explícitas não triviais construídas através de transformações de similaridade para a Eq. (1.6) foi apresentada na Ref. [20]. Em um contexto semelhante, nas Refs. [21–25] foi considerado um cenário de interação entre sólitons não autônomos para modelos de ENLS generalizada com dispersão, não linearidade, dissipação ou ganhos variáveis.

A presença de soluções solitônicas analíticas com dependência espaço-temporal nos coeficientes linear (potencial) e não linear em ENLSs com diferentes não linearidades vem sendo bastante estudada nos últimos anos tendo em vista sua potencial aplicabilidade na modulação de soluções localizadas. Dentre essas ENLSs, soluções analíticas também foram estudadas considerando alguns casos como o cúbico [26–34], quadrático-cúbico [35], cúbica-quintica [36–45], quintica [46, 47], generalizada [48–51], acoplada [52–57] e de altas ordens [58].

No presente trabalho estudamos conjuntos de soluções da ENLS para três tipos de não linearidades e diferentes configurações para o potencial de modulação do sistema. Incluímos inomogeneidades nos coeficientes lineares e não lineares e através de um *ansatz* apropriado onde utilizaremos uma transformação de similaridade para converter as equações não autônomas (dependência explícita das coordenadas espaciais e/ou temporais) em autônomas, que resolveremos analiticamente. Esse método nos permite escrever os coeficientes linear e não linear, além das variáveis que descrevem a propagação e o perfil das soluções em função dos mesmos parâmetros. Esses parâmetros são definidos de tal forma que conseguimos construir em todos os casos soluções moduladas com um potencial nulo,

um potencial linear na coordenada espacial e com comportamento oscilatório na coordenada temporal e um potencial quadrático no espaço e oscilatório no tempo. Além disso, em alguns casos, iremos utilizar uma modulação com potencial misto, que seria a junção do caso linear e o quadrático. Serão calculadas algumas das quantidades conservadas como a norma e a energia para demonstrar a estabilidade das soluções.

Inicialmente no Capítulo 2, apresentaremos a Equação Logarítmica Não Linear de Schrödinger (ELNLS) com coeficientes dependentes das variáveis espaçotemporais e investigaremos a presença e a estabilidade de soluções analíticas localizadas. No Capítulo 3, iremos abordar o caso de um meio não linear e não homogêneo, onde apresentaremos uma Equação Não Linear de Schrödinger com não linearidade saturada ou simplesmente “Equação Não Linear de Schrödinger Saturada” (ENLSS) com coeficientes variáveis onde construiremos soluções localizadas da equação autônoma através de uma aproximação variacional. Já no Capítulo 4, iremos estudar a influência do espalhamento Raman sobre o ganho da Instabilidade Modulacional (IM) em um meio não linear inhomogêneo. Para isso consideramos uma ENLS com efeitos de altas ordens e confirmamos nossos resultados analíticos exibindo os padrões de instabilidade modulacional calculados por simulações numéricas. No Capítulo 5 apresentamos nossos comentários finais, conclusões e perspectivas.

Capítulo 2

Modulação de soluções localizadas: Equação Logarítmica de Schrödinger

Um sistema físico formado por dois subsistemas não interagentes, pode ser representado por

$$\psi(r, t) = \psi_1(r_1, t) + \psi_2(r_2, t), \quad (2.1)$$

com $r = r_1 + r_2$. O regime estritamente linear da Equação de Schrödinger ($F(|\psi|^2) = 0$), admite como solução para essa equação de onda, além de $\psi(r, t)$, o produto das soluções dos subsistemas $\psi_1(r_1, t)\psi_2(r_2, t)$. Em 1976, Bialynicki-Birula e Mycielsk, propuseram uma equação não linear que poderia ser utilizada para quantificar desvios desse regime estritamente linear e que preservaria, em qualquer número de dimensões, alguns aspectos fundamentais da mecânica quântica como separabilidade e aditividade da energia total desses subsistemas não interagentes. Em resumo, eles procuravam uma equação não linear que também admitisse como solução o produto de duas soluções arbitrárias para equações não lineares dos subsistemas. Considerando $\psi_1 = \psi_1(r_1, t)$, $\psi_2 = \psi_2(r_2, t)$, $\psi(r, t) = \psi = \psi_1\psi_2$ e aplicando na Eq.(1.1), temos

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t}(\psi_1) = \left[-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + V_1 + F_1(|\psi_1|^2) \right] \psi_1, \quad (2.2)$$

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t}(\psi_2) = \left[-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + V_2 + F_2(|\psi_2|^2) \right] \psi_2, \quad (2.3)$$

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t}(\psi_1\psi_2) = \left[-\frac{\hbar^2}{2m} \left(\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} \right) + V_{12} + F_{12}(|\psi_1\psi_2|^2) \right] \psi_1\psi_2. \quad (2.4)$$

Podemos multiplicar a Eq. (2.2) por ψ_2 e a Eq. (2.3) por ψ_1 , somar esses dois termos e então comparar com a Eq. (2.4). Considerando $V_{12} = V_1 + V_2$, chegamos à seguinte condição:

$$F_1(|\psi_1|^2) + F_2(|\psi_2|^2) = F_{12}(|\psi_1\psi_2|^2) \quad (2.5)$$

Dessa forma, verificamos que uma das funções que satisfazem essa condição é do tipo logarítmica. O termo não linear da equação é escrito como $F(|\psi|^2) = g \ln(|\psi|^2)$, onde g é o coeficiente não linear que para esse caso, deveria ser uma constante real com dimensão de energia [59]. Essa equação ficou conhecida como Equação Logarítmica Não Linear Schrödinger (ELNLS) e na ausência de potenciais externos tem a forma

$$i\hbar\psi_t = -\frac{\hbar^2}{2m}\psi_{xx} + g\psi \ln(|\psi|^2), \quad (2.6)$$

e admite soluções analíticas dadas por pacotes de onda gaussianas estáveis, conhecidas como Gaussons, que será demonstrado posteriormente.

A ELNLS tem sido empregada para modelar o comportamento não linear em diversos cenários distintos na física e em outras áreas da ciência não linear. Além de aparecer em óptica [60–62], a LSE aparece também, por exemplo, em sistemas dissipativos [63], em física nuclear [64], fluidos capilares [65], e até mesmo em transporte de magma [66]. Nas aplicações mencionadas acima, geralmente se concentram em uma ELNLS apresentando coeficiente não linear constante. No entanto, em um cenário mais interessante e realista, o parâmetro não linear, que caracteriza os sistemas físicos, pode depender do espaço e/ou tempo, o que conduz a soluções que estão sujeitas a modulações espaciais e/ou temporais. Foram apresentados estudos analíticos da dinâmica de Gaussons com perturbações dependentes do tempo nas Refs. [67–69], onde foi apresentado na Ref. [70] que em alguns casos, a interação de Gaussons podem exibir fenômenos de dispersão fractal. A presença da dependência espacial explícita no termo não linear da ELNLS abre interessantes perspectivas não só no ponto de vista teórico, para investigação de equações não lineares não uniformes, mas

também do ponto de vista experimental, para o estudo das propriedades físicas de sistemas. Motivado por isso, no presente capítulo, investigaremos, soluções solitônicas explícitas para a ELNLS não uniforme.

2.1 Modelo Teórico

O modelo que descreve o comportamento não linear de uma ELNLS, já reduzida para o caso unidimensional e reescaladas para coordenadas adimensionais, é representado por,

$$i\psi_t = -\psi_{xx} + V(x, t)\psi + g(t)\psi \ln(|\psi|^2), \quad (2.7)$$

em que $\psi = \psi(x, t)$ com $\psi_t \equiv \partial\psi/\partial t$ e $\psi_{xx} \equiv \partial^2\psi/\partial^2x$. $V(x, t)$ e $g(t)$ são os coeficientes linear e não linear respectivamente. Nosso objetivo é transformar a Eq.(2.7) não autônoma para uma ELNLS autônoma dada por

$$i\Phi_\tau = -\Phi_{\zeta\zeta} + G\Phi \ln(|\Phi|^2), \quad (2.8)$$

em que G é uma constante real. Deste modo, utilizamos uma transformação de similaridade, aplicando o seguinte *ansatz*

$$\psi = \rho(t) \exp(i\eta(x, t))\Phi[\zeta(x, t), \tau(t)], \quad (2.9)$$

que leva em conta a separação em coordenadas polares da parte real e imaginária da solução.

A partir de Eq. (2.9) obtemos as seguintes equações

$$\psi_t = \rho_t e^{i\eta}\Phi + i\rho\eta_t e^{i\eta}\Phi + \rho e^{i\eta}(\Phi_\zeta\zeta_t + \Phi_\tau\tau_t), \quad (2.10)$$

$$\psi_x = i\rho\eta_x e^{i\eta}\Phi + \rho e^{i\eta}\Phi_\zeta\zeta_x, \quad (2.11)$$

$$\psi_{xx} = i(\rho\eta_{xx}e^{i\eta}\Phi + 2\rho\eta_x e^{i\eta}\Phi_\zeta\zeta_x) - \rho\eta_x^2 e^{i\eta}\Phi + \rho e^{i\eta}(\Phi_{\zeta\zeta}\zeta_x^2 + \Phi_\zeta\zeta_{xx}), \quad (2.12)$$

$$\ln(|\psi|^2) = 2 \ln \rho + \ln(|\Phi|^2). \quad (2.13)$$

Substituindo as Eqs. (2.9-2.13) na Eq. (2.7) temos

$$\begin{aligned} i\rho_t\Phi - \rho\eta_t\Phi + i\rho(\Phi_\zeta\zeta_t + \Phi_\tau\tau_t) &= -i(\rho\eta_{xx}\Phi + 2\rho\eta_x\zeta_x\Phi_\zeta) \\ + \rho\eta_x^2\Phi - \rho(\Phi_{\zeta\zeta}\zeta_x^2 + \Phi_\zeta\zeta_{xx}) + V\rho\Phi + g\rho[2\ln\rho + \ln(|\Phi|^2)]\Phi. \end{aligned} \quad (2.14)$$

Note que o termo $e^{i\eta}$ era comum a todos os termos e foi simplificado. Reorganizando os termos, separando as partes reais e imaginárias e dividindo os dois lados da equação por $(\rho\tau_t)$ temos

$$\begin{aligned} i\left[\frac{1}{\tau_t}\left(\frac{\rho_t}{\rho} + \eta_{xx}\right)\Phi + \frac{1}{\tau_t}(\zeta_t + 2\eta_x\zeta_x)\Phi_\zeta + \Phi_\tau\right] &= -\frac{\zeta_x^2}{\tau_t}\Phi_{\zeta\zeta} - \frac{\zeta_{xx}}{\tau_t}\Phi_\zeta \\ + \frac{1}{\tau_t}[\eta_t + \eta_x^2 + V + 2g\ln\rho]\Phi + \frac{g}{\tau_t}\ln(|\Phi|^2)\Phi, \end{aligned} \quad (2.15)$$

comparando cada termo com a Eq.(2.8) chegamos às seguintes equações condicionais:

$$\frac{\rho_t}{\rho} + \eta_{xx} = 0, \quad (2.16)$$

$$\zeta_t + 2\eta_x\zeta_x = 0, \quad (2.17)$$

$$\zeta_{xx} = 0, \quad (2.18)$$

$$\eta_t + \eta_x^2 + V + 2g\ln\rho = 0, \quad (2.19)$$

$$\zeta_x^2 = \tau_t, \quad (2.20)$$

$$\frac{g}{\tau_t} = G. \quad (2.21)$$

A partir da Eq.(2.18) podemos considerar que $\zeta = a(t)x + b(t)$, com $\zeta_x = a(t)$ e $\zeta_t = a_t x + b_t$.

Esta forma de ζ é interessante pois conseguimos determinar a largura das soluções localizadas por $1/a(t)$ e a posição do centro de massa dado por $-b(t)/a(t)$ e assim, $a(t) \neq 0$.

Substituindo estes termos na Eq. (2.17) temos

$$\eta_x = \frac{-a_t x - b_t}{2a}, \quad (2.22)$$

derivando em relação a x , obtemos

$$\eta_{xx} = -\frac{a_t}{2a}, \quad (2.23)$$

e a fase do *ansatz* como

$$\eta = -\frac{a_t}{4a}x^2 - \frac{b_t}{2a}x + c(t), \quad (2.24)$$

onde $c(t)$ foi introduzida após a integração. Em seguida, substituímos a equação Eq. (2.23) na Eq. (2.16) e concluímos que

$$\frac{\rho_t}{\rho} = \frac{a_t}{2a} \Rightarrow \ln \rho = \frac{1}{2} \ln a \Rightarrow \rho = \sqrt{a}. \quad (2.25)$$

Consequentemente da Eq. (2.20) obtemos

$$\tau = \int a^2 dt. \quad (2.26)$$

Agora temos todos os detalhes requeridos para reescrever os coeficientes linear e não linear a partir dos coeficientes $a(t)$, $b(t)$ e $c(t)$. Desta forma as Eqs. (2.19) e (2.21) podem ser reescritas como

$$V = f_1(t)x^2 + f_2(t)x + f_3(t) \quad (2.27)$$

e

$$g = Ga^2, \quad (2.28)$$

em que

$$f_1 = \frac{a_{tt}}{4a} - \frac{a_t^2}{2a^2}, \quad (2.29)$$

$$f_2 = \frac{b_{tt}}{2a} - \frac{a_t b_t}{a^2}, \quad (2.30)$$

$$f_3 = -c_t - \frac{b_t^2}{4a^2} - Ga^2 \ln a. \quad (2.31)$$

Observe que, desta forma, o coeficiente linear poderá ser no máximo quadrático na coordenada x , enquanto que na coordenada de propagação t , poderá assumir um comportamento mais geral definido pelo sistema físico em questão e diretamente relacionado às formas dos coeficientes $a(t)$, $b(t)$ e $c(t)$.

O próximo passo é escrever uma solução explícita para a Eq. (2.8). Consideramos

$$\Phi = \phi(\zeta)e^{(-i\mu\tau)}, \quad (2.32)$$

com $\phi(\zeta)$ e μ reais, de tal forma que

$$\phi_{\zeta\zeta} = -\mu\phi + 2G\phi \ln(\phi), \quad (2.33)$$

que podemos resolver por integração direta. Para isso consideramos uma função arbitrária $K = K(\phi)$, escolhida de tal forma que

$$\frac{dK}{d\phi} = \phi_{\zeta\zeta}. \quad (2.34)$$

A partir da Eq.(2.33), a função $K(\phi)$ pode ser reescrita como

$$\begin{aligned} K &= \int (-\mu\phi + 2G\phi \ln(\phi)) d\phi, \\ &= \left(G \ln \phi - \frac{(\mu + G)}{2} \right) \phi^2. \end{aligned} \quad (2.35)$$

Também a partir da Eq.(2.33) temos

$$\frac{dK}{d\phi} = \frac{dK}{d\zeta} \frac{d\zeta}{d\phi} \Rightarrow \frac{dK}{d\zeta} = \frac{d\phi}{d\zeta} \frac{dK}{d\phi} \Rightarrow \frac{dK}{d\zeta} = \frac{d\phi}{d\zeta} \phi_{\zeta\zeta}, \quad (2.36)$$

que pode ser reescrito como

$$\frac{d}{d\zeta} K = \frac{1}{2} \frac{d}{d\zeta} (\phi_{\zeta})^2, \quad (2.37)$$

portanto

$$K = \frac{1}{2} (\phi_{\zeta})^2. \quad (2.38)$$

Igualando as Eqs.(2.35) e (2.38)

$$\frac{d\phi}{d\zeta} = \sqrt{2G\phi^2 \ln \phi - (\mu + G) \phi^2}, \quad (2.39)$$

que pode ser reescrito como

$$d\zeta = \frac{d\phi}{\sqrt{2G\phi^2 \ln \phi - (\mu + G) \phi^2}}, \quad (2.40)$$

integrando os dois lados da equação temos

$$\zeta = \frac{1}{G} \sqrt{2G \ln \phi - (\mu + G)}, \quad (2.41)$$

elevando os dois lados da equação ao quadrado e isolando o termo $\ln \phi$, obtemos

$$\ln \phi = \frac{1}{2G}(\zeta^2 G^2 + (\mu + G)). \quad (2.42)$$

Portanto a solução $\phi(\zeta)$ deve ser da forma

$$\phi = \exp \left[\frac{\mu + G}{2G} + \frac{G\zeta^2}{2} \right]. \quad (2.43)$$

Para obtermos uma solução localizada com o perfil de uma gaussiana, devemos considerar $G < 0$,

2.2 Resultados Analíticos

Vamos estudar exemplos específicos da modulação da solução localizada Eq. (2.9) no modelo descrito acima. Para isso, consideramos diferentes valores de modulação através de uma escolha apropriada das funções $a(t)$, que está associada à largura e amplitude da solução, $b(t)$ que está associada à posição e $c(t)$. Com o intuito de estudarmos somente os potenciais quadrático e linear em x , em todos os casos a seguir, $c(t)$ será escolhido de tal forma que $f_3 = 0$. Ou seja, $c(t)$ terá a forma

$$c(t) = \int dt \left(-\frac{b_t^2}{4a^2} - Ga^2 \ln a \right). \quad (2.44)$$

2.2.1 Potencial Nulo

Inicialmente iremos apresentar o caso onde não existe potencial de modulação $V(x, t) = 0$. Neste caso, para obtermos $f_1 = 0$ e $f_2 = 0$, consideramos $a(t) = 1$ e $b(t) = 0$. Considerando uma não linearidade auto focante consideramos $G = -1$ e definimos $\mu = -G$ para zerar o termo constante na fase da Eq. (2.43). O perfil desta solução $|\psi|^2$ é apresentado na Fig. 2.1, onde verificamos o perfil estático da solução.

