

UNIVERSIDADE FEDERAL DE GOIÁS
PRÓ-REITORIA DE PÓS-GRADUAÇÃO
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO EM CIÊNCIAS E
MATEMÁTICA- PPGECM

Leniedson Guedes dos Santos

**UM ESTUDO SOBRE A ABORDAGEM DE LIMITE DE FUNÇÕES EM LIVROS DE
CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL**

Goiânia

2023



UNIVERSIDADE FEDERAL DE GOIÁS
GERÊNCIA DE CURSOS E PROGRAMAS INTERDISCIPLINARES

**TERMO DE CIÊNCIA E DE AUTORIZAÇÃO (TECA) PARA DISPONIBILIZAR VERSÕES ELETRÔNICAS DE TESES
E DISSERTAÇÕES NA BIBLIOTECA DIGITAL DA UFG**

Na qualidade de titular dos direitos de autor, autorizo a Universidade Federal de Goiás (UFG) a disponibilizar, gratuitamente, por meio da Biblioteca Digital de Teses e Dissertações (BDTD/UFG), regulamentada pela Resolução CEPEC nº 832/2007, sem ressarcimento dos direitos autorais, de acordo com a [Lei 9.610/98](#), o documento conforme permissões assinaladas abaixo, para fins de leitura, impressão e/ou download, a título de divulgação da produção científica brasileira, a partir desta data.

O conteúdo das Teses e Dissertações disponibilizado na BDTD/UFG é de responsabilidade exclusiva do autor. Ao encaminhar o produto final, o autor(a) e o(a) orientador(a) firmam o compromisso de que o trabalho não contém nenhuma violação de quaisquer direitos autorais ou outro direito de terceiros.

1. Identificação do material bibliográfico

Dissertação Tese Outro*: _____

*No caso de mestrado/doutorado profissional, indique o formato do Trabalho de Conclusão de Curso, permitido no documento de área, correspondente ao programa de pós-graduação, orientado pela legislação vigente da CAPES.

Exemplos: Estudo de caso ou Revisão sistemática ou outros formatos.

2. Nome completo do autor

LENIEDSON GUEDES DOS SANTOS

3. Título do trabalho

UM ESTUDO SOBRE A ABORDAGEM DE LIMITE DE FUNÇÕES EM LIVROS DE CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL

4. Informações de acesso ao documento (este campo deve ser preenchido pelo orientador)

Concorda com a liberação total do documento SIM NÃO¹

[1] Neste caso o documento será embargado por até um ano a partir da data de defesa. Após esse período, a possível disponibilização ocorrerá apenas mediante:

a) consulta ao(à) autor(a) e ao(à) orientador(a);

b) novo Termo de Ciência e de Autorização (TECA) assinado e inserido no arquivo da tese ou dissertação.

O documento não será disponibilizado durante o período de embargo.

Casos de embargo:

- Solicitação de registro de patente;
- Submissão de artigo em revista científica;
- Publicação como capítulo de livro;
- Publicação da dissertação/tese em livro.

Obs. Este termo deverá ser assinado no SEI pelo orientador e pelo autor.



Documento assinado eletronicamente por **Karly Barbosa Alvarenga, Professor do Magistério Superior**, em 02/10/2023, às 21:17, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no § 3º do art. 4º do [Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020](#).



Documento assinado eletronicamente por **LENIEDSON GUEDES DOS SANTOS, Discente**, em 03/10/2023, às 17:05, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no § 3º do art. 4º do [Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020](#).



A autenticidade deste documento pode ser conferida no site https://sei.ufg.br/sei/controlador_externo.php?acao=documento_conferir&id_orgao_acesso_externo=0, informando o código verificador **4084256** e o código CRC **C98368D2**.

Leniedson Guedes dos Santos

**UM ESTUDO SOBRE A ABORDAGEM DE LIMITE DE FUNÇÕES EM LIVROS DE
CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL**

Tese apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Educação em Ciências e Matemática, da Pró-Reitoria de Pós-Graduação, da Universidade Federal do Goiás como requisito para a obtenção do título de Doutor em Educação em Ciências e Matemática.

Área de Concentração: Qualificação de Professores em Ciências e Matemática.

Orientadora: Profa. Dra. Karly Barbosa Alvarenga.

Coorientador: Prof. Geci José Pereira da Silva.

Goiânia

2023

Ficha de identificação da obra elaborada pelo autor, através do
Programa de Geração Automática do Sistema de Bibliotecas da UFG.

Santos, Leniedson Guedes dos
UM ESTUDO SOBRE A ABORDAGEM DE LIMITE DE FUNÇÕES
EM LIVROS DE CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL [manuscrito]
/ Leniedson Guedes dos Santos. - 2023.
470 f.: il.

Orientador: Profa. Dra. Karly Barbosa Alvarenga; co-orientador Dr.
Geci José Pereira da Silva.

Tese (Doutorado) - Universidade Federal de Goiás, Pró-reitoria de
Pós-graduação (PRPG), Programa de Pós-Graduação em Educação em
Ciências e Matemática, Goiânia, 2023.

Bibliografia. Apêndice.

Inclui siglas, fotografias, abreviaturas, símbolos, gráfico, lista de
figuras.

1. Cálculo. 2. Hermenêutica. 3. Análise . 4. Forma simbólica. I.
Alvarenga, Karly Barbosa, orient. II. Título.

CDU 51:37



UNIVERSIDADE FEDERAL DE GOIÁS

GERÊNCIA DE CURSOS E PROGRAMAS INTERDISCIPLINARES

ATA DE DEFESA DE TESE

Ata da sessão de Defesa de Tese de LENIEDSON GUEDES DOS SANTOS, que confere o título de Doutor(a) em EDUCAÇÃO EM CIÊNCIAS E MATEMÁTICA, na área de concentração em **Qualificação de Professores de Ciências e Matemática**.

Ao/s **31 dias do mês de agosto de 2023**, a partir da(s) **14:00**, por VIDEOCONFERÊNCIA, realizou-se a sessão pública de Defesa de Tese intitulada “UM ESTUDO SOBRE A ABORDAGEM DE LIMITE DE FUNÇÕES EM LIVROS DE CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL”. Os trabalhos foram instalados pelo(a) Orientador(a), Professor(a) Doutor(a) KARLY BARBOSA ALVARENGA - UFG com a participação dos demais membros da Banca Examinadora: Professor(a) Doutor(a) ALEJANDRO CAICEDO ROQUE - UFS, membro titular externo; Professor(a) Doutor(a) ANTÔNIO MANUEL DIAS DOMINGOS - UNL, membro titular externo; Professor(a) Doutor(a) JOUBERT LIMA FERREIRA - UFOB, membro titular externo; Professor(a) Doutor(a) MAURO LUIZ RABELO - UnB, membro titular interno. Durante a arguição os membros da banca **não fizeram** sugestão de alteração do título do trabalho, mas **houve sugestões de alterações no texto**. A Banca Examinadora reuniu-se em sessão secreta a fim de concluir o julgamento da Tese, tendo sido(a) o(a) candidato(a) **aprovado** pelos seus membros. Proclamados os resultados pelo(a) Professor(a) Doutor(a) KARLY BARBOSA ALVARENGA, Presidente da Banca Examinadora, foram encerrados os trabalhos e, para constar, lavrou-se a presente ata que é assinada pelos Membros da Banca Examinadora.

TÍTULO SUGERIDO PELA BANCA



Documento assinado eletronicamente por **Karly Barbosa Alvarenga, Professor do Magistério Superior**, em 01/09/2023, às 18:47, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no § 3º do art. 4º do [Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020](#).



Documento assinado eletronicamente por **Joubert Lima Ferreira, Usuário Externo**, em 01/09/2023, às 19:41, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no § 3º do art. 4º do [Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020](#).



Documento assinado eletronicamente por **MAURO LUIZ RABELO, Usuário Externo**, em 03/09/2023, às 11:35, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no § 3º do art. 4º do [Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020](#).



Documento assinado eletronicamente por **Antônio Manuel Dias Domingos, Usuário Externo**, em 03/09/2023, às 22:14, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no § 3º do art. 4º do [Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020](#).



Documento assinado eletronicamente por **Alejandro Caicedo Roque, Usuário Externo**, em 12/09/2023, às 12:13, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no § 3º do art. 4º do [Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020](#).



A autenticidade deste documento pode ser conferida no site https://sei.ufg.br/sei/controlador_externo.php?acao=documento_conferir&id_orgao_acesso_externo=0, informando o código verificador **3960382** e o código CRC **ACC00C2D**.

RESUMO

Os livros desempenham um papel fundamental como instrumentos de ensino, o que faz com que eles se tornem importantes objetos de estudo para pesquisadores que buscam compreender as dificuldades de aprendizagem, especialmente no que se refere a Matemática do ensino superior, tema em que esse tipo de investigação ainda é escasso. Com o foco em ensino, este trabalho bibliográfico, de natureza explicativa e de cunho qualitativo, tem como objetivo investigar a forma com que os livros de Cálculo Diferencial e Integral de autoria de Louis Leithold (1994), Hamilton Luiz Guidorizzi (2001) e James Stewart (2013) abordam a definição de limite de funções de uma variável. Para alcançar tal objetivo, o referencial metodológico de pesquisa da Hermenêutica da Profundidade – HP, proposto por Jonh B. Thompson, foi mobilizado com a intenção de responder as seguintes questões: quais os tipos de registros de representação semiótica é possível identificar nessas obras e como eles podem influenciar no ensino de limites de funções? quais aspectos sócio-históricos de produção desses livros influenciaram o autor na escolha por determinada abordagem? Concebendo o livro como forma simbólica, foram articuladas as fases que constituem a HP: a análise sócio-histórica, onde considerou-se informações levantadas sobre a biografia dos autores, a apreciação do prefácio e de mudanças nas demais edições, ações referenciadas pela Análise Histórica de Livros de Matemática de Gert Schubring e o estudo dos Paratextos Editoriais de Gerrard Genette; a análise formal, em que foram identificados os tipos de representações de limites e de funções que aparecem nos livros, bem como suas transformações, por meio das atividades de codificação, categorização e a construção de inventários, sob a luz da Teoria dos Registros de Representação Semiótica - TRRS de Raymond Duval; e a interpretação/reinterpretação em que foi construída uma síntese criativa de significados sobre as obras estudadas. Os resultados mostraram que, nos três livros, há uma predominância do registro algébrico sobre os demais e a ausência de exercícios que propõem conversões entre registros, o que, segundo a TRRS, pode dificultar o ensino do conceito de limite. Individualmente, foram identificadas influências do Movimento da Matemática Moderna, da escola bourbakista e da Reforma do Cálculo na escrita desses livros.

Palavras-chave: Cálculo; Hermenêutica; Análise; Forma Simbólica.

ABSTRACT

Books play a fundamental role as teaching instruments, which makes them important objects of study for researchers seeking to understand learning difficulties, especially with regard to Mathematics in higher education, a topic in which this type of research learning is still scarce. With a focus on teaching, this bibliographical work, of an explanatory and qualitative nature, aims to investigate the way in which the Differential and Integral Calculus books authored by Louis Leithold (1994), Hamilton Luiz Guidorizzi (2001) and James Stewart (2013) addresses the definition of the limit of functions of a variable. To achieve this objective, the methodological research framework of Depth Hermeneutics – HP, proposed by Jonh B. Thompson, was mobilized with the intention of answering the following questions: what types of semiotic representation records are it possible to identify these works and how Can they influence the teaching of function limits? What socio-historical aspects of the production of these books influenced the author in choosing a certain approach? Conceiving the book as a symbolic form, the phases that represent the HP were articulated: the socio-historical analysis, where this information was collected about the authors' biography, the evaluation of the preface and changes in the other editions, actions referenced by the Historical Analysis of Mathematics Books by Gert Schubring and the study of Editorial Paratexts by Gerrard Genette; formal analysis, in which the types of representations of limits and functions that appear in books were identified, as well as their transformations, through event activities, categorization and the construction of inventories, in the light of the Theory of Representation Records Semiotics - TRRS by Raymond Duval; and the interpretation/reinterpretation in which a creative synthesis of meanings on the works studied was constructed. The results demonstrated that, in the three books, there is a predominance of the algebraic register over the others and the absence of exercises proposed between registers, which, according to the TRRS, can make teaching the concept of limit difficult. Individually, influences from the Modern Mathematics Movement, the Bourbakist school and the Calculus Reforms were identified in the writing of these books.

Keywords: Calculus; Hermeneutics; Analysis; Symbolic Form.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 - Segmentos incomensuráveis com relação a u.....	51
Figura 2 - Segmentos comensuráveis.....	51
Figura 3 - Diagonal do Quadrado.....	52
Figura 4 - Volume de uma pirâmide.....	56
Figura 5 - Área de uma região entre uma curva e o eixo das abcissas.....	56
Figura 6 - Método de Descartes.....	57
Figura 7 - Método de Fermat.....	57
Figura 8 - Tangente a Curva $y=x^2$	58
Figura 9 - A área sob a Curva.....	59
Figura 10 - Área sob uma curva 2.....	60
Figura 11 - Fluents e Fluxões.....	62
Figura 12 - Estratégia Metodológica de pesquisa.....	69
Figura 13 - Linha do tempo da Hermenêutica.....	73
Figura 14 - Etapas da Hermenêutica da Profundidade.....	74
Figura 15 - Formas de Investigação da Hermenêutica da Profundidade.....	77
Figura 16 - Classificação dos Registros.....	89
Figura 17 - A Semiótica de Duval.....	92
Figura 18 - Codificação.....	99
Figura 19 - Esquemas.....	103
Figura 20 - Louis C. Leithold.....	108
Figura 21 - Cartaz de O preço de um Desafio.....	109
Figura 22 - Livro Cálculo com Geometria Analítica, vol 1, 3 ed.....	111
Figura 23 - Análise narrativa do livro do Leithold.....	115
Figura 24 - Definição de limite no livro do Leithold.....	116
Figura 25 - Definição de Continuidade.....	116
Figura 26 - Teorema da continuidade de uma função.....	117
Figura 27 - Tratamento em Língua Natural no texto do Leithold.....	120
Figura 28 - Tratamento Gráfico no texto do Leithold.....	121
Figura 29 - Conversão da Língua Natural para o Registro Algébrico no Texto do Leithold.....	123
Figura 30 - Exercício do livro do Leithold.....	127
Figura 31 - Exercício do Leithold 2.....	130
Figura 32 - Exemplo do livro do Leithold.....	132
Figura 33 - Hamilton Luiz Guidorizzi.....	136
Figura 34 - Livro Um curso de Cálculo, vol 1, 5 ed.....	139
Figura 35 - Definição de função no livro do Guidorizzi.....	140
Figura 36 - Observação no livro do Guidorizzi.....	141
Figura 37 - Análise narrativa do livro do Guidorizzi.....	142
Figura 38 - Definição de Continuidade no Livro do Guidorizzi.....	143
Figura 39 - Definição de Limite no Livro do Guidorizzi.....	144
Figura 40 - Relação entre Limite e Continuidade no Livro do Guidorizzi 1.....	144
Figura 41 - Relação entre Limite e Continuidade no Livro do Guidorizzi 2.....	145
Figura 42 - Relação entre Limite e Continuidade no Livro do Guidorizzi 3.....	145

Figura 43 - Registro tabular no Livro do Guidorizzi.....	148
Figura 44 - Tratamento Algébrico.....	149
Figura 45 - Tratamento Gráfico.....	149
Figura 46 - Tratamento em Língua Natural.....	151
Figura 47 - Exemplo de conversão no texto do Guidorizzi.....	153
Figura 48 - Exercício de conversão do registro algébrico para gráfico.....	155
Figura 49 - Conversão nos Exercícios do Guidorizzi.....	156
Figura 50 - James Stewart.....	164
Figura 51 - A Casa Integral.....	166
Figura 52 - Cartaz de Integral Man.....	167
Figura 53 - O Livro Cálculo, vol 1, 7 ed.....	168
Figura 54 - Definição de função do Stewart.....	172
Figura 55 - Diagrama de máquina para uma função.....	173
Figura 56 - Exemplo de dificuldade que pode ser ocasionada.....	173
Figura 57 - Análise narrativa do livro do Stewart.....	175
Figura 58 - Definição menos formal de limite.....	176
Figura 59 - Exemplo de estimativa de limite dado pelo Stewart.....	177
Figura 60 - Levantamento de indeterminação no livro do Stewart.....	178
Figura 61 - Definição precisa de limite no livro do Stewart.....	178
Figura 62 - Definição de continuidade do livro do Stewart.....	179
Figura 63 - Registro Figural.....	180
Figura 64 - Tratamento Gráfico no Livro do Stewart.....	184
Figura 65 - Tabela no livro do Stewart.....	185
Figura 66 - Tratamento Figural.....	185
Figura 67 - Conversão do registro gráfico para o algébrico presente no livro do Stewart.....	188
Figura 68 - Conversão da Língua Natural para o Registro Gráfico no Livro do Stewart.....	189
Figura 69 - Gráfico no Exercício do Stewart.....	191
Figura 70 - Conversão do registro algébrico para o gráfico no exercício do Stewart.....	193
Figura 71 - Conversão de gráfico para língua natural do Stewart.....	194
Figura 72 - Verbo estimar no enunciado da Stewart.....	195
Figura 73 - Verbo Justificar no Exercício do Stewart.....	196
Figura 74 - Transformação de um Pentágono em um Triângulo.....	218
Figura 75 - Transformação de um Triângulo em um Paralelogramo.....	218
Figura 76 Transformação de um Paralelogramo em um retângulo.....	219
Figura 77 - Transformação de um retângulo em um quadrado.....	219
Figura 78 - Transformação de um retângulo em um quadrado.....	220
Figura 79 - Lúnula.....	220
Figura 80 - Área do círculo.....	221
Figura 81 - Área do Círculo 2.....	221
Figura 82 - Área do Círculo 3.....	222
Figura 83 - Área do Círculo 4.....	222
Figura 84 - Área do Círculo 5.....	223
Figura 85 - Área do Círculo 6.....	223
Figura 86 - Área do Círculo 7.....	224

Figura 87 - Área do Círculo 8.....	224
Figura 88 - Área do Círculo 9.....	225
Figura 89 - Esquema das conversões da primeira parte da introdução da seção 2.1 do livro do Leithold.....	234
Figura 90 - Esquema das conversões da segunda parte da introdução da seção 2.1 do livro do Leithold.....	235
Figura 91 - Esquemas de conversões do exemplo 1 da seção 2.1 do livro do Leithold.	236
Figura 92 - Esquemas de conversões do exemplo 2 da seção 2.1 do livro do Leithold.	237
Figura 93 - Esquemas de conversões do exemplo 3 da seção 2.1 do livro do Leithold.	238
Figura 94 - Esquemas de conversões do exemplo 4 da seção 2.1 do livro do Leithold.	239
Figura 95 -Esquemas de conversões da introdução da seção 2.3 do livro do Leithold.	240
Figura 96 - Esquemas de conversões do exemplo 1 da seção 2.3 do livro do Leithold.	241
Figura 97 - Esquemas de conversões da ilustração 1 da seção 2.3 do livro do Leithold.....	242
Figura 98 - Esquemas de conversões do exemplo 2 da seção 2.3 do livro do Leithold.	243
Figura 99 - Esquemas de conversões do exemplo 3 da seção 2.3 do livro do Leithold.	244
Figura 100: Esquemas de conversões do exemplo 4 da seção 2.3 do livro do Leithold.	245
Figura 101 - Esquemas de conversões da primeira parte da introdução da seção 2.4 do livro do Leithold.....	246
Figura 102 -Esquemas de conversões da segunda parte da introdução da seção 2.4 do livro do Leithold.....	247
Figura 103 - Esquemas de conversões da seção 2.5 do livro do Leithold.....	248
Figura 104 - Esquemas de conversões da ilustração 1 da seção 2.6 do livro do Leithold.....	249
Figura 105 - Esquemas de conversões da ilustração 2 da seção 2.6 do livro do Leithold.....	250
Figura 106 - Esquemas de conversões da ilustração 3 da seção 2.6 do livro do Leithold.....	251
Figura 107 - Esquemas de conversões da ilustração 4 da seção 2.6 do livro do Leithold.....	252
Figura 108 - Esquemas de conversões da ilustração 5 da seção 2.6 do livro do Leithold.....	253
Figura 109 - Esquemas de conversões da ilustração 6 da seção 2.6 do livro do Leithold.....	254
Figura 110 - Esquemas de conversões da ilustração 7 da seção 2.6 do livro do Leithold.....	255
Figura 111 - Esquemas das conversões da introdução da seção 3.1 do livro do Guidorizzi.	256
Figura 112 - Esquemas das conversões da primeira parte do exemplo 1 da seção 3.1 do livro do Guidorizzi.	257
Figura 113 - Esquemas das conversões da segunda parte do exemplo 1 da seção 3.1 do livro do Guidorizzi.	258
Figura 114 - Esquemas de conversões do exemplo 2 da seção 3.1 do livro do Guidorizzi....	259
Figura 115 - Esquema de conversões do exemplo 3 da seção 3.1 do livro do Guidorizzi.	260
Figura 116 - Esquema das conversões do exemplo 4 da seção 3.1 do livro do Guidorizzi....	261
Figura 117 - Esquema de conversões do exemplo 5 da seção 3.1 no livro do Guidorizzi.	262
Figura 118 - Esquema de conversões do exemplo 6 da Seção 3.1 do livro do Guidorizzi. ...	263
Figura 119 - Esquema de conversões da introdução da Seção 3.2 do livro do Guidorizzi. ...	264
Figura 120 - Esquema de conversões do exemplo 1 da Seção 3.2 do livro do Guidorizzi. ...	265
Figura 121 - Esquema de conversões do exemplo 2 da Seção 3.2 do livro do Guidorizzi. ...	266
Figura 122 - Esquema de conversões do exemplo 3 da Seção 3.2 do livro do Guidorizzi. ...	267
Figura 123 - Esquema de conversões do exemplo 4 da Seção 3.2 do livro do Guidorizzi. ...	268
Figura 124 - Esquema de conversões do exemplo 5 da Seção 3.2 do livro do Guidorizzi. ...	269

Figura 125 - Esquema de conversões do exemplo 6 da Seção 3.2 do livro do Guidorizzi. ...	270
Figura 126 - Esquema de conversões do exemplo 7 da Seção 3.2 do livro do Guidorizzi. ...	271
Figura 127 - Esquema de conversões do exemplo 8 da Seção 3.2 do livro do Guidorizzi. ...	272
Figura 128 - Esquema de conversões da primeira parte da introdução da Seção 3.3 do livro do Guidorizzi.	273
Figura 129 - Esquema de conversões da segunda parte da introdução da Seção 3.3 do livro do Guidorizzi.	274
Figura 130 - Esquema de conversões do exemplo 1 da Seção 3.3 do livro do Guidorizzi. ...	275
Figura 131 - Esquema de conversões dos exemplos 2 e 3 da Seção 3.3 do livro do Guidorizzi.	276
Figura 132 - Esquema de conversões do exemplo 4 da Seção 3.3 do livro do Guidorizzi. ...	277
Figura 133 - Esquema de conversões do exemplo 5 da Seção 3.3 do livro do Guidorizzi. ...	278
Figura 134 - Esquema de conversões na introdução da Seção 3.4 do livro do Guidorizzi. ...	279
Figura 135 - Esquema de conversões do exemplo 1 da Seção 3.4 do livro do Guidorizzi. ...	280
Figura 136 - Esquema de conversões do exemplo 2 da Seção 3.4 do livro do Guidorizzi. ...	281
Figura 137 - Esquema de conversões do exemplo 2 da Seção 3.4 do livro do Guidorizzi. ...	282
Figura 138 - Esquema de conversões da introdução da Seção 4.1 do livro do Guidorizzi. ...	283
Figura 139 - Esquema de conversões do exemplo 1 da Seção 4.1 do livro do Guidorizzi. ...	284
Figura 140 - Esquema de conversões da introdução da Seção 4.2 do livro do Guidorizzi. ...	285
Figura 141 - Esquema de conversões do exemplo 1 da Seção 4.2 do livro do Guidorizzi. ...	286
Figura 142 - Esquema de conversões do exemplo 2 da Seção 4.2 do livro do Guidorizzi. ...	287
Figura 143 - Esquema de conversões dos exemplos 1, 2, 3 e 4 da Seção 4.3 do livro do Guidorizzi.	288
Figura 144 - Esquema de conversões do exemplo 5 da Seção 4.3 do livro do Guidorizzi. ...	289
Figura 145 - Esquema de conversões da Seção 4.4 do livro do Guidorizzi.	290
Figura 146 - Esquema de conversões da seção O problema da área do capítulo Uma Apresentação do Cálculo do livro do Stewart.	291
Figura 147 - Esquema de conversões da Seção O problema da tangente do capítulo Uma Apresentação do Cálculo do livro do Stewart.	292
Figura 148 - Esquema de conversões da Seção Velocidade do capítulo Uma Apresentação do Cálculo do livro do Stewart.	293
Figura 149 - Esquema de conversões da Seção O limite de uma Sequência do capítulo Uma Apresentação do Cálculo do livro do Stewart.	294
Figura 150 - Esquema de conversões da Seção A soma de uma Série do capítulo Uma Apresentação do Cálculo do livro do Stewart.	295
Figura 151 - Esquema de conversões do exemplo 1 da seção 2.1 do livro do Stewart.	296
Figura 152 - Esquema de conversões do exemplo 2 da seção 2.1 do livro do Stewart.	297
Figura 153 - Esquema de conversões do exemplo 3 da seção 2.1 do livro do Stewart.	298
Figura 154 - Esquema de conversões da introdução da seção 2.2 do livro do Stewart.	299
Figura 155 - Esquema de conversões do exemplo 1 da seção 2.2 do livro do Stewart.	300
Figura 156 - Esquema de conversões do exemplo 2 da seção 2.2 do livro do Stewart.	301
Figura 157 - Esquema de conversões do exemplo 3 da seção 2.2 do livro do Stewart.	302
Figura 158 - Esquema de conversões do exemplo 4 da seção 2.2 do livro do Stewart.	303
Figura 159 - Esquema de conversões do exemplo 5 da seção 2.2 do livro do Stewart.	304

Figura 160 - Esquema de conversões do exemplo 6 da seção 2.2 do livro do Stewart.	305
Figura 161 - Esquema de conversões da subseção Limites laterais da seção 2.2 do livro do Stewart.	306
Figura 162 - Esquema de conversões do exemplo 7 da seção 2.2 do livro do Stewart.	307
Figura 163 - Esquema de conversões do exemplo 8 da seção 2.2 do livro do Stewart.	308
Figura 164 - Esquema de conversões do exemplo 9 da seção 2.2 do livro do Stewart.	309
Figura 165 - Esquema de conversões do exemplo 10 da seção 2.2 do livro do Stewart.	310
Figura 166 - Esquema de conversões da introdução da seção 2.4 do livro do Stewart.	311
Figura 167 - Esquema de conversões do exemplo 1 da seção 2.4 do livro do Stewart.	312
Figura 168 - Esquema de conversões do exemplo 2 da seção 2.4 do livro do Stewart.	313
Figura 169 - Esquema de conversões do exemplo 3 da seção 2.4 do livro do Stewart.	314
Figura 170 - Esquema de conversões do exemplo 4 da seção 2.4 do livro do Stewart.	315
Figura 171 - Esquema de conversões da subseção Limites infinitos da seção 2.4 do livro do Stewart.	316
Figura 172 - Esquema de conversões do exemplo 5 da seção 2.4 do livro do Stewart.	317
Figura 173 - Esquema de conversões da introdução da seção 2.5 do livro do Stewart.	318
Figura 174 - Esquema de conversões do exemplo 1 da seção 2.5 do livro do Stewart.	319
Figura 175 - Esquema de conversões do exemplo 2 da seção 2.5 do livro do Stewart.	320
Figura 176 - Esquema de conversões do exemplo 3 da seção 2.5 do livro do Stewart.	321
Figura 177 - Esquema de conversões da primeira parte da introdução da seção 2.6 do livro do Stewart.	322
Figura 178 - Esquema de conversões da segunda parte da introdução da seção 2.6 do livro do Stewart.	323
Figura 179 - Esquema de conversões do exemplo 1 da seção 2.6 do livro do Stewart.	324
Figura 180 - Esquema de conversões do exemplo 2 da seção 2.6 do livro do Stewart.	325
Figura 181 - Esquema de conversões do exemplo 9 da seção 2.6 do livro do Stewart.	326
Figura 182 - Esquema de conversões da subseção Definições precisas da seção 2.6 do livro do Stewart.	327
Figura 183 - Esquema de conversões do exemplo 13 da seção 2.6 do livro do Stewart.	328
Figura 184 - Esquema de conversões do exemplo 14 da seção 2.6 do livro do Stewart.	329

LISTA DE QUADROS

Quadro 1 - Trabalhos sobre Hermenêutica da Profundidade.	36
Quadro 2 - Trabalhos sobre o conceito de limites e a TRRS.	44
Quadro 3 - Registros de Representação.....	88
Quadro 4 - Livros mais citados	95
Quadro 5- Inventário.	100
Quadro 6 - Categorização.....	101
Quadro 7 - Subcategorias.	101
Quadro 8 - Abreviaturas.	102
Quadro 9 - Inventário 2	104
Quadro 10 - Inventário dos exercícios.....	105
Quadro 11 - Seções não usadas na pesquisa.....	115
Quadro 12 - Seções do livro do Guidorizzi que ficaram de fora da análise.....	142
Quadro 13 - Seções do livro do Stewart que ficaram de fora da análise.....	175
Quadro 14 - Números Totais	207
Quadro 15 - Instituições Pesquisadas.	226
Quadro 16 - Cidades das instituições pesquisadas.	227
Quadro 17 - Livros citados.	228
Quadro 18 - Inventário do texto do Leithold.....	330
Quadro 19 - Inventário dos exercícios do livro do Leithold.....	346
Quadro 20 - Inventário do texto do Guidorizzi.	368
Quadro 21 - Inventário dos exercícios do livro do Guidorizzi.....	399
Quadro 22 - Inventário do texto do Stewart.	406
Quadro 23 - Inventário do exercício do Stewart.....	439

LISTA DE GRÁFICOS

Gráfico 1 - Preferência dos Professores quanto aos Livros de Cálculo.....	96
Gráfico 2 - Distribuição percentual das representações identificadas de acordo com o tipo de registro no trecho do texto analisado do livro do Leithold.....	118
Gráfico 3 - Distribuição percentual dos tratamentos identificados no trecho do texto analisado do livro do Leithold.	119
Gráfico 4 - Distribuição percentual das conversões identificadas no trecho do texto analisado no livro do Leithold.	122
Gráfico 5 - Distribuição percentual das representações presentes nos enunciados dos exercícios analisados no livro do Leithold.	125
Gráfico 6 - Distribuição percentual das conversões propostas nos exercícios analisados no livro do Leithold.	126
Gráfico 7 - Representação de $f(x)$	127
Gráfico 8 Distribuição percentual dos verbos encontrados nos enunciados dos exercícios analisados no livro do Leithold.	128
Gráfico 9 - Distribuição percentual das representações identificadas no trecho do texto analisado do livro do Guidorizzi.	146
Gráfico 10 - Distribuição percentual dos tratamentos identificadas no trecho do texto analisado do livro do Guidorizzi.	148
Gráfico 11 - Distribuição percentual das conversões identificadas no trecho do texto analisado no livro do Guidorizzi.	152
Gráfico 12 - Distribuição percentual das conversões propostas nos exercícios analisados do livro do Guidorizzi.	154
Gráfico 13 - Distribuição percentual dos verbos encontrados nos enunciados dos exercícios analisados no livro do Guidorizzi.	157
Gráfico 14 - Distribuição percentual das representações identificadas no trecho do texto analisado no livro do Stewart.	180
Gráfico 15 - Distribuição percentual dos tratamentos identificados no trecho do texto analisado no livro do Stewart.	182
Gráfico 16 - Distribuição percentual das conversões identificadas no trecho do texto analisado no livro do Stewart.	186
Gráfico 17 - Distribuição percentual das representações identificadas nos enunciados dos exercícios analisados no livro do Stewart.....	190
Gráfico 18 - Distribuição percentual das conversões propostas nos exercícios analisados no livro do Stewart.	192
Gráfico 19 - Distribuição percentual dos verbos encontrados nos enunciados dos exercícios analisados no livro do Stewart.....	195
Gráfico 20 - Comparação sobre o uso de registros no texto.	199
Gráfico 21 - Comparação entre os tratamentos encontrados nos textos.....	200
Gráfico 22 - Comparação entre as conversões dos textos.	201
Gráfico 23 - Comparação entre os registros presentes nos enunciados dos exercícios.	202
Gráfico 24 - Comparação entre as conversões propostas nos exercícios.	203
Gráfico 25 - Comparação entre os verbos dos enunciados dos exercícios.....	204

LISTA DE ABREVIATURAS

CAPES - Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior
CDI – Cálculo Diferencial e Integral
EAESP - Escola de Administração de Empresas de São Paulo
FGV - Fundação Getúlio Vargas
GEEM - Grupo de Estudos em Educação Matemática
HP – Hermenêutica da Profundidade
IF Sudeste MG - Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Sudeste de Minas Gerais
IFBA - Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia da Bahia
IFG - Instituto Federal de Goiás
IFMG - Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de Minas Gerais
IFNMG - Instituto Federal do Norte de Minas Gerais
IFPR - Instituto Federal do Paraná
IFSULDEMINAS - Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Sul de Minas Gerais
IFTMG - Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Triângulo Mineiro
IFTMG - Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Triângulo Mineiro
IFTO - Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Tocantins
IME – Instituto de Matemática e Estatística
IMT -Instituto Mauá de Tecnologia
TRRS – Teoria dos Registros de Representação Semiótica
UEFS - Universidade Estadual de Feira de Santana
UEG - Universidade Estadual de Goiás
UEMG - Universidade do Estado de Minas Gerais
UESB - Universidade Estadual do Sudoeste da Bahia
UESC -Universidade Estadual Santa Cruz
UFBA – Universidade Federal da Bahia
UFG – Universidade Federal de Goiás
UFJF - Universidade Federal de Juiz de Fora
UFOB – Universidade Federal do Oeste da Bahia
UFSJ - Universidade Federal de São João Del-Rei
UFT – Universidade Federal do Tocantins
UFTMG - Universidade Federal do Triângulo Mineiro
UFU - Universidade Federal de Uberlândia
UFVJM - Universidade Federal dos Vales do Jequitinhonha e Mucuri
UNEB – Universidade do Estado da Bahia
UNESPAR - Instituto Federal do Paraná – IFPR, Universidade Estadual do Paraná
UNESPAR - Universidade Estadual do Paraná
UNICAMP – Universidade Estadual de Campinas
UNIFEI - Universidade Federal de Itajubá

UNILA - Universidade Federal da Integração Latino-Americana

UNIP - Universidade Paulista

USP – Universidade de São Paulo

SUMÁRIO

1. INTRODUÇÃO	21
1.1 TRAJETÓRIA DO AUTOR	24
1.2 DELIMITANDO O CONTEXTO DA PESQUISA.....	27
1.3 ESTRUTURA DA TESE	32
2. REVISÃO DE LITERATURA	34
2.1 HERMENÊUTICA DA PROFUNDIDADE E PARATEXTOS EDITORIAIS.....	35
2.2 ESTUDOS SOBRE O ENSINO DE LIMITES: TEORIA DOS REGISTROS DE REPRESENTAÇÃO SEMIÓTICA.	43
3. HISTÓRIA DO CÁLCULO E DO CONCEITO DE LIMITES.....	49
3.1 A IDADE ANTIGA	49
3.1.1 A descoberta dos Incomensuráveis	50
3.1.2. Os paradoxos de Zenão	52
3.1.3. Método da Exaustão	53
3.2 IDADE MÉDIA E RENASCIMENTO.....	54
3.2.1 O Método de Cavalieri	55
3.2.2 O Problema das Tangentes	57
3.2.3 O Cálculo de Leibniz	58
3.2.4 O Cálculo de Newton	60
3.3 A IDADE CONTEMPORÂNEA E A DEFINIÇÃO DE LIMITES	63
4. FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA	67
4.1. HERMENÊUTICA DA PROFUNDIDADE.....	69
4.1.1. História da Hermenêutica	69
4.1.2. Hermenêutica da Profundidade	73
4.1.2.1. A Interpretação da Doxa	75
4.1.2.2. A Análise Sócio Histórica	75
4.1.2.3. A Análise Formal	76
4.1.2.4. A Interpretação/reinterpretação.....	77
4.2. ANÁLISE HISTÓRICA DOS LIVROS DE MATEMÁTICA.....	78
4.3. ESTUDOS DOS PARATEXTOS EDITORIAIS.....	80
4.4 TEORIA DOS REGISTROS DE REPRESENTAÇÃO SEMIÓTICA.....	82
4.4.1. Um Breve Panorama Histórico da Semiótica	82
4.4.2. Teoria dos Registros de Representação Semiótica	86
5. METODOLOGIA DE PESQUISA.....	94
5.1. CRITÉRIOS PARA A ESCOLHA DOS LIVROS	94

5.2.	INTERPRETAÇÃO DA DOXA.....	97
5.3.	ANÁLISE SÓCIO-HISTÓRICA	97
5.4.	ANÁLISE FORMAL	98
5.5.	INTERPRETAÇÃO/REINTERPRETAÇÃO	105
6.	CÁLCULO COM GEOMETRIA ANALÍTICA.....	106
6.1.	A INTERPRETAÇÃO DA DOXA.....	106
6.2.	ANÁLISE SÓCIO-HISTÓRICA	107
6.2.1.	Louis Leithold	108
6.2.2.	O livro Cálculo com Geometria Analítica.....	111
6.3.	ANÁLISE FORMAL	112
6.3.1.	Definição de Função	113
6.3.2.	Análise narrativa e as definições de limite e continuidade	114
6.3.3.	Representações Semióticas.....	117
6.3.4.	Representações Semióticas nos Exercícios	125
6.4.	INTERPRETAÇÃO/REINTERPRETAÇÃO	130
7.	UM CURSO DE CÁLCULO.....	134
7.1.	A INTERPRETAÇÃO DA DOXA.....	134
7.2.	ANÁLISE SÓCIO-HISTÓRICA	135
7.2.1.	Hamilton Luiz Guidorizzi.....	136
7.2.2.	O Livro Um Curso de Cálculo.....	139
7.3.	ANÁLISE FORMAL	140
7.3.1.	Definição de Função	140
7.3.2.	Análise narrativa e as definições de limite e continuidade	141
7.3.3.	Registros de Representação Semiótica	146
7.3.4.	Representações Semióticas nos Exercícios	154
7.4.	INTERPRETAÇÃO/REINTERPRETAÇÃO	159
8.	CÁLCULO.....	162
8.1.	A INTERPRETAÇÃO DA DOXA.....	162
8.2.	ANÁLISE SÓCIO-HISTÓRICA	163
8.2.1.	James Drewry Stewart	164
8.2.2.	O livro Cálculo.....	168
8.3.	ANÁLISE FORMAL	171
8.3.1.	Definição de Função	172
1.1.1.	Análise narrativa e as definições de limite e continuidade	174
1.1.2.	Representações Semióticas.....	179
1.1.3.	Representações Semióticas nos Exercícios	189

1.2. INTERPRETAÇÃO/REINTERPRETAÇÃO	196
9. CONSIDERAÇÕES	198
10. REFERÊNCIAS	210
APÊNDICE 1: MÉTODO DA EXAUSTÃO.....	218
APÊNDICE 2: DADOS DO LEVANTAMENTO DOS LIVROS.....	226
APÊNDICE 3: ESQUEMAS DAS CONVERSÕES.....	234
ESQUEMAS DO LIVRO DO LEITHOLD:.....	234
ESQUEMAS DO LIVRO DO GUIDORIZZI.....	256
ESQUEMAS DO LIVRO DO STEWART:.....	291
APÊNDICE 4: INVENTÁRIOS.....	330
INVENTÁRIO DO TEXTO DO LEITHOLD.....	330
INVENTÁRIO DO TEXTO DO GUIDORIZZI.....	368
INVENTÁRIO DOS EXERCÍCIOS DO LIVRO DO GUIDORIZZI.....	399
INVENTÁRIO DO TEXTO DO STEWART.....	406
INVENTÁRIO DOS EXERCÍCIOS DO LIVRO DO STEWART	439

1. INTRODUÇÃO

“Contra o positivismo, que pára perante os fenômenos e diz: ‘Há apenas fatos’. eu digo: ‘Ao contrário, fatos é o que não há; há apenas interpretações”.