2.2.2 Potencial Linear

Para gerar um potencial de modulação que assume um comportamento linear em x , consideramos $a(t) = 1$ para obtermos $f_1 = 0$ e consideramos $b(t) = -\sin(\omega t)$, assim

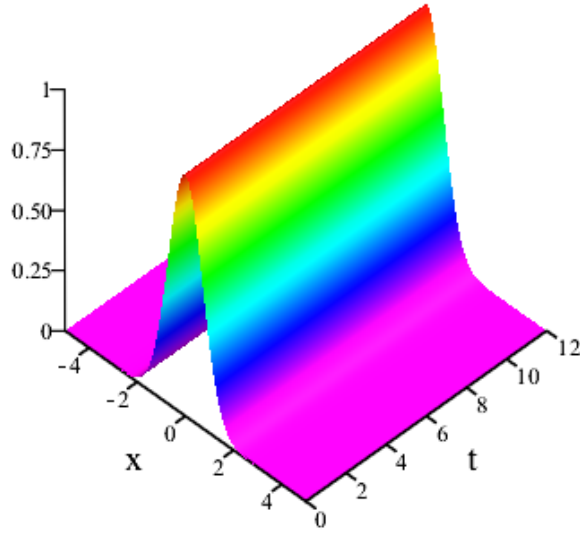


Figura 2.1: Solução para o caso do potencial nulo. Consideramos $G = -1$ e $\mu = -G$.

$f_2 = \frac{\omega^2}{2} \sin(\omega t)$ que gera uma modulação periódica em relação a coordenada t . Desta forma, o coeficiente linear, dado pela Eq. (2.27), pode ser representado por

$$V = \frac{\omega^2}{2} \sin(\omega t)x, \quad (2.45)$$

O comportamento deste potencial se assemelha a uma “gangorra”, como é mostrado na Fig.2.2a. O coeficiente não linear, dado pela Eq. (2.28), assume um valor constante dado por

$$g = Ga^2. \quad (2.46)$$

Note que neste caso $\zeta = x - \sin(\omega t)$ e $\tau = t$, onde consideramos a constante que surge da integração da Eq. (2.26) igual a zero. Também a amplitude e a fase do *ansatz* (Eq. (2.9)) são dados por $\rho = 1$ e

$$\eta = -\frac{\omega}{4}[2x - \omega \cos(\omega t)] \cos(\omega t), \quad (2.47)$$

respectivamente. Apresentamos na Fig.2.2b a intensidade do campo $|\psi|^2$, considerando $G = -1$ (não linearidade auto focante), $\mu = -G$, e $\omega = \sqrt{2}$. O potencial assume um comportamento de zigue-zague que modula a solução com um padrão oscilatório.

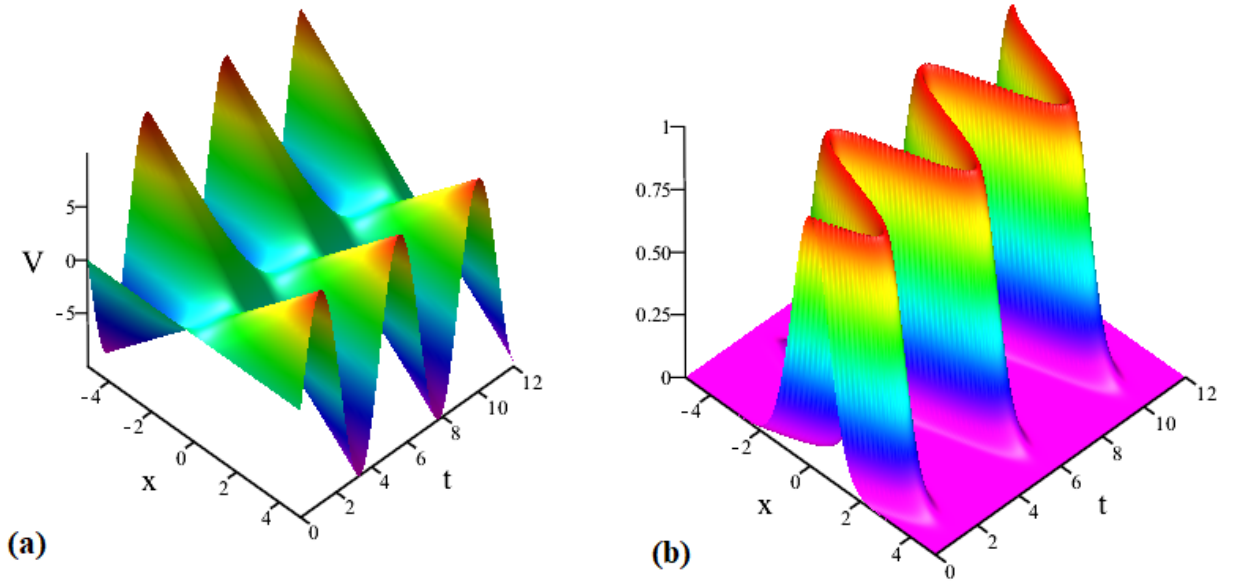


Figura 2.2: (a) Coeficiente linear (Potencial) e (b) Solução modulada para o potencial linear. Consideramos $G = -1$, $\mu = -G$ e $\omega = \sqrt{2}$.

2.2.3 Potencial Quadrático

Agora, consideramos um coeficiente não linear com uma amplitude oscilatória. Como exemplo, usamos $a = [1 + \cos^2(\omega t)]/2$ e $b = 0$. Neste caso, obtemos

$$\zeta = 0.5[1 + \cos^2(\omega t)]x, \quad (2.48)$$

$$\tau = \frac{[11 \cos(\omega t) + 2 \cos^3(\omega t)] \sin(\omega t) + 19\omega t}{32\omega}. \quad (2.49)$$

Adicionalmente temos

$$V = \frac{1 - 5 \cos^2(\omega t) + 2 \cos^4(\omega t)}{2[1 + \cos^2(\omega t)]^2} \omega^2 x^2, \quad (2.50)$$

$$g = \frac{G}{4} [1 + \cos^2(\omega t)]^2. \quad (2.51)$$

Deste modo, a amplitude e a fase da solução são dadas por

$$\rho = \sqrt{\frac{1 + \cos^2(\omega t)}{2}}, \quad (2.52)$$

$$\eta = \frac{\omega \cos(\omega t) \sin(\omega t)}{2[1 + \cos^2(\omega t)]} x^2 + \gamma \quad (2.53)$$

respectivamente, onde

$$\gamma = -\frac{1}{4} G [1 + \cos^2(\omega t)]^2 \ln \left[\frac{1 + \cos^2(\omega t)}{2} \right]. \quad (2.54)$$

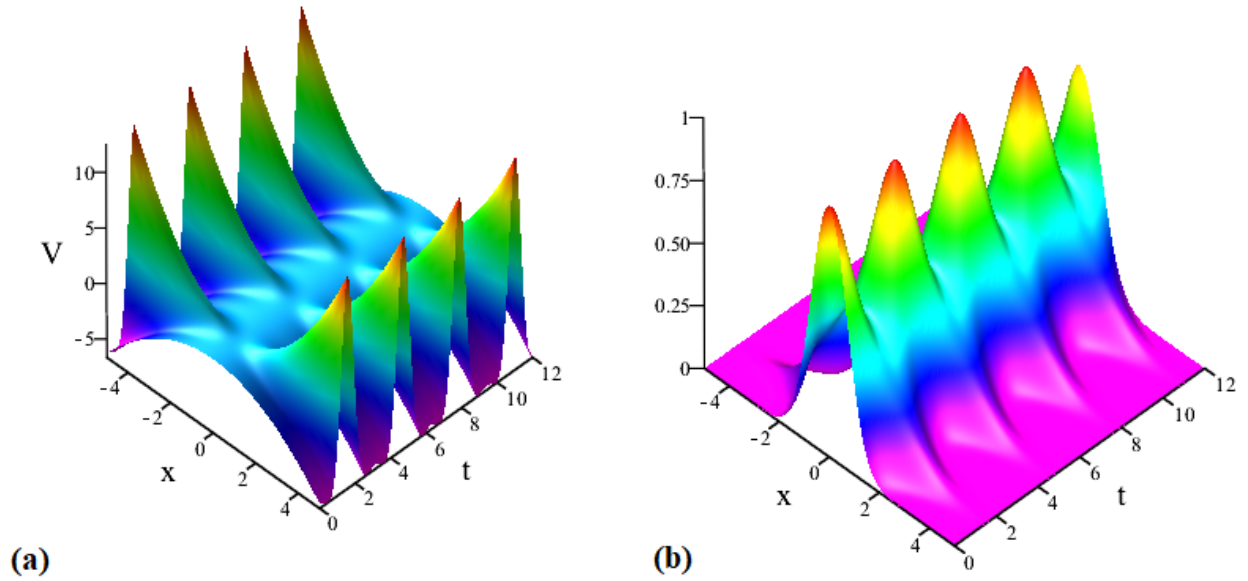


Figura 2.3: Coeficiente linear (Potencial) e (b) Solução modulada para o potencial quadrático. Consideramos $G = -1$, $\mu = -G$ e $\omega = 1$.

Isto nos permite encontrar uma nova solução analítica para ψ . Na Fig. 2.3a demonstramos que o potencial que assume um comportamento quadrático na coordenada x e periódico na coordenada t , modulando a solução com um padrão do tipo “breather”. *Breathers* são soluções de equações não lineares localizadas no espaço e periódicas no tempo. O perfil de $|\psi|^2$ é apresentado na Fig. 2.3b, ambos os casos considerando $G = -1$ (não linearidade auto focante), $\mu = -G$ e $\omega = 1$.

2.2.4 Potencial Misto

Outro exemplo pode ser introduzido considerando um potencial linear com uma combinação de termos lineares e quadráticos em x e uma modulação periódica em t . Para isso, consideramos $a = [1 + \cos^2(\omega_1 t)]/2$ e $b = -2 \sin(\omega_2 t)$. Estas escolhas nos permitem escrever

$$\zeta = 0.5[1 + \cos^2(\omega_1 t)]x - 2 \sin(\omega_2 t), \quad (2.55)$$

$$\tau = \frac{[11 \cos(\omega_1 t) + 2 \cos^3(\omega_1 t)] \sin(\omega_1 t) + 19 \omega_1 t}{32 \omega_1}, \quad (2.56)$$

$$f_1 = \frac{\omega_1^2 [1 - 5 \cos^2(\omega_1 t) + 2 \cos^4(\omega_1 t)]}{2[1 + \cos^2(\omega_1 t)]^2}, \quad (2.57)$$

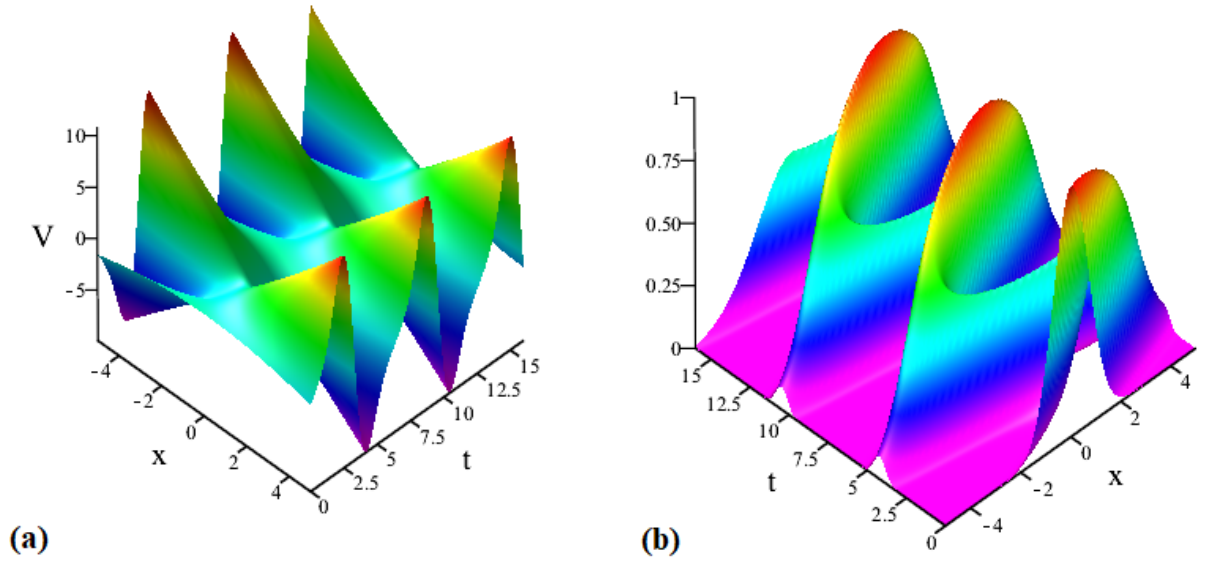


Figura 2.4: Coeficiente linear (Potencial) e (b) Solução modulada para o potencial misto. Consideramos $G = -1$, $\mu = -G$ e $\omega_2 = 2\omega_1 = 1$.

e

$$f_2 = \frac{2\omega_2[\omega_2 + \cos^2(\omega_1 t)] \sin(\omega_2 t) - 8\omega_2 \cos(\omega_1 t)\omega_1 \cos(\omega_2 t) \sin(\omega_1 t)}{[1 + \cos^2(\omega_1 t)]^2}. \quad (2.58)$$

Assim, obtemos a forma esperada $V = f_1 x^2 + f_2 x$ e

$$g = \frac{G}{4}[1 + \cos^2(\omega_1 t)]^2. \quad (2.59)$$

A amplitude e a fase podem ser escritas na forma

$$\rho = \sqrt{\frac{1 + \cos^2(\omega_1 t)}{2}}, \quad (2.60)$$

e

$$\eta = \frac{\omega_1 \cos(\omega_1 t) \sin(\omega_1 t)}{2[1 + \cos^2(\omega_1 t)]} x^2 + \frac{2\omega_2 \cos(\omega_2 t)}{1 + \cos^2(\omega_1 t)} x + \gamma, \quad (2.61)$$

respectivamente, onde

$$\gamma = -\frac{1}{4}G[1 + \cos^2(\omega_1 t)]^2 \ln[(1 + \cos^2(\omega_1 t))/2] - \frac{4\omega_2^2 \cos^2(\omega_2 t)}{[1 + \cos^2(\omega_1 t)]^2}.$$

A Fig. 2.4 mostra o coeficiente linear (potencial) e o perfil da solução ($|\psi|^2$), considerando $G = -1$, $\mu = -G$, $\omega_2 = 2\omega_1 = 1$. Este tipo de modulação faz a solução oscilar

na direção x , com um comportamento do tipo “*breather*”. Temos também que soluções com oscilações quasiperiódicas em x e/ou t podem ser encontradas com um ajuste apropriado da razão ω_1/ω_2 como sendo um número irracional.

2.3 Análise de Estabilidade

O estudo numérico é baseado no método de split-step, cuja equação de evolução é dividida em diversos pedaços (termos lineares e não lineares), que são integrados separadamente. Usamos etapas de tamanhos $\Delta x = 0.04$ e $\Delta t = 0.001$ que proporcionam uma boa precisão no estado final [71]. Para garantir a estabilidade do processo também foi verificado a norma (potência) e a energia da solução definida por $P = \int_{-\infty}^{\infty} |\psi|^2 dx$ e

$$E = \int_{-\infty}^{\infty} dx |\psi_x|^2 + V|\psi|^2 + f(|\psi|^2), \quad (2.62)$$

respectivamente, onde a função f é definida por

$$\begin{aligned} f(|\psi|^2) &= \int_0^{|\psi|^2} F(|\varphi|^2) d(|\varphi|^2) \\ &= \int_0^{|\psi|^2} g\varphi \ln(|\varphi|^2) d(|\varphi|^2) \\ &= g|\psi|^2 (\ln |\psi|^2 - 1). \end{aligned}$$

Para estudar a estabilidade dos casos citados acima, nós atribuímos ao perfil de entrada da solução uma perturbação aleatória em sua amplitude com a forma

$$\psi = \psi_0 [1 + 0.05v(x)], \quad (2.63)$$

onde $\psi_0 = \psi(x, 0)$ é a solução analítica para os casos na presença de modulação e $v \in [-0.5, 0.5]$ é um número aleatório com média zero avaliada a cada ponto da grade de discretização na coordenada x .