Nietzsche¹

Ao se matricular na disciplina de Cálculo² Diferencial e Integral³ é praticamente inevitável que surjam, na cabeça do estudante universitário atual, preocupações com relação a continuidade de seus estudos: será que vou conseguir acompanhar o curso? será que vou compreender esses conceitos complicados? Será que serei aprovado na disciplina?

Tais preocupações são justificadas, pois essa componente curricular é conhecida como uma das que tem as maiores taxas de evasão e reprovação nos cursos de ciências exatas das universidades do Brasil e do Mundo (Rezende, 2003).

Na Universidade Estadual de Campinas – UNICAMP, por exemplo, a reprovação e a evasão desta disciplina chegaram à taxa de 77,5% em doze anos de levantamento, entre 1997 e 2009 (Garzella, 2013).

Em seus estudos sobre o desempenho dos alunos das disciplinas de Cálculo ministradas no semestre 2015-1 da Universidade Federal de Goiás - UFG, Alvarenga et al (2017) constatam que “[...] aproximadamente, 39% dos estudantes que ficam até o final do curso são reprovados” (p.50).

Um levantamento feito na Universidade Federal do Rural do Semi-Árido (UFERSA) do Rio Grande do Norte mostrou que os índices de reprovação e trancamento nas disciplinas de Cálculo I, somados, no período entre 2016 e 2017 variou na faixa dos 59% a 71% nos turno do diurno. No noturno, a variação ficou entre 74% e 80% (Pereira, 2018).

É importante ressaltar que a pandemia de Covid-19 trouxe um período de excepcionalidade que abalou todos os processos de ensino e aprendizagem com a adoção do

¹In: ALVES, Rubens. **Filosofia da Ciência**: Introdução ao Jogo e Suas Regras. Brasília: Editora Brasiliense. 1981. p. 104.

² Quando o termo “Cálculo” se referir a domínio do saber, curso ou disciplina, utilizaremos letra inicial maiúscula.

³ Como o nome da disciplina varia de instituição para instituição (Cálculo Diferencial e Integral, Cálculo I, Calculo A etc.), quando não nos referirmos a uma disciplina especificamente nomeado por uma instituição, utilizaremos o termo “Cálculo Diferencial e Integral”.

ensino remoto. Por conta disso, acreditamos que os dados mais adequados de se ter como referência de comparação com a realidade atual são os índices de reprovação anteriores a 2020.

Novos estudos estão sendo realizados para entender as consequências do período pandêmico com relação ao desempenho dos estudantes na disciplina de Cálculo Diferencial e Integral. Embora seja um tema importante, e que traz consequências para o futuro do ensino de Cálculo, o aprofundamento dessa discussão foge aos objetivos do presente trabalho.

De qualquer modo, os índices alarmantes citados acima evidenciam uma falta de eficácia tão grande no processo de ensino, no que diz respeito aos conceitos da disciplina de Cálculo Diferencial e Integral, que ela é discutida a algum tempo no meio acadêmico como um verdadeiro “fracasso no ensino de Cálculo” (Rezende, 2003; Neves, 2016).

Reis (2001) faz uma analogia pertinente ao questionar as causas da evasão em tal disciplina:

Comparando, ainda que de forma simplista, a situação com uma encenação teatral vemos, de um lado, os atores (professores) atuando em uma peça mal ensaiada e mal dirigida, fazendo com que o público (alunos), de outro lado, não capte sua mensagem e se retire antes do último ato. De quem é a culpa no palco da sala de aula? Dos atores e sua má performance ou do público e sua insensibilidade? Ou seria do diretor? (p. 21).

Ainda segundo Reis (2001) é comum entre os professores da disciplina de Cálculo Diferencial e Integral a visão de que a principal causa dos problemas relacionados ao ensino e a aprendizagem é a má formação escolar dos alunos, enquanto, por outro lado, os estudantes destacam o ensino deficitário da disciplina como o principal fator responsável pelo referido “fracasso”. Para os discentes, o argumento dos professores de Cálculo tropeça, já que os próprios docentes universitários são responsáveis pela formação dos professores do ensino fundamental e médio, que por sua vez são responsáveis pela formação dos alunos mal preparados que eles recebem na faculdade.

O que se pode extrair dessa discussão é que os problemas sobre o ensino e a aprendizagem evidenciados, transformam o ensino de Cálculo num importante objeto de estudo por parte dos pesquisadores em Educação Matemática.

Os investigadores que se propõe a tal desafio, buscam compreender como acontece a aprendizagem dos principais conceitos da disciplina de Cálculo Diferencial e Integral e quais barreiras precisam ser superadas no processo de ensino para que a aprendizagem aconteça efetivamente. Assim, muitos aspectos podem ser explorados na investigação deste problema como: a formação do professor, os obstáculos didáticos e epistemológicos enfrentados pelos alunos, além do uso de novas tecnologias no ensino de Cálculo. Porém, um instrumento tem

importância central nesse processo e não pode ser ignorado em tais pesquisas: o livro didático⁴ (Choppin, 2004).

Para Carvalho e Lima (2010), do ponto de vista do aluno, o livro didático favorece a aquisição de saberes socialmente relevantes, além de consolidar, ampliar, aprofundar e integrar seus conhecimentos propiciando o desenvolvimento de competências e habilidades, bem como contribui para a formação social, cultural e exercício da cidadania.

Já do ponto de vista do professor, o livro didático auxilia no planejamento, favorece sua formação didático-pedagógica, auxilia na avaliação da aprendizagem e favorece a aquisição de saberes profissionais pertinentes (Carvalho; Lima, 2010; Cury, 2019).

No ensino superior o livro-texto ganha ainda mais relevância se levarmos em consideração que não há um programa nacional, como acontece na Educação Básica. Assim, o autor do texto voltado para o ensino superior ganha mais autonomia para produzir seu material e influenciar a confecção das ementas de cursos, já que não existem requisitos oficiais a serem obedecidos.

Para Choppin (2004) os livros didáticos têm quatro funções essenciais:

- A função referencial, pois constitui um suporte de conhecimentos que um grupo social julga necessário transmitir para futuras gerações.
- Função instrumental, por propor exercícios e atividades que visam favorecer a aquisição de competências e a apropriação de habilidades.
- Função Ideológica ou Cultural, já que é um vetor da língua, cultura e dos valores das classes dirigentes, aculturando jovens gerações.
- Função Documental, pois fornece um conjunto de documentos cuja observação ou confrontação podem desenvolver o espírito crítico do estudante.

Dessa forma, percebemos que, apesar da coexistência de instrumentos que estabelecem com ele relações de concorrência ou de complementaridade, o livro-texto desempenha um papel crucial nas atividades de ensino e aprendizagem de qualquer disciplina (Choppin, 2004).

Mesmo reconhecendo a grande importância como instrumento de ensino e das múltiplas funções pedagógicas que o livro-texto assume, notamos que até pouco tempo havia uma certa carência de estudos sobre livros usados na educação superior (Rozentaliski, 2013). Hoje temos a percepção de que esse cenário não mudou.

⁴ O termo “livro didático” é utilizado com frequência para se referir a livros destinados ao ensino fundamental e médio. Com relação a livros utilizados no ensino superior, é preferível a nomenclatura “livro-texto”. No presente trabalho, utilizamos com mais frequência os termos “livro de Cálculo” e “livro-texto”. Nas vezes em que utilizamos a nomenclatura “livro didático”, fazemos por conta de citações de autores que se referem dessa forma a esse instrumento de ensino.

Dessa forma, concordamos com Gomes (2008) quando afirma que o livro-texto também pode ser encarado como um importante objeto de investigações.

[...] os livros didáticos constituem-se em importantes fontes de pesquisa, e todo o tipo de investigação que analisar a qualidade deste material e as ideologias por ele veiculadas estará analisando, de alguma forma, a qualidade e as ideologias que são mobilizadas no contexto institucional escolar. Em particular, o livro didático de matemática sempre divulga ideologias, principalmente as de seus autores (p. 11).

Portanto, levando em conta os problemas relativos ao ensino dos conceitos do Cálculo Diferencial e Integral evidenciados pelos altos índices de reprovação registrados, bem como o papel central do livro-texto no processo de ensino e sua importância como fonte de pesquisa, apresentamos a seguir um trabalho centrado na análise das abordagens de livros de Cálculo Diferencial e Integral a respeito do conceito de limite de funções de uma variável real.

1.1 TRAJETÓRIA DO AUTOR

Venho de uma pequena cidade no interior da Bahia chamada Santa Rita de Cássia, de aproximadamente 30 mil habitantes, onde cursei o ensino fundamental numa pequena escola particular. Apesar de família humilde, o ensino privado foi resultado de um acordo firmado pelos meus pais por conta do divórcio. Mesmo com praticamente os mesmos professores da rede pública de ensino, este colégio tinha um atrativo que fazia papel decisivo em minha formação: a qualidade do livro didático.

Desde cedo gostava de ler e conheci em minhas leituras das apostilas escolares as áreas de conhecimento que mais me atraíram: Ciências Naturais, História e Geografia. Reza a lenda, que no meu sexto ano discutia com colegas do nono sobre o conteúdo deles de História Geral ou de Geografia. Apesar de estudioso eu tinha um calcanhar de Aquiles: a Matemática. Tinha muita dificuldade e não gostava de estudar a ciência dos números. Talvez porque era a parte dos livros que havia menos textos. Todo o capítulo era repleto de símbolos e notações que eu considerava difíceis de entender.

Assim, em 2000, no último ano do ensino fundamental me vi numa encruzilhada: precisava tirar boas notas nas últimas provas de Matemática para ser aprovado e poder cursar o ensino médio. Seria um vexame um estudante tão bom em outras disciplinas ser reprovado em Matemática. Não havia alternativa senão encarar tal matéria. Então ao pegar meu livro percebi que não entendia muita coisa, mesmo lendo diversas vezes o conteúdo. Logo descobri que me faltavam pré-requisitos para compreender aquele assunto.

Para aprender sobre funções polinomiais do segundo grau, conteúdo do nono ano, seria interessante saber um pouco sobre Polinômios, assunto do oitavo. Para compreender polinômios seria necessário conhecer produtos notáveis que está no currículo do sétimo ano. E assim por diante, numa regressão que parecia infinita.

Diante de tal cenário, resolvi fazer uma revisão completa. Peguei todos os livros de Matemática, do sexto ao nono ano, e comecei a estudar um por um, em ordem, selecionando alguns exercícios já que não havia tempo para responder todos.

O resultado dessa revisão foi a tranquila aprovação e uma nova paixão. A Matemática se tornou minha disciplina favorita. No ensino médio, feito em uma escola pública, gostei tanto dessa matéria que saí de lá com a certeza de que seria um professor de Matemática.

Assim, o livro didático foi um instrumento muito importante para a minha formação na medida em que eu aprendia mais sobre os conteúdos das aulas lendo em casa. Além disso, o hábito de estudar e revisar esses materiais foi algo decisivo para a escolha de minha profissão.

Já morando na cidade de Barreiras, que tem por volta de 150 mil habitantes, ingressei no curso de licenciatura em Matemática pela Universidade do Estado da Bahia (UNEB) em 2007. Durante o curso fiquei fascinado pela disciplina de Cálculo I, mais especificamente pelo conceito de limite. O que mais me impressionou foi a maneira com que aquela complexa definição traduz com eficiência o conceito dinâmico de “aproximação”. Em meus estudos procurava entender todos os detalhes das demonstrações e exercícios resolvidos dos livros de Cálculo para depois reproduzi-los com propriedade. Assim, procurava resolver as questões que envolviam a definição de limites e, por meio dela, respondia até itens que a dispensava.

Na ocasião tive o mesmo encantamento de quando, como membro de uma banda de coreto, ouvi no rádio pela primeira vez uma canção que eu executava em meu saxofone apenas lendo partituras musicais, sem nunca ter ouvido a peça antes. Era incrível perceber que aquela melodia poderia ser traduzida para uma linguagem escrita em seus mínimos detalhes.

No final da graduação, em 2012, fiz um curso de Análise Real em Salvador na escola de verão da Universidade Federal da Bahia (UFBA). Apesar de já ter cursado a disciplina (de forma um tanto precária) na graduação, foi uma das experiências mais impactantes de minha formação e onde pude aprofundar meus estudos de Cálculo. Lembro que fiquei assustado quando o professor afirmou que uma função discreta era contínua em todos os seus pontos. Foi nesse momento que percebi que “definições” que eu tinha estudado na disciplina de Cálculo I durante a graduação, na verdade eram teoremas na disciplina de Análise, como por exemplo a noção de continuidade em um ponto que eu definia com a igualdade entre a função naquele ponto e o limite quando a abcissa tende a ele, quando na verdade se define por épsilons e deltas.

Ao término do curso de verão ingressei no Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT), na Universidade Federal do Tocantins (UFT) de Palmas - TO. Neste curso tive contato com uma abordagem diferente do que eu já tinha visto até então em matéria de limites de função. O livro-texto utilizado no programa definia esse conceito por meio do limite de sequências. Assim, todos teoremas que eu já tinha estudado antes, eram agora demonstrados de forma completamente diferente do que eu estava habituado. Essa diferença de abordagem, de certa forma, despertou minha curiosidade a respeito de como os demais livros trabalhavam o conceito de limite.

Junto com o mestrado veio a oportunidade de lecionar na educação superior. Primeiramente como professor substituto na Universidade Federal do Oeste da Bahia (UFOB), na Universidade do Estado da Bahia (UNEB) e, posteriormente com o título de mestre, como efetivo da UFOB. Durante minha passagem pela UNEB tive a experiência de participar de bancas de monografias e de eventos de Educação Matemática. Foi nesse momento que, dentre várias teorias didáticas, tive o primeiro contato com a Teoria dos Registros de Representação Semiótica de Raymund Duval.

Apesar de não ter me aprofundado muito naquele momento sobre representações semióticas, essa teoria me despertava interesse na medida em que discutia a linguagem e, de certa forma, a natureza do conhecimento matemático, temas que me atraem desde que comecei a estudar Matemática.

Mais tarde, já como professor assistente efetivo da UFOB, vi a necessidade realizar um doutoramento. Elaborei um projeto de pesquisa sobre a análise dos livros de Cálculo Diferencial e Integral e obtive êxito. Tive então o privilégio de ter como orientadora a Professora Doutora Karly Barbosa Alvarenga que me convidou para ingressar no Grupo de Estudos em Educação Matemática (GEEM) e me apresentou ao Professor Geci José Pereira da Silva.

Foi durante os debates e as apresentações do GEEM que fui apresentado pela professora aos referenciais da Hermenêutica da Profundidade de John B. Thompson, da Análise Histórica dos Livros de Matemática de Gert Schubring e dos Estudos dos Paratextos Editoriais de Gerrard Genette. Estes referenciais modelaram e incorporaram a presente pesquisa.

1.2 DELIMITANDO O CONTEXTO DA PESQUISA

Ao olhar com mais atenção essa disciplina, percebemos facilmente que o conceito de limite é considerado fundamento central para o estudo de Cálculo. O argumento utilizado para sustentar tal afirmação é que os demais conceitos estudados nessa componente curricular, a derivada e a integral, são definidos como limites específicos, como discute Rezende (2003).

Ainda segundo Rezende (2003) essa centralidade que o conceito de limite adquire, evidencia uma ênfase ao aspecto formal do Cálculo. Para Reis (2001) essa primazia ocorre por influência do trabalho de Augustin-Louis Cauchy (1789 – 1857) que refinou a teoria dos limites e que criou uma “tradição” que é “indiscutivelmente a tendência predominante no ensino de Cálculo atual” (Reis, 2001, p.62).

Por conta disso, normalmente esse é o conceito de Cálculo em que o aluno tem o primeiro contato, e o que normalmente aparece primeiro nos livros. O raciocínio é simples: como a derivação e a integração podem ser definidas por meio do conceito de limites, primeiramente se estuda os limites para depois se estudar as derivadas e as integrais.

Essa ordem de conteúdos que é seguida nos estudos de Cálculo é confirmada por Rezende (2003):

Por geralmente, a realização didática do ensino de Cálculo e seus livros-texto seguem basicamente o mesmo princípio padrão de sistematização proposto por Cauchy-Weierstrass (limite – continuidade – derivada – diferencial – Integral). Em ambos os níveis, por exemplo, os conceitos são definidos formalmente e os resultados são demonstrados passo a passo segundo um modelo axiomático que parte da definição formal de limite e de alguns “postulados fundamentais” oriundos da Álgebra Moderna e da Análise Matemática, tais como: o conjunto de números reais ser um corpo ordenado, propriedades relativas a ordem de R , o postulado da continuidade de Dedekind-Cantor e etc. (p. 390-391. 2003).

É interessante observar que a ordem dos conteúdos referida por Rezende (2003) como predominante no estudo de Cálculo (limite – continuidade – derivada – diferencial – Integral) é contrária a ordem do desenvolvimento histórico dos conceitos. Ou seja, do ponto de vista cronológico, primeiro surge o cálculo integral, em seguida o cálculo diferencial e muito tempo depois é que se formaliza o conceito de limite (Eves, 2011).

Outro ponto importante a ser discutido sobre a constatação de Rezende (2003) é que essa disposição de conteúdos favorece a apresentação da definição formal dos conceitos e o desenvolvimento de resultados seguindo um modelo axiomático. Ou seja, para ele, isso evidencia mais uma vez uma ênfase que o ensino de Cálculo dá ao aspecto formal dos conceitos.

Além disso, o conceito de limites, normalmente o primeiro conceito a ser estudado num curso de Cálculo, é por muitos considerado um dos que tem a definição mais complexa.

Tal complexidade é evidenciada em um dos questionamentos que Reis (2001) se fez enquanto estudante de graduação em Matemática e que expõe em sua Tese:

[...] do que realmente se tratava a “complexa” definição de limite envolvendo elementos tão “estranhos”, então chamados de épsilons e deltas? E mais: como eu e meus colegas manejavamos tão bem as técnicas de cálculo de limites e ninguém sabia, com um mínimo grau de profundidade, o que realmente significava uma indeterminação do tipo $[0 / 0]$ ou $[\infty / \infty]$? (p.12).

Percebemos nesse relato que o autor e seus colegas não conseguiam relacionar a definição formal de limites com o manejo das técnicas de cálculo do mesmo conteúdo. Ou seja, eles conseguiam manipular e resolver os problemas propostos, como: $\lim_{t \rightarrow 9} \frac{3-\sqrt{t}}{9-t}$ (Thomas; Weir; Hass, 2002, p.106), mas tinha muita dificuldade em entender o que essa manipulação tinha a ver com a definição: $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L \Leftrightarrow (\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0 | 0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \epsilon)$ (Iezzi, p.25, 1983)⁵.

Ao observarmos a definição de limite, como a descrita acima, percebemos que além da dificuldade apresentada em relacioná-la com os procedimentos realizados na resolução dos problemas, a própria definição apresenta dificuldades no que tange a sua compreensão.

Corroboramos a complexidade relatada por Reis (2001) quando, numa análise superficial, percebemos que a definição formal de limite apresenta em sua notação vários símbolos pertencentes a diversos assuntos da Matemática. Assim, encontramos nessa definição conceitos ou símbolos oriundos da Lógica Matemática (Quantificador universal, quantificador existencial e implicação), inequações, módulos, e valores arbitrários para números reais maiores que zero (épsilon e delta). Essa diversidade de símbolos e conceitos exige um conhecimento matemático apurado do estudante no desafio de compreender o significado dessa definição.

Consequentemente percebemos que a rigidez, o formalismo e o detalhismo de tal definição reforça nela um aspecto “estático” que contrasta com a “dinâmica” da ideia intuitiva do conceito de limite. Cornu (1983) identifica nesse contraste uma lacuna entre o conceito e a definição de limite, ao mesmo tempo em que concorda com a complexidade desse último:

Para a noção de limite, há uma lacuna entre o próprio conceito de limite e a forma como a definição é dada. O aspecto "dinâmico" (tudo o que está ligado ao fato de "tender a", ou "aproximar de") não é traduzido pela definição, que é estática. A definição transformou uma noção extremamente complexa onde o infinito, a ideia de aproximação, a ideia de se aproximar de algo, sem alcançá-lo ou ao alcançá-lo, se

⁵ Alguns autores consideram um erro sintetizar a definição de limites dessa forma por misturar símbolos lógicos (como \Leftrightarrow) com símbolos matemáticos.

misturam em um objeto de outra natureza, onde quantificadores e desigualdades são misturados (p. 23, tradução nossa)⁶.

Dessa forma, podemos afirmar que tanto a importância do conceito de limite para estudo de Cálculo, quanto a dificuldade dos estudantes em compreender tal conceito e relacioná-lo com sua definição, são indiscutíveis.

Diante desse quadro, surge naturalmente a necessidade de entendermos melhor essa dificuldade de compreensão do conceito de limite que tanto aflige professores e estudantes de Cálculo. Assim, não podemos perder de vista que o conhecimento matemático tem características distintas das demais áreas do saber.

Segundo Duval (2016):

Há duas questões cruciais nas pesquisas sobre o ensino e a aprendizagem matemática: a primeira refere-se ao que caracteriza uma atividade matemática em relação aos outros tipos de atividades científicas ou intelectuais; e a segunda trata do que é compreender matemática e, desse modo, versa sobre os critérios que permitem saber se foi compreendida. [...] As respostas não são somente matemáticas, mas cognitivas uma vez que os alunos, em sua grande maioria, esbarram em dificuldades de compreensão que não conseguem superar e que não existem em outros domínios do saber. Tais dificuldades têm origem no fato de que as condições epistemológicas e cognitivas de acesso a objetos estudados em matemática são radicalmente diferentes das condições de acesso aos objetos estudados em outras disciplinas (p.1).

No que diz respeito a primeira questão, Duval (2012) nos chama a atenção para o fato de que “os objetos matemáticos não estão diretamente acessíveis à percepção ou à experiência intuitiva imediata, como são os objetos comumente ditos “reais” ou “físicos”. É preciso, portanto, dar representantes” (p.268).

Assim, só podemos ter contato com os objetos matemáticos por meio de suas representações, sejam elas mentais ou semióticas. De fato, objetos como circunferências ou triângulos, por exemplo, não existem na realidade. São abstrações. O que existem são objetos com esses formatos.

Outro exemplo interessante é o ponto geométrico: existe algo no mundo real que não tenha dimensões (comprimento, altura e largura)? O ponto é algo adimensional e, portanto, não existe como objeto real. Sobre isso D’amore, Pinilla e Iori (2015) concluem:

O fato é que os objetos da matemática [...], não são coisas (por exemplo, não são percebidas pelos sentidos: ninguém os pode ver, tocar, saborear, ouvir, sentir, pesar,

⁶ *Pour la notion de limite, il y a un écart do au concept même de limite et à la façon dont on en donne la définition. L’aspect “dynamique” (tout ce qui est lié au fait de “tendre vers”, au fait de “se rapprocher de”) n’est pas restitué par la définition, qui est statique. La définition a transformé une notion extrêmement complexe où se mêlent l’infini, l’idée d’approximation, l’idée de se rapprocher de quelque chose, sans l’atteindre ou em l’atteignant, em um objet d’une autre nature, où se mêlent des quantificateurs et des inégalités.*

colorir, quebrar). Não existem, na realidade, coisas chamadas pontos matemáticos, figuras, retas, igualdade; nenhum objeto matemático é uma coisa real (p.131).

Portanto, a natureza abstrata dos objetos matemáticos faz com que a única maneira possível de entrar em contato com eles seja por meio das representações. Dessa forma, o estudo das representações semióticas proposto por Duval (2016) nos parece imprescindível para entender como se dá a aprendizagem matemática. Assim, atacamos a segunda questão crucial levantada por ele: o que é compreender Matemática?

Para entendermos a concepção de aprendizagem da teoria de Duval, devemos levar em consideração que um objeto matemático pode ser representado semioticamente de diversas maneiras. Assim, uma função quadrática, por exemplo, pode ser representada de forma algébrica, por meio de gráficos, tabelas ou ainda descrita em linguagem natural.

Essas formas sistemáticas de representar o mesmo objeto matemático são chamadas de registros de representação. São, portanto um sistema de signos utilizados para identificar uma representação de um objeto de saber (Henriques; Almouloud, 2016).

Cada um desses registros possui características próprias, vantagens e limitações. Por isso, como a única maneira de entrar em contato com objetos matemáticos é por meio de suas representações, “a atividade matemática requer, sempre, a mobilização sinérgica de dois, às vezes de três registros de representação (...), dependendo dos domínios matemáticos (aritmética, álgebra, geometria, análise, etc.)” (Duval, 2016, p.28).

Para a Teoria dos Registros de Representação Semiótica a compreensão de um objeto matemático está diretamente relacionada a capacidade de coordenação dos registros de representação. Segundo Duval: “A questão da coordenação dos registros e os fatores suscetíveis de favorecer esta coordenação aparecem como questões centrais para aprendizagens intelectuais” (2009, p. 39).

Assim, segundo essa teoria, aprender um conceito matemático, como é o caso de limite de funções de uma variável, implica reconhecer tal conceito nos mais diversos registros, efetuar plenamente os tratamentos dentro de cada registro e converter eficientemente as representações de um registro para outro.

Diante de tal teoria e da importância do livro-texto para o processo de ensino, já ressaltada anteriormente, cabe-nos questionar sobre se os livros de Cálculo atendem as preocupações levantadas por Duval com relação as representações semióticas.

Dessa forma, naturalmente surgem inquietações sobre como os autores dos livros de Cálculo trabalham os registros de representação semiótica. Questionamentos quanto a diversidade de registros trabalhados, sobre como tratam as representações dentro de cada

registro ou como as convertem de um registro para outro, ou ainda, se eles propõem exercícios que sinalizam para atividades cognitivas que levem em conta a diversidade dos registros de representação, nos parecem bem pertinentes nesse contexto.

Na busca por respostas a esses questionamentos, devemos ter em mente que, a escolha de abordagem feita pelo autor do livro, seja por optar trabalhar com a diversificação de registros ou por tratar prioritariamente com um registro apenas, por exemplo, foi feita dentro de um contexto sócio-histórico em que ele estava inserido no momento da produção de sua obra.

Assim, para melhor compreender a forma como o autor de um livro aborda determinado conteúdo, no nosso caso o conceito de limite, se faz necessário conhecer minimamente o contexto de sua publicação.

Schubring (2018a), ao defender que a análise de livros didáticos, chamados por ele de livros-textos, leve em consideração os aspectos sócio-históricos de sua produção nos aponta para caminhos metodológicos de pesquisa mais amplos. Ele ainda defende que “Essa abordagem é melhor, visto que “o” autor de um livro-texto usualmente consiste em um grupo muito maior que o indicado pelos nomes na folha de rosto; o autor mencionado representa uma “coletividade” ampliada de colaboradores” (Schubring, 2018, local. 340).

Essa “coletividade” se refere não só a pessoas que contribuíram para a produção da obra, como também ao contexto institucional em que ela está inserida, pelas restrições e demandas sociais, pelos programas oficiais, tipologias de conhecimento e tradições que o autor atende.

Segundo Alvarenga e Paixão (2017): “[..] para realizar um estudo abrangente do livro didático, deve-se focar a sua problemática sobre diferentes ópticas, dentre elas: a interna, a política, a econômica, a psicopedagógica etc.” (p.159)

Assim, encontramos no arcabouço teórico de John B. Thompson, conhecido como Hermenêutica da Profundidade, uma metodologia de investigação bastante interessante no que compreende a busca pelo entendimento de uma obra em seus aspectos formais e sócio-históricos. Dessa maneira, ao chamar de forma simbólica tudo que pode ser interpretado, como o livro-texto por exemplo, Thompson (2011, p. 366) afirma: “Formas simbólicas não subsistem num vácuo, elas são produzidas, transmitidas e recebidas em condições sociais e históricas específicas”.

Assim como as ideias de Schubring e Thompson, outro aporte teórico importante para o estudo do contexto dos livros didáticos diz respeito a proposta metodológica de pesquisa de Gerard Genette sobre os paratextos editoriais. Para ele “[..] o paratexto é aquilo por meio de que um texto se torna livro e se propõe como tal a seus leitores, e de maneira mais geral ao público” (Genette, 2009, p.9). Ou seja, além do texto de um livro existem elementos como a

capa, o sumário, o prefácio, as dedicatórias, as ilustrações etc. que nos fornecem dados importantes sobre a conjuntura em que a obra foi produzida.

Diante deste cenário, onde a relevância de se estudar a forma com que os livros de Cálculo trabalham o conceito de limite parece inquestionável e os caminhos metodológicos de pesquisa se mostram frutíferos, buscamos responder os seguintes questionamentos:

Quais os tipos de registros de representação semiótica é possível identificar nessas obras e como eles podem influenciar no ensino de limites de funções? e quais aspectos sócio-históricos de produção desses livros influenciaram o autor na escolha por determinada abordagem?

Levando em conta tais questões, definimos como objetivo geral de pesquisa: investigar a forma com que os livros de Cálculo Diferencial e Integral abordam a definição de limite de funções de uma variável.

Tendo em vista as teorias e os caminhos metodológicos de investigação considerados e com o intuito de alcançarmos o objetivo geral exposto acima, elaboramos os seguintes objetivos:

- analisar como os livros mobilizam os registros de representação semiótica usados para abordar a definição de limites;
- conhecer os contextos sócio-históricos de produção desses livros com o intuito de identificar quais destes aspectos influenciaram o autor na escolha por determinada abordagem.

Assim, apresentamos a seguir a estrutura deste trabalho.

1.3 ESTRUTURA DA TESE

Além deste capítulo introdutório, onde expomos as justificativas para a realização da pesquisa, a delimitação do contexto investigativo, o questionamento norteador e os objetivos, esta tese está organizada em 7 capítulos, além das considerações.

No capítulo 2 apresentamos uma revisão de literatura sobre pesquisas que envolvem o estudo do conceito de limites de funções de uma variável, destacando artigos, dissertações e teses, que julgamos dialogar com a proposta aqui apresentada, demarcando sempre seus objetivos, marcos teóricos, metodologias de pesquisa e resultados.

Fazemos no capítulo 3 uma incursão pela história do conceito de limites, desde os problemas que originaram seu uso na Grécia antiga até a formalização de sua definição no final do século XIX, situando tal conteúdo como parte da evolução do Cálculo Diferencial e Integral

ao longo do tempo e destacando-o como o último grande conceito a ser definido formalmente nesta área da Matemática.

Já no capítulo 4, detalhamos a fundamentação teórica que subsidia o presente trabalho ao destacar o arcabouço metodológico de pesquisa da HP como a teoria organizacional desta investigação, a Teoria dos Registros de Representação Semiótica, que guiará a análise formal das obras objetos de estudo, assim como os elementos da Análise Histórica dos Livros de Matemática e dos Estudos dos Paratextos Editoriais que ajudaram a fundamentar a análise Sócio-histórica dos livros.

A metodologia de pesquisa utilizada é detalhada no capítulo 5, onde descrevemos os critérios utilizados para a escolha dos livros analisados e a definição do *corpus*. Explicamos como foi feita análise formal semiótica que consistiu na coleta de dados, na produção de inventários, no processo de categorização e na produção de inferências; e explicitamos como foi realizada a análise sócio-histórica.

Nos Capítulos 6, 7 e 8 apresentamos as análises dos livros “Cálculo com Geometria Analítica” do autor estadunidense Louis Leithold, “Um Curso de Cálculo” de autoria do brasileiro Hamilton Luiz Guidorizzi e “Cálculo” do canadense James Drewry Stewart, enquanto no Capítulo 9 estão nossas considerações.

2. REVISÃO DE LITERATURA

“- Eu ofereço algo inestimável.
- Minha liberdade?
- Não. A liberdade pode ser tirada, como você bem sabe. Ofereço conhecimento.”

O Conde de Monte Cristo⁷

A revisão de literatura é uma etapa fundamental para a produção científica, pois, ela dá ao pesquisador a oportunidade de conhecer a perspectiva histórica dos trabalhos que foram (e estão sendo) desenvolvidos acerca de seu objeto de estudo, o que lhe proporciona o conhecimento de novos métodos, ideias e questionamentos, enriquecendo, dessa forma, seu processo investigativo.

Segundo Triviños (1987):

O processo de avaliação do material bibliográfico que o pesquisador encontra lhe ensinará até onde outros investigadores têm chegado em seus esforços, os métodos empregados, as dificuldades que tiveram de enfrentar, o que pode ser ainda investigado etc. Ao mesmo tempo, irá avaliando seus recursos humanos e materiais, as possibilidades de realização de seu trabalho, a utilidade que os resultados alcançados podem emprestar a determinada área do saber e da ação (p. 100).

Assim, um pesquisador precisa se situar historicamente a respeito do seu tema, ou seja, conhecer o que a comunidade acadêmica está produzindo a respeito de seu objeto investigativo, quais aspectos já foram abordados, que ainda não foram, que métodos foram empregados nas investigações realizadas até então e quais teorias são utilizadas para embasar suas conclusões.

Tendo em vista essa importância, apresentamos nesta seção uma revisão de literatura produzida por meio de um levantamento feito no site do Catálogo de Teses e Dissertações e no Portal de Periódicos da CAPES, onde foram selecionados trabalhos publicados entre 2008 e 2021, que tinham características (metodológicas de pesquisa, temáticas ou teóricas) semelhantes ao presente trabalho.

Escolhemos o ano de 2008 por ter sido o momento da publicação do primeiro trabalho acadêmico a citar claramente a HP como aporte teórico em potencial para estudos na área da Educação Matemática no Brasil (Souza; Dassisti; Andrade, 2018). Não encontramos, em nossos

⁷ O CONDE DE MONTE CRISTO. Direção: Kevin Reynolds. Produção de Touchstone Pictures. Estados Unidos: Buena Vista Pictures, 2002. 1 DVD.

levantamentos, trabalhos que utilizaram Hermenêutica da Profundidade e Teoria dos Registros de Representação Semiótica, concomitantemente, para analisar livros didáticos, principalmente de Cálculo.

Dessa forma, descrevemos a seguir nossa revisão bibliográfica dividida em duas partes: primeiramente exibimos algumas pesquisas que se utilizaram do arcabouço teórico da HP para analisar livros didáticos e, entre eles, trabalhos que lançaram mão de estudos de Paratextos Editoriais com o mesmo fim. Em seguida, mostramos trabalhos que estudam o ensino de limites por meio da análise de livros didáticos, bem como publicações que se utilizaram do referencial da TRRS para estudar o ensino do conceito de limites.

2.1 HERMENÊUTICA DA PROFUNDIDADE E PARATEXTOS EDITORIAIS

Nosso levantamento de trabalhos que utilizaram a HP como referencial metodológico de investigação, nos sites da CAPES, foi feito utilizando-se dos descritores: Hermenêutica da Profundidade, Educação Matemática e Livros Didáticos. Foram considerados artigos, dissertações e teses publicados a partir de 2008, pois, embora a tese de Rolkouski (2006) seja considerada o primeiro trabalho em Educação Matemática a citar a metodologia de pesquisa proposta por John B. Thompson, foi a dissertação de Oliveira (2008) quem primeiro detalhou e, de fato, propôs a HP como arcabouço teórico metodológico para a análise de textos didáticos (Souza; Dassic; Andrade, 2018; Netto; Pulcinelli; Andrade, 2017). Assim, tomamos o ano de publicação desse trabalho como um marco para balizar nossas buscas.

Após o levantamento, lemos os resumos a fim de destacar as pesquisas que tivessem maior relação com a nossa proposta de trabalho. Damos preferência a trabalhos que mobilizaram a HP para a análise de livros ou documentos específicos, descartando do rol, pesquisas que utilizaram uma gama muito grande de livros e documentos, as que não deixam claro os procedimentos realizados ou aquelas que tentaram apenas discutir o uso da HP como arcabouço metodológico de investigação.