Na Fig. 2.5 mostramos a propagação numérica da equação de entrada dada pela Eq.(2.63) com $\psi(x, 0)$ como sendo a solução do caso com potencial linear e a comparação entre os estados de entrada ($t = 0$) e saída ($t = 1000$). Note na Fig. 2.5a que restringimos o

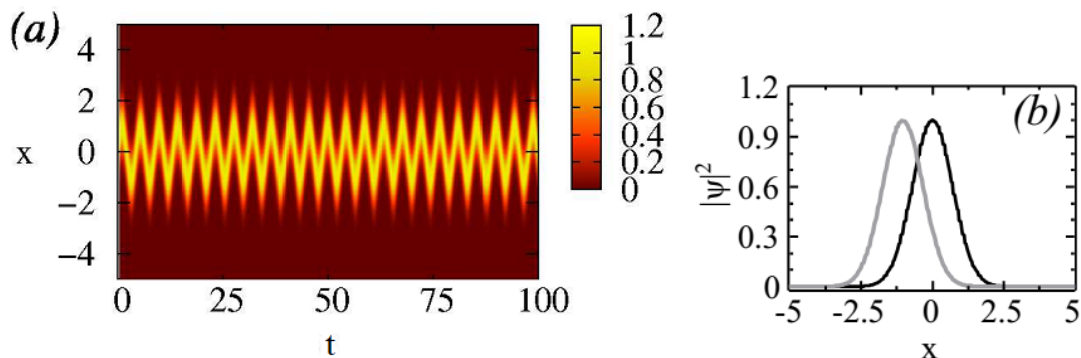


Figura 2.5: Perfil da solução do caso do potencial linear (a) no plano $x - t$ e (b) comparação entre a solução de entrada (linha escura) e saída (linha cinza) na direção x . O estado de entrada é tomado em $t = 0$ enquanto o de saída é em $t = 1000$. Note em (b) para este valor final de t observado, a entrada e a saída possuem o mesmo perfil com os picos em diferentes posições devido às oscilações na solução modulada. Isto implica na estabilidade da solução, pelo menos até o valor observado de t .

perfil ao valor $t = 100$ devido ao grande número de oscilações quando $t \gg 100$. Neste caso a norma é mantida em $P = 1.76911$ com um desvio padrão de 5×10^{-13} enquanto a energia oscila em torno de $E \simeq 90 \pm 14$.

A simulação numérica do caso com potencial quadrático é mostrada na Fig. 2.6a. Aqui, o padrão do tipo “*breather*” é preservado mesmo quando a equação de entrada sente uma pequena perturbação do tipo mostrado em Eq. (2.63). Note que na Fig. 2.6b apresenta uma diferença na amplitude nos estados de entrada ($t = 0$) e saída ($t = 1000$). Isto é devido ao padrão oscilatório da solução, mas ressaltamos que é estável. Deste modo, obtivemos $P = 1.76911$ com um desvio padrão de $\simeq 10^{-13}$ e com uma respectiva energia dada aproximadamente por $E \simeq 49 \pm 12$ (com um padrão oscilatório).

Na última simulação, checamos a instabilidade para o caso com potencial misto. Na Fig. 2.7 podemos observar o comportamento instável no decaimento da solução. A norma é dada por $P = 1.77096$ com um desvio padrão de (10^{-14}) e a energia $E \simeq 186 \pm 184$ (com um padrão aleatório devido a instabilidade).

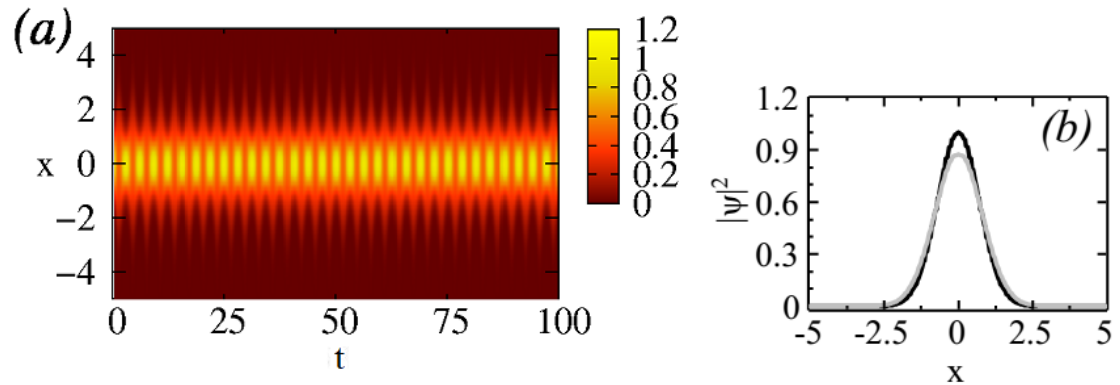


Figura 2.6: Perfil da solução do caso do potencial quadrático (a) no plano $x - t$ e (b) comparação entre a solução de entrada (linha escura) e saída (linha cinza) na direção x . O estado de entrada é tomado em $t = 0$ enquanto o de saída é em $t = 1000$. Note em (b) que a entrada e a saída possuem diferentes picos de amplitude devido a oscilações na solução modulada.

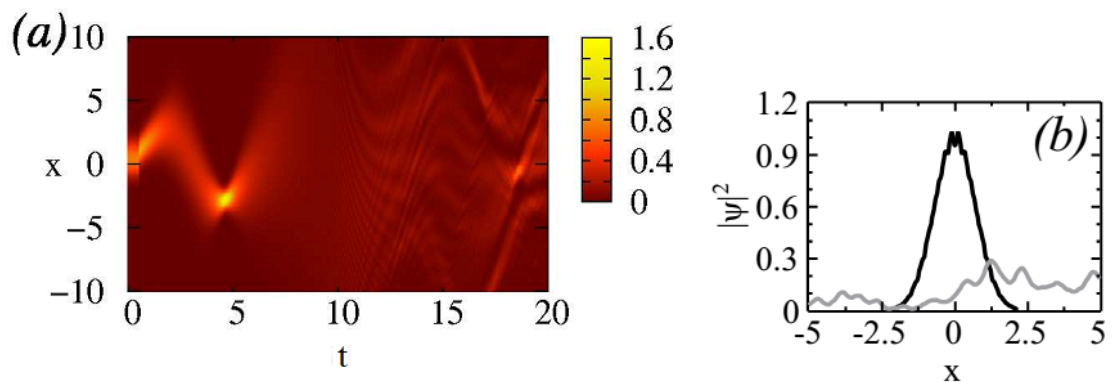


Figura 2.7: Perfil da solução do caso com potencial misto (a) no plano $x - t$ e (b) comparação entre a solução de entrada (linha escura) e saída (linha cinza) na direção x . O estado de entrada é tomado em $t = 0$ enquanto o de saída é em $t = 20$. Note que neste caso a modulação induz a um comportamento instável.

Capítulo 3

Modulação de Soluções Localizadas: Equação Não Linear de Schrödinger Saturada

Alguns tipos de fibras ópticas, projetadas usando materiais com altos valores de índices de refração (como fibras de silicato e calcogeneto [14]), são propensas a exibir efeitos de saturação a um nível de potência de pico mais baixo. Para este fim, a não linearidade na Eq. (1.2) deve ser alterada para uma forma apropriada dependendo do tipo de material e, conseqüentemente, ajustar a resposta de saturação. Isto também se aplica a fibras ópticas cujo núcleo é dopado com materiais com altas não linearidades como os semicondutores [72] e corantes orgânicos [73]. Aqui, propomos um meio saturável não linear e não homogêneo, de forma controlável, representada por uma ENLS saturada com coeficientes variáveis, para o qual construímos soluções analíticas localizadas usando o método de transformação de similaridade. Mudanças nas não homogeneidades do sistema nos permitem a possibilidade de modular essas soluções localizadas. Nesse sentido, estudamos alguns padrões de potenciais e não linearidades apresentando diferentes formas de modulação.

O presente Capítulo está organizado da seguinte forma: na Sec. 3.1 apresentamos o modelo teórico, usando uma abordagem variacional na Sec. 3.2 construímos uma solução localizada aproximada para a ENLS autônoma saturável; na Sec. 3.3 apresentamos nossos resultados analíticos e numéricos.

3.1 Modelo Teórico

Consideramos um sistema descrito pela NLSE com efeito de saturação, não autônoma, dada por

$$i\psi_t = -\frac{1}{2}\psi_{xx} + V(x, t)\psi + \frac{g(t)|\psi|^2}{1 + \gamma(t)|\psi|^2}\psi, \quad (3.1)$$

em que $\psi = \psi(x, t)$ é a amplitude do pulso, com $\psi_t \equiv \partial\psi/\partial t$ e $\psi_{xx} \equiv \partial^2\psi/\partial x^2$. $V(x, t)$, $g(t)$, e $\gamma(t)$ representam os parâmetros lineares, não lineares e de saturação, respectivamente. Esclarecemos que a forma atual para o termo não linear recupera o ajuste experimental de Ref. [74] substituindo os coeficientes como constantes. Em seguida, usamos a transformação de similaridade para mudar a Eq. (3.1) em uma autônoma, dada por

$$i\Phi_\tau = -\frac{1}{2}\Phi_{\zeta\zeta} + \frac{G|\Phi|^2}{1 + \Gamma|\Phi|^2}\Phi, \quad (3.2)$$

no qual G e Γ são constantes e $\Phi = \Phi(\zeta, \tau)$, com $\zeta = \zeta(x, t)$, $\tau = \tau(t)$. Note que considerando o termo de saturação $\gamma(t) = 0$, a Eq. (3.1) assume um comportamento de uma ENLS cúbica, apresentada no Cap. 1. Aqui, utilizaremos o mesmo procedimento adotado na Sec. 2.1. Desta forma, a Eq. (3.2) é obtida substituindo o seguinte *ansatz*

$$\psi = \rho(t) \exp(i\eta(x, t))\Phi(\zeta(x, t), \tau(t)), \quad (3.3)$$

na Eq. (3.1). Deste modo, obtemos as formas específicas para os parâmetros linear, não linear e de saturação, dados por

$$V = -\eta_t - \frac{1}{2}\eta_x^2, \quad (3.4)$$

$$g = \frac{G\zeta_x^2}{\rho^2}, \quad (3.5)$$

$$\gamma = \frac{\Gamma}{\rho^2}, \quad (3.6)$$

respectivamente, e devemos ter as seguintes equações condicionais

$$(\rho^2)_t = -\rho^2 \eta_{xx}, \quad (3.7)$$

$$\eta_x = -\frac{\zeta_t}{\zeta_x}, \quad (3.8)$$

$$\zeta_{xx} = 0, \quad (3.9)$$

$$\tau_t = \zeta_x^2. \quad (3.10)$$

Das Eqs. (3.9) e (3.10), obtemos $\zeta = a(t)x + b(t)$ e $\tau = \int a(t)^2 dt$. Então, podemos integrar apropriadamente a Eq. (3.8) para obter

$$\eta = -\frac{a_t}{2a}x^2 - \frac{b_t}{a}x + c(t), \quad (3.11)$$

que descreve a fase da solução esperada (3.3). Agora, substituindo Eq. (3.11) na Eq. (3.7) finalmente obtemos

$$\rho = \sqrt{a}, \quad (3.12)$$

que é associado com a amplitude da solução.

Tomando essas condições, pode-se reescrever os parâmetros lineares, não lineares e de saturação da seguinte forma

$$V(x, t) = f_1 x^2 + f_2 x + f_3, \quad (3.13a)$$

$$g(t) = Ga, \quad (3.13b)$$

$$\gamma(t) = \frac{\Gamma}{a}, \quad (3.13c)$$

com

$$f_1 = \frac{a_{tt}}{2a} - \frac{a_t^2}{a^2}, \quad (3.14)$$

$$f_2 = \frac{b_{tt}}{a} - \frac{2a_t b_t}{a^2}, \quad (3.15)$$

$$f_3 = -c_t - \frac{b_t^2}{2a^2}. \quad (3.16)$$

Novamente, devemos fazer escolhas apropriadas para $a(t)$, $b(t)$, e $c(t)$, nas equações anteriores, para descrever adequadamente o comportamento físico dos parâmetros variáveis da Eq. (3.1).

3.2 Aproximação Variacional

Em seguida, usamos uma aproximação variacional para obter uma solução aproximada da Eq. (3.2). Para isso, identificamos a Lagrangiana como

$$L = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{L} d\zeta, \quad (3.17)$$

onde a densidade Lagrangiana \mathcal{L} é dada por

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= \frac{i}{2} (\Phi \Phi_\tau^* - \Phi^* \Phi_\tau) + \frac{1}{2} |\Phi_\zeta|^2 + \frac{G}{\Gamma} |\Phi|^2 \\ &\quad - \frac{G}{\Gamma^2} \ln(1 + \Gamma |\Phi|^2). \end{aligned} \quad (3.18)$$

Esta forma de \mathcal{L} é apropriada, uma vez que através da equação de Euler-Lagrange

$$\frac{\partial}{\partial \zeta} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \Phi_\zeta} \right) + \frac{\partial}{\partial \tau} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \Phi_\tau} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \Phi} = 0, \quad (3.19)$$

apresenta uma equação de movimento com a forma da Eq. (3.2).

Para uma investigação mais aprofundada, podemos considerar uma função de avaliação dada por

$$\Phi = A \operatorname{sech}(B\zeta) \exp(-i\mu\tau), \quad (3.20)$$

onde A , B , e μ são constantes reais com μ sendo a constante de propagação. Este *ansatz* foi pensado para recuperar a solução padrão com $\Gamma \rightarrow 0$ e não linearidade auto focalizada ($G < 0$), onde a Eq. (3.2) assume a forma de uma ENLS cúbica. A partir da Eq. (3.20) temos

$$\Phi_\tau = -i\mu A \Phi, \quad (3.21)$$

$$\Phi_\zeta = -AB \tanh(B\zeta) \Phi, \quad (3.22)$$

que aplicadas em Eq. (3.18), conseguimos escrever a Eq. (3.17) como

$$L = \int_{-\infty}^{+\infty} \left\{ A^2 \operatorname{sech}^2(B\zeta) \left[\frac{B^2 \tanh^2(B\zeta)}{2} + \frac{G}{\Gamma} - \mu \right] - \frac{G}{\Gamma^2} \ln(1 + \Gamma A^2 \operatorname{sech}^2(B\zeta)) \right\} d\zeta. \quad (3.23)$$

Para resolver esta integração, consideramos que $\Gamma A^2 \operatorname{sech}^2(B\zeta) \ll 1$, e fizemos uma expansão em série de Taylor para o termo $\ln(1 + \Gamma A^2 \operatorname{sech}^2(B\zeta))$ e assim, temos que

$$\ln(1 + \Gamma A^2 \operatorname{sech}^2(B\zeta)) \cong \Gamma A^2 \operatorname{sech}^2(B\zeta) - \frac{(\Gamma A^2 \operatorname{sech}^2(B\zeta))^2}{2} + \frac{(\Gamma A^2 \operatorname{sech}^2(B\zeta))^3}{3} + \dots \quad (3.24)$$

Utilizamos a expansão de terceira ordem para resolver a Eq. (3.18) e então obtemos

$$L = \frac{A^2}{3B} (2A^2G + B^2 - 6\mu). \quad (3.25)$$

Como os parâmetros variáveis A e B são constantes, aplicando a Eq. (3.25) na Eq. (3.19) temos que

$$\frac{\partial L}{\partial A} = \frac{\partial L}{\partial B} = 0,$$

e após alguns cálculos chegamos às seguintes relações,

$$A = \frac{1}{8} \sqrt{\frac{3(15G + q)}{\Gamma G}}, \quad (3.26)$$

$$B = \frac{1}{16} \sqrt{\frac{90G - 768\Gamma\mu + 6q}{\Gamma}}, \quad (3.27)$$

onde $q \equiv \sqrt{225G^2 - 1280\Gamma G\mu}$. Estes parâmetros também foram calculados utilizando expansões em séries de Taylor com ordens maiores que 3. Contudo, observamos que não causava uma alteração considerável nos valores dos parâmetros, então decidimos manter a expansão até a terceira ordem para facilitar os cálculos. Observe que, uma vez que B é um parâmetro real, o valor de μ é limitado na região $5G/32\Gamma < \mu < 0$.