No Quadro 1 elencamos os trabalhos sobre os quais discorreremos com mais detalhes a seguir, destacando contribuições e distinções com relação a nossa pesquisa.

Quadro 1 - Trabalhos sobre Hermenêutica da Profundidade.

Autor	Ano	Tipo	Título
Virgínia Cardia Cardoso	2009	Tese	A Cigarra e a Formiga: uma reflexão sobre a Educação Matemática brasileira da primeira década do século XXI
Mirian Maria Andrade	2012	Tese	Ensaio sobre o Ensino em geral e o de Matemática em Particular, de Lacroix: Análise de uma Forma Simbólica à luz do Referencial Metodológico da Hermenêutica de Profundidade.
Tatiane Tais Pereira da Silva.	2013	Dissertação	Os movimentos modernos: compreensões e perspectivas a partir da análise da obra “Matemática-Curso Ginásial” do SMSG”.
Carlos Souza Pardim	2013	Dissertação	Orientações Pedagógicas nas Escolas Normais de Campo Grande: Um olhar sobre o manual metodologia do ensino primário, de Theobaldo Miranda Santos.
Danilo Pires de Azevedo e Maria Ednéia Martins Saladim	2019	Artigo	Livros didáticos de Matemática da EJA: uma análise com Hermenêutica de Profundidade
Fernando Guedes Cury	2019	Artigo	Análise de um Livro Didático de Geometria Plana Apoiada na Hermenêutica de Profundidade

Fonte: Elaborado pelo autor.

É importante ressaltar que destes trabalhos que utilizaram o referencial metodológico de pesquisa da HP, apenas o trabalho de Cury (2019) se ocupa de analisar um livro didático do ensino superior. Além disso, das 6 pesquisas, 4 também lançaram mão dos estudos dos paratextos editoriais de Genette (2009): Andrade (2012), Silva (2013), Pardim (2013) e Azevedo e Saladim (2019). Estes pesquisadores afirmam que realizaram o estudo dos paratextos editoriais, principalmente no momento da análise formal de seus livros ou documentos, embora admitam que paratextos, como o prefácio, auxiliam bastante para a produção da análise sócio-histórica.

O primeiro trabalho que destacamos é a tese de Cardoso (2009). Nela, a autora analisa as propostas para o ensino da Matemática registradas nos textos produzidos pelo governo federal para servirem de parâmetros para o Ensino Médio após a LDB/96, mais especificamente os Parâmetros Curriculares Nacionais do Ensino Médio-PCNEM/99, os Parâmetros Curriculares Nacionais do Ensino Médio plus- PCNEM+/02 e as Orientações Curriculares para o Ensino Médio- Orientações Curriculares/06.

O referencial teórico metodológico de pesquisa utilizado por Cardoso (2009) se baseia no Paradigma Indiciário de Carlo Ginzburg e na HP. Ginzburg se baseou nos métodos de investigação da medicina, por meio da interpretação de indícios ou sintomas, para elaborar sua proposta para o estudo das ciências humanas, mais especificamente no estudo da história. Esse referencial é defendido por Garnica (2007) no estudo da Educação Matemática.

Sobre o uso desses dois referenciais metodológicos de investigação a autora ainda afirma:

Estamos estabelecendo diálogo entre dois referenciais: o Paradigma Indiciário de Ginzburg e a Hermenêutica de Profundidade de Thompson. Ambos convergem em vários pontos: aplicam-se às pesquisas qualitativas; tomam como fontes os materiais já existentes, práticos e cotidianos; propõem-se aos campos das Ciências Humanas; utilizam-se de ferramentas semióticas. Julgamos adequado ao nosso problema de pesquisa e aos nossos objetivos nos ancorarmos nos dois referenciais, uma vez que eles não são excludentes, nem conflitantes. Nosso trabalho, ao longo do processo de seu desenvolvimento, segue a HP. Porém, podemos dizer que seguimos indícios ao rastreamos fontes, ao levantarmos conjecturas de trabalho e procurarmos por pistas que indiquem tendências em cada uma das fases da HP (Cardoso, 2009, p. 32).

Cardoso (2009) começa sua tese realizando uma leitura inicial dos documentos para levantar indícios de alguma tendência. Ela considera esse primeiro passo como interpretação da Doxa ou, como ela denominou, “Hermenêutica do Cotidiano”. No caso do nosso trabalho essa fase pré-eliminar foi realizada por meio de busca de informações sobre os livros objetos de estudo em publicações anteriores.

Para a análise sócio histórica ela estuda os textos que antecederam ou motivaram a publicação dos parâmetros e orientações para identificar e descrever as situações espaços-temporais. Ou seja, a autora se ocupa apenas de um dos níveis da análise sócio-histórica sugeridos por Thompson para a realização desta fase metodológica da pesquisa, deixando de focar nos outros quatro níveis (campos de interação, instituições sociais, estrutura social e meios técnicos de transmissão), embora apresente em seu trabalho aspectos importantes de tais etapas.

Sobre este aspecto, concordamos com Cardoso (2009) no sentido de que não se faz necessário realizar cada um dos níveis de análise sugerido por Thompson, seja para análise

sócio-histórica, seja para análise formal. Tudo vai depender dos objetivos da pesquisa e da viabilidade de realização destes níveis.

Para Thompson (2011) o mais importante é que não se realize apenas uma das dimensões de sua pesquisa, pois, podemos cair na falácia do reducionismo sócio-histórico ou na falácia do internalismo da análise formal.

Cabe destacar aqui o que Cardoso (2009) considera em seu trabalho quando estuda as relações de poder: “Não tivemos a preocupação de considerar as relações de poder que se referem à classe social, etnia, sexo [...], mas relações que podem colocar um ponto de vista como o dominante no âmbito do ensino de Matemática” (p.33).

Esse destaque é relevante, pois devemos levar em consideração que Thompson é um sociólogo que desenvolveu sua metodologia de investigação para estudar a ideologia e a cultura propagada nos meios de comunicação em massa e que, portanto, as pesquisas em Educação Matemática, que lançam mão de seu arcabouço teórico, precisam de algumas adaptações.

Para a análise formal, Cardoso (2009) mais uma vez foca apenas em um dos aspectos sugeridos por Thompson e se restringe a fazer o estudo argumentativo do texto, deixando de lado as análises semióticas, de conversação, sintáticas e narrativas.

Durante a fase de interpretação/reinterpretação a autora se ocupou em reunir “pistas” encontradas nas outras análises para apontar para uma possível ideologia. Dessa forma ela identifica a presença de uma Tendência Utilitarista, como ela chama, inserida numa ideologia de racionalidade técnica, modo de pensar que valoriza aquilo que tem utilidade, que por sua vez é aliada a vertente política, econômica e social do neoliberalismo. A Tendência Utilitarista se caracteriza pela concepção da disciplina como uma ferramenta que se justifica no currículo pela utilidade para as outras ciências, carecendo, por tanto, de discussão do aspecto epistemológico (Cardoso, 2009).

A tese de Andrade (2012), também utiliza sistematicamente as fases da HP, agora aliadas aos Paradigmas Editoriais de Gérard Genette. Essa pesquisa se propõe a analisar a obra *Essais sur l'enseignement em général, et sur celui des mathématiques em particulier*, de autoria de Lacroix a partir do referencial da HP.

Como não foi encontrada por Andrade (2012) uma versão em português da obra que seria analisada, o primeiro procedimento foi traduzir a texto, que originalmente está escrito em francês. Esse primeiro momento ela classificou, guiada pelo trabalho de Cardoso (2009), como “hermenêutica do cotidiano”, ao mesmo tempo em que também considera o início da análise formal ou discursiva.

Assim, Andrade (2012) utilizou as ideias de Genette como guia para a análise formal. Dessa forma, ela examina o nome do autor, o formato, a capa das edições, o título, o sumário, as dedicatórias, as epígrafes, o prefácio, as notas do autor e a estrutura do texto.

Sobre essa decisão a autora explica:

Havia um texto para analisar e optamos, então, por um procedimento: trabalhar com os fragmentos do livro de Lacroix na tentativa de (re)constitui-lo. Visávamos – experimentando – a um exercício de fragmentação que pudesse produzir uma unificação do discurso: estudar os fragmentos e fazê-los “dialogar” nos parecia um procedimento viável para produzir um discurso sobre o *Essais...* Isso nos levou a realizar uma análise argumentativa da obra de Lacroix (Andrade, 2012, p. 269).

A pesquisadora afirma que o estudo dos Paratextos foi muito útil, não só para a análise formal, como também para a análise sócio histórica. Apesar disso, ela reconhece uma pequena dissonância entre os conceitos que fundamentam os estudos Genette (2009) e Thompson (2011). Isso porque, para Thompson o conceito de forma simbólica é amplo e abrange tudo que é passível de interpretação: textos, imagens, conversas etc. Já Genette distingue um texto de um paratexto, defendendo o primeiro como apenas o “miolo” da obra. Mesmo assim Andrade defende a utilização do estudo dos paratextos devido a potencialidade técnica dessas ideias como complementação para a HP, o que naturalmente concordamos.

Sobre a análise sócio-histórica Andrade (2012) procura seguir todas as fases da HP, descrevendo minuciosamente as situações espaçotemporais da época em que o livro foi produzido, reportando-se a revolução francesa, ao iluminismo e a educação na França do final século XVIII e início do século XIX.

Em sua *Interpretação/Reinterpretação*, Andrade (2012) destaca a influência do pensamento Iluminista refletida na obra de Lacroix, que defendia a Matemática com lugar de destaque entre as demais ciências, a universalização de seu ensino e uma ruptura ao modelo educacional vigente em sua época.

Outro trabalho que também utiliza os estudos dos Paratextos Editoriais, aliado ao Referencial Metodológico da HP para sua investigação é a dissertação de Tatiane Tais Pereira da Silva (2013). Essa pesquisa teve como objetivo apresentar um olhar para o Movimento Matemática Moderna a partir da análise da obra didática *Matemática: Curso Ginásial*, publicada pelo *School Mathematics Study Group* (SMSG), em 1967.

As obras didáticas do SMSG voltadas para o ensino colegial (equivalente ao atual ensino médio) se caracterizaram pela influência do Movimento da Matemática Moderna no Brasil, embora os livros voltados para o ginásio (anos finais ensino fundamental, atualmente) tenham

feito pouco sucesso por aqui (Oliveira, 2009). A pesquisa de Silva (2013) apresenta uma interpretação/reinterpretação caracterizada por ela como surpreendente:

Assim, por meio das observações e aspectos que levantamos, percebemos que a obra “Matemática – curso Ginásial” se distancia, em vários pontos, das obras que marcaram o ensino de Matemática Moderna e, de certa forma, afasta-se delas em termos de como os conteúdos são abordados e de como os recursos gráficos são mobilizados, podendo, por isso, ser considerada uma obra atual, quase meio século após a sua publicação (Silva, 2013, p.128).

A respeito da metodologia de investigação, a pesquisadora segue os passos da HP proposta por Thompson (ao invés de etapas ela chama as fases da metodologia de “movimento”), porém não realiza a etapa de interpretação da Doxa.

Para realizar análise sócio-histórica ela se utiliza de documentos produzidos na época (e sobre a época) em que a obra foi produzida, cartas, fotografias, regulamentos educacionais, depoimentos e entrevistas de alunos, professores e diretores que utilizaram os manuais, bem como, dos tradutores dos livros pesquisados que estavam disponíveis em bancos de dados.

Já na análise formal, assim como Andrade (2012), ela utiliza os estudos dos Paratextos Editoriais de Genette como guia de sua investigação, estudando principalmente: a capa, os autores, sumário, prólogo e prefácios. Este último elemento também a auxiliou na análise sócio-histórica.

Continuando com pesquisas que usam os aportes teóricos dos Paratextos Editoriais e da HP, Pardim (2013) se propôs a analisar o texto de orientação pedagógica chamado “Metodologia do Ensino Primário”, escrito por Theobaldo Miranda Santos em 1952.

A HP foi mobilizada nesse estudo, primeiramente na dimensão sócio-histórica, com a realização de investigações a respeito das escolas normais e dos manuais pedagógicos. Foi investigado também o cenário político e educacional no Brasil e, em particular, no estado de Mato Grosso na época em que o manual, objeto de estudo, foi utilizado. Além disso, realizou-se levantamentos a respeito da vida e das produções do autor da obra. A análise sócio histórica incluiu também uma consulta aos diários oficiais publicados no estado de Mato Grosso na década de 1950 (Pardim, 2013).

Na análise formal o autor realiza um trabalho descritivo, identificando a estrutura da obra, os principais temas e como eles são abordados. Para isso também mobilizou as ideias de Genette (2009), seguindo o modelo de Andrade (2012).

Em sua interpretação/reinterpretação, Pardim afirma que este manual serviu como instrumento de divulgação do pensamento católico:

Ao analisar o manual Metodologia do Ensino Primário em seus aspectos sócio-histórico e interno, chega-se à conclusão de que este manual foi um instrumento de divulgação daquilo que Sgarbi (1997) denominou como sendo “escolanovismo católico”. Theobaldo Miranda Santos como católico se engajou no movimento de modernização da Igreja Católica assimilando, das novas ideias educacionais, aquilo que não era contrário aos princípios do cristianismo (Pardim, 2013, p.116).

Assim, Pardim (2013) mostra que professor Theobaldo Miranda Santos tentou aderir ao movimento de renovação do ensino da época chamado escola nova, na medida em que seus preceitos não confrontavam princípios católicos.

O artigo de Azevedo e Saladim (2019) apresenta parte de uma pesquisa que tem como objetivo analisar como a coleção de livros didáticos “EJA- Mundo e Trabalho”, adotada pela secretaria estadual de educação de São Paulo em 2013, que mobiliza a Matemática para abordar a concepção de trabalho na Educação de Jovens e Adultos - EJA. O texto apresenta apenas a análise formal das obras, porém os autores deixam bem claro que a análise discursiva e a análise sócio-histórica foram feitas concomitantemente e que uma influenciou decisivamente na outra.

Para a realização desta etapa de pesquisa os investigadores também lançaram mão dos estudos dos paratextos editoriais. Os paratextos considerados para a análise foram: título, subtítulos, sumário, prefácio, capa, carta de abertura dirigida aos alunos e aos professores, caixas de texto e páginas da *internet* que tratam do Programa “EJA-Mundo do Trabalho” e um questionário, respondido pelo professor Antonio José Lopes (Bigode), autor dos livros de Matemática da coleção.

Para a realização da análise, os autores elaboraram um roteiro inicial com alguns aspectos que deveriam observar durante o estudo de cada unidade das obras, realizando descrições para perceber regularidades e diferenças entre as unidades e os livros. Entre esses aspectos estavam: a linguagem utilizada, a forma de apresentação de conteúdos, a utilização de imagens e contextos específicos, relações entre o cotidiano e o mundo do trabalho e as diferenças e semelhanças entre os materiais do aluno e o professor.

Em suas interpretações/reinterpretações, os autores afirmam que na coleção de livros analisada:

[...] a Matemática é mobilizada muito mais relacionada a conteúdos voltados ao mundo da prática e da ação, do que de um exercício mais desinteressado, livre, não apenas pragmático e que também deve participar de todas as modalidades educacionais (Azevedo; Saladim, 2019, p. 13).

Assim, os autores concluem que os livros priorizam a associação dos conteúdos à realidade das profissões e, por conta disso, apresentam um currículo mínimo de Matemática.

O último trabalho que destacamos utiliza a HP para analisar um livro de ensino superior e está descrito no artigo de Cury (2019). Essa investigação teve como objetivo analisar o livro intitulado “Elementos de Geometria Plana” de autoria de João Lucas Barbosa, no sentido de elucidar como este livro é organizado/estruturado e que tipo de tarefa propõe a seus leitores.

Cury (2019) esclarece que, para escolher o livro objeto de seu estudo, realizou um levantamento entre os Projetos Pedagógicos dos Cursos (PPCs) de Licenciatura em Matemática disponíveis na internet de cursos com nota superior a três no Exame Nacional de Desempenho de Estudantes (ENADE) do ano de 2011 e constatou que o livro de João Lucas Barbosa (1985) foi o mais citado nas ementas da disciplina de Geometria Euclidiana: dentre 180 PPCs ele apareceu 96 vezes.

É importante ressaltar que realizamos um levantamento similar ao de Cury (2019) para escolher os livros que foram objeto de nosso estudo.

Com relação a análise sócio-histórica ele conta que realizou um estudo histórico do livro. Ao ler o artigo percebemos que ele investigou a respeito do ensino de geometria no Brasil nos anos 1980, a biografia de Barbosa, bem como, sobre a Sociedade Brasileira de Matemática, instituição responsável pela publicação da coleção do qual o livro de Barbosa faz parte.

Quanto a análise formal, além de descrever a estrutura da obra, o pesquisador se ocupa de classificar os exercícios/problemas, adaptando a tipologia de Borasi. Assim, ele classificou as questões em: exercícios, problemas, puzzles, prova de conjectura, situações e construção.

Mais uma vez apontamos semelhanças entre o trabalho de Cury (2019) e o nosso. Também classificamos os exercícios propostos pelos livros que foram analisados, porém, fizemos isso usando como referência os verbos utilizados nos enunciados dos exercícios.

Em sua interpretação/reinterpretação, Cury (2019) aponta que Barbosa se utiliza de um excesso de formalismo que reflete ensino brasileiro nas décadas de 1960 e 1970:

Na apresentação do livro, feita pela SBM, chama o abandono da Geometria de nas escolas de “falha” e aponta o livro analisado como “um esforço muito promissor e muito oportuno no sentido de contribuir para corrigir a referida falha no ensino de Matemática em nosso país”. Entretanto, em Barbosa (1995), a sequenciação axioma-definição-teorema-demonstração-exercícios, que só era interrompida por pequenas inserções com informações históricas ao final de cada capítulo, apontam a um caráter formativo exclusivamente formalista, sem permitir que os futuros estabelecessem relações e problematizações com a matemática escolar numa perspectiva didático-pedagógica (p.19).

Portanto, o pesquisador percebe fortes laços da obra com o Movimento da Matemática Moderna, como, por exemplo, o ensino pautado em construções lógico-dedutivas e a grande proposição de exercícios voltados para as demonstrações.

Resumidamente, podemos afirmar que as pesquisas aqui relatadas conseguiram identificar algumas tendências educacionais na forma como os documentos tratados abordaram a Matemática e seu ensino. Cardoso (2009) identificou nos Parâmetros Curriculares uma tendência utilitarista da Matemática, Andrade (2012) encontrou no texto de Lacroix influências iluministas e tendências de ruptura com sistema de ensino vigente em sua época, Silva (2013) se surpreendeu ao encontrar na obra analisada certo distanciamento com o Movimento da Matemática Moderna, Pardim (2013) percebeu no manual de metodologia do ensino primário influências do pensamento católico de seu autor, enquanto Azevedo e Saladim (2019) concluíram que os livros do EJA pesquisados difundem uma percepção pragmática de uma matemática voltada para o trabalho e por fim, Cury (2019) constata fortes laços da obra de Geometria Plana analisada com o Movimento da Matemática Moderna.

Assim, percebemos que a mobilização da HP, e dos estudos dos Paratextos Editoriais, ajudou os pesquisadores a identificar pontos de vistas dominantes com relação ao ensino da Matemática.

2.2 ESTUDOS SOBRE O ENSINO DE LIMITES: TEORIA DOS REGISTROS DE REPRESENTAÇÃO SEMIÓTICA.

Nesta seção apresentamos o levantamento feito por meio de buscas no Catálogo de Teses e Dissertações e no Portal de Periódicos da CAPES, onde foram selecionados trabalhos publicados de 2008 a 2021, por meio dos descritores: limite, cálculo, ensino e aprendizagem.

Dentre as teses, dissertações e artigos encontrados, foram selecionados por meio da leitura dos títulos e resumos, trabalhos que tinham efetivamente relação com o ensino e aprendizagem do conceito de limites de funções de uma variável e com o uso da TRRS como referencial teórico/metodológico de pesquisa. Assim, mostramos a seguir os objetivos, aportes teóricos, as metodologias de investigação, e os resultados das pesquisas expostas em 4 trabalhos, (vide Quadro 2).

Quadro 2 - Trabalhos sobre o conceito de limites e a TRRS.

Autor	Ano	Tipo	Título
Maria Betânia Sardeiro dos Santos	2013	Tese	Um olhar para o conceito de Limite: constituição, apresentação e percepção de professores e alunos sobre seu ensino e aprendizado
Daniela Alves da Silveira Moura	2014	Dissertação	Perspectivas no Estudo de Limite: Aspecto figural e conceitual - foco em objetos de aprendizagem
Raquel Taís Breunig	2015	Dissertação	Coordenação de Registro de Representação e o Processo de mediação docente: Conceito de Limite em Cursos de Engenharia
Okan Kuzu	2020	Artigo	<i>Preservice Mathematics Teachers' Representation Transformation Competence Levels in the Process of Solving Limit Problems</i>

Fonte: Elaborado pelo autor.

O primeiro trabalho que destacamos é a Tese apresentada por Santos (2013) cuja investigação objetivou trazer novas reflexões relacionadas ao conceito de limite de uma função. Trabalhando com a Teoria de Bakhtin de análise da estrutura do discurso e Psicologia Cognitiva, bem como a Teoria Antropológica do Didático e a Teoria de Registros de Representação Semiótica, a pesquisa buscou responder os seguintes questionamentos:

De onde vem a dificuldade de aprendizagem desse conceito? Como os livros o apresentam? E as tarefas? Como são propostas? Em que os professores universitários se apoiam para ensinar esse conceito? Que elementos utilizam para motivar o aprendiz? Com quais definições trabalham? Como veem as dificuldades dos alunos? E os alunos? Que testemunho nos trazem com relação aos seus aprendizados de limite de uma função? (Santos, 2013, P.9).

A pesquisadora aborda essas questões por meio da análise de livros didáticos a respeito dos conceitos de limites, a aplicação de questionários e entrevistas com professores e alunos de Cálculo do curso de Licenciatura em Matemática da UFG.

Ela se utiliza da Teoria dos Registros de Representação Semiótica para analisar os exercícios propostos nos livros. De cada obra, Santos (2013) escolhe alguns exercícios que considera importantes para analisar minuciosamente e posteriormente produz sínteses sobre a abordagem do livro.

Para a escolha dos livros a autora utiliza como critério a sua familiaridade e por constituírem a referência para o ensino de Cálculo no Brasil. Assim, foram analisadas as obras: *Introdução ao Cálculo* (Ávila, 1998), *Cálculo Diferencial e Integral* (Boulos, 1999), *Cálculo Diferencial e Integral* de Mauro Rogério e outros (Rogério; Silva; Badan, 1992) e *Curso de Cálculo* (Guidorizzi, 2001).

Para a análise da abordagem sobre limites, os critérios utilizados por Santos (2013) foram: a ordem dos conteúdos, a disposição deles relacionados a limites, a quantidade de exemplos e exercícios, bem como o percentual de questões por temas. Esses critérios tiveram influência no nosso trabalho, principalmente os que se relacionam com a ordem dos conteúdos.

Santos (2013) também procurou responder sobre a quem se dirige o livro e qual o direcionamento do discurso, além das referências históricas presentes na obra.

Em suas considerações ela constatou que, de maneira geral o texto é dirigido a especialistas e que se supõe que o aluno alcançará o sentido pretendido pelo autor, fato evidenciado pelo uso de expressões como: “é fácil perceber” ou “é intuitivo”. O uso desses termos, segundo Santos (2013), gera desânimo no leitor, pois o escritor da obra não apresenta certo conteúdo por considerá-lo simples.

Ela constata que a utilização da História da Matemática em sala de aula é quase nula, o que fortalece a visão equivocada de que a Matemática já nasceu pronta e sem falhas ou que sua evolução se deu de forma linear. As referências históricas são ínfimas e quando o fazem se referem a um personagem histórico específico, contribuindo dessa maneira para a construção de uma concepção matemática atemporal e desumanizada (Santos, 2013).

É identificada também uma diversidade de abordagens nos livros. Ela destaca que a noção intuitiva é trabalhada nos textos analisados, mas que a definição formal não está presente, o que pode representar uma dificuldade pela ausência de atividades que incentivem a transição algébrica-gráfica.

Na análise dos exercícios Santos (2013) busca identificar como eles podem contribuir para a apreensão do conceito de limites por parte do aluno e, mais especificamente, analisa os verbos presentes no enunciado para ajudar a identificar o tipo de tarefa teórico-cognitiva o aluno é levado a realizar.

Santos (2013) destaca que:

É interessante perceber que os verbos presentes nas tarefas já indicam procedimentos que podem ser mais ou menos abrangentes. Se a tarefa se inicia com *calcule*, por exemplo, esse verbo indica explicitamente que temos que realizar um procedimento de cálculo. Por outro lado, quando nos deparamos com verbos, tais como *estude*, *encontre*, *destaque etc.*, há o rompimento da ideia de um “procedimento” padrão, há

maior liberdade por parte de quem realiza a tarefa com relação à maneira de iniciar, desenvolver e concluí-la. Há também aqueles verbos que indicam tarefas mais complexas, tais como *prove, mostre que, demonstre* (p.214).

Nós também utilizamos os verbos presentes nos enunciados para classificar os tipos de exercícios propostos nos livros analisados.

Ainda com relação as tarefas, a autora afirma que há pouca exploração de mudanças de registros numa mesma tarefa. Critica também o fato de os exercícios apresentarem prioritariamente procedimentos algébricos, gerando uma visão limitada do conceito, e identifica que os alunos entendem a indeterminação como algo “sem solução” e que não compreendem o “levantamento da indeterminação”.

Tanto estudantes quanto professores destacaram que a definição formal de limite é a parte mais difícil. Estes últimos foram unânimes em afirmar que os discentes não têm a menor compreensão da definição formal do limite e nem mesmo dos elementos que a compõe (Santos, 2013).

No trabalho chamado *Perspectivas no Estudo de Limite: Aspecto figural e conceitual - foco em objetos de aprendizagem*, Moura (2014) estuda o tratamento didático de livros textos de Cálculo, elabora objetos de aprendizagem e analisa atividades desenvolvidas por alunos de um curso de licenciatura de uma faculdade da cidade de Pará de Minas, por meio de recursos computacionais. O objetivo deste estudo foi verificar de que forma um conjunto de atividades didáticas planejadas, subsidiadas pelas tecnologias de informação e comunicação, podem contribuir para o processo de ensino e aprendizagem de limite e continuidade.

Assim, nesse estudo a autora reuniu em seu referencial teórico as ideias de Imagem Conceitual e Definição Conceitual (Tall; Vinner, 1981), a Teoria dos Registros de Representação Semiótica (Duval, 2009), os conceitos do Pensamento Matemático Avançado (Tall, 2002), as Tecnologias de Informação e Comunicação, a Prática investigativa (Ponte; Brocado, 1999), Objeto de Aprendizagem e a Análise de Erros (Cury, 2007).

Sobre os livros de Cálculo, a autora se restringiu a verificar se havia nesses livros abordagens aritmética, algébrica e geométrica, se sugerem o uso de tecnologia, resolução de problemas e se apresentam linguagem e definição formal. Os livros escolhidos foram: Cálculo com aplicações (Larson, 2003), Cálculo (Thomas; Weir; Hass, 2009) e o Cálculo (Stewart, 2013). Ela afirma que os livros foram escolhidos por serem os mais citados nos planos de cursos das áreas de exatas, mas não apresenta nenhum levantamento ou citação que justifique a escolha dos três livros.

Em suas conclusões sobre os livros-textos a pesquisadora afirma que os autores tentam tratar os conteúdos de limites e continuidade numa abordagem mais próxima do aluno, apresentando contextualização ao abordar o conceito de limite, fazem uma análise de funções e seus gráficos, favorecem o desenvolvimento dos conceitos e definições, valorizam e sugerem o uso de recursos tecnológicos, mas não atendem todas as categorias investigadas.

Ela conclui seu trabalho afirmando que os objetos de Aprendizagem disponibilizados para os estudantes, assim como os elaborados por eles, lhes permitiram desenvolver o conceito de limite, havendo assim um avanço significativo no processo de compreensão do conteúdo.

Já a dissertação intitulada *Coordenação de Registro de Representação e o Processo de mediação docente: Conceito de Limite em Cursos de Engenharia* (Breunig, 2015) apresenta uma pesquisa que buscou identificar quais Registros de Representação do conceito de Limite são trabalhados no processo de mediação de um docente, bem como quais são as coordenações articuladas pelos discentes de cursos de Engenharia. Para responder esse questionamento a autora fez um acompanhamento das aulas de uma turma da disciplina de Cálculo I, componente curricular que faz parte do núcleo comum dos cursos de engenharia, da Universidade Comunitária do Interior do Estado do Rio Grande do Sul. Decidiu-se pelo não envolvimento por parte da pesquisadora que gravou as aulas em vídeo, as transcreveu e as analisou.

Subsidiada pela Teoria da Mediação de Vygotsky e pela Teoria dos Registros de Representação Semiótica de Duval, a autora verificou que o professor explicita os diferentes registros de representação e busca formalizar o conceito de limite utilizando as palavras “tendência” e “aproximação”. Verificou uma maior ênfase dada a transformação do registro numérico para o registro gráfico. Observou também que houve uma predominância do uso do registro numérico nas atividades discentes, enfatizando as transformações entre os registros numéricos e gráficos. Apesar disso verificou que os discentes tiveram dificuldades quanto à mobilização do Registro Gráfico para o Registro Algébrico.

No trabalho *Preservice Mathematics Teachers' Representation Transformation Competence Levels in the Process of Solving Limit Problems* (Kuzu, 2020), a investigação descrita se propõe a responder as seguintes questões: Que níveis de habilidades de transformação de inter-representação os professores de Matemática de formação inicial empregam no processo de resolução de problemas de limite? Existem relações significativas entre os níveis de habilidades de transformação inter-representação dos professores de Matemática de formação inicial?

Delice e Sevimli (2010) definem representações como ferramentas necessárias e usadas para processar realidades matemáticas na mente e transferi-las para outra pessoa. Essas

representações podem ser classificadas como internas (imagens mentais) ou externas (como representações verbais, gráficas, algébricas e numéricas). O processo de transformação de representação pode ser chamado de inter-representação, quando a transição é feita entre diferentes tipos de representação, ou transição dentro da representação, quando envolve apenas um tipo de representação (Delice; Sevimli, 2010).

Percebe-se muitas semelhanças entre a Teoria das Múltiplas Representações proposta por Delice e Sevimli (2010) com a Teoria dos Registros de Representações Semióticas de Duval (2009).

Depois do pesquisador ter trabalhado o conceito de limites em aula com professores de Matemática em formação inicial de uma universidade regional no centro da Turquia, foi aplicado a esses estudantes o que foi chamado de Teste de Transformação de Representação de Limite. Os dados colhidos nesses testes foram analisados de forma quantitativa, aplicando-se o coeficiente alfa de Krippendorffe, utilizando-se de um modelo descritivo.

Como resultados, o autor afirma que os sujeitos da pesquisa tiveram maior dificuldade em resolver problemas que tinham entradas de representação verbal, especialmente na transformação da representação verbal para a numérica. Porém, tiveram alto desempenho nos outros tipos de problemas, principalmente nas transformações de representações algébricas para uma representação verbal. Além disso, identificou-se correlações positivas entre os níveis de competência de transformações de representação.

3. HISTÓRIA DO CÁLCULO E DO CONCEITO DE LIMITES

“A matemática é pensada como um bem cultural de interesse geral, que ninguém pode ignorar completamente sem efeitos colaterais indesejáveis”.

Nilson José Machado⁸

Ao definir a Matemática como um bem cultural Machado (2009) deixa claro que essa área de conhecimento foi construída pela humanidade ao longo do tempo. Assim, conhecer um pouco da História da Matemática ajuda a compreender as motivações, o contexto social e as contribuições dos teóricos para surgimento e desenvolvimento dessa matéria, ajudando a constituir uma visão mais crítica sobre a ciência dos números.

Assim, descrevemos nesta seção um pouco do contexto histórico do surgimento do Cálculo Diferencial e Integral, principalmente no que se refere ao conceito de limite de funções de uma variável.

3.1 A IDADE ANTIGA

Apesar da definição formal do conceito de limite ter sido estabelecida apenas recentemente, no final do século XIX e início do século XX, os problemas relacionados ao uso deste objeto matemático remontam o período clássico grego.

É sabido que, por conta de um contexto social e cultural distinto das civilizações que lhe antecederam, a Matemática grega se difere bastante daquela praticada pelos demais povos da antiguidade. Fatores como o aumento das atividades comerciais, a expansão territorial e o crescimento demográfico, exigiram de sua população uma maior organização administrativa, política, militar e religiosa. Tal situação trouxe para o cidadão, classe privilegiada na sociedade grega, um grande apreço pela discussão e pelo debate, em detrimento da valorização do trabalho manual, o que impactou diretamente na forma de Matemática praticada pelos gregos (Assis, 2017).

⁸ MACHADO, N. J. **Matemática e Realidade**. São Paulo: Editora Cortez, 2009.

Segundo Assis (2017, p.3):

Alguns livros tradicionais de história da matemática relatam que houve uma transição da Matemática pragmática e intuitiva realizada pelos babilônicos e egípcios, que era profundamente marcada por cálculos e algoritmos, para a Matemática teórica de raciocínio hipotético-dedutivo praticada pelos gregos, fundada em argumentações consistentes e demonstrações [...]

Essa característica da sociedade grega impactou decisivamente para que lá surgisse a filosofia. Os primeiros filósofos se perguntavam sobre possibilidade do universo ser regido ou explicado por um único princípio ou qual tudo se reduz. Uma das respostas mais intrigantes a esse questionamento foi dada por uma seita de objetivos místicos e científicos, fundada, provavelmente, por Pitágoras de Samos (c. 570 a. C. – c. 495 a. C.) (Assis, 2017).

Para os pitagóricos o universo tem sua origem nos números. Segundo eles, a matéria seria formada pelas mônadas, pequenos corpúsculos cósmicos de extensão não nula, associada à unidade numérica e ao ponto na geometria, que reunidos em determinada quantidade e ordem, compunham os corpos. Dessa maneira, para os pitagóricos, um segmento de reta não poderia ser infinitamente divisível, pois, ela só pode ser dividida até a sua menor parte: o ponto (Assis, 2017).

Com esse paradigma vigente dificilmente o conceito de limite seria construído, pois, quantidades infinitesimais (que tendem a zero) ou aproximações “tão próximas quanto se queira” seriam inviáveis. O argumento pitagórico foi derrubado quando se descobriu a existência de segmentos de reta incomensuráveis.

3.1.1 A descoberta dos Incomensuráveis

A palavra incomensurável vem do latim *incommensurabilis*, cujo prefixo *in* está associado a negação, *mensurabilis* significa “o que pode ser medido” e a sílaba *com* pode ser entendida como “junto com” (Donald, 1874). Logo, segmentos incomensuráveis são segmentos que não podem ser medidos mediante uma mesma unidade. A seguir, mostramos exemplos para elucidar melhor o conceito.

Na figura 1, mostramos que o segmento de reta AB pode ser medido e seu comprimento é igual a 3, com relação a unidade u (ou seja, o segmento de comprimento u cabe 3 vezes em AB). Mas se o segmento CD for medido com relação a mesma unidade u , não será encontrado um número natural (ou seja, não haverá uma quantidade inteira positiva em que o segmento u cabe no segmento CD) (Lima, 2014).

Figura 1- Segmentos incomensuráveis com relação a u .



Fonte: Lima, 2014, p.5

Assim, os segmentos da figura 1, não são mensuráveis com relação a unidade u , ou seja, não se pode medir esses segmentos usando a unidade u estabelecida.

Porém, se a unidade u for dividida na metade, se verifica que ela cabe 6 vezes em AB e 5 vezes no segmento CD , (vide figura 2).

Figura 2 - Segmentos comensuráveis.



Fonte: Lima, 2014, p.5

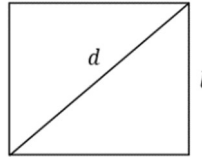
Logo os segmentos AB e CD são comensuráveis, ou seja, existe um segmento de reta u que cabe um número inteiro de vezes nos dois segmentos. Caso não existisse este segmento unitário, as retas AB e CD seriam chamadas de incomensuráveis (Lima, 2014).

Dessa forma uma pergunta se fez pertinente: dados dois segmentos quaisquer, será sempre possível encontrar uma unidade comum, ou seja, um segmento u que caiba um número inteiro de vezes em ambos os segmentos? Erroneamente os pitagóricos acreditavam que sim (Lima, 2014).

Uma prova de que a diagonal do quadrado e o seu lado são incomensuráveis é referida por Aristóteles (384 a.C - 322 a.C) na obra *Analíticos Anteriores* como um exemplo de demonstração por absurdo: “Prova-se, por exemplo, a incomensurabilidade da diagonal, pela razão de que os números ímpares se tornariam iguais aos números pares, se a diagonal fosse aduzida como comensurável” (Aristóteles, 1986).

A prova consiste em: Seja d a diagonal do quadrado de lado l (Figura 3).

Figura 3 - Diagonal do Quadrado.



Fonte: Elaborado pelo autor.

Supondo que d e l sejam comensuráveis, temos $\frac{d}{l}$ racional. Ou seja: $\frac{d}{l} = \frac{p}{q}$ onde p e q são inteiros sem fator comum. Pode-se pensar em p e q como a quantidade de vezes que a unidade u cabe nos segmentos de reta d e l . Assim, pelo Teorema de Pitágoras: $d^2 = l^2 + l^2 = 2l^2$. Logo: $\frac{d^2}{l^2} = \frac{p^2}{q^2} = 2 \Leftrightarrow p^2 = 2q^2$ (Assis, 2017).

Mas essa última igualdade é absurda, pois na decomposição em fatores primos de p^2 o expoente de fator 2 é par enquanto em $2q^2$ é ímpar. Logo a hipótese de d e l serem comensuráveis é falsa (Assis, 2017).