3.3 Resultados Analíticos e Numéricos

3.3.1 Considerações Analíticas

Neste ponto, podemos fornecer resultados analíticos para diferentes padrões de modulação através de ajustes apropriados das funções temporais $a(t)$, $b(t)$ e $c(t)$.

Potencial Nulo - No primeiro caso, consideramos um potencial nulo ($V = 0$) definindo $a = 1$ e $b = c = 0$. Esta configuração leva a $\zeta = x$ e $\tau = t$. Conseqüentemente, os coeficientes no termo não linear serão constantes e dados por $g = G$ e $\gamma = \Gamma$. Além disso, a amplitude e a fase da solução (3.3) são escritas como $\rho = 1$ e $\eta = 0$, respectivamente. Como exemplo, na figura Fig. 3.1 mostramos a solução $|\psi|^2$ como função de coordenadas x e t para $G = -1$, $\Gamma = 0.1$, e $\mu = -1$ em um potencial nulo.

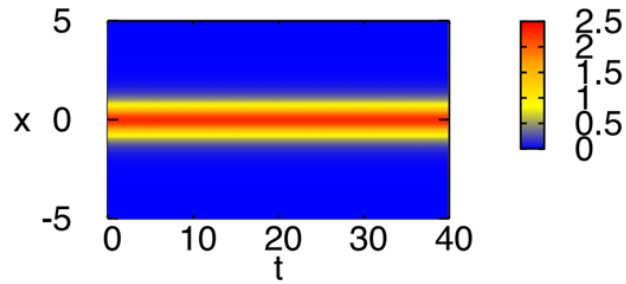


Figura 3.1: Perfil da solução $|\psi|^2$ como função das coordenadas x e t para o caso do potencial nulo. Usamos os valores dos parâmetros $G = -1$, $\Gamma = 0.1$ e $\mu = -1$.

Potencial Linear - Em seguida, examinamos o caso do potencial linear na coordenada x e oscilante na coordenada t . Esse tipo de potencial foi apresentado na Sec. 2.2.2. Neste caso, nós definimos $a = 1$, $b = -\sin(\omega t)$, e $c(t)$ escolhido de tal maneira que temos $f_3 = 0$ na Eq. (3.13a). Assim, o potencial linear pode ser escrito como

$$V_{SS} = \omega^2 \sin(\omega t)x, \quad (3.28)$$

Enquanto os coeficientes no termo não linear e a amplitude permanecem constantes, ou seja, $g = G$, $\gamma = \Gamma$, e $\rho = 1$, respectivamente. A fase que aparece na Eq. (3.3) fica na forma

$$\eta = -\frac{\omega}{4} \{[\sin(\omega t) - 4x] \cos(\omega t) + \omega t\}.$$

Do mesmo modo, encontramos $\zeta = x - \sin(\omega t)$ e $\tau = t$. Assim, o comportamento estático da solução ($|\psi|^2$) visualizada na Fig. 3.1 é agora modulada pelo potencial linear, criando um comportamento oscilatório, como demonstrado na Fig. 3.2. Note que na Eq. (3.28) a redução no valor da frequência de modulação também irá diminuir o valor da amplitude do potencial. A influência na estabilidade da solução devido à mudança no valor da frequência de modulação será o objetivo da próxima subseção.

Potencial Quadrático - Assim como na Sec. 2.2.3, nós iremos estudar um potencial quadrático na coordenada x com uma oscilação periódica em t que muda o padrão atrativo para um repulsivo e vice-versa. Para isto, ajustamos corretamente os valores dos coeficientes para $a = 1 + \sigma \sin(\omega t)$, $b = 0$, e $c = 0$. Deste modo, a amplitude e a fase na Eq. (3.3) se tornam

$$\rho = \sqrt{1 + \sigma \sin(\omega t)}$$

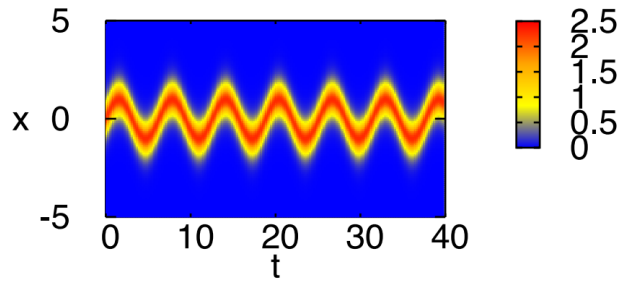


Figura 3.2: Perfil da solução $|\psi|^2$ como função das coordenadas x e t para o caso do potencial linear na coordenada x e oscilatório na coordenada t , para $G = -1$, $\Gamma = 0.1$, $\omega = 1$ e $\mu = -1$.

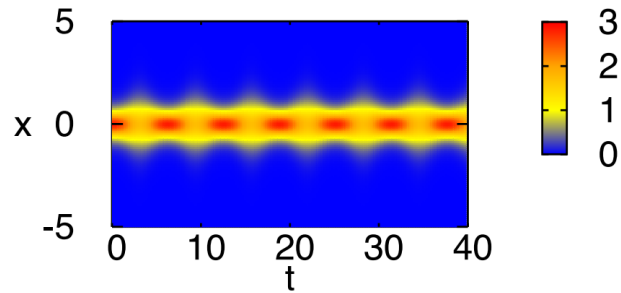


Figura 3.3: Perfil da solução $|\psi|^2$ como função das coordenadas x e t para o caso do potencial quadrático na coordenada x e oscilatório na coordenada t , para $G = -1$, $\Gamma = 0.1$, $\sigma = 0.25$, $\omega = 1$ e $\mu = -1$.

e

$$\eta = \frac{-\sigma\omega x^2 \cos(\omega t)}{2 + 2\sigma \sin(\omega t)},$$

respectivamente. O potencial e os coeficientes no termo não linear são escritos como

$$V_{FB} = \frac{\sigma\omega^2 x^2 [\sigma \sin^2(\omega t) - \sin(\omega t) - 2\sigma]}{2 [1 + \sigma \sin(\omega t)]^2}, \quad (3.29)$$

$$g = G [1 + \sigma \sin(\omega t)],$$

e

$$\gamma = \frac{\Gamma}{1 + \sigma \sin(\omega t)},$$

respectivamente. Na Fig. 3.3 mostramos o perfil da solução localizada $|\psi|^2$ para $G = -1$, $\Gamma = 0.1$, $\sigma = 0.25$, $\omega = 1$ e $\mu = -1$. Neste caso a modulação faz um padrão do tipo *breathing* para o perfil da solução. Este comportamento é devido a mudança no potencial de atrativo para repulsivo (ou vice-versa). Além disso, na fração atrativa do potencial, a não linearidade auto focante apresentará seus maiores valores, corroborando com o potencial em si.

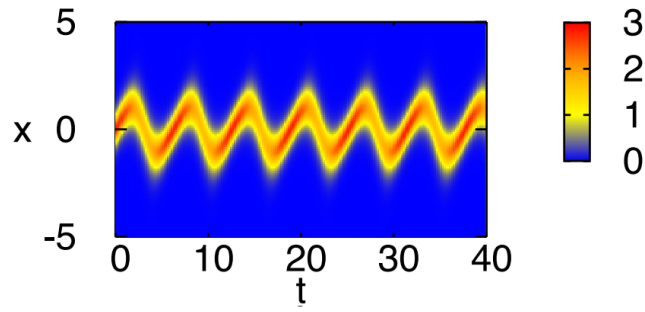


Figura 3.4: Perfil da solução $|\psi|^2$ como função das coordenadas x e t para o caso do potencial misto (quadrático e linear na coordenada x e oscilatório na coordenada t), para $G = -1$, $\Gamma = 0.1$, $\sigma = 0.25$, $\omega = 1$ e $\mu = -1$.

Potencial Misto - Novamente como foi feito na Sec. 2.2.4, iremos considerar a interação das duas formas anteriores para o potencial, ou seja, um linear e quadrático na coordenada x com um comportamento oscilatório e periódico na coordenada t . Para isto definimos $a = 1 + \sigma \sin(\omega t)$, $b = -\sin(\omega t)$ e $c(t)$ de forma apropriada para que $f_3 = 0$ na Eq. (3.13a). Esta escolha para $c(t)$ é para garantir que o termo linear não homogêneo em consideração apresente somente a interação dos dois potenciais anteriores. Dessa forma obtemos resultados para a amplitude e os coeficientes do termo não linear semelhantes ao caso do potencial quadrático, enquanto a fase na Eq. (3.3) sofre algumas alterações. Finalmente, o potencial é dado por

$$V_M = \frac{\omega^2 x (\sigma x - 2) [\sigma \sin^2(\omega t) - \sin(\omega t) - 2\sigma]}{2 [1 + \sigma \sin(\omega t)]^2}. \quad (3.30)$$

Na Fig. 3.4 nós mostramos o perfil da solução localizada $|\psi|^2$ para a modulação com potencial misto. Os valores dos parâmetros constantes são os mesmos usados nos casos anteriores. Observe que o perfil da solução apresenta oscilações na coordenada x enquanto a sua amplitude oscila em t .

3.3.2 Análise da Estabilidade Linear

Nesta etapa, analisamos a estabilidade linear da nossa solução aproximada para a SNLSE autônoma dada por Eq. (3.2). Para este fim, perturbamos a solução com modos

normais dado por

$$\Phi(\zeta, \tau) = \varphi(\zeta) + [v(\zeta) + w(\zeta)]e^{\lambda\tau} + [v^*(\zeta) - w^*(\zeta)]e^{\lambda^*\tau}e^{-i\mu\tau},$$

em que $v(\zeta), w(\zeta) \ll 1$ são as perturbações do modo normal, e λ é o autovalor deste modo normal. Inserindo esta solução perturbada em Eq. (3.2) e executando um processo de linearização, obtemos o seguinte problema de autovalor:

$$\mathbf{L}\Psi = \lambda\Psi, \quad (3.31)$$

em que

$$\mathbf{L} = i \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2}\nabla^2 + \mathcal{F}_1 \\ \frac{1}{2}\nabla^2 + \mathcal{F}_2 & 0 \end{pmatrix}, \quad \Psi = \begin{pmatrix} v \\ w \end{pmatrix}, \quad (3.32)$$

e

$$\mathcal{F}_1 = \mu - \frac{G\varphi^2}{1 + \Gamma\varphi^2}, \quad (3.33)$$

$$\mathcal{F}_2 = \mu - \frac{G\varphi^2(3 + \Gamma\varphi^2)}{(1 + \Gamma\varphi^2)^2}, \quad (3.34)$$

no qual assumimos φ real. Usamos o método da colocação de Fourier para calcular os autovalores do operador linear \mathbf{L} , no qual expande a autofunção Ψ em série de Fourier e transforma a Eq. (3.31) em um problema de autovalor de matriz para os coeficientes de Fourier da autofunção Ψ . Pode-se encontrar exemplos da aplicação deste método na Ref. [15]. Na Fig. 3.5 mostramos o máximo da parte real de λ em função da constante de propagação μ obtido a partir do espectro de estabilidade para a onda solitária dada pela Eq. (3.20), por meio do problema da estabilidade linear do autovalor Eq. (3.31) para três diferentes valores dos parâmetros de saturação, $\Gamma = 0.05$ em círculos (amarelo), $\Gamma = 0.1$ em quadrados (vermelho) e $\Gamma = 0.15$ em triângulos (azul). Note que para um dado valor de Γ , existe um valor crítico para μ , abaixo do qual obtemos soluções estáveis, desde que a parte real de λ nesta região seja zero.

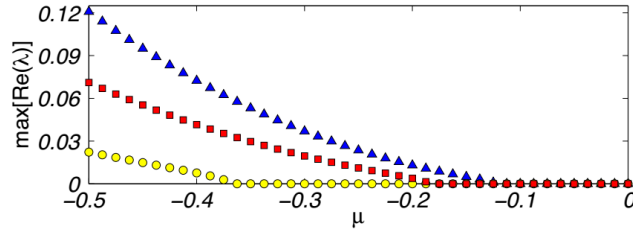


Figura 3.5: Máximo da parte real do autovalor λ ($\max[\text{Re}(\lambda)]$) em função da constante de propagação μ obtido a partir do espectro de estabilidade para a onda solitária dada por Eq. (3.20) através do problema da estabilidade linear do autovalor Eq. (3.31) da equação autônoma Eq. (3.2) para três diferentes valores dos parâmetros de saturação, $\Gamma = 0.05$ em círculos (amarelo), $\Gamma = 0.1$ em quadrados (vermelho) e $\Gamma = 0.15$ em triângulos (azul). Aqui também consideramos $G = -1$ em todos os casos.

3.3.3 Simulações Numéricas Diretas

Agora iremos examinar a estabilidade das soluções moduladas através de simulações numéricas diretas da Eq. (3.1). Neste caso, utilizamos o mesmo procedimento admitido na Sec. 2.3. O método numérico é baseado no algoritmo split-step onde definimos as discretizações com tamanhos $\Delta x = 0.04$ e $\Delta t = 0.001$ e fixamos a largura espacial em $[-30, 30]$. O estado de entrada da Eq. (3.1) é dado por

$$\psi = \psi_0[1 + 0.05v(x)], \quad (3.35)$$

em que $\psi_0 = \psi(x, 0)$ é a solução analítica obtida pelo *ansatz* (3.3) e $v \in [-0.5, 0.5]$ é um número real aleatório com média zero avaliada a cada ponto da grade de discretização na coordenada x . Também, para garantir a estabilidade do método, novamente checamos a conservação da norma (potência) e a energia da solução definidas por $P = \int_{-\infty}^{\infty} |\psi|^2 dx$ e

$$E = \int_{-\infty}^{\infty} dx \left\{ \frac{1}{2} |\psi_x|^2 + \left(V + \frac{g}{\gamma} \right) |\psi|^2 - \frac{g}{\gamma^2} \ln(1 + \gamma |\psi|^2) \right\}, \quad (3.36)$$

respectivamente.

Primeiramente, vamos considerar o caso com o potencial linear dado pela Eq. (3.28), mostrado acima nas nossas considerações analíticas. Mostramos na Fig. 3.6 os resultados numéricos correspondentes para a amplitude máxima (h_{max}) e a largura média ($\langle x^2 \rangle$) em função do tempo de evolução (até $t = 5000$) em unidades adimensionais, para três diferentes valores da frequência de modulação ω , ou seja, $\omega = 0.5$, $\omega = 1.0$ e $\omega = 2.0$. Note na Fig.

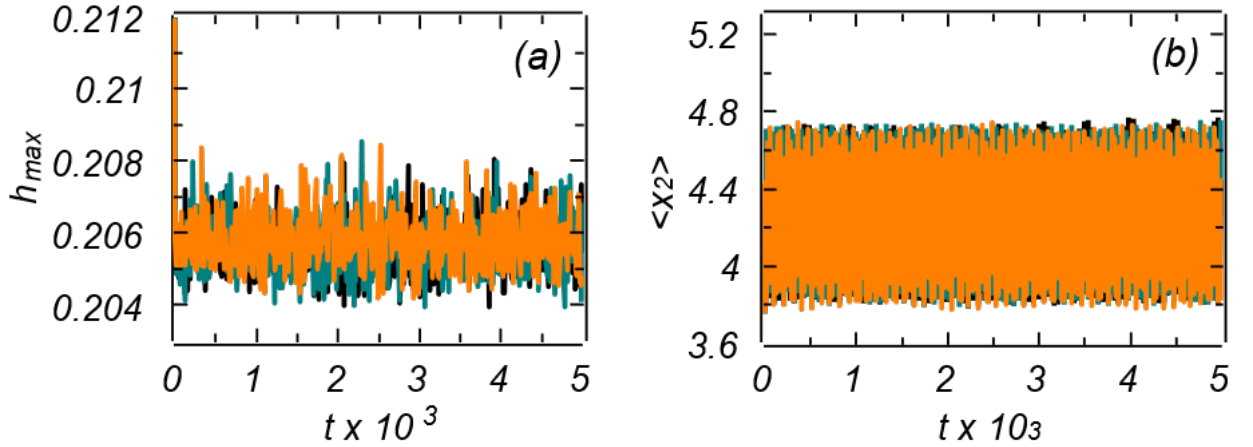


Figura 3.6: (a) Amplitude máxima (h_{max}) e (b) largura média ($\langle x^2 \rangle$) em função do tempo de propagação para o potencial linear dado pela Eq. (3.28). Usamos linhas pretas para $\omega = 0.5$, linhas verdes para $\omega = 1.0$ e linhas laranjas para $\omega = 2.0$. Os outros parâmetros são $G = -1$, $\Gamma = 0.1$ e $\mu = -0.1$.