Com tal resultado a doutrina pitagórica encontrou um problema para a crença dos indivisíveis. Além disso, escolas filosóficas rivais cresciam e difundiam ideias que refutavam as crenças dos discípulos de Pitágoras. Uma das de maior destaque foi a Escola Eleática, formada pelos seguidores de Parmênides (por volta de 530 a.c. - 460 a.c.) que acreditavam que o princípio que regia o mundo era a imutabilidade, visão que divergia da ideia de multiplicidade e mudança defendida pelos pitagóricos (Boyer, 2012).

3.1.2. Os paradoxos de Zenão

Um dos discípulos mais famosos de Parmênides foi Zenão (por volta de 590 a.c.- 520 a.c.) que, antecipando o método dialético usado, posteriormente, por Sócrates (470 – 399), desenvolveu importantes paradoxos que refutavam o movimento, fundamentando sua filosofia em bases não empíricas (Roque, 2012).

Um desses paradoxos é o que se refere a Aquiles e a tartaruga: Suponha que Aquiles dispute uma corrida com uma tartaruga. Por ser mais lenta, a tartaruga é autorizada a começar na frente, num ponto a certa distância. Para Zenão, Aquiles nunca alcançaria a tartaruga, pois, para isso ele precisaria chegar ao ponto de partida da tartaruga, que por sua vez já teria se deslocado para um certo ponto à frente. E quando Aquiles alcançar esse novo ponto, a tartaruga já teria se deslocado mais um pouquinho a frente. E quando Aquiles alcançar esse novo ponto, a tartaruga já teria se deslocado mais uma vez, e assim por diante. Assim, segundo Zenão, essa

série é interminável. Dessa forma, se o percurso puder ser dividido infinitamente, Aquiles jamais alcançará a tartaruga (Assis, 2017).

Zenão queria provar por absurdo que o espaço não pode ser infinitamente divisível. Porém, esse paradoxo apenas indica a dificuldade de se somar uma infinidade de quantidades cada vez menores e de aceitar que o resultado dessa adição possa ser uma grandeza finita. Essa dificuldade ainda se faz presente na Matemática atual e impacta diretamente na compreensão do conceito de limite: percebe-se, por exemplo, uma grande dificuldade de se aceitar que $0,9999... = 1$ (Roque, 2012).

Tanto os argumentos de Zenão, como a descoberta dos incomensuráveis influenciaram profundamente a Matemática grega. Segundo Assis (2017):

As grandezas deixam de estar associadas aos números e passam a estar associadas aos segmentos de reta. É a passagem da ideia do discreto (medida pontual) para o contínuo (medida linear); ao menos em parte, o reino dos números continuava a ser discreto, mas o das grandezas passava a ser contínuo (p.7).

Dessa forma, a concepção atomista (calcada na existência dos indivisíveis) foi adotada para números e a concepção continuísta (que pensa o espaço, o tempo e a matéria como divisíveis infinitamente) para grandezas (Bongiovanni, 2005). Surge a ideia do “infinitamente pequeno”, ou seja, uma grandeza pode ser subdividida infinitamente por estar relacionada o conceito de continuidade (Assis, 2017).

Assim os gregos pareciam valorizar mais a geometria do que os números, por entenderem que estes são incapazes de resolver o problema da incomensurabilidade. “Parece ter sido a geometria, em vez dos números, que governava o mundo” (Boyer, 2012, p. 73).

3.1.3. Método da Exaustão

Os gregos sabiam transformar qualquer polígono em um quadrado de área equivalente. Essa operação era conhecida como quadratura. Eles também sabiam fazer quadraturas de certos tipos de lúnulas, figura limitada por dois arcos circulares de raios diferentes, mas não conheciam um método para comparar figuras quaisquer, curvilíneas ou não.

Eudoxo se valeu da antifairese para sugerir um método de comparar figuras curvas com figuras poligonais (Bongiovanni, 2005).

O método de exaustão não é um método de descoberta. Por exemplo, para comparar a área A de um seguimento parabólico com uma outra área B precisamos inicialmente descobrir uma superfície equivalente ao segmento parabólico. Em seguida provamos que as duas superfícies A e B têm áreas iguais procedendo da seguinte maneira: supõe-se que $A > B$, obtêm-se a diferença $A - B$ e aplicando o princípio da exaustão deve-

se chegar a um absurdo. Em seguida procede-se da mesma maneira supondo que $A < B$, obtendo a diferença $B - A$ que deve levar a uma segunda contradição. Conclui-se finalmente que $A = B$ (Bongiovanni, 2005, p.103).

Esse método de demonstração por absurdo duplo⁹ foi utilizado com frequência até o século XVI e foi o embrião da noção da operação de limite, mesmo sem invocar o conceito de infinito (Assis, 2017).

É importante observar que os primeiros problemas que motivaram de alguma forma o emprego do conceito de limite surge do cálculo de áreas, que hoje está relacionado ao conceito de integral.

Eves (2011, p.11) considera que:

É curioso que o desenvolvimento histórico do cálculo seguiu a ordem contrária à daquela dos textos e cursos básicos atuais sobre o assunto: ou seja, primeiro surgiu o cálculo integral e só muito tempo depois o cálculo diferencial. A ideia de integração teve origem em processos somatórios ligados ao cálculo de certas áreas e certos volumes e comprimentos. A diferenciação, criada bem mais tarde, resultou de problemas sobre tangentes a curvas e de questões sobre máximos e mínimos. Mais tarde ainda, verificou-se que a integração e a diferenciação estão relacionadas entre si, sendo cada uma delas operação inversa da outra.

A teoria de integração baseada no processo de quadratura, apesar de negar o infinito, era promissora no sentido de indicar uma direção de onde poderia surgir o conceito de limite. Porém o advento da idade média causou uma atrasada em tais estudos.

3.2 IDADE MÉDIA E RENASCIMENTO

A descentralização de poder causada com a queda do Império Romano no século V trouxe consequências econômicas, políticas e sociais drásticas para toda a Europa. O declínio do comércio e a produção artesanal, bem como a incapacidade de garantir a integridade territorial, causaram o esvaziamento das cidades. As atividades econômicas passaram ser basicamente agrícola e o regime de trabalho escravagista, que sustentava a sociedade romana, deu lugar ao regime de servidão (Eves, 2011).

Além desse contexto, a influência dominante da Igreja Católica na civilização ocidental durante toda a idade média contribuiu para que a produção e divulgação do conhecimento matemático na Europa não acompanhasse o desenvolvimento desta ciência por outros povos, como os árabes. Tal situação fez com que a teoria da integração ficasse desativada por alguns séculos (Eves, 2011).

⁹ Apresentamos o método da exaustão na quadratura do círculo feita por Arquimedes (287 a. C.-212 a.C) no apêndice 1,

Com o passar do tempo, o crescimento da atividade comercial e industrial provocaram a ascensão de uma nova classe social: a burguesia. A chegada gradual dos burgueses ao poder, junto com uma série de fatos relevantes, provocou transformações profundas na sociedade europeia entre os séculos XI e XV. As cidades voltaram a ser povoadas, uma nova divisão do trabalho exigiu a capacitação da mão de obra, a administração pública ganha mais importância e o desenvolvimento intelectual e cultural é marcada pela ascensão do humanismo (Assis, 2017).

Ainda segundo Assis:

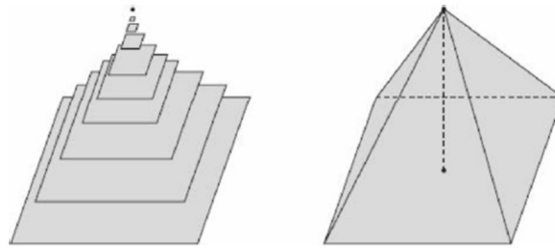
As transformações econômicas e sociais causadas pelo desenvolvimento de uma cultura urbana, fizeram surgir oficinas, nas quais técnicos colaboravam entre si para desenvolver uma tecnologia que atendesse às novas demandas. Assim, o homem aproximou-se da esfera prática sem separar-se completamente da atividade intelectual. Nos Séculos XIV e XV, invenções, como o relógio mecânico, a bússola, a artilharia, as lunetas entre outros, ajudaram a transformar o papel da ciência. Outra ferramenta importante que se desenvolveu foi a imprensa, que possibilitou a circulação e a divulgação dos saberes. A geometria ainda era o principal domínio da matemática e qualquer pessoa que quisesse aprender ciência precisava começar pelos Elementos de Euclides. No entanto, aos poucos, foi crescendo a consciência de que grande parte do conhecimento geométrico deveria servir a aplicações, desde as mais práticas, como as técnicas para construir mapas, até as mais abstratas, como a teoria da perspectiva na pintura, e a astronomia (2017, p. 15).

Nessa conjuntura, as ideias da antiguidade clássica foram retomadas. O discípulo de Galileu Galilei (1564-1642), Bonaventura Cavalieri (1598-1647), por exemplo, retomou o conceito de partes atômicas indivisíveis para construir um princípio muito útil para o cálculo de áreas e volumes (Assis, 2017).

3.2.1 O Método de Cavalieri

O método de Cavalieri consistia numa técnica baseada na decomposição de figuras em tiras indivisíveis. Cavalieri acreditava que uma linha é composta de pontos, da mesma forma que um cordão é formado por contas; que um plano é feito de linhas, assim como uma roupa é feita de fios; e que um sólido é feito de planos, analogamente a um livro de páginas. Assim, a área de uma figura seria dada pela soma de um número indefinido de segmentos de retas paralelas e o volume de um sólido seria a soma de um número indefinido de áreas paralelas, (vide Figura 4) (Roque, 2012).

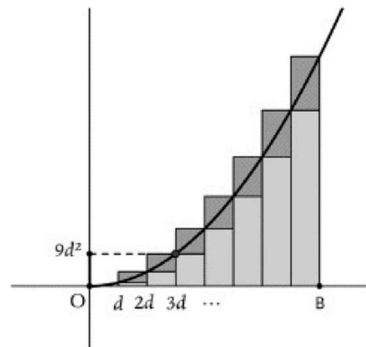
Figura 4 - Volume de uma pirâmide.



Fonte: Roque, 2012, p.277

A grande diferença entre esse método e o da exaustão é que aqui não se usa prova indireta para se chegar ao resultado. O cálculo da área de regiões, como a determinada entre a parábola $y = x^2$ o eixo das abcissas e entre os pontos O e B (Figura 5), se assemelha muito com o que conhecemos hoje como a soma de Riemann (Roque; Pitombeira, 2012).

Figura 5 - Área de uma região entre uma curva e o eixo das abcissas.



Fonte: Roque, 2012, p.278

O fato de o número de retângulos crescer indefinidamente é o mesmo que se fala hoje em tender a infinito. Na prática se toma o limite da soma quando n tende a infinito, porém isso não podia ser explicitado por falta conceitos matemáticos adequados (Roque; Pitombeira, 2012).

O princípio formulado por Cavalieri fez Galileu concluir que infinito e divisibilidade são ideias incompreensíveis, além de afirmar que classificações como “maior”, “menor” ou “igual” não fazem sentido quando comparamos quantidades infinitas (Assis, 2017).

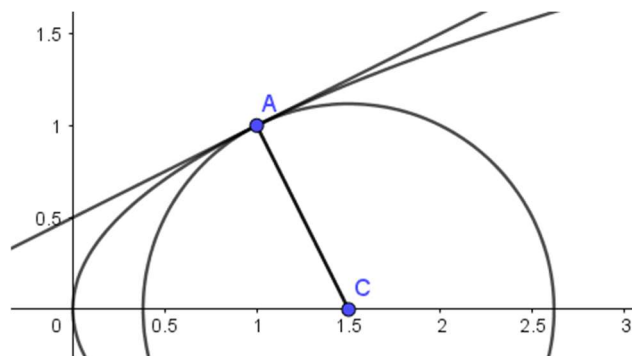
É importante ressaltar que as coordenadas cartesianas estavam sendo introduzidos nesse período histórico e que evitamos usar a palavra “função” porque esse conceito ainda não havia sido formalizado.

3.2.2 O Problema das Tangentes

Ao introduzirem as coordenadas cartesianas, Descartes (1596 - 1650) e Fermat (1601 - 1665) transformaram problemas geométricos em algébricos, o que resultou na elaboração de métodos para se encontrar tangentes de curvas (Roque, 2012, p. 271).

O método desenvolvido por Descartes consistia em encontrar o centro de um círculo sobre o eixo x que interceptasse a curva dada em apenas um ponto (Roque, 2012). Uma vez encontrada a circunferência e o ponto que esta intercepta a curva, bastava calcular a tangente da circunferência neste ponto específico, (vide Figura 6).

Figura 6 - Método de Descartes.

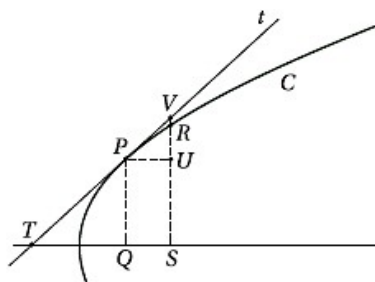


Fonte: Elaborado pelo autor.

Esse método se tornaria difícil para curvas cuja expressão algébrica envolvesse polinômios com graus maiores do que dois e demais fórmulas. Logo é um método pouco útil para curvas que tenham equações mais complexas (Roque, 2012).

Tendo isso em vista, Fermat apresentou outro método para encontrar o coeficiente angular da reta tangente. Este método consiste em determinar a subtangente, ou seja, a projeção no eixo x da parte da tangente que vai do ponto de tangência P na curva até o ponto de interseção com o eixo x , no caso o ponto T (vide Figura 7).

Figura 7 - Método de Fermat.



Fonte: Roque, 2012, p. 271

Assim, a subtangente seria o segmento de reta \overline{TQ} .

Diferentemente do procedimento de Descartes, esse método pode funcionar para qualquer curva desde que seja justificado pelo Cálculo Infinitesimal que seria desenvolvido mais tarde (Roque, 2012).

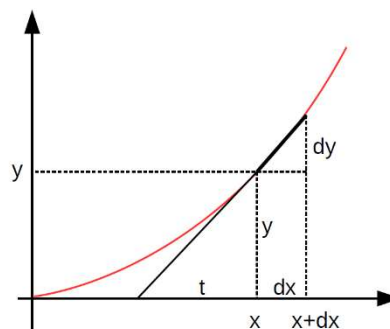
Fermat usou seus métodos para determinar pontos de máximos e mínimos das curvas. Partindo da observação de Kepler (1571 – 1630) de que os incrementos das curvas nas proximidades dos pontos de máximos e mínimos se tornam muito pequenas. Fermat procedeu da seguinte forma para curvas polinomiais da forma $y = f(x)$: ele comparou os valores de $f(x)$ num ponto, com o de $f(x + E)$ um ponto vizinho. Normalmente esses valores são muito parecidos nas proximidades de um ponto de máximo ou de mínimo. Assim, ele igualava esses valores e dividia tudo por E . Dessa forma quanto menor o valor de E , mais sentido fazia a equação. Logo ele fazia $E = 0$ e o resultado lhe dava os valores das abscissas dos pontos de máximos e mínimos do polinômio. Esse procedimento equivale ao que fazemos atualmente para calcular $\lim_{E \rightarrow 0} \frac{f(x+E)-f(x)}{E} = 0$ (Boyer, 2012).

3.2.3 O Cálculo de Leibniz

Inspirado na obra *Traité des sinus du quart de cercle* (Tratado dos senos do quarto de círculo), Gottfried Wilhelm Leibniz (1646 – 1716) utiliza o método usado por Blaise Pascal (1623 - 1662) na demonstração de resultados sobre quadratura para elaborar suas ideias em torno do conceito de triângulo característico. Tal conceito é utilizado, de maneira abrangente e com muita frequência, nos trabalhos de Leibniz no intuito de conceber sua teoria do Cálculo Diferencial e integral (Boyer, 2012).

Vamos a um exemplo específico de como utilizar o método de Leibniz para encontrar a derivada de uma curva. Seja uma curva de equação $y = x^2$, (vide Figura 8).

Figura 8 - Tangente a Curva $y=x^2$.



Fonte: Faria, 2018, p. 69.

Temos que a razão $\frac{dy}{dx} = \frac{y}{t}$. Substituindo $(x + dx, y + dy)$ na expressão analítica temos $y + dy = (x + dx)^2 = x^2 + 2xdx + (dx)^2$.

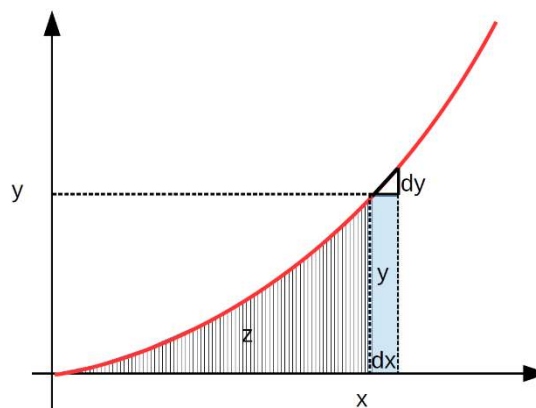
Substituindo $y = x^2$ temos que $dy = 2xdx + (dx)^2$. Dividindo todo por dx temos que: $\frac{dy}{dx} = 2x + dx$. Logo $2x + dx = \frac{y}{t}$. Desprezando dx por considerá-lo muito pequeno, temos que $2x = \frac{y}{t}$. Daí $t = \frac{y}{2x}$.

Como a reta tangente passa pelos pontos (x, y) e $(x - t, 0) = (x - \frac{y}{2x}, 0)$ sua inclinação é dada por $m_t = \frac{y-0}{x-(x-t)} = \frac{y}{t} = \frac{y}{\frac{y}{2x}} = \frac{2xy}{y} = 2x$ (Faria, 2018).

O triângulo retângulo em que dy e dx seriam os “catetos” é chamado de triângulo característico.

Quanto ao problema das áreas, Leibniz chamou de z a área sob uma curva, de 0 até um valor x , e de dz o incremento dessa área resultante do acréscimo dx em x (vide Figura 9).

Figura 9 - A área sob a Curva.



Fonte: Faria, 2018, p.72

Se desprezarmos a área do triângulo de base dx e altura dy vemos que $dz = ydx$. Leibniz imaginava a área total z como a soma de várias diferenças dz . Assim o símbolo da integral surge como uma variação da letra “S” de soma (Faria, 2018).

$$z = \int ydx$$

Se dividirmos a expressão $dz = ydx$ dos dois lados por dx , ficará muito clara a relação entre o problema da tangente e o problema da área encontrada por Leibniz que remete ao Teorema Fundamental do Cálculo.

$$\frac{dz}{dx} = y.$$

Leibniz recebeu compreensíveis críticas a respeito de seu Cálculo Infinitesimal. Isso, porque era incompreensível que durante a aplicação do método, em algumas ocasiões, se desprezasse alguns termos infinitesimais como se fossem iguais a zero e que, em outras, se operasse com eles como se fossem números positivos. Muitos críticos relacionaram a expressão $\frac{dy}{dx}$ com a razão indeterminada $\frac{0}{0}$ (Roque, 2012).

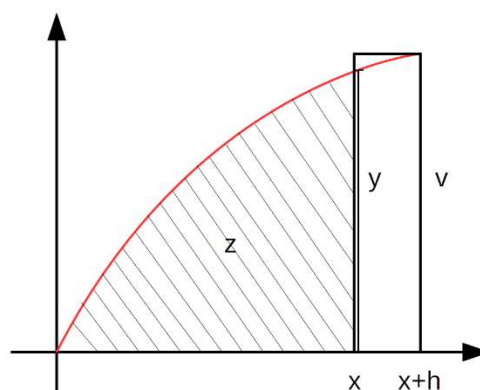
Apesar dessas críticas, Leibniz deu uma importante contribuição na construção do conceito de função, já que um dos argumentos para seus fundamentos era que $\frac{dy}{dx}$ não correspondia a uma razão entre quantidades fixas, mas sim uma relação entre quantidades em que uma varia em função da outra. Ou seja, sempre se faz necessário determinar a variável a qual se deve derivar (Roque, 2012).

3.2.4 O Cálculo de Newton

Ao contrário de Leibniz que atacou o problema de encontrar a área sob uma curva, Isaac Newton (1642 – 1727) fez o caminho inverso, ou seja, conhecida uma área z sob uma curva que vai de 0 a x , ele queria encontrar uma expressão da curva $C(x)$ que correspondesse a essa área (Faria, 2018).

Vamos supor que a área z sob uma curva determinada, que vai de 0 a x , seja dada pela seguinte expressão: $z = \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}$. Elevando os dois membros ao quadrado vemos que $z^2 = \frac{4}{9}x^3$ (Faria, 2018). Consideramos os acréscimos h na coordenada x e um retângulo de base h e altura v , com o valor de v representando a ordenada da imagem de $x + h$ (Figura 10).

Figura 10 - Área sob uma curva 2.



Fonte: Faria, 2018, p.67.

A área desse retângulo e a área sob a curva que está dentro desse retângulo se aproximam quanto menor h for considerado. Podemos assim, considerar:

$$z + hv = \frac{2}{3}(x + h)^{\frac{3}{2}}$$

Ou

$$(z + hv)^2 = \frac{4}{9}(x + h)^3$$

$$z^2 + 2zhv + h^2v^2 = \frac{4}{9}(x^3 + 3x^2h + 3xh^2 + h^3).$$

Como $z^2 = \frac{4}{9}x^3$, temos que

$$2zhv + h^2v^2 = \frac{4}{3}x^2h + \frac{4}{3}xh^2 + \frac{4}{9}h^3.$$

Se dividirmos tudo por h

$$2zv + hv^2 = \frac{4}{3}x^2 + \frac{4}{3}xh + \frac{4}{9}h^2.$$

Desprezando os termos multiplicados por h , por considerar h um valor cada vez menor e, por isso, considerando $v = y$, obtemos

$$2zy = \frac{4}{3}x^2.$$

Finalmente, isolando y e substituindo $z = \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}$, temos

$$y = \frac{2x^2}{3z} = \frac{2x^2}{3 \cdot \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}} = \frac{x^2}{x^{\frac{3}{2}}} = x^{\frac{1}{2}}.$$

Dessa forma, percebe-se que a taxa de variação da área sob uma curva, de 0 a x , é exatamente a tangente da curva que descrevia a área inicial. Esse resultado hoje é conhecido como Teorema Fundamental do Cálculo (Faria, 2018).

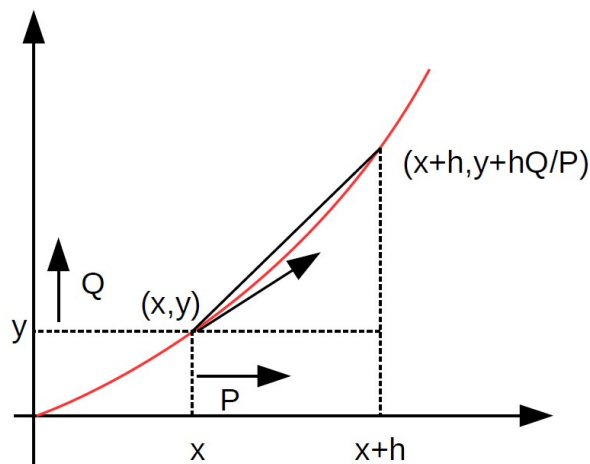
A motivação para o método das tangentes de Newton vem de seus estudos de física. Ele imaginava um ponto (x, y) sobre uma curva como um objeto em movimento, onde a curva representava sua trajetória. Nessa perspectiva a tangente representa a direção em que uma partícula se desloca num instante de tempo t (Roque; Pitombeira, 2012, p.288).

Ele chamava as variáveis v, x, y e z de quantidades fluentes, enquanto as taxas de variação dessas quantidades com relação ao tempo eram chamados de fluxões e foram representados por $\dot{v}, \dot{x}, \dot{y}, e \dot{z}$. Para ele, o grande problema do Cálculo consistia em, dada uma

relação entre fluentes, encontrar uma relação entre seus fluxões e vice-versa. Dessa forma, dados dois fluentes x e y , o objetivo não seria encontrar seus fluxões, mas a razão entre eles $\frac{\dot{y}}{\dot{x}}$ que determinaria a inclinação da tangente à curva descrita nas variáveis x e y (Roque; Pitombeira, 2012, p.288).

Assim, a inclinação seria o resultado do quociente da velocidade da partícula na direção do eixo y com a velocidade da partícula na direção do eixo x , (vide Figura 11).

Figura 11 - Fluentes e Fluxões.



Fonte: Faria, 2018, p.65.

Se considerarmos um intervalo de tempo infinitamente pequeno, então \dot{x} e \dot{y} são, respectivamente, incrementos infinitamente pequenos de x e y . Dessa forma, as coordenadas do ponto que representa a partícula em $x + \dot{x}$, são dadas por $(x + \dot{x}, y + \dot{y})$. Assim, Newton substituía essas coordenadas na equação da curva e fazia análises parecidas com as de Fermat (Faria, 2018). Na, Figura 11, $\dot{x} = h$ e $\dot{y} = h \frac{Q}{P}$.

Newton e Leibniz travaram uma grande rivalidade sobre quem seria o pai do Cálculo.

Segundo Faria (2018):

O consenso entre os historiadores hoje é que de fato Newton desenvolveu o Cálculo primeiro, mesmo tendo sido Leibniz o primeiro a publicá-lo. É consenso também, que Newton utilizou uma notação pesada e confusa que dificilmente alguém mais, além dele mesmo, pudesse ter domínio sobre aquilo naquele momento. Somando a isso, o isolamento da Inglaterra e a maneira como cada um chegou nos conceitos de derivada e integral, chega-se no consenso de que Leibniz de fato desenvolveu seu cálculo sozinho. Independente de Newton ter a ideia primeiro, e Leibniz copiado ou não, é mérito de Leibniz ter publicado seus trabalhos e ter desenvolvido uma notação clara para representar os conceitos de derivada e integral. Isso ajudou na difusão do Cálculo ao ponto que usamos suas notações até hoje (p.76).

Hoje sabe-se que os dois desenvolveram seus trabalhos de modo independente, mas atribuir a apenas os dois a criação do Cálculo não seria justo com os diversos matemáticos que contribuíram para o desenvolvimento dos conceitos de tal disciplina. (Faria, 2018).

Apesar da eficácia em resolver problemas e das descobertas de Newton de Leibniz, o Cálculo ainda carecia de conceitos fundamentais para se consolidar como disciplina. Esses conceitos ainda seriam definidos entre os séculos XIII e XIX, graças as discussões a respeito dos infinitesimais, dos números reais, das funções e limites (Faria, 2018).

3.3 A IDADE CONTEMPORÂNEA E A DEFINIÇÃO DE LIMITES

O Marquês Guillaume de L'Hospital (1661-1704) e Colin Maclaurin (1698-1746) tentaram resolver de maneiras diferentes as controvérsias geradas pelos infinitesimais. O primeiro tentou postular o uso dos infinitesimais e o segundo resolveu resgatar as demonstrações de dupla contradição utilizadas por Arquimedes (287 a.c. – 212 a.c.) (Assis, 2017).

Jean le Rond D'Alambert (1717-1783), ao buscar maior rigor nas demonstrações, atribui a “metafísica” do Cálculo ao conceito de limite. Assim, ele não define mais a derivada como a relação entre duas quantidades infinitesimais, mas sim como o limite de uma relação de quantidade não nula (Assis, 2017).

Segundo Boyer:

No artigo sobre “Limite” que ele escreveu para a *Encyclopédie*, ele chamou uma quantidade o limite de uma segunda quantidade (variável) se a segunda pode se aproximar da primeira mais perto que por qualquer quantidade dada (sem coincidir com ela). A imprecisão nessa definição foi removida nas obras de matemáticos do século dezenove (2012, p.316).

Como a definição dada por D'Alambert não foi considerada logicamente precisa, a elaboração do conceito de limite passou a fazer parte dos desafios dos matemáticos da época. A Academia de Ciências de Berlim chegou a oferecer um prêmio para quem conseguisse tal feito de modo satisfatório em 1784 (Assis, 2017).

O movimento conhecido como Aritmetização da Análise, que buscava fundamentar o Cálculo Diferencial e Integral algebricamente, em detrimento da forma geométrica, contribuiu bastante para a formulação do conceito de limite. Um representante desse movimento, Augustin-Louis Cauchy (1789-1857), depois de se desiludir com a tentativa frustrada de consolidar o Cálculo novamente a partir dos infinitésimos, elaborou uma definição relativamente próxima da que conhecemos atualmente: “Quando valores sucessivos atribuídos

a uma variável se aproximam indefinidamente de um valor fixo de modo a acabar diferindo dele por tão pouco quanto se queira, este último chama-se o limite dos outros todos” (Boyer, 2012, p.335).

Cauchy, diferentemente dos matemáticos anteriores que viam o infinitésimo como um número fixo muito pequeno, definiu-o em termos de variável dependente: “Diz-se que uma quantidade variável se torna infinitamente pequena quando seu valor numérico diminui indefinidamente de modo a convergir ao limite zero” (Boyer, 2012, p.335).

A partir de sua definição de limite, Cauchy construiu os conceitos de continuidade, derivadas e integrais, cujas definições são parecidas com as usadas hoje em dia. O conceito de função já estava ganhando uma forma consistente.

Para definir a derivada de $y = f(x)$ com relação a variável x , ele adicionava a x um acréscimo $\Delta x = i$ e formava a razão

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x + i) - f(x)}{i}$$

Então ele definia a derivada $f'(x)$ como o limite deste cociente quando i se aproxima de zero. Também definiu a diferencial dy de $y = f(x)$ e $dy = f'(x)dx$, sendo dx uma quantidade finita (Boyer, 2012).

Quanto a continuidade, afirmou que uma função $f(x)$ é contínua se um acréscimo infinitamente pequeno na variável x produz um acréscimo infinitamente pequeno, $f(x + i) - f(x)$ da própria função.

Com relação a integral, ele o definiu como o limite de uma soma. Dada a partição P de $[a, b]$ definida pelos pontos $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$, a integral definida da função $f(x)$ no intervalo x_0 até x_n é dada pelo limite da soma $S_n = (x_1 - x_0)f(x_0) + (x_2 - x_1)f(x_1) + \dots + (x_n - x_{n-1})f(x_{n-1})$ quando os tamanhos dos intervalos $x_i - x_{i-1}$ decrescem indefinidamente. A definição de integral que usamos hoje, baseada nas somas superiores e inferiores, é conhecida como integral de Riemann porque Bernard Riemann foi quem determinou as condições necessárias para que uma função limitada seja considerada integrável alguns anos mais tarde (Boyer, 2012, p. 391).

Como Cauchy definiu a integral e a derivada de forma independente ele precisava demonstrar a relação entre esses conceitos, ou seja, demonstrar que dado $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, contínua, derivável e com derivada contínua, então

$$\int_a^b f'(x)dx = f(b) - f(a).$$

Para isso ele usou o Teorema do Valor Médio: “Se $f(x)$ é contínua no intervalo fechado $[a, b]$ e derivável no intervalo aberto (a, b) , então existirá algum valor x_0 tal que $a < x_0 < b$ e $f(b) - f(a) = (b - a)f'(x_0)$ ” (Boyer, 2012, p.336).

Considerando a partição P do intervalo $[a, b]$. Verifica-se que $f(b) - f(a) = \sum_{k=1}^n [f(x_k) - f(x_{k-1})]$. Usando o Teorema do Valor Intermediário em cada um dos subintervalos da partição, temos que $f(b) - f(a) = \sum_{k=1}^n [f(x_k) - f(x_{k-1})] (x_k - x_{k-1})f'(x_c)$. Considerando o limite quando $\max(x_k - x_{k-1}) \rightarrow 0$, obtemos $\int_a^b f'(x)dx = f(b) - f(a)$ (Medeiros, 2008).

Pode-se perceber que as definições e os resultados encontrados por Cauchy são muito semelhantes ao que trabalhamos hoje em dia. Porém, essa Teoria de Limites se baseava na noção intuitiva de números reais que ainda não tinha sido desenvolvida com o rigor necessário (Assis, 2017).

Muitos dos problemas oriundos das definições de Cauchy foram sanados por Karl Theodor Wilhelm Weierstrass (1815-1897). Adepto do movimento da Aritmetização da Análise, ele é considerado o criador da definição rigorosa de limites por meio dos épsilons e deltas (Assis, 2017, p.22).

Weierstrass defendeu a necessidade de se construir de forma rigorosa o conjunto de números reais. Graças aos trabalhos de Richard Dedekind (1831-1916) e Giuseppe Peano (1858-1932) é que se conseguiu mostrar que o sistema de números reais poderia ser deduzido a partir de um conjunto de postulados chamados de “Axiomas de Peano” e “Cortes de Dedekind”. Esses postulados permitiram a demonstração rigorosa e algébrica dos teoremas de limites (Assis, 2017, p.22).

Coube a Heine (1821-1881), aluno de Weierstrass formular em 1872 a definição formal de limite de funções de uma variável que é utilizada até hoje:

“Sejam $I \subset \mathbb{R}$ um intervalo, $x_0 \in I$ e $I \setminus \{x_0\} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função dada. Dizemos que $f(x)$ tem limite L quando x tende a x_0 , e denotamos $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L$, se para cada $\epsilon > 0$ dado, existir um $\delta > 0$ tal que $x_0 \in I$ e $0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \epsilon$ ” (ASSIS, 2017, p. 22).

A partir desse momento, estavam definidos os principais conceitos do Cálculo.

Ao conhecer a trajetória percorrida pelos matemáticos ao longo do tempo para conceber os conceitos do Cálculo, percebemos que, além da inversão da ordem em que os conceitos

surgiram, as abordagens dos livros e cursos de Cálculo, geralmente, também invertem a ordem histórica do aparecimento do conceito de limites. Como vimos, o cálculo de limites já era realizado por Cavalieri, Descartes, Fermat, Leibniz e Newton, antes mesmo de surgir a famosa definição por ϵ s e δ s, o que só aconteceria no final do século XIX.

Diante disso surgem os seguintes questionamentos: porque os estudantes de Cálculo precisam conhecer a definição ϵ - δ de limites antes de aprender a calculá-los já que os antigos matemáticos os resolviam antes mesmo do surgimento da definição? será que algum livro de Cálculo trabalha com o cálculo de limites antes de defini-los?

Vemos adiante.

4. FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

“Teorias são redes; somente aqueles que as lançam pescarão alguma coisa.”

Novalis¹⁰

A analogia de que as teorias científicas são como redes de pescadores, resgatada por Popper (1968) e explorada por Alves (1981), é muito bem-vinda para que possamos entender um pouco da importância da fundamentação teórica para o trabalho científico.

Assim como a rede é um artefato pelo qual o pescador se serve para capturar peixes da imensidão do mar, a teoria é o instrumento de trabalho do pesquisador. Este tem como objetivo utilizá-lo para “pescar” conhecimentos na complexa realidade em que vive.

Cabe ressaltar que tanto as redes quanto as teorias não surgem do nada, elas precisam ser construídas. Para construir seu instrumento o pescador usa fios enquanto o cientista usa palavras.

Segundo Alves (1981):

Teorias são enunciados acerca do comportamento dos objetos do interesse do cientista. Daí termos teorias relativas ao universo, aos átomos, às combinações entre os elementos, à vida, à sociedade, às emoções, à educação: cada uma delas é um conjunto de conhecimentos acerca dos hábitos comportamentais das entidades a serem caçadas, sem o que o cientista não poderá preparar-lhes armadilhas. Um cientista é uma pessoa que sabe usar as redes teóricas para apanhar as entidades que lhe interessam (p.77).

Dessa forma, quando um pescador deseja peixes grandes não faz sentido ele usar uma rede que traz tudo. Assim como há redes adequadas para determinado tipo de pesca, também há teorias adequadas para o tipo de conhecimento que se extrair da realidade.

Enquanto a psicologia tradicional, por exemplo, ignorava lapsos, sonhos e comportamentos psicóticos, Freud elaborou uma nova teoria para estudá-los, pois o arcabouço teórico existente não dava mais conta de extrair esse tipo de conhecimento, já que não foi concebida para isso (Alves, 1981).

Dessa forma, é de suma importância para o pesquisador lançar mão de uma fundamentação teórica consistente e que esteja em consonância com os objetivos de sua investigação.

¹⁰In: POPPER, Karl. **The Logic of Scientific Discovery**. Nova York, Harper & Row, 1968.p.22.

Para este trabalho, lançamos mão do referencial metodológico de pesquisa da Hermenêutica da Profundidade proposto por Jonh B. Thompson em seu livro “Ideologia e Cultura Moderna” de 1981, pois ele trabalha com aspectos que transcendem a análise formal do conteúdo dos livros didáticos, incorporando também aspectos sócio-históricos de sua produção.

Para Schubring (2018a) ignorar os aspectos sócio-históricos que envolvem uma obra se constitui num sério problema para quem deseja estudá-la. Sobre a análise de livros-textos de Matemática, especificamente, ele afirma:

Reconhecidamente, pode ser considerado suficiente, em geral, analisar um livro-texto isolado, de uma maneira simplesmente interna, isto é, avaliar sua estrutura interna. Nenhum historiador sério, contudo, ficará satisfeito com tais dados descritos; ao contrário, estará resolvido a julgar essa estrutura e as conexões internas estabelecidas, e a situar o autor e sua obra no contexto do desenvolvimento da matemática (Schubring, 2018a, local. 312-319).

Assim, a HP, nos pareceu uma abordagem viável, consistente e que apresenta uma grande preocupação com o estudo do contexto da obra, que é aspecto fundamental para o alcance dos objetivos dessa investigação.