3.5 que para o valor de $\mu = 0.1$, utilizado nestas simulações esperamos uma solução estável na ausência de modulação. Por outro lado, na Fig. 3.6a observa-se que as amplitudes máximas das soluções na presença destes três valores distintos da frequência de modulação para o potencial linear são constantes e bem próximos um do outro (~ 0.206), que é um sinal direto de estabilidade dessas soluções. Além disso, na Fig. 3.6b pode se notar um comportamento oscilatório na largura média de todas as soluções, que está de acordo com a previsão analítica. Curiosamente, a modulação da solução pelo potencial preserva sua estabilidade.

Agora, usando o potencial quadrático, dado pela Eq. (3.29), nas simulações numéricas observamos nas Figs. 3.7a e 3.7b o surgimento de soluções instáveis. De fato, ao usar a frequência de modulação $\omega = 0.5$ observamos um comportamento oscilatório estável para o h_{max} e ($\langle x^2 \rangle$) (até $t = 5000$), enquanto para $\omega = 1.0$ e $\omega = 2.0$ as soluções se tornam instáveis, ou seja, sofrem uma diminuição na sua amplitude máxima ao mesmo tempo em que aumentam abruptamente sua largura média. Assim, o padrão mostrado na Fig. 3.3 será estável apenas para valores pequenos da frequência de modulação ($\omega \lesssim 0.5$). Consequentemente, pode-se usar essa modulação com alta frequência para quebrar a estabilidade de soluções sem valor.

Nas Figs. 3.8a-b mostramos o mesmo que nas Figs. 3.7a-b, mas agora considerando

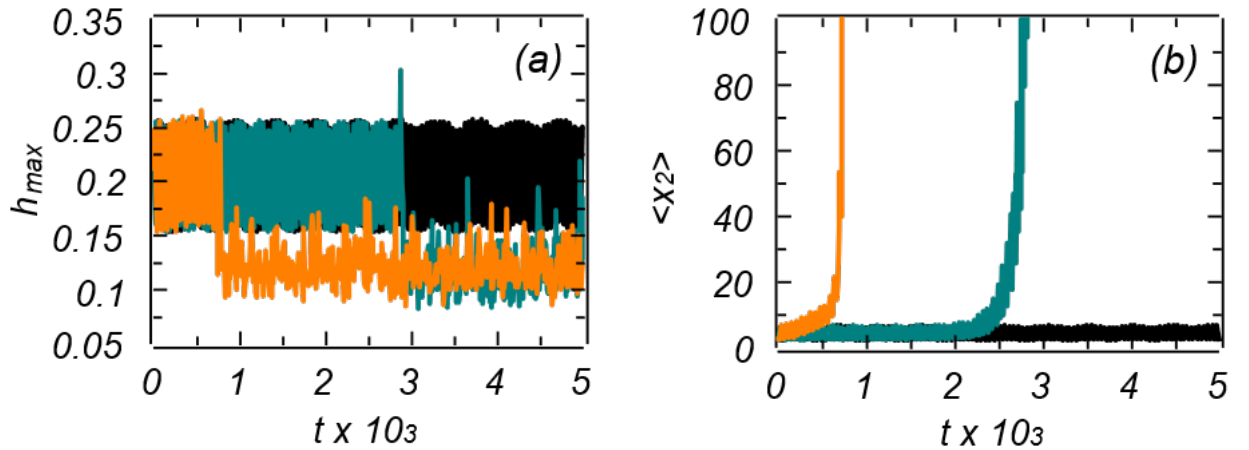


Figura 3.7: (a) Amplitude máxima (h_{max}) e (b) largura média ($\langle x^2 \rangle$) em função do tempo de propagação para o potencial quadrático, dado pela Eq. (3.29). Usamos linhas pretas para $\omega = 0.5$, linhas verdes para $\omega = 1.0$ e linhas laranjas para $\omega = 2.0$. Os outros parâmetros são $G = -1$, $\Gamma = 0.1$, $\sigma = 0.25$ e $\mu = -0.1$.

o potencial misto (3.30). Em comparação com os resultados obtidos anteriormente, isto é, quando se considera o potencial quadrático, verificamos que as soluções são mais sensíveis às modulações e conseqüentemente mais propensas a serem instáveis. De fato, nas Figs. 3.8a-b usamos $\omega = 0.1, 0.5$ e 1.0 , onde somente as soluções com $\omega = 0.1$ permaneceram estáveis. Neste sistema, este tipo de modulação é mais útil para destruir essas estruturas do que para moldá-las.

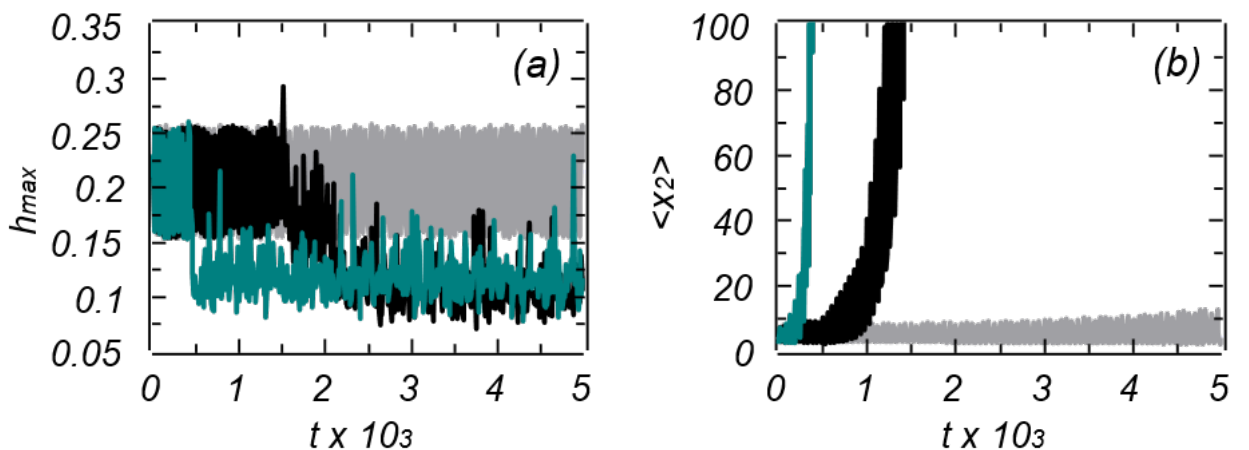


Figura 3.8: (a) Amplitude máxima (h_{max}) e (b) largura média ($\langle x^2 \rangle$) em função do tempo de propagação para o potencial misto (3.30). Usamos linhas pretas para $\omega = 0.5$, linhas verdes para $\omega = 1.0$ e linhas laranjas para $\omega = 2.0$. Os outros parâmetros são $G = -1$, $\Gamma = 0.1$, $\sigma = 0.25$ e $\mu = -0.1$.

Capítulo 4

Modulação de Soluções Localizadas: Equação Não Linear de Schrödinger de Altas Ordens (Efeito Raman)

O fenômeno da Instabilidade Modulacional (IM) está relacionado a um crescimento exponencial de uma onda contínua devido a interação dos efeitos não lineares em fibras ópticas e cristais não lineares. Este fenômeno foi inicialmente previsto por Hasegawa em 1984 [75] sendo verificado experimentalmente em 1986 [76]. Desde então, isto tem motivado um emergente crescimento de trabalhos nesta área [75, 77]. Neste cenário, a propagação geral de pulsos ópticos ultra curtos em cristais não lineares ou em fibras ópticas não lineares (incluindo efeitos dispersivos e não linear de altas ordens) é governada por uma NLSE com a forma [14, 78]

$$i\partial_z\psi(x, z) = -\sum_{m=2}^{\infty} \frac{\beta_m}{m!} (i\partial_x)^m \psi(x, z) - \gamma \left(1 + \frac{i}{\omega_0} \partial_x\right) \times \left[\psi(x, z) \int_{-\infty}^{\infty} R(x') |\psi(x - x', z)|^2 dx' \right], \quad (4.1)$$

onde ∂_α representa a derivada parcial em relação a α , $\psi(x, z)$ é a solução complexa do pulso, β_m é o coeficiente de dispersão de ordem m , γ é o coeficiente não linear efetivo, ω_0 é a frequência central do pulso. $R(x')$ é uma função resposta comumente dada por [14]

$$R(x) = (1 - f)\delta(x) + fh(x), \quad (4.2)$$

onde f é a contribuição fracional da resposta Raman atrasada à polarização não linear e $h(x)$ é a função resposta de Raman dada (aproximadamente) por [79]:

$$h(x) = \frac{\tau_1^2 + \tau_2^2}{\tau_1 \tau_2^2} \exp(-x/\tau_2) \sin(x/\tau_1), \quad (4.3)$$

com τ_1 e τ_2 sendo parâmetros ajustáveis. A forma dada pela Eq. (4.2) corresponde às contribuições eletrônica (considerada instantânea) e vibracional (Raman).

No ponto de vista teórico, a influência do espalhamento Raman na instabilidade modulacional em fibras ópticas homogêneas foi estudado em [80] e também incluindo termos dispersivos de altas ordens em [81–84]; Também há vários estudos sobre IM considerando efeitos de altas ordens na ENLS. Conforme já demonstrado nos capítulos anteriores, a influência de inomogeneidades no sistema pode ser usada para modular as soluções localizadas, bem como influenciar as regiões de ganho (e perfis) da IM [85]. Na Ref. [86] os autores estudaram a IM de ondas eletromagnéticas em um meio com não linearidade variável e efeitos de auto-inclinação. Na Ref. [87] foi relatado um estudo analítico, numérico e experimental da IM em um meio óptico não linear, separado em camadas alternadas entre vidro e ar. A IM em fibras ópticas não lineares inomogêneas acopladas por coeficientes variáveis na NLSE, foi considerado na [88] e incluindo efeitos de altas ordens em Ref. [89].

O objetivo deste capítulo é estudar a instabilidade modulacional de uma onda contínua em um meio não linear inomogêneo considerando o efeito do espalhamento Raman estimulado. Diferentemente dos estudos anteriores apresentados [85–93], nós analisamos a influência de uma modulação “espaço-temporal” nos termos linear (potencial) e não linear usando o método da transformação de similaridade, o que nos permite estudar a região de ganho no caso autônomo. Na Seção 4.1 introduzimos o modelo teórico com as equações básicas e aplicamos o método da transformação de similaridade. Na Sec. 4.2 apresentamos nossos resultados analíticos referentes à região de ganho para o sistema autônomo. Os resultados das simulações numéricas para alguns padrões de modulação espaçotemporais e a influência destas modulações com e sem a presença de espalhamento Raman no sistema são

discutidos na Sec. 4.3.

4.1 Modelo Teórico

No nosso caso, podemos simplificar a Eq. 4.1 que descreve a propagação de pulsos ópticos ultracurtos em uma fibra não linear monomodo ou um cristal não linear com efeito de espalhamento Raman para a seguinte equação [14,78]:

$$i\psi_z = -\frac{1}{2}\psi_{xx} + V\psi + g|\psi|^2\psi + ig\beta\psi(|\psi|^2)_x, \quad (4.4)$$

onde $\psi = \psi(x, z)$ é a amplitude do pulso (com $\psi_z \equiv \partial\psi/\partial z$, $\psi_{xx} \equiv \partial^2\psi/\partial x^2$ e $(|\psi|^2)_x \equiv \partial|\psi|^2/\partial x$), β é o coeficiente de espalhamento Raman, enquanto $V = V(x, z)$ e $g = g(z)$ representam os coeficientes linear e não linear, respectivamente. Note que se considerarmos $\beta = 0$, sem o efeito do espalhamento Raman, a Eq. (4.4) corresponde a ENLS cúbica. Assim como fizemos nos Caps. 2 e 3, nosso objetivo principal é utilizar a transformação de similitude através do ansatz

$$\psi = \rho(z)e^{i\eta(x,z)}\Phi(\zeta(x, z), \tau(z)), \quad (4.5)$$

e transformar a Eq. (4.4) em uma autônoma, dada por

$$i\Phi_\tau = -\frac{1}{2}\Phi_{\zeta\zeta} + G|\Phi|^2\Phi + i\bar{\beta}\Phi(|\Phi|^2)_\zeta, \quad (4.6)$$

onde G e $\bar{\beta} = G\beta$ são constantes e $\Phi = \Phi(\zeta, \tau)$ é escrita em termos das novas variáveis independentes $\zeta = \zeta(x, z)$ e $\tau = \tau(z)$. O procedimento é semelhante ao realizado na Sec. 2.1, assim, via (4.5) e (4.4) conseguimos chegar à Eq. (4.6) mais as seguintes equações condicionais

$$\rho_z = -\frac{\rho\eta_{xx}}{2}, \quad (4.7)$$

$$\eta_x = -\frac{\zeta_z}{\zeta_x}, \quad (4.8)$$

$$\zeta_{xx} = 0, \quad (4.9)$$

$$\tau_z = \zeta_x^2. \quad (4.10)$$

Deste modo, obtemos as formas específicas para os parâmetros linear e não linear, respectivamente, dados por

$$V = -\eta_z - \frac{1}{2}\eta_x^2, \quad (4.11)$$

$$g = \frac{G\zeta_x^2}{\rho^2}. \quad (4.12)$$

Resolvendo as Eqs. (4.7-4.10) obtemos $\zeta = a(z)x + b(z)$ e $\tau = \int a(z)^2 dz$. Então a fase e a amplitude do ansatz podem ser escritas como

$$\eta = -\frac{a_z}{2a}x^2 - \frac{b_z}{a}x + c(z), \quad (4.13)$$

e

$$\rho = \sqrt{a}. \quad (4.14)$$

Tomando essas condições, pode-se reescrever os coeficientes linear e não linear da Eq. (4.4) da seguinte forma

$$V(x, z) = f_1x^2 + f_2x + f_3, \quad (4.15)$$

$$g(z) = Ga(z), \quad (4.16)$$

com

$$\begin{aligned} f_1 &= \frac{a_{tt}}{2a} - \frac{a_t^2}{a^2}, \\ f_2 &= \frac{b_{tt}}{a} - \frac{2a_tb_t}{a^2}, \\ f_3 &= -c_t - \frac{b_t^2}{2a^2}. \end{aligned} \quad (4.17)$$

Novamente, podemos descrever o comportamento físico dos parâmetros variáveis em Eq. (4.4) ao fazer escolhas apropriadas para $a(t)$, $b(t)$ e $c(t)$ nas equações anteriores.

4.2 Instabilidade Modulacional

Consideramos que a Eq. (4.6) admite como solução de estado estacionário

$$\Phi = Ae^{-iGA^2\tau}, \quad (4.18)$$

onde A é uma constante. Então, para verificar a estabilidade desta solução, perturbamos este estado estacionário com uma função $\chi(\zeta, \tau)$, dada por

$$\chi(\zeta, \tau) = \chi_1 \exp[-i(K\zeta - \Omega\tau)] + \chi_2 \exp[i(K\zeta - \Omega\tau)], \quad (4.19)$$

com χ_1 e χ_2 sendo coeficientes reais e constantes, K é o número de onda e Ω é a frequência da solução de perturbação. Desta forma podemos reescrever a solução Eq. (4.18) na forma perturbada como

$$\Phi = [A + \chi]e^{-iGA^2\tau}. \quad (4.20)$$

Aplicando a Eq. (4.20) em (4.6) e agrupando os termos em função das exponenciais $e^{-i(K\zeta - \Omega\tau)}$ e $e^{i(K\zeta - \Omega\tau)}$ chegamos ao seguinte sistema

$$\begin{cases} \chi_1 \left(\Omega + \frac{K^2}{2} + GA^2 + K\bar{\beta}A^2 \right) + \chi_2 (GA^2 - K\bar{\beta}A^2) = 0 \\ \chi_1 (GA^2 - K\bar{\beta}A^2) + \chi_2 \left(-\Omega + \frac{K^2}{2} + GA^2 - K\bar{\beta}A^2 \right) = 0 \end{cases} \quad (4.21)$$

resolvendo o sistema, obtemos a seguinte relação de dispersão

$$\Omega = -\bar{\beta}A^2K \pm \sqrt{\frac{K^4}{4} + GA^2K^2 + \bar{\beta}^2A^4K^2}. \quad (4.22)$$

O ganho da IM é dado pela parte imaginária de Ω . Como exemplo, a Fig. 4.1 mostra o ganho da IM em função do número de onda K da perturbação para diferentes valores de β . Note na Fig. 4.1a, para $\beta \neq 0$ somente um valor específico de K não apresenta IM ($K = -2$ for $G = -1$). Note também que na Fig. 4.1b a região de instabilidade modulacional (ou seja, $\text{Im}[\Omega]$) somente é obtida para $G < 0$.