Tal abordagem foi utilizada como suporte teórico para outros métodos que foram aplicados nessa pesquisa. O próprio Thompson (1981) abre espaço para que se trabalhe a HP em conjunto com outras metodologias de investigação:

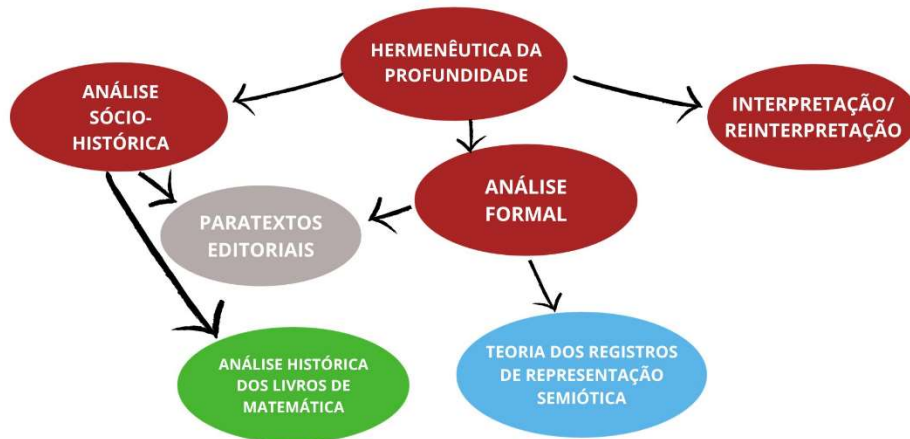
Dentro de cada fase do enfoque da HP, uma variedade de métodos de pesquisa podem estar à disposição, e alguns métodos podem ser mais adequados que outros, dependendo do objetivo específico de análise e das circunstâncias específicas da investigação (p.366).

Dessa forma, utilizamos, dentro da HP, alguns referenciais teóricos específicos para subsidiar a análise em cada etapa. A HP é uma metodologia de pesquisa que abrange diversos aspectos do objeto de investigação, e por isso compreende três fases: a análise sócio-histórica, a análise formal e a interpretação/reinterpretação.

Para a análise sócio-histórica dos livros analisados neste trabalho, buscamos fundamentação na Análise Histórica dos Livros de Matemática proposta por Gert Schumbring e nos Estudos dos Paratextos Editoriais elaborados por Gérard Genette. Já para a análise formal lançamos mão da Teoria dos Registros de Representação Semiótica de Raymond Duval.

A maneira como estas teorias se relacionam neste trabalho está representada na Figura 12:

Figura 12 - Estratégia Metodológica de pesquisa.



Fonte: Elaborado pelo autor.

A seguir apresentamos uma breve explanação sobre cada um desses aportes teóricos. Iniciamos a apresentação por uma breve revisão histórica sobre a Hermenêutica, os principais conceitos da HP e como ela se articulará com os demais métodos utilizados nesse estudo.

4.1. HERMENÊUTICA DA PROFUNDIDADE

Iniciamos a apresentação sobre a HP fazendo uma breve revisão histórica do conceito de Hermenêutica, da origem do termo à apresentação dos pensadores que mais contribuíram para o desenvolvimento desta filosofia/metodologia de pesquisa, e em seguida expomos os principais conceitos da Hermenêutica de John B. Thompson.

4.1.1. História da Hermenêutica

“Hermenêutica” é uma palavra de origem grega referente ao deus mitológico Hermes que tinha como principal função transmitir mensagens dos deuses gregos aos homens. Essa palavra adquiriu novo significado com o passar do tempo: a arte da interpretação de textos sagrados. Ao interpretar textos sagrados, o tradutor estaria cumprindo exatamente a mesma função de Hermes.

Sobre a origem da palavra, Palmer (1996) afirma que:

A palavra grega *hermeios* referia-se ao sacerdote do oráculo de Delfos. Esta palavra, o verbo *hermeneucin* e o substantivo *hermeneia*, mais comum, remetem para o deus-mensageiro-alado Hermes, de cujo nome as palavras aparentemente derivaram (ou vice-versa?). E é muito significativo que Hermes se associe a uma função de

transmutação – transformar tudo aquilo que ultrapassa a compreensão humana em algo que essa inteligência consiga compreender. As várias formas da palavra sugerem o processo de trazer uma situação ou uma coisa, da inteligibilidade à compreensão. Os Gregos atribuíam a Hermes a descoberta da linguagem e da escrita – as ferramentas que a compreensão humana utiliza para chegar ao significado das coisas e para o transmitir aos outros (p.23).

Ainda segundo Palmer (1996), a palavra “Hermenêutica” tinha três significados diferentes: exprimir em voz alta (dizer), explicar uma situação ou de traduzir de uma língua estrangeira. Em língua portuguesa essas orientações podem ser expressas semanticamente ao verbo “interpretar”.

A princípio a arte de interpretar se destacou em três áreas específicas: a hermenêutica religiosa, que interpreta textos sagrados; a jurídica, que interpreta leis, e a de textos antigos (muito utilizado durante a renascença para resgatar os textos clássicos da antiguidade). Com o passar do tempo a Hermenêutica passou, aos poucos, a ser aplicada em textos de diversas áreas do conhecimento, o que contribuiu para o surgimento de várias teorias e técnicas associadas a arte de interpretar (Ferraz; Lopes; Back, 2017).

Houve, com o passar dos anos, uma grande mudança de perspectiva com relação aos objetivos da Hermenêutica. O objetivo inicial era conceber a forma correta de interpretar as escrituras sagradas ou as leis, ou seja, partia-se do princípio de que havia apenas uma maneira de interpretar e que outras formas seriam incorretas. Historicamente, paradigmas foram quebrados e, aos poucos, passou-se a aceitar outros pontos de vista no que se refere à interpretação. Essa ruptura de perspectiva da Hermenêutica é destacada por Oliveira, Andrade e Silva (2013):

A tradição hermenêutica remonta às primeiras tentativas, ainda na Antiguidade, de interpretar textos sagrados e leis. Àquela época, e ainda por muito tempo, a intenção das chamadas teorias ou abordagens hermenêuticas era eliminar a duplicidade de interpretações. Assim, criam-se regras de leitura e elaboração textual que supostamente fixavam uma forma correta, única, unívoca de interpretação. [...] essa tentativa fracassou de forma tal que as hermenêuticas contemporâneas não apenas abandonaram essa busca à interpretação unívoca como se ocupam, agora, de defender a potencialidade da multiplicidade de interpretações para compreendermos textos, “criando mundos” com as interpretações (p. 121).

Assim, se estabeleceu duas formas de abordar a Hermenêutica historicamente. A primeira está relacionada a um aspecto normativo ou metódico, enquanto a outra diz respeito a uma hermenêutica filosófica, onde a interpretação faz parte da essência humana (Mondini, 2016).

Friedrich Schleiermacher (1768-1834) e Wilhelm Dilthey (1833-1911) foram dois pensadores que se destacaram no intuito de estabelecer a Hermenêutica como uma metodologia de investigação.

Com o propósito de se estabelecer uma teoria geral da interpretação, Schleiermacher parte da premissa de que a compreensão segue o processo inverso da composição. Para ele, compreender significa voltar a experimentar os processos mentais do autor do texto, partindo da expressão acabada e retornando ao pensamento de quem produziu. Dessa maneira, a interpretação é dividida em dois momentos: a Hermenêutica Gramatical, que está relacionada à linguagem e significados explícitos do texto, e a Hermenêutica Psicológica, que busca a maneira que o autor pensa o texto, ou seja, inclui a vida psíquica do autor (Palmer, 1996).

Dilthey, por sua vez, vê na Hermenêutica o fundamento para todas as ciências humanas, caracterizada por ele como disciplina que interpreta a vida interior do homem. Dessa forma o conceito de objeto de estudo da Hermenêutica é expandido para quaisquer expressões que possam ser compreendidas como, gestos, obras de arte etc. O objetivo era fugir da tentação positivista de utilizar métodos das ciências naturais nas ciências humanas e, para isso, Dilthey precisava apresentar métodos para alcançar uma interpretação objetivamente válida das expressões da vida interior, determinando a experiência concreta como o único ponto de partida das ciências humanas (Palmer, 1996).

Sobre a Hermenêutica Filosófica, Hans-Georg Gadamer (1900-2002) e Martin Heidegger (1889-1976) contestaram a concepção de hermenêutica como método de investigação. Sobre os trabalhos de Heidegger e Gadamer, Mondini (2016) afirma que eles: “[...] expõem a hermenêutica como abertura mundana, portanto histórica, social e cultural, na qual o ato de compreender é entendido como constitutivo dos seres humanos, uma vez que ao existir compreende-se a si e a sua obra cultural” (p. 2).

Assim, Heidegger concebeu em sua Hermenêutica Fenomenológica que a compreensão é o princípio da existência humana. Dessa forma, a arte de interpretar passa a fazer parte de uma discussão ontológica, cujo debate filosófico passa a abordar as condições que tornam a compreensão possível.

Apesar de não negar a importância do método como rigor de investigação, Gadamer, partindo dos trabalhos de Heidegger, desconstrói a ideia de busca da verdade por meio de um único método. Segundo ele a verdade não é alcançada metodicamente, mas estruturada dialeticamente numa fusão de horizontes em que está presente toda uma tradição histórica contida na produção humana, num movimento que não é nem objetivo, nem subjetivo, mas intersubjetivo (Mondini, 2016).

Assim, ao defender a Hermenêutica como uma experiência universal, Gadamer atribui essa universalidade à linguagem, pois, é a linguagem que permite ao indivíduo a compreensão. Dessa forma, o pré-requisito universal para a interpretação é o domínio de alguma linguagem.

Jürgen Habermas (1929- atualmente) contesta fortemente essa universalidade linguística. Ele apresenta dois aspectos ignorados por Gadamer: que a linguagem é uma forma de dominação social e que ela pode ser afetada por fatores subconscientes que podem distorcê-la profundamente. No primeiro caso, ele sugere que, ao invés de hermenêutica, deveria se falar em críticas de ideologias; já no segundo caso deveríamos substituir a Hermenêutica por uma Hermenêutica da Profundidade (Negru, 2014).

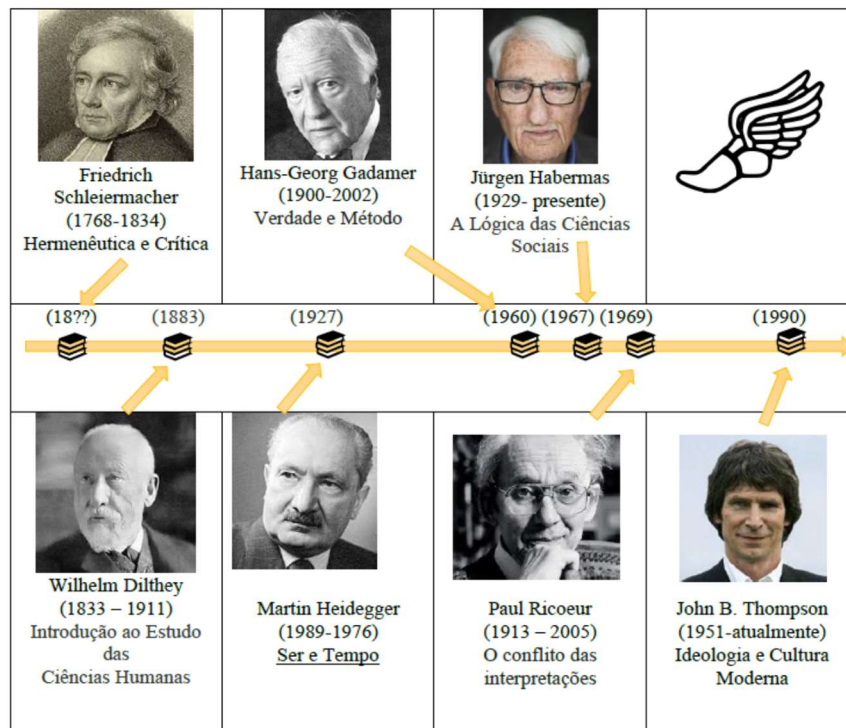
Dessa forma, para Habermas dominar uma linguagem não seria um pré-requisito para compreensão, pois esta pode ser distorcida, seja por psicopatologias, seja sistematicamente pelas ideologias e processos sociais de dominação e poder. Assim, Habermas não nega a Hermenêutica Filosófica, mas a crítica por entender que ela não abre espaço para reflexões sobre as distorções ocorridas na comunicação em decorrência de uma estrutura social vigente.

Para Habermas, a psicanálise está para a compreensão das neuroses que se manifestam pela linguagem, assim como a HP está para as distorções da comunicação provocadas ideologicamente.

Paul Ricoeur (1913 – 2005) tenta conciliar as ideias de Gadamer e Habermas, trabalhando a concepção de que a Hermenêutica pode oferecer tanto uma reflexão metodológica quanto uma reflexão filosófica sobre o ser. Dessa forma, ele associa a Hermenêutica da Profundidade ao aspecto metodológico de pesquisa (Ferraz; Lopes; Back, 2017).

Por sua vez, John B. Thompson (1951- presente), influenciado por Ricoeur, sistematiza sua HP, aliando o aspecto metodológico de um estudo formal do objeto de pesquisa, com uma preocupação com o contexto histórico e social em que este objeto é produzido, transmitido e apropriado, aproximando, dessa maneira, uma metodologia de investigação de predominância fenomenológica de uma concepção histórico-crítica. Na uma representação da linha do tempo dos autores responsáveis pelo desenvolvimento das concepções de hermenêutica e suas principais obras.

Figura 13 - Linha do tempo da Hermenêutica.



Fonte: Elaborado pelo autor¹¹

A seguir apresentamos os principais conceitos da Hermenêutica da Profundidade, metodologia defendida por Thompson, que servirá de arcabouço teórico para o presente trabalho.

4.1.2. Hermenêutica da Profundidade

O conceito mais importante da HP é o de formas simbólicas. Estas são “construções significativas que exigem interpretação. São ações, falas, textos que, por serem, construções significativas, podem ser compreendidas” (Thompson, 2011, p. 357). Devem ser entendidas como tudo que pode ser interpretado e compreendido, e são, portanto, os objetos de estudo da HP, no caso dessa pesquisa, são os livros de Cálculo.

¹¹ Fonte da fotografia de Friedrich Schleiermacher: https://pt.wikipedia.org/wiki/Friedrich_Schleiermacher.

Fonte da fotografia de Wilhelm Dilthey: <https://pt.wikipedia.org/wiki/Hermen%C3%AAautica>

Fonte da fotografia de Martin Heidegger <https://www.todamateria.com.br/martin-heidegger/>;

Fonte da fotografia de Hans-Georg Gadamer <http://frasesdofilosofo.blogspot.com/2013/03/frases-do-filosofo-hans-georg-gadamer.html>;

Fonte da fotografia de Jürgen Habermas:

https://brasil.elpais.com/brasil/2018/04/25/eps/1524679056_056165.html;

Fonte da fotografia de Paul Ricoeur: <https://gaia-nefelibata.webnode.com/o-si-mesmo/>;

Fonte da fotografia de John B. Thompson: <https://veja.abril.com.br/tecnologia/futuro-do-livro-ainda-esta-por-ser-escrito-diz-john-b-thompson/>.

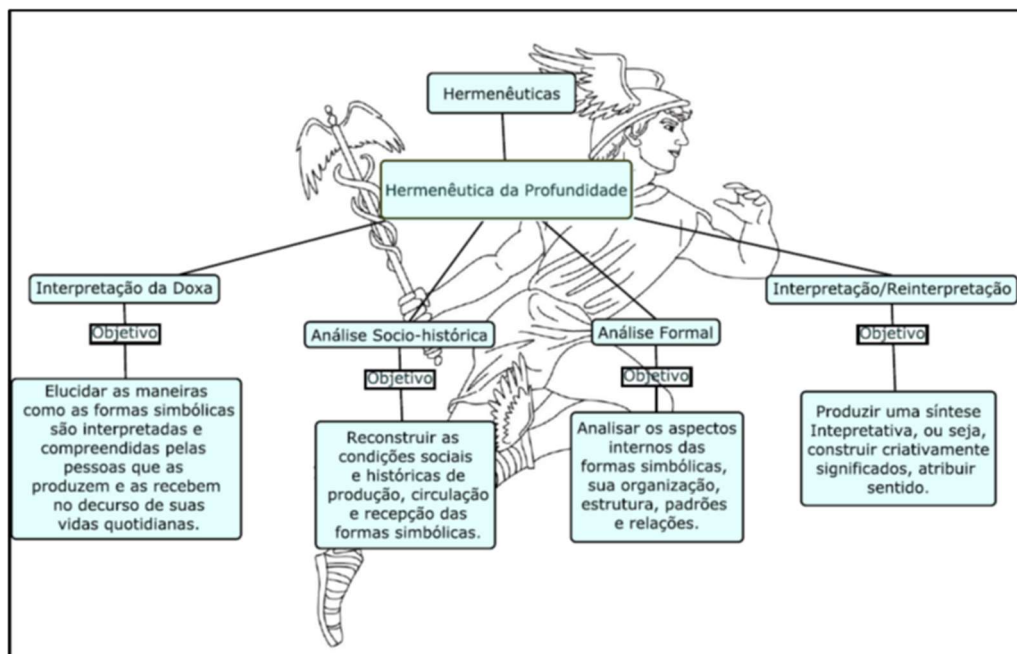
Fonte da fotografia do pé alado: <https://pt.vector.me/browse/sports>. Todas as fontes visitadas em 22/11/2021.

Assim, as formas simbólicas apresentam características de grande importância para uma investigação sócio-histórica. Primeiramente elas já são pré-interpretadas. Isso se deve a concepção de que a interpretação é algo inerente ao ser humano e, por isso, os sujeitos que compõem o campo sujeito-objeto são capazes de refletir e agir de acordo com essa compreensão, atribuindo à Hermenêutica um caráter potencial transformador da sociedade, já que o produto dessa análise será interpretado novamente por sujeitos que compreendem e agem no mundo social.

Outro aspecto relevante das formas simbólicas é que os sujeitos que as produzem e as recebem estão inseridos em tradições históricas, ou seja, envoltos em um conjunto de costumes, valores e visões de mundo construídos historicamente. Por isso a importância de estudar as condições sociais e históricas da produção da forma simbólica para uma compreensão mais completa sobre ela.

Assim, o estudo das formas simbólicas proposto por Thompson (2011) é dividido em três fases (a análise sócio histórica, a análise formal ou discursiva e a interpretação/reinterpretação) que são precedidas por uma etapa preliminar chamada de interpretação da Doxa. As etapas da HP, que estão representadas na Figura 14.

Figura 14 - Etapas da Hermenêutica da Profundidade.



Fonte: Elaborado pelo autor¹².

¹² Fonte da fotografia de Hermes: <https://www.tudodesenhos.com/mitologia-grega/>; site visitado em 22/11/2021.

A seguir descrevemos cada uma das fases que compõe o referencial da HP proposta por Thompson, começando pela fase preliminar.

4.1.2.1. A Interpretação da Doxa

“Doxa” é uma palavra grega que significa opinião ou crença de um grupo social (Silva, 2016), e consiste no estudo sobre o impacto da forma simbólica no cotidiano das pessoas (Thompson, 2011). Ela se refere a Hermenêutica do cotidiano e tem como objetivo investigar a maneira como a forma simbólica é compreendida e interpretada pelas pessoas que as produzem e as recebem em seu dia a dia. Segundo Thompson este é “Um ponto de partida primordial e inevitável do enfoque da HP” (2011, p.363).

4.1.2.2. A Análise Sócio Histórica

A primeira etapa de fato da HP é análise sócio-histórica, que tem como grande objetivo “reconstruir as condições sociais e históricas de produção, circulação e recepção das formas simbólicas” (Thompson, 2011, p.366). Para que isso aconteça, se faz necessário identificar e descrever as situações espaços-temporais em que as formas simbólicas foram produzidas e recebidas. Se faz relevante também analisar os campos de interação, que devem ser interpretados como um conjunto de posições e trajetórias que determinam as relações entre pessoas e as oportunidades acessíveis a elas.

Outro estudo que pode ser feito nessa etapa é a análise do conjunto de instituições sociais envolvidas na produção e recepção da forma simbólica. Tais instituições possuem suas regras e recursos que influenciam ou determinam os campos de interação. Além disso, a estrutura da sociedade em que a forma simbólica está inserida também é estudada pela HP. Este estudo se refere às assimetrias e diferenças relativamente estáveis que caracterizam as instituições sociais e os campos de interação, ou seja, analisa as manifestações das desigualdades sociais (sejam elas de gênero, renda, poder etc.) e como elas influenciam o acesso a oportunidades. Assim, busca-se estabelecer critérios, categorias e princípios que estabelecem os aspectos duráveis das diferenças sociais. Por fim, um último aspecto que pode ser analisado nesta etapa se refere aos meios técnicos de construção e transmissão de mensagens (Thompson, 2011).

Sobre a análise do contexto de uma obra Schubring (2018a) afirma: “Essa abordagem é melhor, visto que “o” autor de um livro-texto usualmente consiste em um grupo muito maior

que o indicado pelos nomes na folha de rosto; o autor mencionado representa uma “coletividade” ampliada de colaboradores” (local. 338).

Especificamente, sobre os livros didáticos de Matemática, Schubring (2018a) assinala que a falta de padrão a respeito da Matemática ensinada impede a avaliação apenas interna dos livros-textos. Segundo ele: “[...] já que não existe qualquer acesso direto a uma interpretação interna imediata de um textbook, é imperioso analisá-lo como parte de um contexto social mais amplo, como o da produção de conhecimento pela comunidade científica em geral” (Schubring, 2018a, local. 338).

Assim, a análise sócio-histórica se mostra imprescindível na medida em que percebemos um livro como produto histórico, de caráter coletivo, concebido por diversas instituições, resultado de demandas sociais e que existe dentro de um amplo contexto que não pode ser ignorado.

4.1.2.3. A Análise Formal

A segunda etapa é a análise formal. Ela estuda os aspectos internos das formas simbólicas, sua organização, estrutura, padrões e relações. Nessa etapa o pesquisador realiza o estudo de importantes elementos estruturais das formas simbólicas.

A análise semiótica é um exemplo de um desses estudos. Nesse tipo de investigação se estuda os elementos que compõe a forma simbólica, ou o signo, as relações entre esses elementos e o sistema mais amplo do qual ela faz parte. Pode ser feita também uma análise sintática, que se ocupa das regras práticas da comunicação e dos aspectos individuais identificados na análise semiótica, bem como uma análise de conversação, que estuda as instâncias de interação linguísticas nas situações em que elas ocorrem. Além desses procedimentos, faz parte do arcabouço teórico da análise formal, a análise narrativa, em que o pesquisador se preocupa com a forma como a história é contada, e a análise argumentativa, que diz respeito à coerência interna do texto e a estrutura argumentativa da obra (Thompson, 2001).

A análise formal compreende elementos internos dos mais variados, incluindo também os paratextos editoriais. Segundo Alvarenga e Paixão (2017):

Quando nos referimos à apreciação de um livro didático, durante a análise formal, podemos considerar, além da sequência e do modo com que os conteúdos são apresentados, a metodologia utilizada pelo autor, o nível de ensino para o qual o livro foi produzido e, sempre que possível, os elementos adicionais, ou seja, os paratextos que compõem a obra (p.159).

No presente trabalho, a análise formal é realizada principalmente por meio do estudo das definições de funções e limites apresentadas nas obras, pela análise narrativa e pelo estudo dos registros de representação semiótica presentes no texto e nos exercícios propostos nos livros.

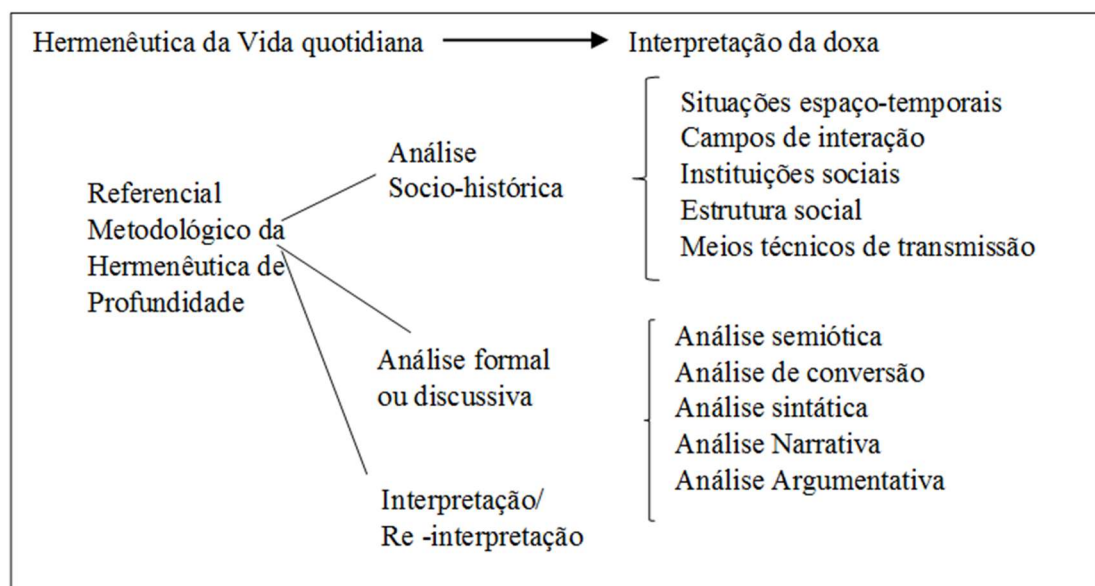
4.1.2.4. A Interpretação/reinterpretação

A última etapa da HP é a interpretação/reinterpretação que corresponde à construção criativa de significado, ou seja, uma interpretação do que é dito. Essa fase se relaciona com o aspecto referencial da forma simbólica, ou seja, a atribuição de sentido. Ela consiste na produção de uma síntese interpretativa e, por isso, transcende a análise sócio histórica e formal do objeto de investigação.

É um movimento de pensamento que complementa a análise formal e a análise sócio-histórica, pois enquanto nessas fases o objeto de estudo é quebrado, dividido e desconstruído, a interpretação/reinterpretação procede a um movimento de síntese. O termo “reinterpretação” diz respeito ao fato de que as formas simbólicas já são pré-interpretadas pelos sujeitos que compõem o mundo sócio histórico (Thompson, 2001).

Na Figura 15 apresentamos etapas e métodos que englobam a HP.

Figura 15 - Formas de Investigação da Hermenêutica da Profundidade.



Assim, a HP é um referencial metodológico de pesquisa que inclui uma gama de procedimentos, constituído em etapas que não necessariamente devem ser seguidas na ordem em que aparece na . Os métodos sugeridos podem ser adaptados, e até suprimidos, de modo a atender aos objetivos pretendidos pelo pesquisador.

Na investigação aqui apresentada, a HP será utilizada como um referencial teórico organizador, que será combinado a outros métodos e teorias, como a Análise Histórica de Livros de Matemática, o estudo de Paratextos Editoriais e a TRRS. A seguir mostramos um resumo dessas teorias.

4.2. ANÁLISE HISTÓRICA DOS LIVROS DE MATEMÁTICA

O matemático e pesquisador em História da Matemática alemão Gert Schubring é um dos grandes defensores do estudo do contexto sócio-histórico na análise de livros didáticos de Matemática. Para ele o texto só pode ser interpretado adequadamente junto com seu contexto (Schubring, 2018a).

Assim, para ele o conhecimento do contexto da produção da obra pode alargar a interpretação do texto e reconstruir seu significado. Por isso sua análise hermenêutica comporta interpretações e análises socioculturais.

A análise proposta por ele é composta por três dimensões. A primeira compreende a análise das mudanças ocorridas nas várias edições de um livro escolhido, caso este tenha sido reeditado.

Sobre essa primeira dimensão Silva (2015) relata:

Livros didáticos que tiveram variadas reedições nem sempre mantiveram-se fiéis à primeira edição. O contrário é a regra. As edições modificam e alteram o texto, quer seja mediante correções (ortográficas, de conteúdos), supressão ou atualização de conteúdos, de edições de texto, inserção de imagens, mudanças na apresentação ou na orientação metodológica etc. (p. 385).

Muitas vezes essas modificações são tão profundas que é possível constatar transformações nas concepções didático-pedagógicas do autor, como concluiu o próprio Schubring em seu estudo sobre uma série de livros de Silvestre-François Lacroix (1765 – 1843) (Silva, 2015).

Ainda sobre essa dimensão, Choppin (2004) chama a atenção sobre a grande dificuldade do pesquisador em ter acesso aos arquivos das editoras de livros didáticos, pois estas dificilmente abrem seus arquivos para o público. Ele também aponta para uma grande melhoria futura nesse aspecto se a tendência dos editores em disponibilizarem seus arquivos ao público

se confirmar e se a constituição de instrumentos de pesquisas prosseguir no ritmo atual, permitindo análises quantitativas e comparativas.

A segunda dimensão compreendida pela metodologia de pesquisa de Schubring consiste em estudar mudanças em outras obras pertencentes ao mesmo tema do livro escolhido (Schubring, 2018b).

Essa dimensão permite ao pesquisador fazer comparações sobre diferentes livros de um mesmo tema. Provavelmente foi por meio dessa dimensão que Schubring identificou que muitos conhecimentos de Étienne Bezout (1730 – 1783) foram apropriados nos livros de Sylvestre Lacroix (1765 – 1843). A experiência de Schubring fez com que ele percebesse que era uma prática comum da época copiar textos de outros autores sem dar o devido crédito (Silva, 2015). Acreditamos que nosso trabalho cumpre o objetivo dessa etapa, tendo em vista que estudamos a abordagem de limites em três livros diferentes.

A terceira dimensão está relacionada à alterações nos livros didáticos provocados pelas mudanças de contexto: variações curriculares, na legislação, debates pedagógicos, evolução na Matemática, transformações epistemológicas etc. (Schubring, 2018b).

Schubring chama a atenção para o fato de as mudanças ocorridas nas edições dos livros podem ser provocadas por fatores externos à mente do autor. Sobre isso ele exemplifica:

Um último exemplo da influência do contexto na produção de livros-texto é que alterações do texto em edições sucessivas não são necessariamente devidas ao discernimento de seu autor oficial, que nos mostram sinais de seu próprio desenvolvimento cognitivo, mas podem igualmente ter sido provocadas por pressões sociais (ver por exemplo as mudanças abruptas nos livros didáticos depois dos protestos dos pais contra a teoria dos conjuntos para alunos da escola primária) (Schubring, 2018a, local. 351).

No que se refere ao nosso trabalho, estudamos o contexto a que se refere a análise sócio-histórica por meio da investigação da biografia dos autores dos livros pesquisados, bem como, da análise do prefácio dessas obras.

É importante ressaltar que há claramente uma diferença entre a concepção hermenêutica de Schubring e de Thompson. O primeiro segue uma linha mais tradicional sobre a ciência da interpretação, tendo como mentor o filósofo alemão Friedrich August Wolf (1759 – 1824). Schubring afirma claramente que o objetivo da hermenêutica é “reconstruir o pensamento do outro, e não se restringir a uma interpretação pessoal” (Schubring, 2018b, p. 200). Ou seja, para ele só há uma interpretação possível que é a intenção do autor da obra. Dessa forma a missão do hermeneuta é reconstruir pensamento do autor do livro.

Esse posicionamento vai, evidentemente, de encontro ao posicionamento de Thompson que define a fase de interpretação/reinterpretação como uma “construção criativa de

significado” (Thompson, 2011). Assim, para Thompson a interpretação de uma obra segue a ideia de Gadamer de fusão de horizontes, onde o significado surge da interação entre as vivências do leitor e do autor.

Assim, embora esses autores tenham posicionamentos divergentes com relação ao objetivo da hermenêutica, optamos por seguir as indicações de Schubring como subsídio da análise sócio-histórica dos livros, etapa do arcabouço teórico construído por Thompson, por acreditarmos que este conhecimento complementa de maneira eficaz as demais análises realizadas nesse trabalho.

4.3. ESTUDOS DOS PARATEXTOS EDITORIAIS

Um importante subsídio que foi utilizado nesse trabalho, diz respeito ao arcabouço teórico construído pelo crítico e teórico de literatura francês Gérard Genette, conhecido como estudo dos paratextos editoriais.

Começamos a entender o que é um paratexto editorial quando Genette (2009) define o que é um livro. Resumidamente, para ele uma obra literária seria essencialmente um texto. Porém:

[...] Esse texto nunca se apresenta em estado nu, sem o reforço e o acompanhamento de certo número de produções, verbais ou não, como nome de autor, um título, um prefácio, ilustrações, que nunca sabemos se devemos ou não considerar parte dele, mas que em todo caso o cercam e o prolongam, exatamente para apresentá-lo, no sentido habitual do verbo, mas também em seu sentido mais forte: para torná-lo presente, para garantir sua presença no mundo, sua “recepção” e seu consumo, sob a forma, pelo menos hoje, de um livro (Genette, 2009, p.09).

Assim, poderíamos dizer que estes elementos que fazem parte da obra, mas que estão além do texto propriamente dito, como: título, capa, contracapa, ilustrações etc. seriam paratextos editoriais. Em outras palavras: “[...] é por meio do paratexto que o texto deixa de ser um texto bruto e passa a ser um livro” (Andrade, 2012, p. 46).

Os paratextos “dizem” muito sobre o livro. Informações sobre o autor, época da produção e apropriação estão presentes nos elementos paratextuais e podem ser muito úteis para compreender intenções dos responsáveis pela obra. Por isso o objetivo da análise paratextual é compreender a razão dos autores, ou editores, de mobilizar esses elementos que estão ao redor do “texto” (Andrade, 2012).

Na nossa pesquisa analisamos com mais cuidado o prefácio dos livros de Cálculo. Andrade (2012) entende o prefácio como um texto preliminar, inicial, que pode ser escrito pelo autor ou por outra pessoa. Essa concepção é mais restrita que a de Genette (2009) que define o

prefácio como “toda espécie de texto limiar (preliminar ou pós-liminar), autoral ou alógrafo, que consiste num discurso produzido a propósito do texto que segue ou antecede. Assim, o ‘posfácio’ será considerado uma variedade de prefácio” (p. 145).

Como as obras analisadas nesse trabalho somente apresentam prefácios no sentido restrito da palavra, não haverá problemas em adotarmos uma ou outra concepção. O mais relevante aqui é discutir a função do prefácio original. Sobre isso, Genette (2009) afirma: “As funções prefaciais diferem conforme os tipos de prefácio. Esses tipos funcionais parecem-me no essencial determinados, ao mesmo tempo, por considerações de lugar, de momento e de natureza do destinador” (p. 175).

Assim, levamos em consideração principalmente três aspectos fundamentais: informações sobre as circunstâncias de origem da obra; sobre o seu público-alvo; bem como, sobre as intenções do autor, ou seja, o que ele promete ser encontrado pelo leitor em seu texto.

Com relação ao primeiro aspecto, Genette (2009) nos chama atenção para o potencial que o texto preliminar tem de esclarecer sobre o contexto de elaboração do livro: “O prefácio original pode informar o leitor sobre a origem da obra, as circunstâncias de sua escrita, nas fases da sua gênese” (p. 187).

Num livro-texto do ensino superior, por exemplo, é comum o autor explicar no prefácio se a ideia de publicar o livro partiu de reunir as notas de aulas de alguma disciplina ministrada, em alguma instituição, para algum curso específico, ou se foi procurado por alguma editora, ou ainda se a ideia da publicação surgiu de alguma insatisfação com relação ao material didático existente até então.

No que diz respeito à definição do público-alvo, Genette (2009) explica que o prefácio também tem a função de:

Guiar o leitor também e antes de tudo significa situá-lo e, portanto, determiná-lo. Nem sempre é seguro lançar uma rede muito ampla e os autores geralmente têm uma ideia bastante clara do tipo de leitor que desejam, ou sabem que podem tocar; mas também daquele que desejam evitar (p. 189).

É interessante que o autor de livro-texto destinado ao ensino superior deixe claro no prefácio a quem o texto se destina. Isso evita, por exemplo, que um estudante que pretende ter um primeiro contato com a disciplina se depare com um texto denso sobre a matéria, ou ainda que um acadêmico em estágio avançado se enfadonha com um material de leitura muito básico.

Com relação ao último aspecto Genette (2009) pontua: “Talvez a mais importante das funções do prefácio original consista em uma interpretação do texto do autor ou, se preferir, uma declaração de intenções” (p. 196).

Uma das principais utilidades de um prefácio é deixar claro ao leitor o que ele vai encontrar no texto. Assim, é comum que o autor de um livro-texto explique de que maneira vai abordar o conteúdo, de que forma foram elaborados os exercícios e em que quantidade, quais pré-requisitos são necessários para que o estudante consiga acompanhar o texto, e até em que ordem os capítulos podem ser lidos.

4.4 TEORIA DOS REGISTROS DE REPRESENTAÇÃO SEMIÓTICA

Para realizar a análise formal, laçamos mão do referencial de Raymond Duval que investiga a aprendizagem matemática e o papel dos registros de representação semiótica.

Nesta seção apresentamos inicialmente um breve panorama histórico sobre a semiótica e, em seguida, os principais preceitos da Teoria dos Registros das Representações Semióticas (TRRS) proposta por Duval.

4.4.1. Um Breve Panorama Histórico da Semiótica

A origem etimológica da palavra “semiótica” vem do termo grego *σημειωτική* (semeiotiké) que é a junção dos termos “semeion” com “tecne”. A palavra “semeion”, na Grécia antiga, dizia respeito a um “sinal natural”, ou seja, um fenômeno acessível aos sentidos que fazia lembrar de outro fenômeno não acessível, numa relação de causa e efeito. A fumaça para o fogo ou os sintomas de uma doença, por exemplo. Já o termo “tecne” está relacionada a arte ou saber fazer. “Semeiotiké”, por fim, se referia a um ramo da medicina que tem como objeto de estudo os sintomas das enfermidades (D’amore; Pinilla; Iori, 2015).

Platão (428 a.C – 347 a.C) discute o papel dos signos linguísticos, que ele chama de “nome”, para representar coisas. Segundo ele, tudo que é acessível aos nossos sentidos está no mundo sensível e o ser humano só pode conhecer parcialmente as coisas presentes no mundo das ideias. A concepção de aprendizagem de Platão está relacionada à capacidade, muitas vezes inata, de recordar as ideias que a alma conheceu antes de se reencarnar em outro corpo. Assim, o modelo platônico do signo tem uma estrutura triádica (nome, ideia e coisa) (D’amore; Pinilla; Iori, 2015).

Ainda segundo D’amore, Pinilla e Iori:

Um círculo, por exemplo, é uma forma que ninguém jamais viu e que ninguém poderá ver, tocar ou cheirar..., ou seja, não faz parte dos objetos reais que estão submetidos aos sentidos. O que vemos, na realidade, são algumas aproximações do círculo ideal, do círculo propriamente dito. A “circularidade” é um conceito inato, mais real do que

os objetos circulares que percebemos com os sentidos, uma vez que é o modelo perfeito deles. Um objeto que existe no mundo da experiência sensível pode ser chamado de “círculo” somente porque se assemelha à forma perfeita de “circularidade” (2015, p. 30).