4.3 Simulações Numéricas

Em seguida, estudaremos numericamente a influência da inhomogeneidade do sistema considerando o estado estacionário (4.20) e as relações (4.13)-(4.16). Usamos o método de split-step com transformada de Fourier para resolver a Eq. (4.4), incluindo um algoritmo preditor-corretor que melhora as aproximações usadas nos termos não lineares. Para uma descrição detalhada destes algoritmos e/ou programas Fortran para a ENLS dependente do

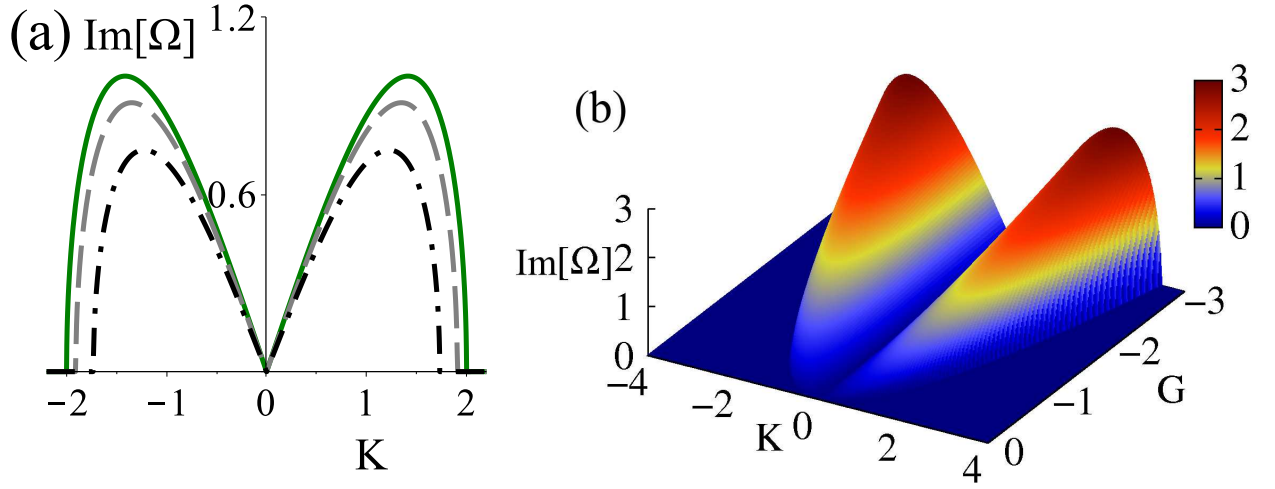


Figura 4.1: Ganho da IM dada pela parte imaginária de Ω . Em (a) apresentamos a parte $\text{Im}[\Omega]$ considerando $A = 1$ e $G = -1$ com $\beta = 0$ na linha sólida (verde), $\beta = 0.3$ na linha tracejada (cinza) e $\beta = 0.5$ com traço ponto (preto). Em (b) é apresentado o perfil de $\text{Im}[\Omega]$ para diferentes valores de K e G , considerando $A = 1$ e $\beta = 0.1$.

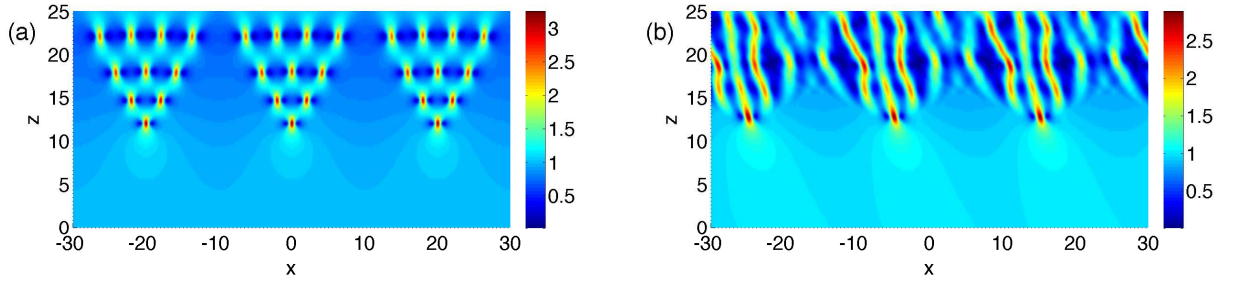


Figura 4.2: Evolução dinâmica de $|\psi|^2$ para o potencial nulo e considerando o estado inicial de Φ dado pela Eq. (4.20) em $z = 0$. Os parâmetros usados são (a) $\beta = 0$ e (b) $\beta = 0.3$.

tempo, indicamos as Refs. [15, 71]. Definimos as discretizações com tamanho $\Delta z = 10^{-4}$ e 1204 pontos na coordenada x contida em $[-30, 30]$, o que permite obtermos uma boa convergência numérica. Em todas as simulações utilizamos $A = 1$, $g = -1$, $K = 0.1\pi$ (valor dentro da região de ganho), e $\epsilon = \chi_1 = \chi_2 = 0.02$ na perturbação χ apresentada na Sec. 4.2.

4.3.1 Potencial Nulo

Inicialmente estudamos o caso do potencial nulo, isto é, considerando $f_1 = f_2 = f_3 = 0$ na Eq. (4.16). Neste caso, temos duas possibilidades dadas por: (i) $a = 1$ e $b = c = 0$ ou (ii) $a = 1/(1+z)$ e $b = c = 0$. Como queremos verificar soluções em tempos longos, no caso (ii) as Eqs. (4.14)-(4.15) tendem a zero, o que demonstra que a não linearidade e

consequentemente a amplitude da solução apresentam este mesmo comportamento. Deste modo, iremos focar somente no caso (i).

Neste exemplo, os coeficientes linear e não linear da Eq. (4.4) são dados por $V = 0$ e $g = G$, respectivamente. Além disso, obtemos $\rho = 1$, $\eta = 0$, $\tau = z$, e $\zeta = x$. Então, podemos reescrever a solução para Eq. (4.5) como

$$\psi = A \exp(-iGA^2z). \quad (4.23)$$

A solução (4.23) em $z = 0$ é tomada como condição inicial para as simulações numéricas da Eq. (4.4). Na Fig. 4.2 apresentamos a evolução deste estado inicial considerando $G = -1$ e (a) $\beta = 0$ e (b) $\beta = 0.3$. Em todos os exemplos consideramos $A = 1$ para simplificar. Note que o comportamento do tipo *breather* exibido na Fig. 4.2a é abruptamente alterado devido à inclusão de um termo Raman não nulo na NLSE. Também, na Fig. 4.2b observamos que os primeiros sólitons a serem formados (com maior amplitude) apresentam um deslocamento para o lado esquerdo com uma velocidade quase constante. Então dois sólitons vizinhos são formados e interagem com o primeiro apresentando um comportamento oscilatório. Outros sólitons são formados compondo um movimento como “cabelos ao vento”. Este comportamento é semelhante ao efeito do desvio ao vermelho nas fibras ópticas devido ao espalhamento Raman estimulado [14]. Usamos as Figs. 4.2a e 4.2b como referência para verificar os efeitos da inomogeneidade do meio nas subseções seguintes.

4.3.2 Potencial Linear

Neste exemplo apresentamos um potencial linear em x . Em um cristal não linear esperamos que isto pode ser feito depositando diferentes materiais ao longo deste eixo, com um aumento linear na diferença entre eles [14]. Aqui podemos considerar duas possibilidades: (i) $a = 1$ e $b = -\sin(\omega z)/\omega^2 + \lambda_1 z + \lambda_2$ ou (ii) $a = 1$ e $b = z^2/2 + \lambda_3 z + \lambda_4$, ambos os casos com $c_z = -b_z^2/2a^2$ e λ_j ($j = 1, \dots, 4$) constante. Então, obtemos $V = \sin(\omega z)x$ e $V = x$ para os casos (i) e (ii), respectivamente. No entanto, vamos nos concentrar no caso (i), pois o caso (ii) pode ser entendido com uma rotação em um único eixo.

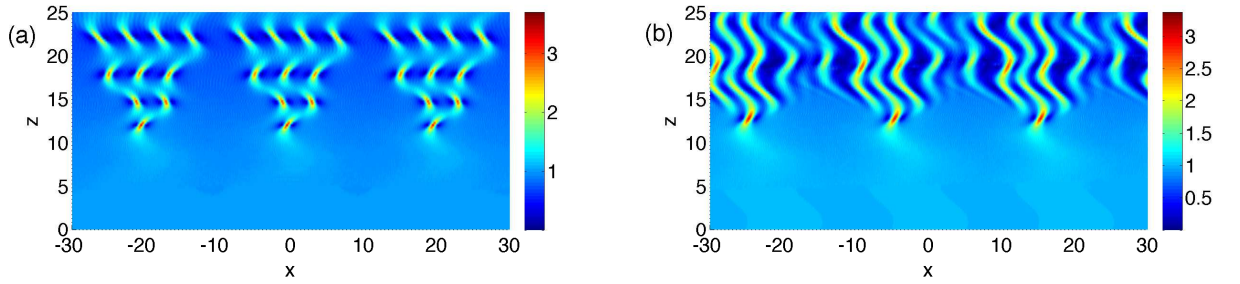


Figura 4.3: Evolução dinâmica de $|\psi|^2$ para o potencial linear $V = \sin(\omega z)x$ com $\omega = 1$. Os parâmetros usados são (a) $\beta = 0$ e (b) $\beta = 0.3$.

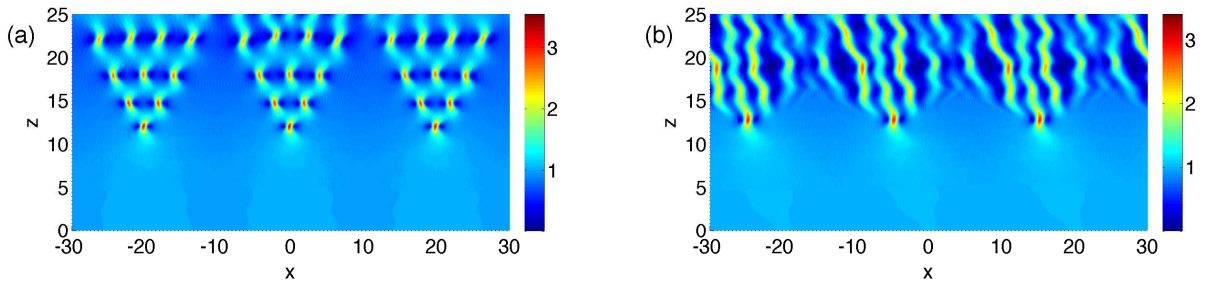


Figura 4.4: Evolução dinâmica de $|\psi|^2$ para o potencial linear $V = \sin(\omega z)x$ com $\omega = 2$. Os parâmetros usados são (a) $\beta = 0$ e (b) $\beta = 0.3$.

Assim, a amplitude e a fase na Eq. (4.5) são dadas por $\rho = 1$ e

$$\eta = \{ [4x\omega^2 - \sin(\omega z)] \cos(\omega z) - \omega z \} / 4\omega^3,$$

respectivamente. Como no caso anterior, obtemos um coeficiente de não linearidade constante $g = G$. Além disso as coordenadas reescaloadas se comportam como $\tau = z$ e $\zeta = x - \sin(\omega z)/\omega^2$.

Nas Figs. 4.3 e 4.4 exibimos os resultados das simulações numéricas diretas da Eq. (4.4) para $\omega = 1$ e $\omega = 2$, respectivamente, com condições iniciais dadas por $\psi(x, 0) = \rho(0)e^{i\eta(x,0)}\Phi[\zeta(x, 0), \tau(0)]$, onde, em $z = 0$, temos $\rho(0) = 1$, $\eta(x, 0) = x/\omega$, $\zeta(x, 0) = x$ e $\tau(0) = 0$, e $\Phi[\zeta(x, 0), \tau(0)]$ é o estado estacionário dada por Eq.(4.20). Ajustamos $\beta = 0$ nas Figs. 4.3a e 4.4a e $\beta = 0.3$ nas Figs. 4.3b e 4.4b. Observando essas figuras verificamos a influência do potencial linear, alterando os comportamentos obtidos anteriormente para o caso do potencial nulo (Figs. 4.1 e 4.2). Em particular, observamos a modulação linear da solução do tipo *breather* apresentada na Fig. 4.2a para o caso com o potencial nulo. Aumentando o

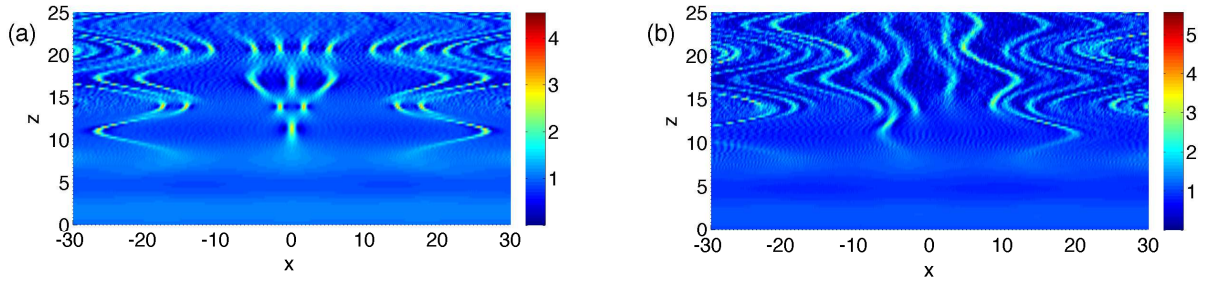


Figura 4.5: Evolução dinâmica de $|\psi|^2$ para o potencial quadrático dado pela Eq. (4.25) com $\omega = 1$, $\sigma = 1/4$ e (a) $\beta = 0$ ou (b) $\beta = 0.3$.

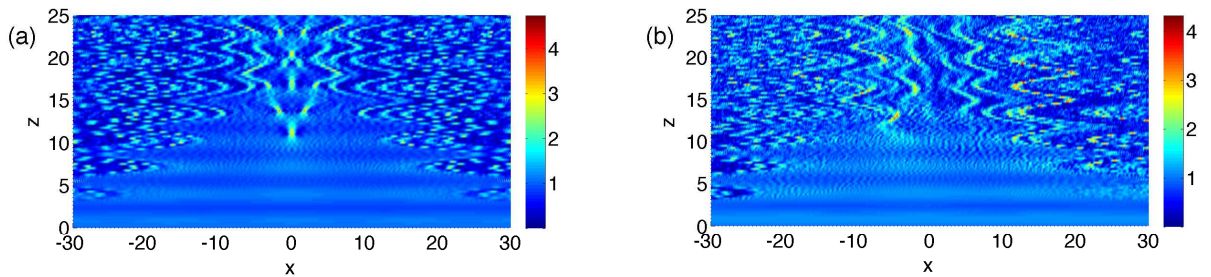


Figura 4.6: Evolução dinâmica de $|\psi|^2$ para o potencial quadrático dado pela Eq. (4.25) com $\omega = 2$, $\sigma = 1/4$ e (a) $\beta = 0$ ou (b) $\beta = 0.3$.

valor da frequência de modulação, o padrão oscilatório da solução aumentará. Vale a pena mencionar que fizemos várias simulações alterando o valor de ω no intervalo $[0.01, 10]$. Em todos esses casos, a modulação das soluções não foram suficientes para destruir a solução. Ao contrário disto, para grandes valores de ω as soluções se tornam inalteradas, isto é, com padrão semelhante às sem modulação.

Enfatizamos que nas Refs. [28, 34, 35, 37, 94–96] um potencial linear foi usado para modular soluções localizadas, mantendo-as estáveis ou instáveis dependendo das condições específicas da modulação, como amplitude, frequência e/ou padrão.