Dessa forma, os objetos matemáticos existem no mundo das ideias independente das atividades humanas e são inalcançáveis. O que se pode fazer é apenas nos aproximar desses objetos por processos complexos de conceituação (D’amore; Pinilla; Iori, 2015).

Aristóteles chamou o signo linguístico de “símbolo” e o definiu como sintoma das afeições da alma. O modelo do signo aristotélico também é triádico (palavras, conceitos, coisas). Mas, ao contrário de Platão, Aristóteles nega que os entes matemáticos possam existir num mundo separado e independente da experiência sensível. Ele admite a existência de conceitos universais, mas os considera como essência do mundo sensível e que o ser humano os conhece por meio de uma operação de abstração. Ele também distinguiu o signo linguístico (symbolon) do símbolo não linguístico (semeion) (Noth, 2008).

A semiótica antiga atinge seu apogeu com Aurélio Agostinho de Hipona (345 – 430) que estende os estudos semióticos aos símbolos não verbais e reconhece o signo como algo sensorial que representa algo que não é perceptível no momento, ao mesmo tempo em que define o intérprete como pressuposto necessário para qualquer processo de significação. Dessa forma, ele propõe um modelo diádico em que se concentra no vínculo entre o signo e o referente, excluindo dessa forma o significado. Também estabelece que é necessário conhecer o objeto para poder dizer que ele é determinado por um signo. Sem esse conhecimento prévio, o signo não ensina nada ao interprete (D’amore; Pinilla; Iori, 2015).

A escolástica medieval desenvolveu a teoria agostiniana da suposição. “Supor” significava colocar uma coisa no lugar de outra coisa e era a palavra utilizada para indicar a propriedade de um termo substituir o objeto ao qual se refere. A suposição se contrapõe ao processo de significação. Além disso, uma das questões fundamentais que impactavam na concepção de signo na Idade Média dizia respeito aos conceitos universais e individuais. Os conceitos universais se referiam a ideias de natureza geral que podem ser atribuídos a indivíduos ou coisas, enquanto os objetos empíricos são chamados de individuais. Assim, um cachorro que vemos na rua é uma entidade individual, enquanto a ideia “cachorro” é universal (D’amore; Pinilla; Iori, 2015).

Nos séculos XVII e XVIII três grandes escolas filosóficas ditavam os rumos do conhecimento sobre a semiótica: o racionalismo, o empirismo e o iluminismo (Noth, 2008).

O racionalismo de René Descartes (1596 – 1650), pregava que a razão humana é, por si só, uma fonte da verdade superior à percepção e independente dela. A consequência de seu

pensamento para a semiótica é que ele excluiu da teoria dos signos o aspecto referencial (D'amore; Pinilla; Iori, 2015).

D'Amore, Pinilla e Iori (2015) sintetizam bem o pensamento de Descartes a respeito das representações:

Nós, seres humanos, para Descartes, não conhecemos diretamente as coisas, apenas nossas ideias sobre as coisas. Lembremos que por “ideia”, Descartes, diferentemente de Platão, entende um objeto do pensamento, um conteúdo da mente. Os signos das coisas são, portanto, as ideias que estão em nós; tais signos são unicamente representações, imagens, não cópias das coisas que estão fora de nós. O sujeito, conseqüentemente, conhece as ideias e não as coisas; daqui a ruptura entre pensamento e realidade. Em outras palavras, para Descartes, não existe relação direta entre sujeito e objeto (entendido como ente real, fora do sujeito), uma vez que o sujeito pode alcançar diretamente apenas as representações (ideias) do objeto, não o objeto em si (p. 52).

Em contraponto aos racionalistas, os empiristas acreditavam que todo o conhecimento humano é adquirido apenas pela experiência sensorial. Hobbes elaborou uma definição diédica materialista em que os signos são representações de nossas concepções e não das coisas mesmas, sendo a semiose viável por meio de uma rede de tramas mentais. Segundo Hobbes, na associação de um acontecimento antecedente com um evento conseqüente, um é signo do outro (Noth, 2008).

Durante o iluminismo do século XVIII os grandes temas discutidos pela semiótica adentraram ao campo da epistemologia, da hermenêutica e da estética. Enquanto a epistemologia discutia os processos de percepção e gêneses dos signos, a hermenêutica estudava o papel dos signos no processo de compreensão dos textos, e a estética a atuação dos signos na percepção do belo (Noth, 2008).

Na tentativa de conciliar os pensamentos racionalista e empirista, o filósofo prussiano Immanuel Kant (1724 -1804) estabeleceu que a nossa mente modela a realidade e não ao contrário. Assim como a água assume a forma do recipiente que a contém, as impressões sensoriais adotam as formas que as estruturas cognitivas do sujeito lhe impõem. Para que isso aconteça, deve existir na mente do sujeito um conceito que garanta a relação entre o elemento conceitual e elemento sensível do objeto. Esse conceito é chamado de esquema e é compreendido como uma regra para a aplicação de outro conceito, que relacionaria conhecimento e ação (D'amore; Pinilla; Iori, 2015).

O pensamento de Kant influenciaria anos mais tarde o epistemólogo suíço Jean William Fritz Piaget (1896-1980). Piaget considera que o conhecimento está relacionado com as ações do sujeito, porém, para ele não é apenas a mente que modela e regula a experiência, mas também a experiência modifica as estruturas mentais (os esquemas). Piaget nega a existência das

condições a priori para o conhecimento e postula que o indivíduo constrói o seu próprio conhecimento durante sua interação com o ambiente exterior a ele (D'amore; Pinilla; Iori, 2015).

A teoria de Piaget recebeu inúmeras críticas por deixar de lado o impacto do contexto cultural no desenvolvimento cognitivo da criança. Tal impacto é contemplado nos estudos do psicólogo bielorrusso Lev Semionovitch Vigotski (896-1934) (D'amore; Pinilla; Iori, 2015). Para ele o que caracteriza as funções mentais humanas é a capacidade de usar signos naturais, produzir signos artificiais e, principalmente, a capacidade da mente humana ser modificada pelo uso de signos que são vistos como um instrumento mediador entre o indivíduo e o contexto, ou seja, que permite a passagem dos objetos do plano social ao plano individual (D'amore; Pinilla; Iori, 2015).

O estadunidense Charles Sanders Peirce (1839-1914) é considerado o fundador da semiótica moderna. Para Peirce, signo é alguma coisa que, para alguém, está no lugar de outra coisa, segundo algum aspecto. Assim, no processo de semiose estão envolvidos o *representamen* (a parte “material” do signo, o veículo), o objeto (o que o *representamen* remete) e um interpretante (signo equivalente ou mais desenvolvido que o *representamen* criado na mente da pessoa que interpreta derivado da relação entre o *representamen* e o objeto). Além desses elementos, a interpretação de um signo exige certo conhecimento colateral, ou seja, uma certa familiaridade com o sistema de signos (D'amore; Pinilla; Iori, 2015).

Peirce classifica três tipos de signos: ícone, índice e símbolo. O ícone é um signo principalmente de primeiridade e que possui certa semelhança com o objeto ao qual se refere. O índice é um signo principalmente de secundidade e tem como função dirigir a atenção para o objeto. Já o símbolo é principalmente de terceridade e é um signo cuja relação com o objeto é definido por uma lei, geral e convencional. Peirce afirma não existir signos puros, pois em todos eles (especialmente as representações semióticas dos objetos matemáticos) existem componentes icônicos, indexicais e simbólicos (D'amore; Pinilla; Iori, 2015).

O filósofo suíço Ferdinand de Saussure (1857-1913) é considerado o fundador da linguística moderna. Teve como projeto construir uma ciência denominada semiologia, com o objetivo de descrever os signos socialmente determinados, os sistemas formados por eles, as regras que governam o seu uso e a sua evolução no tempo. A linguística, que estudaria especificamente signos linguísticos, seria uma parte dessa ciência geral e serviria de modelo de estudo de toda a semiologia (D'amore; Pinilla; Iori, 2015).

Dessa forma, Saussure defende um modelo diádico onde o signo seria o resultado da combinação de *significado* e *significante*, excluindo completamente a ideia de referente. Para

ele o signo é, portanto, um ente abstrato e que não apresenta nenhuma conexão com seu objeto (o que ele chama de arbitrariedade), a menos de um sistema de convenções (o que ele chama de convencionalismo). Assim, dentro desse sistema linguístico, cada signo apresenta um valor, numa relação de oposição ou diferença com os demais signos, o que Saussure denomina de estrutura (D'amore; Pinilla; Iori, 2015).

Por fim, Umberto Eco (1932-2016) procurou combinar as ideias de Saussure e de Peirce deslocando a atenção da semiótica do fenômeno da comunicação para o da significação. Segundo ele, é possível haver comunicação sem significação, mas a significação pressupõe a comunicação. Dessa forma, para ele seria possível estabelecer uma comunicação com a mera passagem de sinais (entre dois aparatos mecânicos, por exemplo), ou seja, processos que não exigem uma resposta interpretativa pelo destinatário por meio de um código. Um código seria um sistema de significação no qual uma coisa materialmente acessível à percepção do destinatário representa outra coisa, segundo presumidas regras.

4.4.2. Teoria dos Registros de Representação Semiótica

Ao investigar o papel das representações na aprendizagem dos conceitos matemáticos, o psicólogo francês Raymond Duval elaborou a sua Teoria dos Registros de Representação Semiótica (TRRS). Tal teoria tem encontrado um espaço de bastante relevância nas pesquisas em Educação Matemática no Brasil (Henriques; Almouloud, 2016).

Para Duval, a atividade de representar faz parte da construção de conhecimento humano. Segundo ele:

Não é possível estudar os fenômenos relativos ao conhecimento sem se recorrer à noção de representação. Desde Descartes e Kant, ela está no centro de toda a reflexão que se preocupa com as questões da possibilidade e da constituição de um conhecimento certo. Porque não há conhecimento que não possa ser mobilizado por um sujeito sem uma atividade de representação (Duval, 2009, p. 29).

Se a atividade de representação é algo indispensável para a construção do conhecimento de qualquer ciência, na Matemática ela é a única forma do pesquisador entrar em contato com seu objeto de estudo. Duval parte da premissa de que não é possível estudar os objetos matemáticos a não ser por meio de suas representações: (...) os objetos matemáticos não estão diretamente acessíveis à percepção ou à experiência intuitiva imediata. É preciso, portanto, dar representantes (Duval, 2005, p. 268).

Assim, é importante perceber que os objetos matemáticos são ideais, de modo que só podemos estudá-los por meio de suas representações. Diferentemente de um químico que faz

suas experiências em um laboratório, de um biólogo que observa um ser vivo, ou de qualquer outro cientista que tem contato direto com o seu objeto de pesquisa, o matemático somente tem contato com os conceitos que estuda por meio de representações. Dessa maneira um número, uma reta ou uma circunferência não existem na realidade concreta, ao menos que sejam construídos simbolicamente.

Duval classifica essas representações como mentais (noesis) e semióticas (semioses). As representações mentais são aquelas que permitem a visão de um objeto na ausência de todo significante perceptível, ou seja, estão associadas a “imagens mentais”. Já as representações semióticas permitem a “visão do objeto” por meio da percepção de estímulos. Elas podem ser gráficos, figuras, expressões linguísticas etc. (Duval, 2005).

Segundo ele, há dois tipos de sistemas semióticos: os códigos e os registros. Os códigos exercem apenas a função de comunicação, enquanto os registros, além da comunicação, desempenham também as funções de objetivação e tratamento (Silva, 2022).

A comunicação consiste em transmitir informações e mensagens entre indivíduos. A objetivação diz respeito à exteriorização que permite tomada de consciência de algo que ainda não se tinha antes da representação, enquanto o tratamento está relacionado à transformação de representações dentro das possibilidades de funcionamento de um sistema de representação (Duval, 2016).

Assim percebemos que, diante das funções cognitivas contempladas, os registros são mais adequados para a atividade matemática. Isso porque as representações matemáticas sugerem a comunicação, a objetivação (já que trabalha com entes abstratos) e, principalmente, o tratamento, pois, é por meio de transformações de representações que o pensamento matemático se desenvolve.

Sobre esse processo de representação dos objetos matemáticos, Duval chama a atenção para o que ele denomina de paradoxo cognitivo do pensamento matemático, que consiste, basicamente em não confundir o objeto matemático e sua representação.

Segundo ele:

De um lado, a apreensão dos objetos matemáticos não pode ser mais do que uma apreensão conceitual e, de outro, é somente por meio de representações semióticas que a atividade sobre objetos matemáticos se torna possível. Este paradoxo pode constituir-se num grande círculo para a aprendizagem. Como os sujeitos em aprendizagem poderiam não confundir os objetos matemáticos com as suas representações semióticas, se eles podem tratar apenas com as representações semióticas? A impossibilidade de um acesso direto aos objetos matemáticos, fora de toda representação semiótica, torna a confusão quase inevitável. E, de modo inverso, como os sujeitos podem adquirir o domínio de tratamentos matemáticos, necessariamente ligados às representações semióticas, se eles não têm uma apreensão conceitual dos objetos representados? Este paradoxo é tão mais forte quando se

identifica atividade matemática e atividade conceitual, e que se considera as representações semióticas como secundárias ou extrínsecas (Duval, 2012, p. 268-269).

Um estudante, por exemplo, pode acreditar que um plano é limitado pelo fato de que seu professor usou uma folha de cartolina para representá-lo. Assim, não se pode confundir o representante com o representado. Da mesma forma, é importante perceber que cada representação possui limitações quanto à fidedignidade do seu representado.

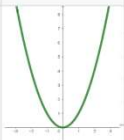
Assim, D'Amore, Pinilla e Iori (2015) afirmam que:

Não podemos pensar que com uma única representação semiótica seja possível representar todas as componentes conceituais de um determinado objeto matemático. Ao contrário, sabe-se hoje, que cada representação semiótica veicula somente alguns dos aspectos conceituais que são componentes do objeto considerado, no sentido de que um objeto matemático possui várias componentes conceituais ligadas, mescladas, uma com as outras (p. 111-112).

Dessa maneira, existem várias formas de representar semioticamente um objeto matemático: algebricamente, graficamente, numericamente etc. Cada tipo de representação é denominado de registro e pode ser definido como “um sistema dotado de signos que permitem identificar uma representação de um objeto de saber” (Henriques; Almouloud, 2016, p.469).

No Quadro 3 estão as representações de uma função quadrática em quatro registros diferentes.

Quadro 3 - Registros de Representação.

Linguagem Natural	Registro Numérico	Registro Algébrico	Registro Gráfico												
“Uma função que associa cada número real ao seu quadrado”	<table border="1"> <thead> <tr> <th>x</th> <th>y</th> </tr> </thead> <tbody> <tr><td>1</td><td>1</td></tr> <tr><td>2</td><td>4</td></tr> <tr><td>3</td><td>9</td></tr> <tr><td>4</td><td>16</td></tr> <tr><td>5</td><td>25</td></tr> </tbody> </table>	x	y	1	1	2	4	3	9	4	16	5	25	$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ $f(x) = x^2$	
x	y														
1	1														
2	4														
3	9														
4	16														
5	25														

Fonte: Elaborado pelo autor¹³.

Assim, para representar um objeto matemático se faz necessário escolher um determinado registro e, dentro desse registro, escolher a representação desse objeto, que, de acordo com suas características, o torne facilmente identificável. Além disso, outra característica associada aos registros é a possibilidade de realizar transformações das representações desse objeto.

Levando em conta as características e a forma com que as transformações de representações podem ser realizadas dentro de cada sistema de representação, a TRRS divide

¹³ Fonte da fotografia das funções: < <https://www.matematica.pt/util/resumos/definir-representar-funcao.php>; > site visitado em 22/11/2021.

os registros em quatro grupos: discursivos, não discursivos, multifuncionais e monofuncionais. Os discursivos contemplam principalmente as línguas (oral ou escrita) as representações auxiliares (de caráter provisório) e as escritas simbólicas. Os não discursivos compreendem o gráfico e o registro figural. Com relação aos tratamentos, os registros podem ser multifuncionais, quando não algoritmizáveis (língua natural e figuras geométricas), e monofuncionais, quando algoritmizáveis (registros numérico e algébrico) (Neto, 2017).

Na figura 16 apresentamos a classificação dos registros.

Figura 16 - Classificação dos Registros.

	REPRESENTAÇÃO DISCURSIVA	REPRESENTAÇÃO NÃO DISCURSIVA.
REGISTROS MULTIFUNCIONAIS: Os tratamentos não são algoritmizáveis	Língua natural, associações verbais (conceituais). Forma de raciocinar: <ul style="list-style-type: none"> • Argumentação a partir de observações, de crenças... • Dedução válida a partir de definição ou teoremas. 	Figuras geométricas planas ou em perspectivas. <ul style="list-style-type: none"> • Apreensão operatória e não somente perceptiva. • Construção com instrumentos.
REGISTROS MONOFUNCIONAIS: Os tratamentos são principalmente algoritmos.	Sistemas de escritas: <ul style="list-style-type: none"> • Numéricas (binária, decimal, fracionária...) • Algébricas. • Simbólicas (línguas formais) 	Gráficos cartesianos. <ul style="list-style-type: none"> • Mudança de sistema de coordenadas. • Interpolação, extrapolação.

Fonte: Duval, 2005, p. 14.

Podemos identificar na Figura 16 a língua natural e o registro figural como registros multifuncionais (discursivo e não discursivo, respectivamente). Da mesma forma podemos classificar o registro algébrico e o gráfico como registros monofuncionais (discursivo e não discursivo, respectivamente).

Duval (2009) estabelece que a compreensão do objeto matemático está ligada inevitavelmente à semiose e esta, por sua vez, se dá por meio de três atividades cognitivas fundamentais: a formação de uma representação identificável, o tratamento e a conversão.

Sobre isso, D'Amore, Pinilla e Iori (2015) afirmam que:

Em diversas ocasiões, dissemos e demonstramos que a construção cognitiva dos objetos matemáticos é profundamente dependente da capacidade de utilizar vários registros de representação semiótica de tais objetos, a fim de:

- Representar os objetos em um dado registro;
- Tratar as representações dos objetos no interior de um mesmo registro;
- Converter tais representações de um dado registro para outro (p.155).

A primeira das atividades cognitivas fundamentais ligadas a semiose é a formação de uma representação identificável. Esta formação deve respeitar regras próprias do registro escolhido (gramaticais para as línguas naturais, regras de formação num sistema formal de construção para as figuras...). Essas regras são denominadas regras de conformidade e elas servem, não apenas para assegurar as condições de identificação e de reconhecimento da representação, viabilizando dessa forma a comunicação, mas também para tornar possíveis as transformações de tal representação (Duval, 2012).

As transformações das representações podem ser divididas em dois tipos: tratamento e conversão. Duval chama de tratamento a transformação interna a um registro, ou seja, a mudança na representação do objeto sem sair do registro a qual pertence. O cálculo é um exemplo de tratamento interno ao registro algébrico: ele substitui expressões por outras, dadas no mesmo registro. A paráfrase e a anamorfose são exemplos de tratamento em linguagem natural e registro figural, respectivamente (Duval, 2009).

Já converter seria “transformar a representação de um objeto, de uma situação ou de uma informação dada num registro em uma representação desse mesmo objeto, dessa mesma situação ou da mesma informação num outro registro” (Duval, 2009, p. 58). Ou seja, é uma transformação externa em relação ao registro inicial. Os termos “tradução”, “ilustração”, “transposição” etc. estão associados à operação de conversão.

A mudança de registros nem sempre é feita de maneira imediata. Uma correspondência entre unidades significantes de duas representações pertencentes a registros diferentes pode ser estabelecida. Quando isso acontece, dizemos que as representações são congruentes, o que indica uma maior facilidade na realização da operação de conversão. Porém, por vezes ocorre o fenômeno da não congruência e, nesses casos, a conversão se mostra uma tarefa mais complexa (Duval, 2009).

Por exemplo, quando num exercício pede-se para que o estudante escreva a equação da seguinte sentença: y é igual ao triplo de x mais oito. Em resposta, o aluno escreve: $y = 3x + 8$ (Silva, 2022).

Assim, cada palavra da sentença corresponde a um único símbolo na equação. Palavras e símbolos são, neste caso, as unidades significantes e essa correspondência entre eles caracteriza o fenômeno da congruência.

Percebemos, portanto, que nesse exemplo de congruência é fácil realizar a conversão, seja da língua natural para o registro algébrico, seja do registro algébrico para a língua natural.

Porém, quando o custo cognitivo (dificuldade) para realizar uma conversão muda, a depender do sentido da transformação, acontece um fenômeno que Duval chama de heterogeneidade (Silva, 2022).

Um exemplo comum de heterogeneidade acontece quando se pede para traçar um gráfico de uma função afim a partir de sua equação. Basta para isso, calcular os resultados da função com relação a dois valores distintos de x , usar uma tabela como registro auxiliar, localizar os pontos no gráfico cartesiano e traçar a reta. No entanto, encontrar a equação da função afim a partir do gráfico dado exige um pouco mais de trabalho (Silva, 2022).

Por conta desse tipo de problema, Duval demonstra uma preocupação especial com relação a conversões que envolvem as representações gráficas. Segundo ele existem três possíveis abordagens para lidar com este registro.

A abordagem ponto a ponto é geralmente utilizada em sala de aula para se introduzir o conceito de gráfico de funções. Consiste, basicamente em identificar pontos no sistema cartesiano por meio dos pares ordenados correspondentes. Tal abordagem favorece a atividade de traçar o gráfico a partir da equação da função, porém não favorece a conversão inversa, ou seja, a identificação da fórmula algébrica por meio da leitura do gráfico.

A abordagem da extensão do traçado efetuado está relacionada com as atividades de interpolação e extrapolação, que partem da abordagem ponto a ponto, mas a estende mentalmente para infinitos pontos.

Por fim, existe a abordagem de interpretação global que leva em conta que a curva traçada no sistema cartesiano forma uma imagem que representa um objeto. Qualquer modificação da imagem que acarreta mudança na expressão algébrica determina uma variável visual da interpretação gráfica. Assim, por exemplo, ao invés de prestarmos atenção apenas nos pontos e os valores dos pares ordenados, devemos nos ater ao sinal do coeficiente angular que indica se a reta é crescente ou decrescente, e ao sinal do coeficiente linear que indica se a função toca o eixo das ordenadas acima ou abaixo do eixo das abcissas.

Dessa forma, encontrar a equação da curva por meio de um gráfico dado se torna mais simples utilizando-se da abordagem global. Seja de uma função afim, quadrática ou de qualquer outro tipo.

Embora haja vantagens no uso dessa abordagem, geralmente ela é preterida por professores e livros didáticos que utilizam massivamente a abordagem ponto a ponto.

Segundo Duval:

A prática sistemática da abordagem ponto a ponto não favorece a abordagem de interpretação global que é em geral deixada de lado **no ensino** uma vez que depende

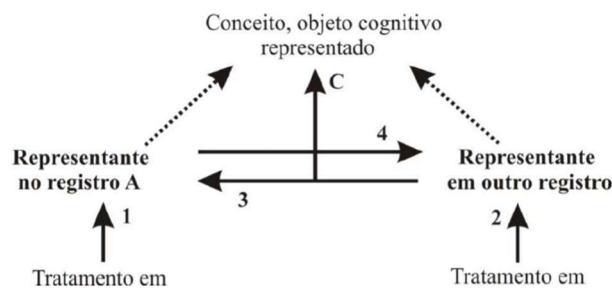
de análise semiótica visual e algébrica. Compreende-se porque a maioria dos alunos fica aquém de uma utilização correta das representações gráficas (2011, p. 99).

Para a TRRS, isso não significa que a abordagem ponto a ponto tenha que ser evitada. Contudo, não deve ser usada com exclusividade, pois, seu uso excessivo privilegia a utilização de outros registros com relação ao gráfico.

A diversidade de registros é de grande importância na teoria de Duval. Alguns registros permitem realizar tratamentos de maneira mais econômica e potencializada do que outros. A resolução de uma equação, por exemplo, seria muito difícil de ser realizada utilizando a linguagem natural. Além disso, é importante perceber que toda representação é cognitivamente parcial com relação ao que ela representa. Assim, representação de um diagrama ou de uma imagem não apresenta as mesmas possibilidades de percepção que uma descrição em linguagem natural.

Com isso, Duval ainda postula que “a compreensão de um conteúdo conceitual repousa sobre a coordenação de ao menos dois registros de representação” (Duval, 2012, p. 282). Assim, a Figura 17 representa a estrutura da conceitualização e a principal hipótese de aprendizagem na teoria de Duval.

Figura 17 - A Semiótica de Duval.



Fonte: Duval, 2012, p.282.

Os números 1 e 2 se referem às transformações internas aos registros, ou seja, tratamentos. Os números 3 e 4 dizem respeito às transformações externas aos registros, ou seja, conversões entre os registros. Já a Flecha C corresponde a compreensão integral do objeto de representação que supõe a coordenação de registros, enquanto as flechas pontilhadas marcam a tradicional distinção entre representante e representado (Duval, 2012).

É importante lembrar que o esquema apresentado mostra o caso mais simples de coordenação, pois envolvem dois registros, podendo haver, sem dúvida, o envolvimento de

mais deles. Portanto, fica bastante evidente que a compreensão de conceito pressupõe a coordenação de uma diversidade de representações.

A ausência dessa coordenação pode explicar um fenômeno recorrente entre os alunos dos mais variados níveis de ensino e que prejudica a aprendizagem: o isolamento dos registros de representação. Assim, alguns alunos não reconhecem o mesmo objeto matemático representado em sistemas semióticos diferentes (a expressão algébrica com relação a sua representação gráfica de reta ou plano, por exemplo).

Ainda de acordo com Duval (2009):

Um trabalho de aprendizagem específico centrado sobre a diversidade de sistemas de representação, sobre a utilização de suas possibilidades próprias, sobre sua comparação por colocar em correspondência e sobre as “traduções” mútuas uma dentro da outra parece necessário para favorecê-la (p.19).

Assim, para ele compreender um conceito matemático está associado a transitar entre diferentes registros e diferenciar o objeto matemático de suas representações. Portanto, acreditamos que a diversidade de registros e transformações de representações pode favorecer à aprendizagem de conceitos matemáticos.

Dessa forma, concluímos a apresentação do referencial teórico metodológico desta pesquisa. Agora que temos a rede. Vamos ao mar!

5. METODOLOGIA DE PESQUISA

“O rigor das ciências da natureza não se deve, em absoluto, a que elas sejam mais rigorosas e seus métodos mais precisos. Acontece que o bicho com que elas lidam é muito doméstico [...]”

Ruben Alves¹⁴

Em busca de lidar com esse ser bravo que é a realidade das ciências humanas é que descrevemos nesse capítulo, passo a passo, os procedimentos realizados durante o processo de investigação para atingirmos os objetivos de pesquisa.

Apresentamos a seguir os critérios definidos para a escolha dos livros e a delimitação do *corpus* de trabalho e, seguindo as etapas da Hermenêutica da Profundidade apresentada por Thompson (2011), detalhamos as ações que nortearam a interpretação da doxa, a análise sócio-histórica, os procedimentos realizados durante a análise formal das obras, além dos fundamentos para a interpretação/reinterpretação.

5.1. CRITÉRIOS PARA A ESCOLHA DOS LIVROS

Para a seleção das obras, realizamos um levantamento de bibliografias entre as ementas das disciplinas do primeiro curso de Cálculo, presentes em Projetos Pedagógicos de Curso – PPC de licenciaturas presenciais em Matemática disponíveis nos sites das universidades públicas e institutos federais de 5 estados, um de cada região geográfica do país.

Foram escolhidos, de forma subjetiva, estados que de alguma forma contribuíram para a formação acadêmica do pesquisador. Foram eles: Bahia (Nordeste), Goiás (Centro-Oeste), Tocantins (Norte), Minas Gerais (Sudeste) e Paraná (Sul).

Assim, foi feita uma lista das universidades públicas e institutos federais de cada estado e buscou-se nos sites respectivos, o PPC de algum curso de Licenciatura em Matemática para representar cada instituição. Procurou-se então, nesses documentos, as bibliografias das ementas da primeira disciplina de Cálculo, já que o nome da componente curricular varia de acordo com a instituição (Cálculo Diferencial I, Cálculo A, Cálculo I etc.).

¹⁴ ALVES, Rubens. **Filosofia da Ciência**: Introdução ao Jogo e Suas Regras. Brasília: Editora Brasiliense. 1981. p. 79.

As dificuldades encontradas durante a realização deste procedimento estão relacionadas à localização dos PPCs nos sites das instituições e a ausência do ementário das disciplinas em alguns deles. De todo modo, foram consultadas as ementas das disciplinas de Cálculo de 26 instituições. A lista destas instituições consultadas, suas cidades, e os livros citados encontram-se elencados no apêndice 2.

Os livros citados nas bibliografias foram listados, contabilizados e organizados de acordo com o número de citações. Alguns dos mais referenciados encontram-se no Quadro 4.

Quadro 4 - Livros mais citados

Ordem de acordo com o número de citações	Título	Autor	Ano da primeira edição	Número de Citações
1º	Cálculo com Geometria Analítica	LEITHOLD, Louis.	1968	24
2º	Um Curso de Cálculo – Volume 1	GUIDORIZZI, Hamilton L.	1985	23
3º	Cálculo – Volume 1	STEWART, James D.	1987	19

Elaborado pelo autor.

Percebemos que poucas foram as instituições de ensino que não citaram o livro do Leithold (1994), o livro do Guidorizzi (2001) ou o livro do Stewart (2013).

É importante ressaltar que no Brasil, o Ministério de Educação e Cultura (MEC) mantém o Sistema Nacional de Avaliação da Educação Superior (SINAES) que é responsável pela avaliação e credenciamento de instituições que pretendem ofertar cursos de graduação. No instrumento de avaliação de cursos de graduação há indicadores que dizem respeito à atualização e adequação da bibliografia com relação às unidades curriculares. Segundo esses indicadores, cada unidade curricular deve possuir pelo menos três títulos na bibliografia básica e dois na bibliografia complementar (Brasil, 2017).

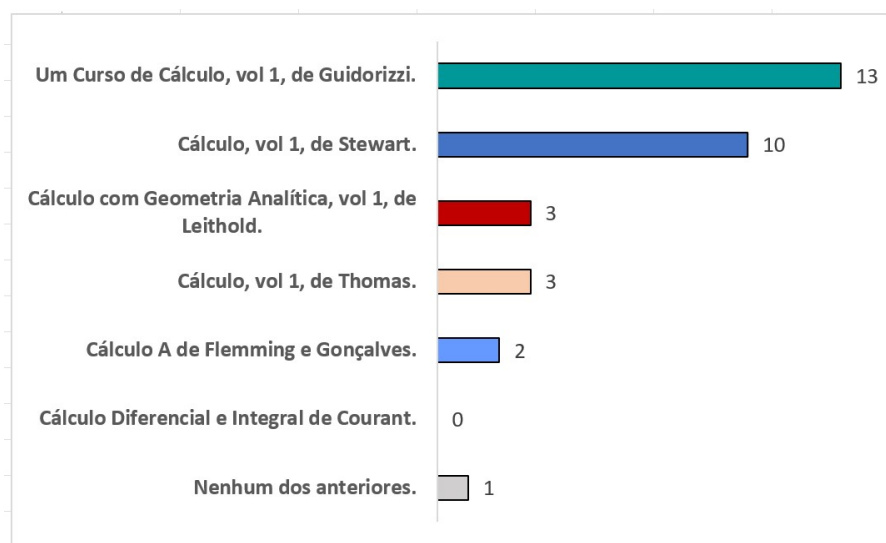
Mesmo com a presença dos livros escolhidos para nosso estudo na maioria das ementas de cursos de Cálculo Diferencial e Integral, surgiu-nos uma dúvida: será que estes livros são realmente utilizados pelos professores? Ou estão nas ementas apenas para cumprir um requisito legal dos PPCs?

Com o intuito de esclarecermos essas dúvidas, elaboramos um questionário no Google Forms e pedimos para alguns professores de Cálculo responder sobre o uso desses livros em suas aulas.

Elaboramos uma lista de livros e perguntamos: Qual (Quais) do(s) livro(s) relacionados abaixo você utiliza em suas aulas de Cálculo Diferencial e Integral I?

Ao todo 15 docentes nos atenderam e o resultado desse levantamento é apresentado no Gráfico 1:

Gráfico 1 - Preferência dos Professores quanto aos Livros de Cálculo.



Fonte: elaborado pelo autor com auxílio do Google Forms.

Na lista de livros dispostos na questão do Gráfico 1 estão os mais citados das ementas consultadas. Os três livros mais utilizados pelos professores perguntados são respectivamente, *Um Curso de Cálculo* do Guidorizzi (13), *Cálculo* do Stewart (10) e *Cálculo com Geometria Analítica* de Leithold (3).

No questionário também havia uma pergunta sobre se os professores solicitam que seus alunos acompanhe a disciplina pelo livro utilizado. 10 docentes responderam afirmativamente. Isso indica a representatividade dos livros analisados nessa pesquisa entre professores e alunos de Cálculo Diferencial e Integral.

5.2. INTERPRETAÇÃO DA DOXA

Esta etapa, considerada preliminar da HP, consiste em verificar a maneira como a forma simbólica é interpretada pelos sujeitos que constituem o campo-sujeito-objeto. Assim, no presente trabalho, realizamos essa etapa buscando informações sobre a maneira como a comunidade acadêmica enxerga os livros pesquisados em artigos, dissertações, teses, além de consultar a opinião de professores de Cálculo a respeito das obras por meio da aplicação de um questionário.

5.3. ANÁLISE SÓCIO-HISTÓRICA

Para a realização da análise sócio-histórica determinamos três ações norteadoras:

- a análise de dados biográficos dos autores;
- o estudo dos paratextos editoriais; e
- a verificação das mudanças ocorridas entre as edições da obra.

O conhecimento de parte da biografia dos autores dos livros nos ajudou a realizar a etapa que Thompson (2011) chama de análise das situações espaçotemporais.

Dessa forma, ao mesmo tempo em que o conhecimento da trajetória formativa do autor nos permitiu identificar alguns tipos de influência ou tendência que nortearam a produção de sua obra, essa etapa de pesquisa nos fez compreender melhor a historicidade do livro, principalmente com relação ao cenário em que ele foi produzido.

Assim, acreditamos que a investigação biográfica dos autores dos livros selecionados atende tanto a análise de situações espaçotemporais, como a análise dos campos de interação defendidos por Thompson.

Outra ação de grande relevância em nossa investigação sócio-histórica foi a análise dos paratextos editoriais, mais especificamente dos prefácios das obras. Embora o estudo de paratextos seja utilizado com mais frequência na análise formal, acreditamos que elementos, como o prefácio, nos fornecem informações importantíssimas sobre a origem do livro, o público ao qual se destina, recomendações de uso, entre outras referências relevantes para o nosso trabalho.

Por fim, analisamos as mudanças ocorridas entre as várias edições das obras. Esse procedimento corresponde a uma das dimensões trabalhadas por Schubring (2018b). Mesmo não seguindo as demais dimensões apontadas por esta metodologia de investigação, acreditamos que conseguimos contemplá-las, tendo em vista que o presente trabalho envolve o

estudo de mais de um livro-texto de Cálculo Diferencial e Integral (segunda dimensão) e que nosso estudo sócio-histórico leva em conta as mudanças contextuais relacionadas com as obras pesquisadas (terceira dimensão).

5.4. ANÁLISE FORMAL

Depois de escolhidos os livros, partimos para o estudo formal das obras. Como afirma Thompson (2011), a análise formal pode ser conduzida de diversas maneiras a depender do objetivo e das circunstâncias de investigação. Assim, levando em conta que o nosso objeto de estudo é o conceito de limites de funções de uma variável real, delimitamos como *corpus* de pesquisa os capítulos e seções dos livros que tratam do conceito de limites.

Particularmente, estamos interessados na forma com que o autor conduz a relação entre a ideia intuitiva de limite e sua definição. Por isso, excluimos do material de análise os capítulos e as seções dos livros que trabalham o cálculo de limites por meio de suas propriedades operatórias (como limite da soma de duas funções, limite do produto de duas funções, teorema do confronto etc.) por acreditarmos que, neste estágio, a definição de limites e o conceito em si, já foram trabalhados durante as demonstrações de tais propriedades.

Assim que definimos quais partes do material seriam analisados, nos chamou a atenção o fato de que a ordem dos conteúdos apresentados nos livros variava bastante. Dessa forma, foi útil a construção, para cada obra, de um diagrama que indicasse esta ordem. Tal construção compreende, mesmo que tangencialmente, a análise narrativa indicada por Thompson (2011). Segundo ele: “Uma narrativa pode ser considerada, falando de maneira geral, como um discurso que narra uma sequência de acontecimentos – ou, como dizemos comumente, que “conta uma história” (Thompson, 2011, p. 373).

Dessa maneira, apresentamos diagramas que indicam a sequência de conteúdos que os autores julgaram ter sido as melhores para expor o conteúdo de limites, ou seja, como eles escolheram “contar a história” dos conceitos do Cálculo Diferencial e Integral.

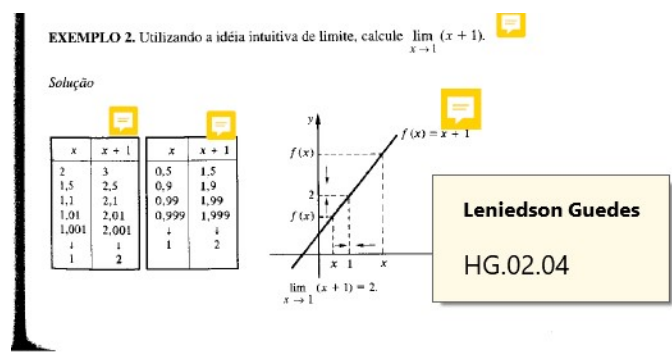
Uma vez explicitada a narrativa (a forma de contar a “história”) escolhida pelo autor, concentramos nossa investigação formal na análise semiótica. A intenção aqui foi atingirmos nessa etapa o objetivo de analisar a maneira como os livros mobilizam os registros de representação semiótica para abordar a definição de limites. Especificamente, queríamos conhecer quais tipos de registros de representação foram utilizados, com que frequência aparecem e quais transformações (tratamentos ou conversões) foram efetuadas nessas representações.