4.3.3 Potencial Quadrático

Agora, consideramos o caso do potencial quadrático em x e oscilatório sobre a coordenada z . Teoricamente, como dito na subseção anterior, pode-se construir este padrão de potencial em um cristal não linear depositando diferentes materiais ao longo deste eixo, com um aumento parabólico da diferença entre eles [14]. Exemplos de modulação quadrá-

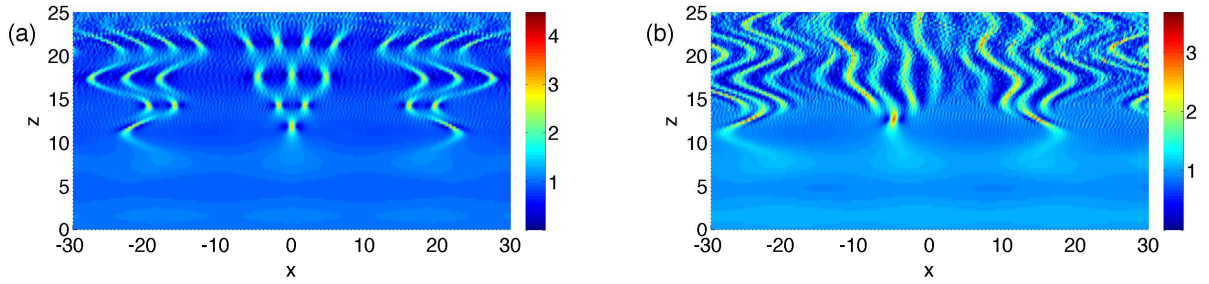


Figura 4.7: Evolução dinâmica de $|\psi|^2$ para o potencial quadrático dado pela Eq. (4.25) com $\omega = 1$, $\sigma = 1/8$ e (a) $\beta = 0$ ou (b) $\beta = 0.3$.

tica de soluções localizadas foram investigados em Refs. [31,34,37,43,55,56,97–101]. Assim como no caso do potencial linear, os potenciais quadráticos mostraram-se importantes para estabilizar soluções instáveis e/ou desestabilizar algumas estáveis, novamente dependendo dos parâmetros e padrões de modulação.

Aqui, como exemplo, consideramos o potencial mudando ao longo da coordenada de propagação z equivalente à escolha apropriada dos parâmetros $a = 1 + \sigma \sin(\omega z)$, $b = 0$, e $c = 0$. Isto implica um coeficiente não linear apresentando um padrão oscilatório dado por $g = G [1 + \sigma \sin(\omega z)]$. Além disso, as novas coordenadas serão

$$\zeta = [1 + \sigma \sin(\omega z)] x, \quad (4.24a)$$

$$\tau = \frac{1}{2\omega} \{ \omega z (\sigma^2 + 2) - \sigma \cos(\omega z) [4 + \sigma \sin(\omega z)] \}. \quad (4.24b)$$

Obtemos também a amplitude e a fase da solução modulada como $\rho = \sqrt{1 + \sigma \sin(\omega z)}$ e $\eta = -[\sigma \omega x^2 \cos(\omega z)] / [2 + 2\sigma \sin(\omega z)]$. Finalmente podemos escrever o potencial quadrático como

$$V = -\frac{1}{2} \frac{x^2 \sigma \omega^2 [\sigma \cos^2(\omega z) + \sin(\omega z) + \sigma]}{1 - \sigma^2 \cos^2(\omega z) + 2\sigma \sin(\omega z) + \sigma^2}. \quad (4.25)$$

Nas Figs. 4.5-4.7 exibimos a evolução do estado estacionário (4.20) obtido numericamente sobre a modulação quadrática em x , com $\chi = \epsilon \cos(\Omega\tau)$ e $\epsilon = 0.01$ sendo uma pequena perturbação. Consideramos na Fig. 4.5a $\beta = 0$ e na Fig. 4.5b $\beta = 0.3$, e os parâmetros de modulação $\omega = 1$ e $\sigma = 0.25$, correspondendo à frequência e amplitude da modulação, respectivamente. Note que na Fig. 4.5a a solução no centro da armadilha se torna inalterada,

mas enquanto ela se divide deixando o centro do potencial ela muda seu perfil natural (sem modulação). Então, a modulação quadrática é propensa a desestabilizar a solução, uma vez que atua com mais intensidade quanto maior for a sua distância do centro da armadilha. Nesse sentido, na Fig. 4.5b observamos que o efeito Raman, que atua desviando a solução para a esquerda, juntamente com o potencial quadrático irá alterar o perfil da solução.

Para investigar a influência da frequência de modulação, utilizamos simulações numéricas com $\omega \in [0.01, 10]$. Verificamos que as mudanças efetivas na solução ocorrem para maiores valores da frequência de modulação. Neste sentido, nas Figs. 4.6a e 4.6b mostramos o mesmo que na Fig. 4.5, mas agora considerando $\omega = 2$.

Finalmente, consideramos alterar o valor da amplitude da modulação do potencial quadrático. Na Fig. 4.7 apresentamos o resultado para $\sigma = 0.125$ e $\omega = 1$. Ao comparar este resultado com o apresentado na Fig. 4.5, observamos que quanto menor o valor da amplitude de modulação, menos alterada será a solução. Assim, por uma mudança apropriada dos parâmetros de modulação, pode-se obter o controle da solução estável ou desestabilizá-la. Isso dependerá do que se espera da modulação.

Capítulo 5

Considerações Finais e Perspectivas

Neste trabalho apresentamos um estudo da modulação de soluções solitônicas em meios não lineares e não homogêneos descritos por equações não lineares de Schrödinger. Com a escolha de um *ansatz* apropriado, utilizamos a técnica de transformação de similaridade para transformar as equações não autônomas em equações autônomas. As soluções foram moduladas com potenciais lineares e/ou quadráticos na coordenada espacial e com padrão oscilatório na coordenada temporal. Conforme apresentado anteriormente, os coeficientes não homogêneos do potencial de modulação e da não linearidade podem ser introduzidos experimentalmente em condensados de Bose-Einstein e em fibras ópticas com uma configuração adequada para permitir a modulação de soluções solitônicas que podem ser controláveis.

No Capítulo 02 investigamos a presença de soluções analíticas para a ELNLS. As inhomogeneidades nos permitiram modular o padrão das soluções localizadas apresentando formas do tipo oscilatório, “*breather*” e uma forma mista. A estabilidade das soluções foi checada numericamente e mostramos algumas soluções estáveis para o modelo investigado.

No Capítulo 03 apresentamos a modulação de soluções localizadas por um meio não linear saturável não homogêneo. Após realizarmos a transformação de similaridade, utilizamos uma abordagem variacional para construir soluções localizadas, as quais foram verificadas como linearmente estáveis para a constante de propagação em $\mu_c < \mu < 0$, onde μ_c é um valor crítico de μ que depende do parâmetro de saturação Γ e da não linearidade G .

Nesse sentido, nós concentramos em três valores para o parâmetro de saturação $\Gamma = 0.05, 0.1$ e 0.15 bem como valores específicos para a frequência de modulação $0.1 \leq \omega \leq 2.0$. Realizando simulações diretas do modelo completo (isto é, Eq. (3.1)), encontramos regiões onde as soluções moduladas são estáveis. A modulação de soluções localizadas produzidas por sistemas com inhomogeneidades controladas nos permite a possibilidade de manipular essas soluções, tornando-as estáveis ou instáveis. O primeiro caso é interessante por causa da longa duração de tais soluções com aplicações em sistemas de comunicação e sensores, enquanto o último caso é relevante quando a solução localizada precisa ser destruída. Finalmente, no ponto de vista experimental, os panoramas de não linearidades correspondentes podem ser realizadas para ondas de luz em cristais fotônicos não-lineares ou em meios ópticos dopados de forma não homogênea (como por exemplo, [14, 72, 73, 102, 103]).

No Capítulo 04 estudamos analiticamente e numericamente a instabilidade modulacional de uma onda contínua em um meio não linear não homogêneo, considerando o efeito do espalhamento Raman estimulado. A influência de uma modulação "espaço-temporal" nos termos linear (potencial) e não linear de uma ENLS estendida (4.4) foi analisada usando um método de transformação de similaridade. Para a faixa de parâmetros considerada aqui, observamos a modulação do trem de sólitons gerados pela IM de uma onda contínua por um potencial linear e quadrático na coordenada x e periódico na coordenada z . Quando na presença de um potencial linear, as soluções apresentam um padrão estável oscilatório, enquanto em alguns casos, para o potencial quadrático, a solução central oscila, enquanto as das bordas sofrem uma grande compressão, levando-as a um padrão caótico. Em ambos os casos, conjecturamos que a modulação poderia ser usada para controlar, de forma estável ou instável, as soluções emergentes da instabilidade modulacional no sistema.

Entre as perspectivas de trabalhos futuros, o uso das técnicas aqui apresentadas, nos permite estudar a solução modulada de ondas solitárias em outros meios não lineares. Entre as não linearidades apresentadas aqui, há o interesse de estudar equações logarítmicas de Schrödinger acopladas.

Lista de trabalhos resultantes desta Tese:

- Artigo Publicado na revista Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation, volume 19, issue 9, Setembro de 2014, Páginas 2928–2934. L.Calaça, A.T. Avelar, D. Bazeia, W. B. Cardoso, *Stable analytical solutions for the Schrödinger equation with logarithm nonlinearity.*
- Artigo Publicado na revista Optical and Quantum Electronics, volume 49, issue 11, Novembro de 2017, Páginas 378-390. L. Calaça, W. B. Cardoso, *Modulation of localized solutions in an inhomogeneous saturable nonlinear Schrödinger equation.*
- Artigo aceito para publicação na revista The European Physical Journal – Special Topics, L. Calaça, A. T. Avelar, B. A. Malomed, W. B. Carodoso, *Influence of pseudo-stimulated-Raman-scattering on the modulational instability in an inhomogeneous nonlinear medium.*

Referências Bibliográficas

- [1] J. S. Russell, "Reports on Waves," 1844.
- [2] D. Korteweg and de Vries, "On the Change of Form of Long Waves Advancing in a Rectangular Canal, and on a New Type of Long Stationary Waves.," vol. 39, no. 5, 1895.
- [3] N. J. Zabusky and M. D. Krushal, "Interaction of "Solitons" in a collisionless plasma and the recurrence of initial states," *Physical Review Letters*, vol. 15, no. 6, 1965.
- [4] Y. S. Kivshar and G. Agrawal, *Optical Solitons: From Fibers to Photonic Crystals*. Elsevier Science, 2003.
- [5] A. S. Davydov and N. I. Kislukha, "Solitons in One Dimensional Molecular Chains," *Physica Status Solidi (B)*, vol. 75, no. 2, p. 735, 1976.
- [6] A. S. Davydov, "Solitons in molecular systems," *Physica Scripta*, vol. 20, no. 3-4, pp. 387–394, 1979.
- [7] J. M. Dudley, G. Genty, and S. Coen, "Supercontinuum generation in photonic crystal fiber," *Rev. Mod. Phys.*, vol. 78, pp. 1135–1184, oct 2006.
- [8] L. F. Mollenauer, R. H. Stolen, and J. P. Gordon, "Experimental Observation of Picosecond Pulse Narrowing and Solitons in Optical Fibers," *Phys. Rev. Lett.*, vol. 45, no. 13, pp. 1095–1098, 1980.
- [9] J. Denschlag, "Generating Solitons by Phase Engineering of a Bose-Einstein Condensate," *Science (80-.)*, vol. 287, pp. 97–101, jan 2000.
- [10] H. J. Mikeska and M. Steiner, "Solitary excitations in one-dimensional magnets," *Adv. Phys.*, vol. 40, no. 3, pp. 191–356, 1991.
- [11] M. Peyrard, "Nonlinear dynamics and statistical physics of DNA," *Nonlinearity*, vol. 17, no. 2, p. R1, 2004.

- [12] J. Aitchison, K. Al-Hemyari, C. Ironside, R. Grant, and W. Sibbett, "Observation of spatial solitons in AlGaAs waveguides," *Electronics Letters*, vol. 28, no. 20, p. 1879, 1992.
- [13] R. Hirota and K. Suzuki, "Theoretical and experimental studies of lattice solitons in nonlinear lumped networks," *P. IEEE*, vol. 61, no. 10, pp. 1483–1491, 1973.
- [14] G. P. Agrawal, *Nonlinear Fiber Optics*. Optics and Photonics, Elsevier Science, 2013.
- [15] J. Yang, *Nonlinear Waves in Integrable and Nonintegrable Systems*. Society for Industrial and Applied Mathematics, jan 2010.
- [16] A. Biswas, *Introduction to non-Kerr Law Optical Solitons*, vol. 1. Chapman & Hall/CRC, 2007.
- [17] S. Inouye, M. R. Andrews, J. Stenger, H. J. Miesner, D. M. Stamper-Kurn, and W. Ketterle, "Observation of Feshbach resonances in a Bose-Einstein condensate," *Nature*, vol. 392, no. 6672, pp. 151–154, 1998.
- [18] M. Theis, G. Thalhammer, K. Winkler, M. Hellwig, G. Ruff, R. Grimm, and J. H. Denschlag, "Tuning the Scattering Length with an Optically Induced Feshbach Resonance," *Phys. Rev. Lett.*, vol. 93, p. 123001, sep 2004.
- [19] B. A. Malomed, *Soliton Management in Periodic Systems*. Springer US, 2006.
- [20] J. Belmonte-Beitia, V. M. Pérez-García, V. Vekslerchik, and V. V. Konotop, "Localized Nonlinear Waves in Systems with Time- and Space-Modulated Nonlinearities," *Physical Review Letters*, vol. 100, p. 164102, apr 2008.
- [21] V. N. Serkin and A. Hasegawa, "Novel Soliton Solutions of the Nonlinear Schrödinger Equation Model," *Physical Review Letters*, vol. 85, no. 21, pp. 4502–4505, 2000.
- [22] V. N. Serkin and A. Hasegawa, "Soliton management in the nonlinear Schrödinger equation model with varying dispersion, nonlinearity, and gain," *Journal of Experimental and Theoretical Physics Letters*, vol. 72, pp. 89–92, jul 2000.
- [23] V. N. Serkin and T. L. Belyaeva, "High-energy optical Schrödinger solitons," *JETP Lett.*, vol. 74, no. 12, pp. 573–577, 2001.
- [24] V. N. Serkin and A. Hasegawa, "Exactly integrable nonlinear Schrodinger equation models with varying dispersion, nonlinearity and gain: application for soliton dispersion," *IEEE J. Sel. Top. Quant.*, vol. 8, pp. 418–431, 2002.

- [25] V. N. Serkin, A. Hasegawa, and T. L. Belyaeva, "Nonautonomous Solitons in External Potentials," *Physical Review Letters*, vol. 98, p. 074102, feb 2007.
- [26] Z. Yan and C. Hang, "Analytical three-dimensional bright solitons and soliton pairs in Bose-Einstein condensates with time-space modulation," *Phys. Rev. A*, vol. 80, p. 063626, dec 2009.
- [27] D.-S. Wang, X.-H. Hu, J. Hu, and W. M. Liu, "Quantized quasi-two-dimensional Bose-Einstein condensates with spatially modulated nonlinearity," *Phys. Rev. A*, vol. 81, no. 2, p. 25604, 2010.
- [28] W. B. Cardoso, A. T. Avelar, and D. Bazeia, "Modulation of breathers in cigar-shaped Bose-Einstein condensates," *Physics Letters A*, vol. 374, no. 26, pp. 2640–2645, 2010.
- [29] W.-P. Zhong and M. R. B. G. Assanto, "Localized nonlinear wavepackets with radial–azimuthal modulated nonlinearity and an external potential," *Phys. Scr.*, vol. 84, no. 5, p. 55001, 2011.
- [30] J. Li, F.-D. Zong, C.-S. Song, Y. Wang, and F.-B. Li, "Dynamics of analytical three-dimensional solutions in Bose-Einstein condensates with time-dependent gain and potential," *Phys. Rev. E*, vol. 85, no. 3, p. 36607, 2012.
- [31] W.-P. Zhong, M. R. Belić, and T. Huang, "Solitary waves in the nonlinear Schrödinger equation with spatially modulated Bessel nonlinearity," *Journal of the Optical Society of America B*, vol. 30, p. 1276, may 2013.
- [32] J.-R. He, L. Yi, and H.-M. Li, "Localized nonlinear waves in combined time-dependent magnetic-optical potentials with spatiotemporally modulated nonlinearities," *Physics Letters A*, vol. 377, pp. 2034–2040, nov 2013.
- [33] A. Nath and U. Roy, "A unified model for an external trap in a cigar-shaped Bose-Einstein condensate," *J. Phys. A Math. Theor.*, vol. 47, no. 41, p. 415301, 2014.
- [34] J. He, E. Charalampidis, P. Kevrekidis, and D. Frantzeskakis, "Rogue waves in nonlinear Schrödinger models with variable coefficients: Application to Bose-Einstein condensates," *Physics Letters A*, vol. 378, pp. 577–583, jan 2014.
- [35] W. B. Cardoso, H. L. Couto, A. T. Avelar, and D. Bazeia, "Modulation of localized solutions in quadratic-cubic nonlinear Schrödinger equation with inhomogeneous coefficients," *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, vol. 48, pp. 474–483, 2017.