Desta maneira, buscamos identificar nos livros as representações semióticas das funções utilizadas para abordar a ideia de limite e as representações do próprio conceito. Assim, iniciamos um processo de codificação, que, como escreve Filho (2017), consiste em atribuir um código para identificar cada elemento do material analisado.

Neste estudo usamos um código de três partes separadas por ponto para identificar as representações. Na primeira parte desse código utilizamos duas letras maiúsculas representando o nome e o sobrenome do principal autor da obra. A segunda foi composta por uma dezena que representou a ordem da seção, enquanto a terceira parte foi constituída por outra dezena que representou a ordem em que a representação aparece dentro da seção.

Assim, o código HG.02.04 se refere a quarta representação semiótica que aparece na segunda seção do livro do Hamilton Guidorizzi (2001). Dessa forma o código escolhido identifica o documento analisado (o livro), a ordem da seção em que aparece (segunda) e a ordem da representação (quarta). Dessa forma, em cada representação semiótica identificada, etiquetamos com uma nota adesiva com código descrito acima (vide a Figura 18).

Figura 18 - Codificação.

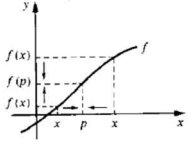
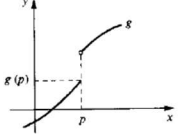


Fonte: Guidorizzi, 2001, p.55.

A atividade de etiquetagem foi bastante importante e impôs algumas dificuldades, já que a identificação de cada representação exigiu a adoção de critérios subjetivos. Por exemplo, só foram consideradas as funções utilizadas pelo autor para explicar o conceito de limites. Qualquer outra função que aparecesse no texto, mas que não fosse utilizada para esse fim, não seria etiquetada.

Assim, ao concluirmos o processo de etiquetagem, construímos um inventário com todas as representações catalogadas, ou seja, um rol (vide Quadro 5).

Quadro 5- Inventário.

Código	Representação
HG.01.01 HG.01.01'	Intuitivamente, uma <i>função contínua em um ponto p de seu domínio</i> é uma função cujo gráfico não apresenta “salto” em p .
HG.01.02	
HG.01.03	

Fonte: Adaptado de Guidorizzi, 2001, p.54.

O trecho do inventário do Quadro 5 indica as quatro primeiras representações da primeira seção do livro de Hamilton Guidorizzi (2001), cada uma com seu respectivo código. A primeira linha da tabela apresenta dois códigos, pois, consideramos duas representações.

Acatamos a ideia de que as frases “uma função contínua em um ponto p de seu domínio” e “uma função cujo gráfico não apresenta “salto” em p ” como duas representações em linguagem natural de uma função contínua localmente.

Sobre a atividade de construção do inventário, ainda nessa etapa iniciamos o processo de categorização. A categorização, também conhecida como classificação e a agregação, é definida por Bardin (1977) da seguinte forma:

A categorização é uma operação de classificação de elementos constitutivos de um conjunto, por diferenciação e, seguidamente, por reagrupamento segundo o gênero (analogia), com critérios previamente definidos. As categorias, são rubricas ou classes, as quais reúnem um grupo de elementos (unidades de registro, no caso da análise de conteúdo) sob um título genérico, agrupamento esse efectuado em razão dos caracteres comuns destes elementos (p.117).

Dessa forma, a categorização consiste na classificação das representações com características comuns, de acordo com critérios definidos, em grupos ou categorias (Santos, 2016).

As categorias utilizadas nesse trabalho foram criadas com base na Teoria de Registros de Representação Semiótica de Duval (2009) e estão especificadas no Quadro 6.

Quadro 6 - Categorização.

Categoria	Subcategorias / breve descrição
Registro de Representação	Com que frequência utilizam os registros <u>algébricos</u> , <u>geométricos</u> , <u>numéricos</u> etc.
Tratamentos	Com que frequência utiliza tratamentos nos registros <u>algébricos</u> , <u>geométricos</u> , <u>numéricos</u> etc.
Conversões	Com que frequência utiliza conversões de um registro ao outro registro

Fonte: Elaborado pelo autor.

As subcategorias aqui utilizadas para classificar os registros de representação foram sugeridas por Henriques e Almouloud (2016) e por Salgueiro (2011), e estão apresentadas no Quadro 7.

Quadro 7 - Subcategorias.

Abreviatura	Registro	Descrição
A	Algébrico	Representado por fórmulas matemáticas
GR	Gráfico	Se utiliza do plano cartesiano
LN	Língua Natural	Escrito em língua corrente
N	Numérico	Representado por meio de valores numéricos apresentados em tabelas ou ao longo do texto.

Fonte: Elaborado pelo autor.

A categoria *Registro de Representação* nos forneceu informações sobre a diversidade de tipo de registros que os autores utilizaram para representar o conceito de limite e o registro predominante.

É importante destacar que a atividade de classificar os registros também exigiu a adoção de critérios subjetivos. Nesse sentido, a representação em linguagem natural foi a que precisou de maiores cuidados.

Segundo Kamphorst e Nehring (2016) “o registro em língua natural do conceito de limite consiste de toda forma de manifestação oral ou escrita da interpretação e/ou compreensão acerca do tema”. Assim, poder-se-ia considerar cada proposição lógica simples ou todo um parágrafo como representação em linguagem natural.

Poderíamos considerar como representação de limite em língua natural as palavras “tende” e “aproxima”. Assim, toda vez que alguma dessas palavras aparecesse nos livros, contabilizaríamos uma representação. Porém utilizamos o critério de contabilizar apenas as

proposições condicionais. Por exemplo, a frase “ $f(x)$ se aproxima de L , quando x se aproxima de a ” corresponde, pelo nosso critério, apenas uma representação do conceito de limite, enquanto pelo critério da palavra teríamos que considerar duas.

Além disso, a classificação da representação nesse tipo de registro pode ser difusa quando se permeiam nelas algumas representações algébricas ou numéricas. Assim, a descrição de um gráfico cartesiano por meio da língua corrente, mesmo que se utilizem alguns símbolos algébricos ou numéricos, foi considerada por nós representação em linguagem natural. Utilizamos, dessa forma, o critério da predominância.

Sobre as transformações das representações, é importante lembrar que:

- é chamada de “conversão” a transformação de uma representação de um registro para a representação em outro,

- enquanto o “tratamento” é a transformação de uma representação em outra de um mesmo registro (Henriques e Almouloud, 2016).

Para identificar as conversões e os tratamentos, utilizamos nos códigos abreviaturas (vide Quadro 8).

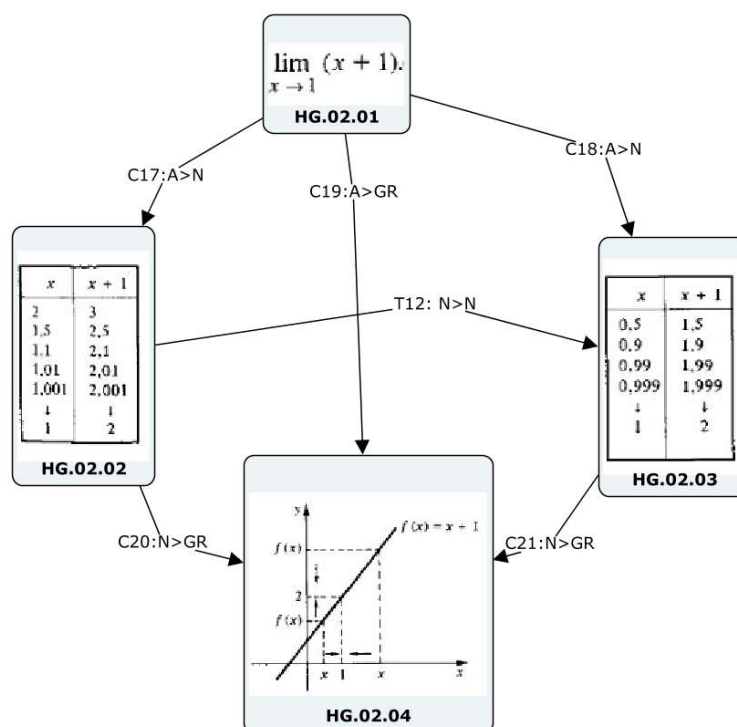
Quadro 8 - Abreviaturas.

Abreviatura	Descrição
A>GR	Algébrico para gráfico
A>LN	Algébrico para língua natural
A>N	Algébrico para numérico
GR>A	Gráfico para algébrico
GR>LN	Gráfico para língua natural
GR>N	Gráfico para numérico
LN>A	Língua natural para algébrico
LN>GR	Língua natural para gráfico
LN>N	Língua natural para numérico
N>A	Numérico para algébrico
N>GR	Numérico para gráfico
N>LN	Numérico para língua natural

Fonte: Elaborado pelo autor.

Para identificar as transformações foram utilizados esquemas de mapas conceituais produzidos no software CmapTools. Esses esquemas nos ajudaram a retratar as relações entre as representações por meio de setas que indicam a origem e o final da transformação (vide Quadro 19).

Figura 19 - Esquemas.



Fonte: Guidorizzi, 2001, p. 55.

Com este recurso conseguimos identificar as representações e as transformações por meio das setas, todas codificadas. Assim, as transformações foram identificadas por meio de uma letra inicial (**C** para Conversões e **T** para tratamento) seguida de um número que indica a ordem e uma legenda que representa o tipo de transformação.

Assim, o código **T12:N>N** representa o décimo segundo tratamento encontrado no corpo do texto e ele se refere a uma transformação de representações em registro numérico. Por sua vez, o código **C19:A>GR** corresponde à décima nona conversão encontrada no livro, que transforma uma representação algébrica para outra em registro gráfico.

Dessa forma, as categorias de transformação nos informaram sobre quais registros os tratamentos foram mais frequentes e quais conversões foram mais utilizadas. Todos os esquemas dos dois livros utilizados nessa pesquisa se encontram no apêndice 3.

Por fim, depois de identificadas e categorizadas todas as representações e transformações, acrescentamos estes dados no inventário (Quadro 9), e com a ajuda do Excel, confeccionamos os gráficos que são discutidos no capítulo 5.

Quadro 9 - Inventário 2

Conversões	Tratamentos	Registro	Código	Representação
C11:A>N	T1A	A	LL.01.01	$f(x) = \frac{2x^2 + x - 3}{x - 1}$
C12:A>N	T4A			
C30:A>GR	T12A			
	T28A			

Fonte: Leithold, 1994, p.56.

No Quadro 9, percebemos que na primeira coluna aparecem as conversões que envolvem a representação (todas partem do registro algébrico “A” e se transformam em registro numérico “N” ou gráfico “GR”); na segunda, os tratamentos (todos em registro algébrico, por isso o “A”); na terceira, o registro ao qual pertence a representação (no caso o registro algébrico, também representado pela letra “A”); na quarta, o código e na última, a própria representação.

Procedemos de modo parecido com relação aos exercícios, porém, nesse caso consideramos separadamente as representações que aparecem no enunciado, as conversões propostas pelas questões, além de classificarmos o tipo de questão mediante o verbo utilizado no enunciado.

Percebemos que alguns enunciados sugerem dupla conversão, ou seja, uma conversão seguida de outra. Há casos em que a dupla conversão consiste apenas na inversão da conversão original. Nesse tipo de situação consideramos duas conversões distintas.

Em outros casos, a conversão é realizada com o uso de um registro auxiliar, ou seja, ela envolve três registros. Por exemplo, muitas vezes, para se construir o gráfico de uma função, dada a sua expressão algébrica, se faz necessária a construção de uma tabela com valores numéricos antes. Nessa situação, levando em conta, além do enunciado da questão, a forma como exemplos similares a tal exercício foram resolvidos no texto, também consideramos duas conversões distintas.

Classificamos as tarefas pelos verbos:

- *determinar*,
- *provar*,
- *justificar*,
- *construir*, e
- *inferir*.

Caso aparecesse algum verbo diferente destes cinco, classificaríamos por analogia. Quando apareceu o verbo “demonstrar” no enunciado de alguns exercícios, por exemplo, este foi catalogado na mesma seção do verbo provar, por ser análogo a este.

No Quadro 10 apresentamos um exemplo do inventário feito para analisar os exercícios.

Quadro 10 - Inventário dos exercícios.

Verbos	Registro no enunciado	Conversões Sugeridas	Questão
Construir Determinar Provar	Algébrico	A>GR	1) Faça um esboço do gráfico da função; então, observando onde há quebras no gráfico, determine os valores da variável independente nos quais a função é descontínua e mostre que a definição 2.6.1 não é satisfeita em cada descontinuidade. $f(x) = \frac{x^2 + x - 6}{x + 3}$

Fonte: Leithold, 1994, p.105.

Percebemos que o enunciado apresenta três verbos (pede para construir um gráfico, determinar valores e provar que a função não é contínua num ponto). Identificamos também que o enunciado apresenta a representação algébrica de uma função, que sugere a transformação de uma representação algébrica para um gráfico e que exige um tratamento algébrico em sua resolução.

Assim, com a execução desses procedimentos conseguimos levantar dados bastante relevantes sobre a forma com que os autores dos livros pesquisados trabalharam o conceito de limites, o que tornou nossa análise formal uma etapa decisiva para a presente pesquisa.

5.5. INTERPRETAÇÃO/REINTERPRETAÇÃO

A última fase da HP é a interpretação/reinterpretação e ela corresponde a uma síntese do que foi estudado nas outras etapas. Dessa forma, além de destrinchar os dados durante as análises, nosso trabalho também consistiu em construir uma síntese englobando esses resultados.

No próximo capítulo apresentamos as análises dos livros “Cálculo com Geometria Analítica” de Louis Leithold. Primeiramente mostramos o estudo individual das obras, seguindo as etapas já descritas no capítulo anterior, e em seguida desenvolvemos um estudo comparativo entre elas.

6. CÁLCULO COM GEOMETRIA ANALÍTICA

"A Matemática pura é, à sua maneira, a poesia das ideias lógicas."

Albert Einstein¹⁵

Assim como Einstein associa Matemática e Arte, muitos são os matemáticos e professores que estreitam a relação entre essas duas áreas de conhecimento, aplicando conhecimentos matemáticos nas artes ou matematizando peças artísticas. É o caso do autor do livro que analisamos a seguir que se utilizava de técnicas teatrais para enriquecer suas aulas de Cálculo e incentivar seus alunos para o estudo de uma das disciplinas consideradas mais difíceis do currículo acadêmico.

Neste capítulo estão as análises do livro “Cálculo com Geometria Analítica” de Louis Leithold (1994), seguindo as etapas da Hermenêutica da Profundidade proposta por Thompson. Primeiramente desenvolvemos a interpretação da doxa, seguida das análises sócio-histórica e formal.

6.1.A INTERPRETAÇÃO DA DOXA

O fato de o livro do Leithold (1994) aparecer no nosso levantamento como o mais citado nas ementas dos cursos de Cálculo das universidades brasileiras, mais precisamente em 24 das 26 instituições pesquisadas, por si só, já demonstra a importância dada pela comunidade acadêmica local a essa obra estrangeira.

Essa importância é evidenciada nas palavras de Reis (2001):

Certamente, o livro de Leithold é referência em quase todas as ementas dos cursos de Cálculo oferecidos para os cursos da área de exatas no Brasil. Não só pelas quase 1000 páginas de seus Volumes 1 e 2, mas por se tratar, de fato, de um dos livros mais ricos em exemplos e demonstrações de resultados, que normalmente são remetidas para os livros de Análise (p.95).

Tal relevância, relatada por Reis (2001) não se restringe apenas a comunidade acadêmica local. A obra de Leithold teve impacto mundial. Em seu obituário no Los Angeles Times, Woo (2005) afirma que a primeira publicação de *The Calculus with Analytic Geometry*,

¹⁵ Fonte: MECTUTORNEME. Emmy Noether NY Times obituary. Disponível em: <https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/Obituaries/Noether_Emma_Einstein>. Acesso em: 22/01/2023.

feita em 1968 pela editora Harper and Row, rapidamente se tornou um best-seller em inglês e em vários idiomas, como alemão, espanhol e chinês.

A Professora Shirley B. Gray, da Universidade Estadual da Califórnia, em entrevista para o Los Angeles Times, afirma que a obra do Leithold chega a ser um marco histórico no ensino do Cálculo Diferencial e Integral. Para ela, o livro do Leithold é um dos primeiros a incorporar no currículo do curso de cálculo conceitos da Teoria de Conjuntos, uma componente muito valorizada no movimento da matemática moderna da década de 1960 (Woo, 2005).

Corroborando com a visão da Professora Gray com relação aos aspectos pedagógicos da obra, Reis (2001) chega a declarar que o manual representa um “enfoque clássico intuitivo”, ou seja, tradicional, porém, com uma preocupação didática de abordar a noção intuitiva dos conceitos matemáticos.

Nesta mesma tese, ao ser perguntado se adotaria o livro do Leithold como primeira bibliografia ou referência bibliográfica, o Professor Roberto Ribeiro Baldino, mesmo relativizando a importância da escolha do manual didático para a realização de um bom curso de Cálculo, destaca que a obra não é ruim e afirma que ele seria “adaptável” ao ensino de Cálculo (Reis, 2001).

Apesar da relevância apontada, Reis (2001) não exime o livro de críticas. Afirma que no texto, a conceituação é exacerbada e que a obra tem dificuldade em conquistar os alunos por apresentar problemas com relação à coerência entre os exercícios propostos e o conteúdo desenvolvido.

Assim, podemos afirmar que o livro do Leithold é visto pela comunidade acadêmica como uma obra importante, por romper com paradigmas dos livros adotados na época em que foi escrito e que, apesar de algumas críticas recebidas, mantém grande influência na concepção pedagógica dos cursos de Cálculo do Brasil e do mundo.

6.2. ANÁLISE SÓCIO-HISTÓRICA

Para a realização da análise sócio-histórica determinamos três ações norteadoras: a análise de dados biográficos dos autores, o estudo dos paratextos editoriais e das mudanças ocorridas entre as edições da obra.

6.2.1. Louis Leithold

Figura 20 - Louis C. Leithold.



Fonte: Disponível em: <http://archivo.elsalvador.com>. Acesso em: 01 de Set de 2018.

Louis C. Leithold nasceu no Condado de São Francisco, Califórnia nos Estados Unidos em 16 de novembro de 1924 (Encyclopaedia Britannica, 2005). Seu bom desempenho escolar o habilitou a estudar na Lowell High School, escola que aceitava apenas os alunos mais brilhantes da cidade de São Francisco, mediante aprovação em testes padronizados, em histórico de notas e em atividades extracurriculares (Woo, 2005).

Ele obteve os títulos de Bacharel, Mestre e Doutor na University of California em Berkeley. Começou a dar aulas em 1955 na faculdade Phoenix College (Arizona), e depois lecionou na California State University, na faculdade na Open University de Milton Keynes, na University of Southern California, na Pepperdine University e na Malibu High School (The New York Times, 2005).

Com relação a sua vida pessoal, casou-se com Thyra Nichols, Bacharela e Mestre em Crítica Musical, em Phoenix em 1952 e se divorciou em 1962. Enquanto eram casados, em 1959, adotaram uma criança chamada Gordon Marc Leithold que foi morar com a mãe em Dallas após o divórcio (Justia Us Law, [2022]).

Ele nutria uma grande paixão por cinema. Nos anos 50 dirigiu uma casa de cinema vintage em Scottsdale, Arizona, frequentada pelo diretor Steven Spielberg quando criança. Acumulou uma extensa coleção de pôsteres de filmes antigos que negociava no fim de sua vida (Woo, 2005).

Ainda quando lecionava no Arizona, um editor se aproximou dele para escrever um livro. O resultado foi um dos livros mais usados no mundo para o curso de Cálculo (Woo, 2005). *The Calculus with Analytic Geometry* publicado em 1968 pela Harper e Row, quando Leithold já trabalhava na Universidade do Estado da Califórnia (Palisadian-Post, 2005).

No início dos anos 1980, conheceu Jaime Escalante, um professor Boliviano-Estadunidense que o teve como mentor sobre o ensino de limites e diferenciação. O sucesso de

Escalante com estudantes da periferia da cidade de Los Angeles foi contado no filme de 1988 *Stand and Deliver*, chamado aqui no Brasil de *O preço do Desafio*, que rendeu a Edward James Olmos uma indicação ao Oscar de melhor ator (Woo, 2005).

Figura 21 - Cartaz de O preço de um Desafio.



Fonte: Disponível em: <http://arquivo.elsalvador.com>. Acesso em: 01 de Set de 2018.

Leithold foi convidado por Escalante algumas vezes para dar palestras para suas classes na Garfield High School (Woo, 2005).

Em 1987 compartilhou sua experiência em oficinas para professores e ajudou na preparação de alunos para o Advanced Placement, exame utilizado para admissão em universidades, nos institutos de verão de Cálculo do College Board na Pepperdine e na Fordham University em Nova York (Palisadian-Post, 2005).

Em 1998, aos 76 anos, logo após sua aposentadoria, aceitou um convite para dar aula num programa de Cálculo para o ensino médio na recém estabelecida Malibu High School. No início se voluntariou como consultor e posteriormente foi convencido a receber um salário (Woo, 2005).

Com relação à sua forma de dar aulas, ele gostava de animá-las com um pouco de teatro. Segundo sua colega Amelia Zimmerman: “Seu dia favorito do ano inteiro era o dia em que apresentaria o Teorema Fundamental do Cálculo. Formava uma contagem regressiva no quadro. E então naquele dia em particular, ele usaria uma camisa cobrindo uma camiseta por baixo, que teria o Teorema Fundamental do Cálculo. E então, exatamente no momento em que ele mostraria o teorema, ele diria: ‘Está ficando quente aqui?’ Nesse momento, as pessoas iam abrir as janelas, e então ele tirava a blusa e apresentava a camisa, que tinha o teorema” (Siegel, 2005).

Para debater com os alunos sobre quem teria inventado o Cálculo diferencial e Integral (se Newton ou Leibniz) ele “Trazia dois pratos de biscoitos, figura de Newtons em um e uma

marca chamada Leibniz no outro. Depois, ele convidava os alunos a fazerem a sua escolha” (Woo, 2005).

Ele também apostava em grandes quantidades de tarefas para promover a aprendizagem de Cálculo. Ainda segundo Amelia Zimmerman: “Passava uma grande quantidade de tarefas que rendiam duas a três horas por noite e, nem todos os alunos eram capazes de assumir esse compromisso. Isso poderia incitar rebelião na maioria das outras salas de aula. O que não acontecia com ele” (Siegel, 2005).

Por meio de relatos de professores e alunos que trabalharam com Leithold, podemos afirmar que, além de usar seu carisma para conseguir o comprometimento dos estudantes para realizar a grande quantidade de exercícios, ele também calcava suas aulas em técnicas de memorização: “Ele os fez memorizar e recitar regras complicadas de Cálculo até que os teoremas governassem seus cérebros. E ele os moveu com seu próprio mantra, que recitava diariamente. "Vamos passo a passo", dizia ele, cobrindo todas as tábuas secas da sala de aula com equações” (Woo, 2005).

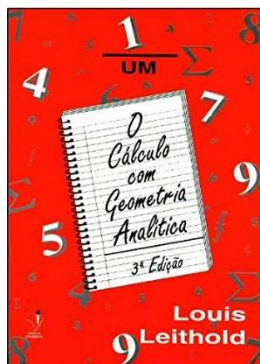
Com relação ao mantra “passo a passo” vemos mais a frente que esta é uma característica também do seu texto. Mark Kelly, diretora do Malibu High School descreve resumidamente a atuação de Leithold na sala de aula: “Ele tinha uma compreensão tão profunda do conteúdo. (...) Ele usou humor e histórias motivadoras para os adolescentes, que as atraíram para o assunto” (Woo, 2005).

Podemos afirmar que seu método de ensino era eficiente, pelo menos no que diz respeito aos exames oficiais em que seus alunos eram submetidos. No *Advanced Placement*, que tem como nota máxima 5 e cuja média nacional é de 3,01, os alunos que estudaram com Leithold obtiveram nos últimos 5 anos antes de sua morte uma média 4,6 (Siegel, 2005; Woo, 2005).

Leithold foi encontrado morto em sua casa, onde morava sozinho, em 29 de abril de 2005, por um pai de aluno preocupado pela sua rara ausência em uma das aulas preparatórias para o *Advanced Placement* que aconteceria no dia 4 de maio. Sua morte foi atribuída a causas naturais. Ele tinha doenças cardíacas e pulmonares (The New York Times, 2005).

6.2.2. O livro Cálculo com Geometria Analítica.

Figura 22 - Livro Cálculo com Geometria Analítica, vol 1, 3 ed.



Fonte: Disponível em: <https://www.amazon.com.br/C%C3%A1lculo-com-Geometria-Anal%C3%ADtica-1/dp/8529400941> Acesso em: 19/01/2023.

O prefácio da terceira edição do livro *Cálculo com Geometria Analítica* não explica nada sobre a origem da obra. Não há informações sobre a motivação para escrita, momento em que o autor resolveu escrever ou onde trabalhava quando decidiu realizar o projeto.

Com relação ao público-alvo, o autor se dirige a futuros matemáticos e estudantes que tenham interesse por Engenharia, Ciências Exatas, humanas ou áreas não técnicas (Leithold, 1994). Dessa forma, Leithold deixa claro que escreve para estudantes, embora ainda seja um público amplo, pois, direciona a diversas áreas de conhecimento.

Uma vez definido o consumidor preferencial de seu livro, o autor trata de dar o tom com que seu livro será conduzido:

Uma vez que um livro-texto deve ser escrito para o estudante, empenhei-me em manter uma apresentação de acordo com a experiência e a maturidade de um principiante, sem deixar que qualquer passagem fosse omitida ou ficasse sem explicação. Espero que o leitor tome consciência de que as demonstrações dos teoremas são necessárias; procurei torná-las bastante motivadores e explicá-las cuidadosamente, de forma que sejam compreensíveis para o estudante que adquiriu um nível razoável de conhecimentos das seções que as precedem (Leithold, 1994, p. IX).

Embora o autor alerte ao leitor sobre a necessidade de expor as demonstrações, ele afirma que alguns teoremas foram enunciados sem sua devida prova. Ao invés de demonstrá-los, o autor explica que fará a discussão a respeito do enunciado por meio de ilustrações e exemplos.

Também no prefácio, ele indica seguir uma abordagem de explicações passo-a-passo, com exemplos e exercícios em grande quantidade e variedade (Leithold, 1994). Essas

características de escrita se casam perfeitamente com o perfil dele traçado por seus alunos e colegas.

Sobre as edições do livro *Cálculo com Geometria Analítica* comparamos a terceira edição estadunidense de 1976 com a terceira edição brasileira de 1994. Encontramos mudanças com relação a ordem dos conteúdos: enquanto na edição nacional todo o conteúdo de limites se concentra no capítulo 2, na edição dos Estados Unidos ele é dividido entre o segundo e o quarto capítulo, havendo entre eles um capítulo sobre derivadas.

Não conhecemos o motivo para tal mudança, mas temos indícios de que essa alteração não agradou o autor ou a editora. Isso porque o prefácio da edição estadunidense, ao se referir a nova ordenação, descreve a sequência dos conteúdos da edição anterior como idêntica à edição brasileira. Como a terceira edição publicada no Brasil é uma tradução da sexta edição do original, significa que a ordem dos conteúdos mudou, mas rapidamente voltou a sua configuração original.

Também percebemos na edição norte americana, um número menor de exemplos resolvidos e exercícios, porém com um nível de dificuldade e rigor mais alto em alguns deles. Na seção 2.1, que apresenta o conceito de limites, por exemplo, identificamos na edição do Brasil duas questões do tipo “prove”, enquanto que na edição norteamericana são 7 itens desse tipo.

É importante registrar também que na edição estrangeira há menos gráficos do que a edição nacional. Verificamos que havia 43 gráficos no capítulo que trata o conteúdo de limites na versão brasileira, enquanto que na versão original, apenas 16. Também vale lembrar que as demonstrações de teoremas na edição original aparecem ao longo do texto, enquanto que na edição nacional elas estão concentradas nas seções 2.9 e 2.10, chamadas de suplementares.

6.3. ANÁLISE FORMAL

O livro *Cálculo com Geometria Analítica*, volume 1, 3ª edição, possui 770 páginas, divididas em 11 capítulos, além de prefácio, agradecimentos, uma página que fala sobre um pouco de história do Cálculo, apêndice, listas de fórmulas, respostas dos exercícios de número ímpar e índice remissivo.

O Capítulo 1 da obra chama-se Números Reais, Funções e Gráficos. Ele faz uma síntese de conteúdos que são pré-requisitos para o estudo do Cálculo. Para um estudante que faz o primeiro curso de Cálculo, ele funciona como uma revisão dos assuntos vistos na educação básica necessários para a compreensão dos conceitos de limite, derivada e integral.

6.3.1. Definição de Função

Sobre esse primeiro capítulo nos chamou a atenção a concepção de um pré-requisito indispensável para o estudo do conceito de limites: a definição de função usada pelo autor.

Durante os estudos, no que diz respeito ao conceito de limites, foi observado que o livro representa as funções utilizando apenas a fórmula que indica a relação entre domínio e o contradomínio, não explicitando dessa maneira os dois conjuntos.

Por conta desse aspecto, resolvemos consultar, no primeiro capítulo, a definição de função usada pelo autor. Embora este não seja o nosso foco, acreditamos que a forma com que a função é definida pode influenciar decisivamente na compreensão do conceito de limite.

Leithold (1994) define função da seguinte forma:

Definição: Uma **função** é um conjunto de pares ordenados de números (x, y) , sendo que dados dois pares ordenados distintos, nenhum deles terá o mesmo primeiro número. O conjunto de todos os valores admissíveis de x é chamado de **domínio** de função e o conjunto de todos os valores resultantes de y é chamado a **imagem** da função (p.32).

Ao definir uma função por meio de pares ordenados, o autor expõe uma preferência em adotar a linguagem de conjuntos para representar objetos matemáticos. Como, foi citado anteriormente, o uso da Teoria de Conjuntos é uma característica do Movimento da Matemática Moderna, que teve seu auge na década em que o livro do Leithold foi escrito.

Outro ponto importante a ser observado na definição acima é que, apesar de destacar as palavras “domínio” e “imagem”, ele define o primeiro conjunto como “todos os valores admissíveis de x ”. Naturalmente surgem os questionamentos: quais valores são admissíveis? Admissíveis com relação a quê? Seria da expressão algébrica?

O trecho a seguir indica que a resposta para o último questionamento seria positiva:

Estabelecendo o conceito de uma função de outra forma, consideramos intuitivamente o número real y no conjunto Y como uma função do número real x no conjunto X se houver uma regra pela qual um valor específico de y seja atribuído a um valor de x . Essa regra é dada, muitas vezes, por uma equação (Leithold, 1994, p.31).

Apesar de o autor deixar claro, nessa passagem, que se trata de uma ideia intuitiva de função, ele expõe a regra de associação como o fator determinante para sua existência. Essa ideia é reforçada pela presença de exercícios que pedem explicitamente para determinar o domínio de uma função dada.

Com relação a esse aspecto, Lima (2003) defende que uma função não deve ser determinada apenas pela regra ou lei de associação.

Segundo ele:

Devemos lembrar que a definição de função é estabelecida por três elementos fundamentais: domínio, contradomínio e lei de associação. Isso é, uma função só fica bem definida se são conhecidos esses três elementos. Assim, $y = x^2$ não representa, por si só, uma função - mas pode vir a expressar a lei de associação de uma função, se são estabelecidos domínio e contradomínio compatíveis (Lima, 2003, [S.I.]).

Assim, não faz sentido propor um exercício que pede para determinar o domínio de uma função especificada. Ora, se foi dada a função, o domínio também deveria ter sido explicitado, já que este faz parte da definição de função.

Dessa forma, Júnior (2007) chama a atenção para o risco de o estudante de Matemática restringir a ideia de função apenas por sua fórmula:

Assim, por exemplo, a regra $f(x) = x^2$ é automaticamente associada à uma função que não é injetora, não é sobrejetora e seu gráfico é uma parábola. Ora, mas $g: R^+ \rightarrow R^+$, com a mesma regra $g(x) = x^2$, é injetora, sobrejetora e seu gráfico não parece uma parábola no aspecto usual, enquanto que $h: \{0,1\} \rightarrow R$, também com $h(x) = x^2$, é injetora, não é sobrejetora e seu gráfico é constituído apenas pelos pontos $(0, 0)$ e $(1, 1)$. A regra de todas as funções é a mesma e, portanto, não é surpresa quando os estudantes afirmam que as três funções, quando vistas apenas pelas suas regras, são iguais (p.60).

Desse modo, constatamos que o autor, ao definir função, segue uma concepção que dá a regra, geralmente uma fórmula algébrica, maior status do que aos outros elementos que a constituem.

6.3.2. Análise narrativa e as definições de limite e continuidade

Como o foco do nosso trabalho é o conteúdo de limites, nos concentramos no estudo do Capítulo 2 – Limite e Continuidade que contém 83 páginas (página 55 à página 137) e representa 10,77 % da extensão do livro.

Por conta dos critérios adotados e explicitados no capítulo 4, fizeram parte do *corpus* para as análises apenas as seções: 2.1 – O Limite de uma função, 2.3 – Limites Laterais, 2.4 – Limites Infinitos, 2.5 – Limites no infinito e 2.6 – Continuidade de uma Função em um Número, juntamente com os exercícios correspondentes.

No Quadro 11 estão as seções, e suas partes, que ficaram de fora de nossa análise por trabalharem as propriedades operatórias para o cálculo de limites, o que foge aos nossos objetivos.

Quadro 11 - Seções não usadas na pesquisa.

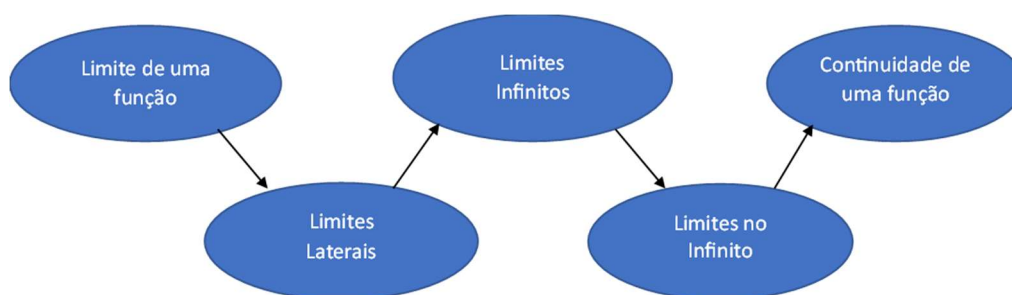
Seção	Título	Extensão
2.2	Teoremas sobre Limites de Funções	Todo
2.4	Limites infinitos	do teorema 2.4.3 da página 80 até a o exemplo 4 da página 87
2.5	Limites no Infinito	do teorema 2.5.2 da página 90 até a o exemplo 8 da página 97
2.6	Continuidade de uma função em um número	ilustração 9 na página 105
2.7	Continuidade de uma Função Composta e Continuidade em um intervalo	Todo
2.8	Continuidade das Funções Trigonométricas e o Teorema do Confronto de Limites (ou Teorema do “Sanduíche”)	Todo
2.9	Provas de Alguns Teoremas sobre Limites de Funções (Suplementar)	Todo
2.10	Teoremas Adicionais de Limites de Funções (Suplementar),	Todo

Fonte: Adaptação de Leithold, 1994, p. v.

Dessa forma, o *corpus* do trabalho compreendeu a um total de 38 páginas, o que corresponde à cerca da metade do capítulo 2, além de aproximadamente 141 exercícios do livro.

Com relação ao conteúdo, o autor opta por apresentar primeiramente o conceito de limite de uma função (inclusive limites laterais, limites infinitos e limites no infinito), para em seguida introduzir o conceito de continuidade, (vide Quadro 23).

Figura 23 - Análise narrativa do livro do Leithold.



Fonte: Leithold, 1994, p.v.

A sequência narrativa escolhida pelo Leithold é muito importante, pois alguns autores seguem o caminho inverso: apresentam o conceito de continuidade primeiramente, para em seguida trabalhar o conceito de limite.

A consequência dessa escolha se reflete nas definições usada pelo autor, tanto para o conceito de limite como para o conceito de continuidade de uma função num ponto. A Figura 24 mostra como Leithold o define limite por meio épsilons e deltas.

Figura 24 - Definição de limite no livro do Leithold.

DEFINIÇÃO	<p>Seja f uma função definida para todo número em algum intervalo aberto contendo a, exceto possivelmente no próprio número a. O limite de $f(x)$ quando x tende a a será L, escrito como</p> $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$ <p>se a seguinte afirmativa for verdadeira: Dado $\epsilon > 0$ qualquer, existe um $\delta > 0$, tal que se $0 < x - a < \delta$ então $f(x) - L < \epsilon$ (4)</p>
------------------	--

Fonte: Leithold, 1994, p. 58.

É importante ressaltar que o autor introduz essa definição por meio de um exemplo em que é explorado o problema da tangente a partir de uma função definida algebricamente. Por meio de aproximações numéricas, o conceito é explorado e refinado até se chegar ao rigor da definição algébrica.

Essa definição é explorada em exemplos e exercícios de prove, e, portanto, exige que o estudante acompanhe as demonstrações realizadas pelo autor e que as reproduza nas respostas às questões propostas. Nenhum dos exercícios dessa primeira seção pede para se calcular limites. Apenas provar ou determinar um delta a partir de um épsilon dado. Somente depois de apresentadas as demonstrações das propriedades operatórias, é que o livro ensina a efetuar os cálculos de limites.