- [36] J.-F. Zhang, Q. Tian, Y.-Y. Wang, C.-Q. Dai, and L. Wu, "Self-similar optical pulses in competing cubic-quintic nonlinear media with distributed coefficients," *Phys. Rev. A*, vol. 81, p. 023832, feb 2010.
- [37] J.-R. He and H.-M. Li, "Analytical solitary-wave solutions of the generalized nonautonomous cubic-quintic nonlinear Schrödinger equation with different external potentials," *Physical Review E*, vol. 83, p. 066607, jun 2011.
- [38] J.-d. He and J.-f. Zhang, "Self-similar optical pulses tunneling in cubic-quintic nonlinear media with distributed coefficients," *J. Phys. A Math. Theor.*, vol. 44, no. 20, p. 205203, 2011.
- [39] C.-Q. Dai, Y.-Y. Wang, and X.-G. Wang, "Ultrashort self-similar solutions of the cubic-quintic nonlinear Schrödinger equation with distributed coefficients in the inhomogeneous fiber," *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical*, vol. 44, p. 155203, apr 2011.
- [40] J.-d. He, J.-f. Zhang, M.-y. Zhang, and C.-q. Dai, "Analytical nonautonomous soliton solutions for the cubic-quintic nonlinear Schrödinger equation with distributed coefficients," *Optics Communications*, vol. 285, pp. 755–760, mar 2012.
- [41] E. Yomba, "Traveling-waves and solitons in a generalized time-variable coefficients nonlinear Schrödinger equation with higher-order terms," *Physics Letters A*, vol. 377, pp. 167–175, jan 2013.
- [42] D. Belobo Belobo, G. H. Ben-Bolie, and T. C. Kofane, "Dynamics of matter-wave condensates with time-dependent two- and three-body interactions trapped by a linear potential in the presence of atom gain or loss," *Physical Review E*, vol. 89, p. 042913, apr 2014.
- [43] L. E. A. Meza, A. d. S. Dutra, M. B. Hott, and P. Roy, "Wide localized solutions of the parity-time-symmetric nonautonomous nonlinear Schrödinger equation," *Physical Review E*, vol. 91, p. 013205, jan 2015.
- [44] Z. Yan, "Novel wave structures in the two-dimensional cubic–quintic nonlinear Schrödinger equation with space-modulated potential and nonlinearities," *Nonlinear Dyn.*, vol. 82, no. 1-2, pp. 119–129, 2015.
- [45] S. Loomba, R. Pal, and C. N. Kumar, "Bright solitons of the nonautonomous cubic-quintic nonlinear Schrödinger equation with sign-reversal nonlinearity," *Physical Review A*, vol. 92, p. 033811, sep 2015.

- [46] J. Belmonte-Beitia and G. F. Calvo, "Exact solutions for the quintic nonlinear Schrödinger equation with time and space modulated nonlinearities and potentials," *Physics Letters A*, vol. 373, no. 4, pp. 448–453, 2009.
- [47] H.-Q. Jin, W. Dai, A. Tong, Z.-B. Cai, J.-C. Liang, and J.-R. He, "Dynamics of analytical three-dimensional matter-wave solutions in Bose–Einstein condensates with multi-body interactions," *Phys. Lett. A*, vol. 378, no. 14–15, pp. 1017–1021, 2014.
- [48] Z. Yan and V. V. Konotop, "Exact solutions to three-dimensional generalized nonlinear Schrödinger equations with varying potential and nonlinearities," *Physical Review E*, vol. 80, p. 036607, sep 2009.
- [49] W. B. Cardoso, A. T. Avelar, and D. Bazeia, "Bright and dark solitons in a periodically attractive and expulsive potential with nonlinearities modulated in space and time," *Nonlinear Analysis: Real World Applications*, vol. 11, no. 5, pp. 4269–4274, 2010.
- [50] C. Dai, S. Zhu, and J. Zhang, "Envelope self-similar solutions for the nonautonomous and inhomogeneous nonlinear Schrödinger equation," *Optics Communications*, vol. 283, pp. 3784–3791, oct 2010.
- [51] T. Soloman Raju, "Dynamics of self-similar waves in asymmetric twin-core fibers with Airy-Bessel modulated nonlinearity," *Optics Communications*, vol. 346, pp. 74–79, jul 2015.
- [52] D.-S. Wang, X.-H. Hu, and W. M. Liu, "Localized nonlinear matter waves in two-component Bose-Einstein condensates with time- and space-modulated nonlinearities," *Physical Review A*, vol. 82, p. 023612, aug 2010.
- [53] W. B. Cardoso, A. T. Avelar, D. Bazeia, and M. S. Hussein, "Solitons of two-component Bose-Einstein condensates modulated in space and time," *Physics Letters A*, vol. 374, pp. 2356–2360, may 2010.
- [54] X. Heng-Nong and Z. Miao, "Matter-Wave Solitons in Two-Component Bose—Einstein Condensates with Tunable Interactions and Time Varying Potential," *Commun. Theor. Phys.*, vol. 56, no. 6, p. 1035, 2011.
- [55] L. E. Arroyo Meza, A. de Souza Dutra, and M. B. Hott, "Wide vector solitons in systems with time- and space-modulated nonlinearities," *Physical Review E*, vol. 88, p. 053202, nov 2013.

- [56] K. Kumar De, A. Goyal, T. S. Raju, C. Kumar, and P. K. Panigrahi, "Riccati parameterized self-similar waves in two-dimensional graded-index waveguide," *Optics Communications*, vol. 341, pp. 15–21, apr 2015.
- [57] Y. Yang, Z. Yan, and D. Mihalache, "Controlling temporal solitary waves in the generalized inhomogeneous coupled nonlinear Schrödinger equations with varying source terms," *J. Math. Phys.*, vol. 56, p. 053508, may 2015.
- [58] E. Yomba and G.-A. Zakeri, "Solitons in a generalized space- and time-variable coefficients nonlinear Schrödinger equation with higher-order terms," *Phys. Lett. A*, vol. 377, pp. 2995–3004, dec 2013.
- [59] I. Bialynicki-Birula and J. Mycielski, "Nonlinear wave mechanics," *Annals of Physics*, vol. 100, no. 1-2, pp. 62–93, 1976.
- [60] W. Królikowski, D. Edmundson, and O. Bang, "Unified model for partially coherent solitons in logarithmically nonlinear media," *Physical Review E*, vol. 61, no. 3, pp. 3122–3126, 2000.
- [61] H. Buljan, a. Siber, M. Soljacić, T. Schwartz, M. Segev, and D. N. Christodoulides, "Incoherent white light solitons in logarithmically saturable noninstantaneous nonlinear media," *Physical review. E, Statistical, nonlinear, and soft matter physics*, vol. 68, no. 3 Pt 2, p. 036607, 2003.
- [62] A. Biswas, M. Ekici, A. Sonmezoglu, Q. Zhou, A. S. Alshomrani, S. P. Moshokoa, and M. Belic, "Optical network topology with DWDM technology for log law medium," *Optik*, vol. 160, pp. 353–360, 2018.
- [63] E. S. Hernández and B. Remaud, "General properties of gaussian-conserving descriptions of quantal damped motion," *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, vol. 105, no. 1-2, pp. 130–146, 1981.
- [64] E. F. Hefter, "Application of the nonlinear Schrodinger equation with a logarithmic inhomogeneous term to nuclear physics," *Physical Review A*, vol. 32, no. 2, pp. 1201–1204, 1985.
- [65] S. De Martino and G. Lauro, "Soliton-like solutions for a capillary fluid.," *Wascom 2003: 12th Conference on Waves and Stability in Continuous Media, Proceedings*, pp. 148–152, 2003.

- [66] S. De Martino, M. Falanga, C. Godano, and G. Lauro, "Logarithmic Schrödinger-like equation as a model for magma transport," *Europhysics Letters*, vol. 63, no. 3, pp. 472–475, 2003.
- [67] A. Biswas, C. Cleary, J. E. Watson, and D. Milovic, "Optical soliton perturbation with time-dependent coefficients in a log law media," *Applied Mathematics and Computation*, vol. 217, no. 6, pp. 2891–2894, 2010.
- [68] A. Biswas, M. Fessak, S. Johnson, S. Beatrice, D. Milovic, Z. Jovanoski, R. Kohl, and F. Majid, "Optical soliton perturbation in non-Kerr law media: Traveling wave solution," *Optics and Laser Technology*, vol. 44, no. 1, pp. 263–268, 2012.
- [69] A. Biswas, D. Milovic, and L. Girgis, "Quasi-stationary optical Gaussons," *Optik*, vol. 124, no. 17, pp. 2959–2962, 2013.
- [70] R. M. Teixeira and W. B. Cardoso, "Fractal scattering of Gaussian solitons in directional couplers with logarithmic nonlinearities," *Physics Letters, Section A: General, Atomic and Solid State Physics*, vol. 380, no. 35, pp. 2738–2749, 2016.
- [71] P. Muruganandam and S. Adhikari, "Fortran programs for the time-dependent Gross-Pitaevskii equation in a fully anisotropic trap," *Computer Physics Communications*, vol. 180, pp. 1888–1912, oct 2009.
- [72] B. J. Ainslie, H. P. Girdlestone, and D. Cotter, "Semiconductor-doped fibre waveguides exhibiting picosecond optical nonlinearity," *Electron. Lett.*, vol. 23, pp. 405–406, 1987.
- [73] G. D. Peng, Z. Xiong, and P. L. Chu, "Photosensitivity and Gratings in Dye-Doped Polymer Optical Fibers," *Opt. Fiber Technol.*, vol. 5, no. 2, pp. 242–251, 1999.
- [74] J.-L. Coutaz and M. Kull, "Saturation of the nonlinear index of refraction in semiconductor-doped glass," *J. Opt. Soc. Am. B*, vol. 8, p. 95, jan 1991.
- [75] A. Hasegawa, "Generation of a train of soliton pulses by induced modulational instability in optical fibers," *Opt. Lett.*, vol. 9, p. 288, jul 1984.
- [76] K. Tai, A. Hasegawa, and A. Tomita, "Observation of modulational instability in optical fibers," *Physical Review Letters*, vol. 56, pp. 135–138, jan 1986.
- [77] E. R. Tracy, H. H. Chen, and Y. C. Lee, "Study of Quasiperiodic Solutions of the Nonlinear Schrödinger Equation and the Nonlinear Modulational Instability," *Phys. Rev. Lett.*, vol. 53, pp. 218–221, jul 1984.

- [78] P. V. Mamyshev, S. V. Chernikov, E. M. Dianov, and A. M. Prokhorov, "Generation of a high-repetition-rate train of practically noninteracting solitons by using the induced modulational instability and Raman self-scattering effects," *Optics Letters*, vol. 15, p. 1365, dec 1990.
- [79] K. Blow and D. Wood, "Theoretical description of transient stimulated Raman scattering in optical fibers," *IEEE Journal of Quantum Electronics*, vol. 25, no. 12, pp. 2665–2673, 1989.
- [80] I. M. Uzunov, "Influence of intrapulse raman scattering on the modulational instability in optical fibres," *Optical and Quantum Electronics*, vol. 22, pp. 529–533, nov 1990.
- [81] W. Shuang-Chun, S. Wen-Hua, Z. Hua, F. Xi-Quan, Q. Lie-Jia, and F. Dian-Yuan, "Influence of Higher-Order Dispersions and Raman Delayed Response on Modulation Instability in Microstructured Fibres," *Chinese Physics Letters*, vol. 20, pp. 852–854, jun 2003.
- [82] A. Demircan and U. Bandelow, "Supercontinuum generation by the modulation instability," *Optics Communications*, vol. 244, pp. 181–185, jan 2005.
- [83] P. T. Dinda, C. Ngabireng, K. Porsezian, and B. Kalithasan, "Modulational instability in optical fibers with arbitrary higher-order dispersion and delayed Raman response," *Optics Communications*, vol. 266, pp. 142–150, oct 2006.
- [84] B. Kalithasan, K. Porsezian, and P. Tchofo Dinda, "Modulational instability in resonant optical fiber with higher-order dispersion effect," *Journal of Optics*, vol. 12, p. 035210, mar 2010.
- [85] B. A. Malomed, "Modulational instability in a nonlinear optical fiber induced by a spatial inhomogeneity," *Physica Scripta*, vol. 47, pp. 311–314, feb 1993.
- [86] F. K. Abdullaev, S. A. Darmanyan, S. Bischoff, and M. P. Sørensen, "Modulational instability of electromagnetic waves in media with varying nonlinearity," *Journal of the Optical Society of America B*, vol. 14, p. 27, jan 1997.
- [87] M. Centurion, M. A. Porter, Y. Pu, P. G. Kevrekidis, D. J. Frantzeskakis, and D. Psaltis, "Modulational instability in nonlinearity-managed optical media," *Physical Review A*, vol. 75, p. 063804, jun 2007.
- [88] L. Wang, L.-L. Zhang, Y.-J. Zhu, F.-H. Qi, P. Wang, R. Guo, and M. Li, "Modulational instability, nonautonomous characteristics and semirational solutions for the coupled

- nonlinear Schrödinger equations in inhomogeneous fibers," *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, vol. 40, pp. 216–237, nov 2016.
- [89] L. Wang, J.-H. Zhang, C. Liu, M. Li, and F.-H. Qi, "Breather transition dynamics, Peregrine combs and walls, and modulation instability in a variable-coefficient nonlinear Schrödinger equation with higher-order effects," *Physical Review E*, vol. 93, p. 062217, jun 2016.
- [90] W.-c. Xu, S.-m. Zhang, W.-c. Chen, A.-p. Luo, and S.-h. Liu, "Modulation instability of femtosecond pulses in dispersion-decreasing fibers," *Optics Communications*, vol. 199, pp. 355–360, dec 2001.
- [91] L. Li, Z. Li, S. Li, and G. Zhou, "Modulation instability and solitons on a cw background in inhomogeneous optical fiber media," *Optics Communications*, vol. 234, pp. 169–176, apr 2004.
- [92] I. O. Zolotovskii, V. A. Lapin, and D. I. Sementsov, "Modulation instability of wave packets in inhomogeneous optical waveguides," *Journal of Communications Technology and Electronics*, vol. 58, pp. 66–71, jan 2013.
- [93] I. O. Zolotovskii, V. A. Lapin, and D. I. Sementsov, "Instability of wave packets in nonlinear inhomogeneous waveguides," *Physics of Wave Phenomena*, vol. 21, pp. 20–30, jan 2013.
- [94] W.-D. Xie, F. Ye, W. He, S. Fend, and L. Zhang, "NONAUTONOMOUS DARK SOLITONS IN BOSE-EINSTEIN CONDENSATE," *Modern Physics Letters B*, vol. 27, p. 1350229, dec 2013.
- [95] A. T. Avelar, D. Bazeia, and W. B. Cardoso, "Modulation of breathers in the three-dimensional nonlinear Gross-Pitaevskii equation," *Physical Review E - Statistical, Nonlinear, and Soft Matter Physics*, vol. 82, no. 5, pp. 3–6, 2010.
- [96] L. Calaçã, A. T. Avelar, D. Bazeia, and W. B. Cardoso, "Modulation of localized solutions for the Schrodinger equation with logarithm nonlinearity," *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, 2014.
- [97] W.-P. Zhong and M. Belić, "Breather solutions of the generalized nonlinear Schrödinger equation with spatially modulated parameters and a special external potential," *The European Physical Journal Plus*, vol. 129, p. 234, oct 2014.

- [98] J.-R. He and H.-M. Li, "Nonautonomous bright matter-wave solitons and soliton collisions in Fourier-synthesized optical lattices," *Optics Communications*, vol. 284, pp. 3084–3089, jun 2011.
- [99] L.-C. Zhao, Z.-Y. Yang, L.-M. Ling, and J. Liu, "Precisely controllable bright nonautonomous solitons in Bose-Einstein condensate," *Physics Letters A*, vol. 375, pp. 1839–1842, apr 2011.
- [100] E. Yomba and G.-A. Zakeri, "Dynamics of wide and snake-like pulses in coupled Schrödinger equations with full-modulated nonlinearities," *Physics Letters A*, vol. 380, pp. 530–539, feb 2016.
- [101] G.-A. Zakeri and E. Yomba, "Vector solitons in an extended coupled Schrödinger equations with modulated nonlinearities," *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, vol. 30, pp. 344–359, jan 2016.
- [102] A. Kumar, "Bistability and hysteresis of solitons in inhomogeneously doped fibers with saturating nonlinearity," *Phys. Rev. E*, vol. 58, pp. 5021–5024, oct 1998.
- [103] N. N. Il'ichev, A. V. Kir'yanov, V. P. Shapkin, S. A. Nasibov, and S. Y. Mosaleva, "Nonlinear change in refractive index of $\text{Co}^{2+}:\text{ZnSe}$ at short-pulse single-beam $1.54\text{-}\mu\text{m}$ Z-scan probing," *Appl. Phys. B*, vol. 81, pp. 83–91, jul 2005.