Com vimos, isso inverte a ordem histórica do desenvolvimento do conceito de limite que já era aceito bem antes de ser definido formalmente. Assim, o autor indica ao aluno que ele só deve utilizar para a resolução de questões, o que foi previamente justificado rigorosamente e, portanto, algebricamente.

Com relação ao conceito de continuidade de uma função no ponto, a definição é feita pela definição de limite, sem utilizar as famosas letras gregas. Na Figura 25 expomos a definição de continuidade num ponto utilizada pelo Leithold.

Figura 25 - Definição de Continuidade.

DEFINIÇÃO	<p>Dizemos que a função f é contínua no número a se e somente se as seguintes condições forem satisfeitas:</p> <ul style="list-style-type: none"> (i) $f(a)$ existe; (ii) $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ existe; (iii) $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$. <p>Se uma ou mais de uma dessas condições não forem verificadas em a, a função f será descontínua em a.</p>
------------------	--

Fonte: Fonte: Leithold, 1994, p.99.

Assim, o autor prefere trabalhar a definição de limites em termos de épsilon e delta e se exime de manipular os épsilons quando trabalha o conceito de continuidade.

A definição usada pelo Leithold para o conceito de continuidade é mais simples, partindo do pressuposto de que o aluno saiba calcular limites pelas propriedades operatórias, porém mais restrito. Por exemplo, ela é inadequada para resolver a questão abaixo.

“Prove que a função $f(x) = \begin{cases} x, & \text{se } x \in \mathbb{Q} \\ -x, & \text{se } x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$ é contínua em 0” (Guidorizzi, 2001, p. 70.).

Mesmo não utilizando a definição de continuidade em termos de épsilon e delta, o autor precisa dela em algum momento para demonstrar algumas propriedades operatórias (como a continuidade de uma função composta) e, por isso, a introduz e demonstra como um teorema, cujo enunciado se encontra na seção 2.6 e é reproduzido na Figura 26.

Figura 26 - Teorema da continuidade de uma função.

TEOREMA	A função f será contínua no número a se f estiver definida em algum intervalo aberto contendo a e se para todo $\epsilon > 0$ existir um $\delta > 0$ tal que se $ x - a < \delta$ então $ f(x) - f(a) < \epsilon$
----------------	--

Fonte: Leithold, 1994, p. 105.

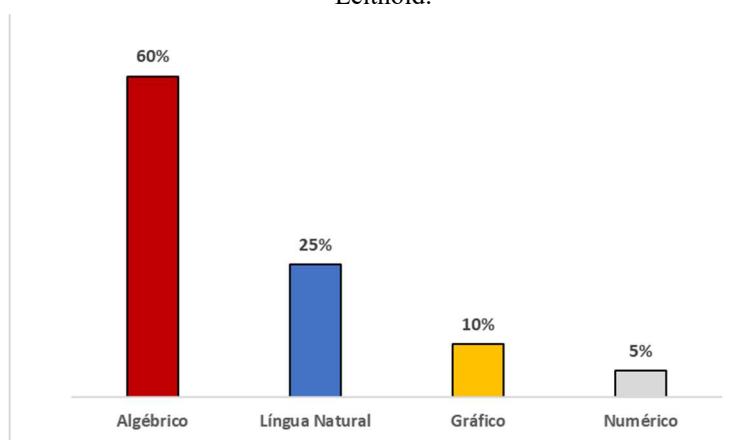
Assim, Leithold trabalha muito pouco com a definição descrita na Figura 26 e não propõe exercícios que a abordem. A concepção em termos de épsilon e delta se concentra exclusivamente na definição de limite.

6.3.3. Representações Semióticas

Com relação a análise semiótica, foi identificado ao longo do texto das seções estudadas¹⁶ um total de 250 representações de limites ou de funções utilizadas para abordar o conceito de limite. Estas representações foram classificadas de acordo o tipo de registro em que foram construídas e são apresentadas no Gráfico 2.

¹⁶ As partes do livro do Leithold consideradas nessa pesquisa estão descritas na seção 6.3.2 intitulada “Análise narrativa e definição de Limite e Continuidade” na página 115.

Gráfico 2 - Distribuição percentual das representações identificadas de acordo com o tipo de registro no trecho do texto analisado do livro do Leithold.



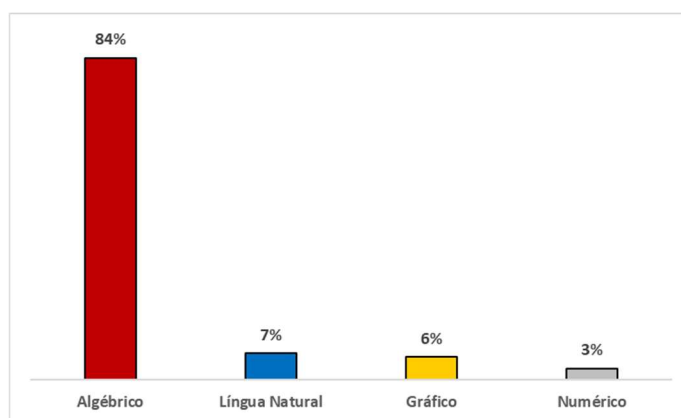
Fonte: elaborado pelo autor com ajuda do software Excel.

A primeira observação que podemos fazer com relação ao texto do livro do Leithold é que ele utiliza os quatro registros aqui considerados: algébrico, língua natural, gráfico e numérico. Ou seja, não há negligência a nenhum registro, embora exista um claro desequilíbrio com relação à frequência de uso.

Outro ponto importante é que a grande maioria das representações identificadas na parte do livro analisado pertencem ao registro algébrico (60% do total). Isso já era, de certa forma, esperado. Um dos motivos para que isso aconteça é apontado por Condillac (1981 apud Duval, 2009) que afirma que este registro permite tratamentos de uma forma mais econômica e ágil. A economia e a agilidade que Condillac se refere, diz respeito à simplicidade das formas e a rapidez na execução, ou seja, “as relações entre objetos podem ser representadas de maneira mais rápida e mais simples de compreender por fórmulas literais do que por frases” (Duval, 2012, p. 268).

Os dados encontrados, no que diz respeito à operação de tratamento estão apresentados no Gráfico 3.

Gráfico 3 - Distribuição percentual dos tratamentos identificados no trecho do texto analisado do livro do Leithold.



Fonte: elaborado pelo autor com ajuda do software Excel.

Foi identificado um total de 173 operações de tratamento dentro da parte do texto analisado no livro do Leithold.

É importante salientar que todos os registros foram identificados e que o registro algébrico foi disparadamente o que mais apareceu quando o autor precisou manipular as representações dentro de um mesmo registro (84% do total de tratamentos encontrados foi em registro algébrico).

Com relação a esse predomínio do registro algébrico, Moura (2014) enfatiza que “as literaturas do Cálculo valorizam o tratamento algébrico e não apresentam o tratamento geométrico em todos os tópicos” (p. 52).

Outro motivo para o expressivo uso do registro algébrico é explicitado por Kamphorst e Nehring (2016, n.p) quando justificam a grande quantidade de conversões para o registro algébrico encontrados nos exercícios realizados por estudantes: “Acreditamos que este fato possa ser justificado pela ênfase na representação algébrica, ainda dada por parcela significativa dos professores de matemática de todos os níveis escolares”.

Assim, podemos atribuir a preferência pelo registro algébrico a questões práticas, com relação às características inerentes a esse tipo de representação, bem como por questões culturais, no que diz respeito ao costume escolar de se privilegiar esse registro.

Outro aspecto que chama atenção é o fato de que uma em cada quatro representações identificadas na parte do texto analisada no livro do Leithold está em língua natural (25% do total). Essa situação transcorre do fato de o objeto em questão ser um texto didático e indica a grande preocupação pedagógica do autor em explicar os detalhes de cada exemplo nesse tipo de registro.

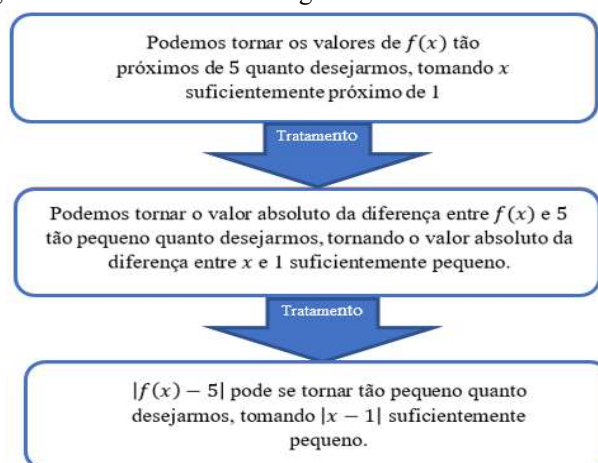
Essa preocupação inclusive foi explicitada no prefácio do livro:

As explanações passo-a-passo, os inúmeros exemplos descritos e a ampla variedade de exercícios continuam a ser os aspectos mais relevantes do livro nessa edição. Uma vez que um livro-texto deve ser escrito para o estudante, empenhei-me em manter uma apresentação de acordo com a experiência e a maturidade de um principiante, sem deixar que qualquer passagem fosse omitida ou ficasse sem explicação (Leithold, 1994, p. iv).

Assim, as representações em língua natural possuem um papel muito importante para que o livro do Leithold atinja seus objetivos didáticos, embora ele pouco as utilize para realizar tratamentos (7% dos tratamentos identificados no trecho analisado no livro do Leithold estão em língua natural).

Na Figura 27 apresentamos uma importante sequência desses tratamentos, relacionada a descrição do limite $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 5$.

Figura 27 - Tratamento em Língua Natural no texto do Leithold.



Fonte: Adaptado de Leithold, 1994, p.54.

A sequência de tratamentos representada na Figura 27 nos parece relevante, pois, ela mostra a transição da ideia intuitiva do conceito de limites para a definição formal. Percebemos a mudança de expressões que o autor usa, passo a passo, para tornar a ideia de limite o mais formal possível. Ele inicia sua exposição com a expressão “valores próximos”, passando por “módulo da diferença pequeno”, para em seguida apresentar a expressão algébrica do módulo.

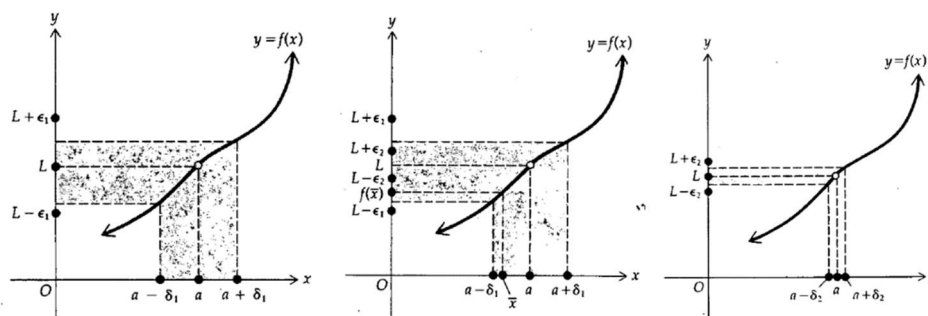
O passo seguinte, que não está representado na Figura 27, seria a introdução das letras gregas épsilon e delta para representar as vizinhanças de 1 e de 5, respectivamente. Ou seja, a consequência desses tratamentos é uma conversão da língua natural para o registro algébrico. Assim, o autor parte da descrição do conceito para a sua definição formal algébrica.

Com relação ao registro gráfico, o autor utiliza, nos trechos analisados no livro, uma pequena quantidade (10% das representações e 6% dos tratamentos identificados). Sobre os

tratamentos gráficos, nos chamou a atenção o fato de que eles só foram utilizados em duas seções: 2.1 – O Limite de uma função e 2.4 – Limites Infinitos. Na primeira para comparar a relação entre épsilons e deltas ao apresentar o conceito de limite e, na segunda, para comparar os tipos de limites infinitos (pela esquerda, pela direita, infinito positivo e negativo).

A Figura 28 mostra um tratamento gráfico utilizado no texto do Leithold.

Figura 28 - Tratamento Gráfico no texto do Leithold.



Fonte: Leithold, 1994, p.54.

A Figura 28 mostra que se quisermos um $f(\bar{x})$ próximo do limite L , ou seja, que $f(\bar{x})$ entre $L - e_1$ e $L + e_1$ (ou ainda, $|f(x) - L| < e_1$), basta aproximarmos \bar{x} suficientemente de a , ou seja, que \bar{x} fique entre $a - \delta_1$ e $a + \delta_1$ (ou ainda, que $|\bar{x} - a| < \delta_1$).

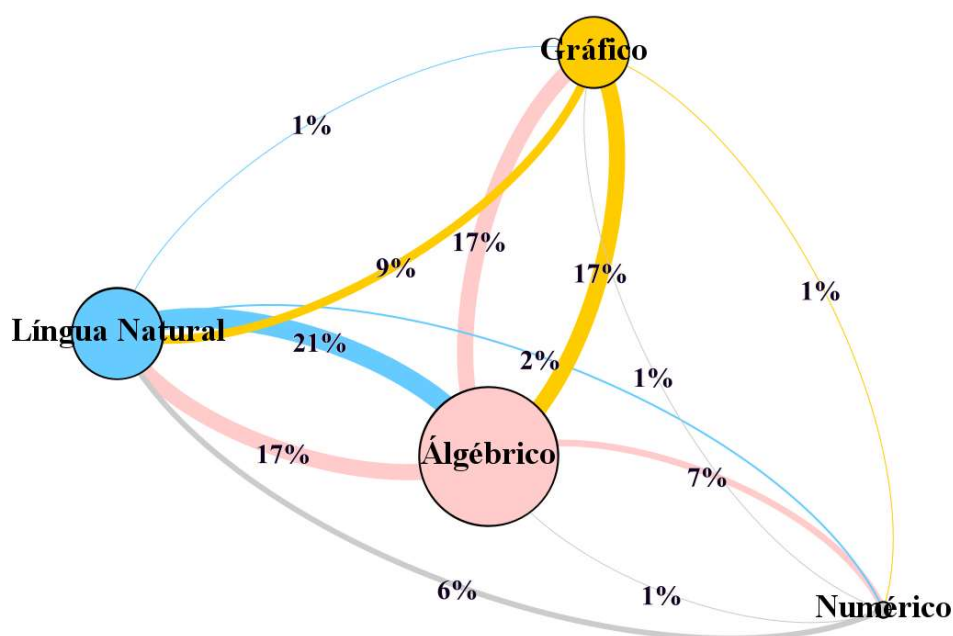
Essas aproximações são representadas pela comparação entre os gráficos, da esquerda para a direita. No primeiro gráfico há marcação dos intervalos $(L - e_1, L + e_1)$ e $(a - \delta_1, a + \delta_1)$. No segundo, o autor insere em $(L - e_1, L + e_1)$ o valor $f(\bar{x})$, e destaca que para isso acontecer basta que \bar{x} pertença a $(a - \delta_1, a + \delta_1)$. Além disso, neste segundo gráfico ele introduz o intervalo $(L - e_2, L + e_2)$ que está contido em $(L - e_1, L + e_1)$. Já no terceiro gráfico o autor indica que se quisermos que $f(\bar{x})$ pertença a esse novo intervalo $(L - e_2, L + e_2)$, basta que \bar{x} esteja em $(a - \delta_2, a + \delta_2)$.

Sobre as representações numéricas, é importante salientar que esse registro foi pouco utilizado pelo Leithold no trecho analisado do livro, tanto no que diz respeito à quantidade de representações (5% do total) quanto a de tratamentos (3% do total). Deste pequeno número de utilizações, metade foram tabulares e a outra metade em registros numéricos encontrados no meio do texto. Uma observação importante é que, tanto os registros tabulares, quanto os tratamentos nesse registro se concentraram na primeira seção 2.1, justamente a que apresenta o conceito de limite.

Assim, percebemos uma preocupação do autor em trabalhar os conceitos nos mais diferentes tipos de registro logo na primeira seção, exatamente o de apresentação do conceito de limite. Porém, percebemos que essa preocupação se dilui ao longo do texto.

Sobre o total de 162 conversões identificadas no trecho do texto analisado do livro do Leithold, apresentamos no Gráfico 4 um mapa de rede, construído com a ajuda do software Gephi¹⁷, que expõe as transformações entre registros. Neste mapa, os nós (as circunferências) representam os registros, enquanto as arestas¹⁸ (curvas que ligam os nós) representam as conversões entre os registros. A cor de cada aresta é a mesma do registro (nó) de origem da conversão e sua espessura é proporcional ao número total de conversões identificadas daqueles registros. Assim, cada aresta representa um tipo de conversão e os números que aparecem nelas indicam o percentual de cada tipo com relação ao total de conversões identificadas. Já o tamanho de cada nó é proporcional ao número de conversões que partem dele somado ao número de conversões que ele recebe.

Gráfico 4 - Distribuição percentual das conversões identificadas no trecho do texto analisado no livro do Leithold.



Fonte: elaborado pelo autor com a ajuda do software Gephi.

¹⁷ O Gephi é um software de código aberto, gratuito e que pode ser encontrado em <https://gephi.org/>.

¹⁸ As palavras “nós” e “arestas” fazem parte da terminologia própria do software Gephi, aqui utilizado para construir os mapas de rede. Optamos por continuar a utilizar esses termos ao longo do texto.

O primeiro ponto a destacar é que o autor apresenta todos os tipos de conversões possíveis em seu texto. Não há nenhum tipo de conversão com o percentual zerado no mapa acima.

No que diz respeito às conversões, Santos (2013) enfatiza a importância dessa atividade cognitiva para o processo de aprendizagem:

Mais uma vez defendemos que, sem as mudanças de quadros, sem o trabalho de conversão de registro, o aluno corre o risco de “aprender” a teoria que envolve o estudo de limite de uma função de forma compartimentada e nada significativa. Ter o domínio de um registro não implica no domínio de outro se não há o trabalho com essas mudanças (p. 203).

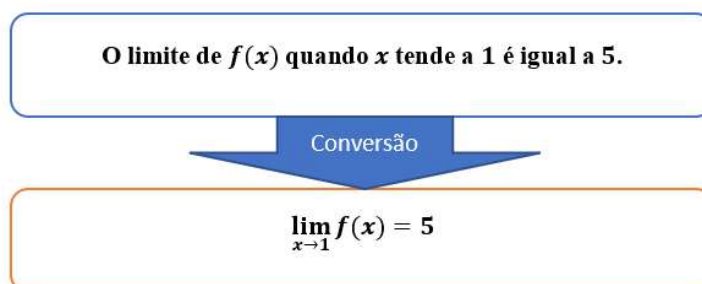
Compartilhamos da opinião de Santos (2013) e enfatizamos que a exposição dessas transformações no texto pode facilitar a realização delas por parte do estudante.

Percebemos também que 80% do total de conversões identificadas na parte analisada do livro do Leithold partem ou chegam ao registro algébrico, pois, essa é a soma das porcentagens das arestas que ligam o nó que representa o registro algébrico aos outros nós (por isso “algébrico” é a circunferência de maior área). A preferência pelo registro algébrico é salientado por Kuzu (2020) que afirma: “Ao ensinar conceitos de matemática, há predominância do uso de representações algébricas”(p.312).

O tipo de conversão mais frequente no texto do Leithold é a que parte da língua natural para o registro algébrico (21% do total de conversões identificadas) e um dos que mais aparecem é a que parte do registro algébrico para linguagem natural (17% do total de conversões identificadas). Segundo Breunig (2015) a coordenação dos registros algébricos e da língua natural possibilita ao discente significar o conceito de limite.

Na Figura 29 está um exemplo de conversão da língua natural para o registro algébrico encontrado no livro do Leithold.

Figura 29 - Conversão da Língua Natural para o Registro Algébrico no Texto do Leithold.



Fonte: adaptado de Leithold, 1994, p. 58.

Tal conversão representa o desfecho da série tratamentos em língua natural que aparece na Figura 27. Nessa conversão, presente no livro do Leithold, percebemos que há uma congruência semântica na medida em que cada palavra está associada a um símbolo da representação algébrica. Essa congruência facilita a inversão da conversão.

Ao apresentar as contribuições das Neurociências para Educação Matemática, Alvarenga (2019) ressalta a importância de se realizar atividades que transitam entre a língua materna e a linguagem da Matemática:

Destacamos que a expressão do indivíduo pela oralidade matemática colabora demasiadamente para o entendimento dessa e, além disso, essa ciência tem uma linguagem própria, inclusive uma abordagem dela via a escrita informal e, principalmente a formal promove uma melhor organização das estruturas cognitivas. Em várias atividades, é necessário traduzir da linguagem matemática para a língua materna e vice-versa (p.96).

Outras conversões que aparecem com boa frequência no mapa são as que relacionam o registro gráfico e a com o algébrico (17% do total de conversões identificadas partem do registro gráfico para algébrico e 17% do registro algébrico para gráfico). A transição algébrico-gráfica aparece com frequência em várias pesquisas entre as que os alunos têm maior dificuldade.

Finalmente é importante registrar a pequena quantidade de conversões que envolvem o registro numérico. A soma dos percentuais de conversões que partem do registro numérico e chegam no mesmo registro representam apenas 18% do total.

Segundo Santos (2013):

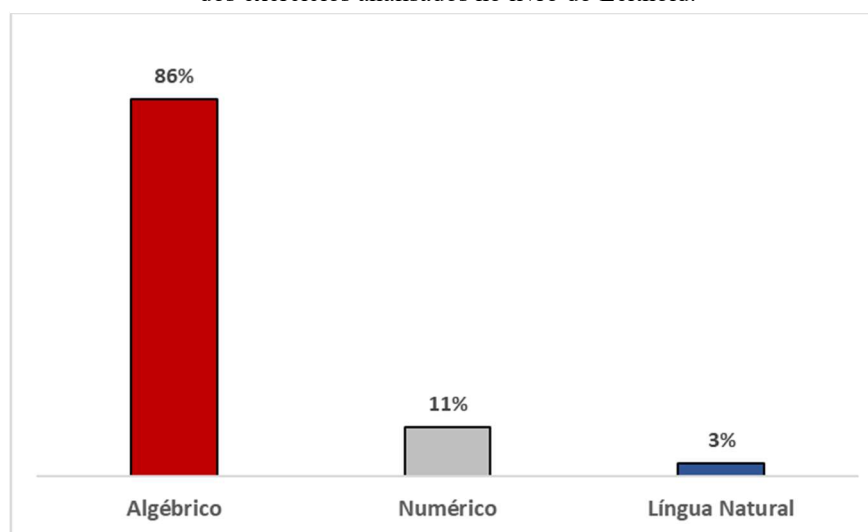
Há também aquelas atividades em que a mudança de registro é importante para que o aluno entenda o que está acontecendo. É o caso dos limites infinitos e limites no infinito. Ao trabalharmos com os registros algébricos puramente não seremos capazes de determinar o valor do limite – principalmente quando lidamos com o infinito. Faz-se necessário, então, que o aluno construa tabelas para “enxergar” o que acontece nas proximidades de determinado ponto, ou que procure visualizar a tendência a certos valores através do gráfico da função (p. 216).

Apesar da importância de se trabalhar com exercícios que propõe esse tipo de conversão, constatamos o pouco uso do registro numérico.

6.3.4. Representações Semióticas nos Exercícios

Com relação aos exercícios considerados¹⁹, cerca de 155, em seus enunciados foram identificadas um total de 170 representações. Dos quatro registros, apenas os do tipo gráfico não foram encontrados no enunciado das tarefas (vide o Gráfico 5).

Gráfico 5 - Distribuição percentual das representações presentes nos enunciados dos exercícios analisados no livro do Leithold.



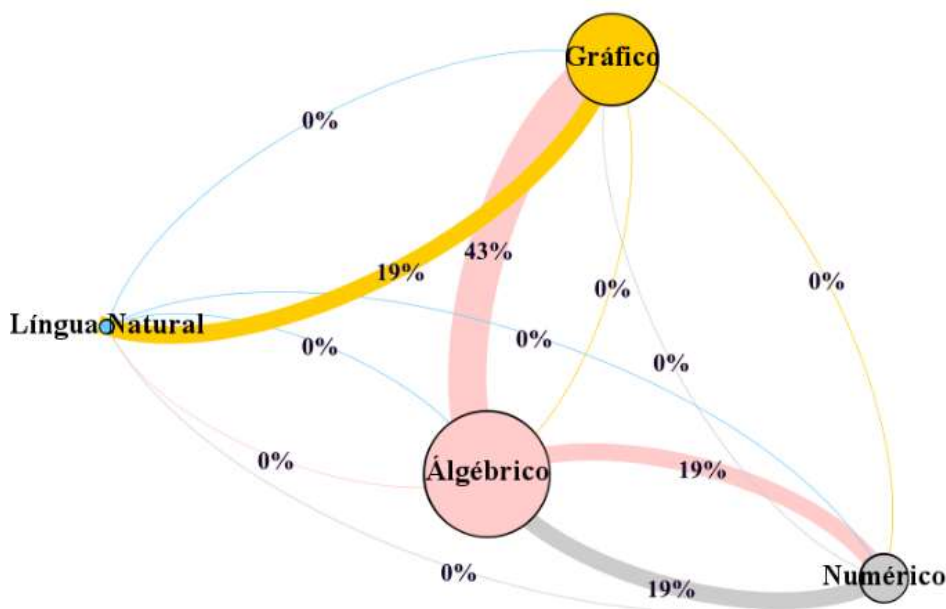
Fonte: elaborado pelo autor com ajuda do software Excel.

Percebemos que a maioria absoluta das representações encontradas está em registro algébrico (86% do total). Com relação ao registro numérico (11% do total), nenhuma das representações encontradas é tabulares, ou seja, abordadas por meio de tabelas. Além disso, todas elas foram utilizadas para representar limites laterais, limites infinitos e limites no infinito. Já as poucas representações em linguagem natural (3% do total) foram encontradas em perguntas sobre limites laterais e continuidade.

Quanto às conversões sugeridas nos enunciados, foram identificadas nos enunciados dos exercícios considerados, um total de 115 delas. Dos 12 tipos de conversões, o autor lançou mão de apenas 4 tipos, como mostra o Gráfico 6.

¹⁹ As partes do livro do Leithold consideradas nessa pesquisa estão descritas na seção 6.3.2 intitulada “Análise narrativa e definição de Limite e Continuidade” na página 115.

Gráfico 6 - Distribuição percentual das conversões propostas nos exercícios analisados no livro do Leithold.



Fonte: elaborado pelo autor com ajuda do software Gephi.

A maioria absoluta das conversões identificadas nos exercícios analisados envolve o registro algébrico (81% do total de conversões) seguida das que envolvem o registro gráfico (62% do total). A conversão mais proposta nos exercícios foi a que parte do registro algébrico para o gráfico (43% do total). As outras três conversões encontradas possuem o mesmo percentual (19% do total).

É importante lembrar que embora haja conversões que partem do registro gráfico para a língua natural, não identificamos gráficos nos enunciados (vide Gráfico 5). Encontramos questões que propõe sua construção para em seguida questionar sobre alguma propriedade do gráfico já construído.

Na Figura 30 mostramos um exercício do livro em que aparece, primeiramente, uma conversão do registro algébrico para o registro gráfico, e em seguida uma conversão do registro gráfico para a língua natural:

Figura 30 - Exercício do livro do Leithold

Nos Exercícios de 1 a 22, faça um esboço do gráfico e ache o limite indicado, se existir; se não existir, indique a razão disto.

$$2. f(x) = \begin{cases} -2 & \text{se } x < 0 \\ 2 & \text{se } 0 \leq x \end{cases}$$

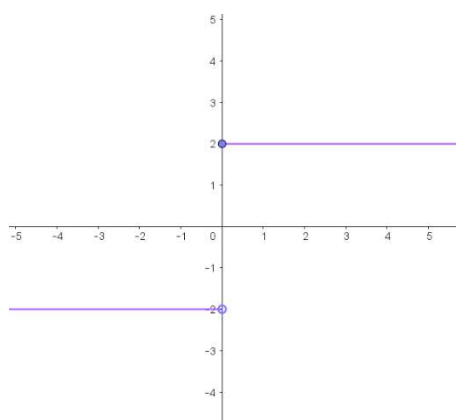
$$(a) \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x); (b) \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x); (c) \lim_{x \rightarrow 0} f(x)$$

Fonte: Adaptado de Leithold, 1994, p. 76

Pede-se para construir o gráfico da função dada, o que significa:

- realizar uma conversão do registro algébrico para o gráfico, e achar, por meio do gráfico construído, os limites e justificar, o que por sua vez indica uma conversão do registro gráfico para a língua natural.

A solução da questão é apresentada no Gráfico 7:

Gráfico 7 - Representação de $f(x)$.

Fonte: Elaborado pelo autor com auxílio do Software GeoGebra.

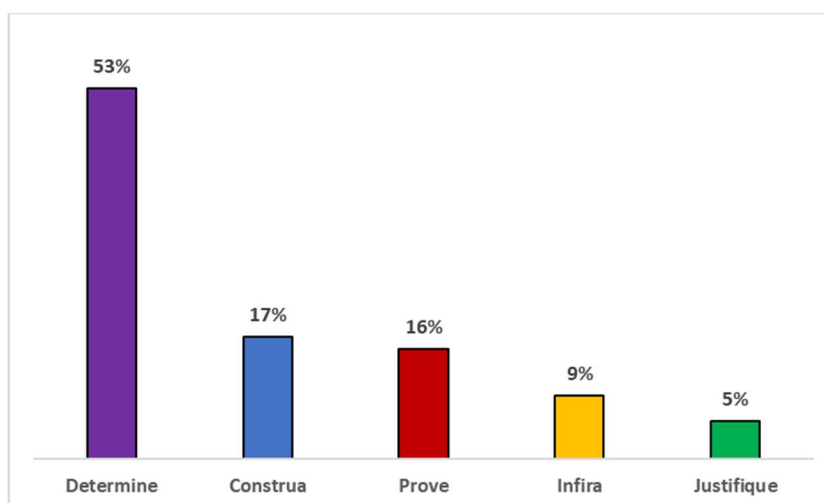
- a) $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 2,$
 b) $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = -2,$
 c) Não há limite, pois $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$ é diferente do $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x)$.

Todos os exercícios que envolvem a conversão do registro gráfico para a língua natural seguem esse modelo, ou seja, o gráfico não é fornecido na questão, ele deve ser construído pelo estudante.

A ausência de exercícios que trabalhem com conversões de representações destoa das premissas de aprendizagem da Teoria dos Registros de Representação Semiótica e causa uma preocupação que é compartilhada por Godoy (2004): “Apesar das dificuldades encontradas, é imprescindível que ocorram as conversões nos dois sentidos, pois a aprendizagem requer uma coordenação dos distintos registros de representação que um domínio de conhecimento mobiliza” (p. 6).

Com relação aos verbos dos enunciados, identificamos um total de 168 deles nos exercícios considerados. Houve questões que utilizaram mais de um verbo, por isso a quantidade de verbos é superior a quantidade de questões (155). Esses verbos estão classificados conforme o Gráfico 8.

Gráfico 8 Distribuição percentual dos verbos encontrados nos enunciados dos exercícios analisados no livro do Leithold.



Fonte: elaborado pelo autor com ajuda do software Gephi.

No Gráfico acima percebemos que mais da metade dos verbos são do tipo *determine*. Essa predominância já era esperada, tendo em vista os resultados do levantamento realizado por Santos (2013) que encontrou esse verbo como o mais utilizado em exercícios dos quatro livros analisados por ela. Santos (2013) também identificou o verbo *calcule* em todas as obras, sendo que um dos livros considerados por ela utiliza apenas esse verbo.

O segundo verbo mais usado é *construa* (corresponde a 17% do total de verbos identificados nos enunciados) e nem todos eles se referem a esboço de gráficos. Cerca de um terço das questões que utilizam esse verbo estão relacionadas à confecção de tabelas e se encontram nas seções de limites laterais, limites infinitos e limites no infinito.

Além de propor a construção de tabelas para os leitores, é solicitado que se utilize uma calculadora para essa tarefa. Com relação ao uso de calculadora no ensino da Matemática, Rubio (2003) destaca que:

A calculadora, em especial, pode servir como auxiliar de cálculo na resolução de problemas, como instrumento de descoberta, de formação de conceitos e principalmente de estímulo para o processo ensino-aprendizagem em Matemática. Além disso, libera o aluno de longas, enfadonhas e desnecessárias tarefas, deixando-o com mais tempo para aprimorar sua capacidade de raciocinar e desenvolver-se mentalmente (p. 7).

A discussão sobre o uso de calculadora na sala de aula feita por Rubio (2003) pode ser estendida para as tecnologias digitais em geral. As potencialidades pedagógicas do uso de recursos tecnológicos não podem ser desprezadas. Inclusive, o desenvolvimento e a aplicação da inteligência artificial nas atividades de ensino devem impactar drasticamente na forma de planejar as aulas nos próximos anos. Assim, a rejeição das tecnologias digitais não faz mais sentido, cabendo ao professor a inevitável adaptação à nova realidade.

Voltando aos verbos, uma frequência muito parecida com a categoria *construa* está o verbo *prove* (16% do total). Embora não consideremos esse percentual alto, devemos levar em conta as duras críticas feitas por Reis (2001) ao livro do Leithold com relação a esse aspecto.

Segundo Reis (2001):

Em nossa opinião, o autor acredita que a demonstração num curso de Cálculo sempre deverá ser feita na medida em que os alunos tenham os pré-requisitos matemáticos necessários, sequer se importando se tal opção didática é ou não viável. Se esta é uma escolha do professor, que ele não se impressione com o viés procedimental do autor disfarçado em preocupação com o conhecimento conceitual (p. 96).

Essa crítica nos remete ao fato de que algumas das questões cujo verbo é *determine*, na realidade se trata de encontrar um delta a partir de um valor dado para épsilon. Ou seja, o autor aborda a definição formal de limites de uma forma metódica e procedimental.

A seguir temos um exemplo desse tipo de enunciado:

“Seja f a função definida por $f(x) = x^2$. Determine $\delta > 0$, tal que se $0 < |x - 2| < \delta$ então $|f(x) - 4| < 0,001$ ” (Leithold, 1994, p.61).

Esse tipo de questão, muito frequente no livro, não sugere nenhum tipo de conversão. Propõe apenas um tratamento algébrico sofisticado, em que a definição de limite é trabalhada detalhadamente.

Chama atenção a quantidade de exercícios parecidos que o autor recorre. São 22 perguntas de calcular o valor de delta a partir de um épsilon dado, mudando apenas o tipo de função.

Um dos verbos menos usados é o *infira* (9% do total). Estes enunciados indicam que o aluno conclua algo a partir de hipóteses dadas.

Na Figura 31 é mostrado um exercício cujo enunciado foi associado ao verbo inferir.

Figura 31 - Exercício do Leithold 2.

Nos Exercícios de 1 a 12, faça o seguinte: (a) use uma calculadora para tabular valores de $f(x)$ para valores fixados de x e, a partir deles, faça uma afirmação a respeito do comportamento evidente de $f(x)$. (b) Ache o limite indicado.

1. (a) $f(x) = \frac{1}{x-5}$; x é 6, 5,5, 5,1, 5,01, 5,001, 5,0001;

(b) $\lim_{x \rightarrow 5^+} \frac{1}{x-5}$

Fonte: Adaptado de Leithold, 1994, p.87.

Esse item pede para o estudante concluir que a função tende a infinito à medida que x assume os valores próximos de 5 dados no problema. Consideramos esse tipo de questão relativo ao verbo *inferir*, pois, ela fornece (ou indica como obter) informações e, a partir delas, pede para inferir qual o limite.

Além do verbo *inferir*, temos no enunciado o verbo *construir* (pois pede para leitor confeccionar uma tabela) e *determine* (pois pede para encontrar o limite).

Neste problema, também temos um exemplo de questão que sugere uma conversão do registro algébrico para o numérico (pois pede para construir um gráfico a partir de uma expressão algébrica) e, em seguida, do numérico para o algébrico (pois, a partir da tabela o estudante deve inferir o limite).

A palavra *justifique*, que aparece numa quantidade muito pequena (5% do total), refere-se a explicações em língua natural. Um exemplo desse tipo de questão já foi apresentado na Figura 30.

6.4. INTERPRETAÇÃO/REINTERPRETAÇÃO

Como vimos anteriormente, Louis C. Leithold é oriundo da cidade de São Francisco, uma metrópole californiana, fez sua formação escolar e acadêmica em prestigiadas instituições e trabalhou em cidades como Phoenix e Los Angeles.

Acreditamos que o trabalho docente durante a década de 1960, o fez ter contato com o Movimento da Matemática Moderna. Isso porque, o período em que Leithold começou a lecionar e escrever seu livro coincide com o auge do movimento, que tinha como objetivo

aproximar a Matemática escolar da acadêmica. Além disso, as descrições de como lecionava e os dados levantados na presente pesquisa, nos fazem acreditar que tal concepção o influenciou na condução de suas aulas e na construção de seu texto.

Foi descrito por seus pares e discentes como: um professor que propõe inúmeros exercícios, que lança mão de técnicas de memorização, que utiliza uma abordagem de explicar “passo-a-passo” as atividades, e que faz uso de técnicas teatrais em suas aulas.

Seu livro preserva algumas dessas características. O número e a repetição de exercícios, além do predomínio do verbo *determine* em seus enunciados, indicam um apelo a memorização e a valorização dos procedimentos. Há por exemplo, 42 questões que trabalham a definição de limites por ϵ e δ , muitos deles pedindo para determinar o valor de um δ , a partir de um ϵ dado.

Vemos na quantidade de tarefas que explora a definição em termos de ϵ deltas um exagero. Isso porque, embora reconheçamos a definição como um recurso formal necessário para se justificar, técnica e precisamente, as propriedades operatórias que viabilizam o cálculo de limites, essa grande quantidade de exercício de calcular um δ , dado um ϵ , em limites de funções polinomiais de primeiro e segundo grau, nos transmite uma preocupação exagerada do autor em treinar o estudante para resolver apenas um tipo de questão, sem dar a devida atenção à relação que o estudante deve fazer entre a definição formal e as propriedades operatórias.

Nossos resultados convergem com o posicionamento de Reis (2001) que caracteriza a obra como de característica procedimental. Ele também ainda critica o nível das tarefas, afirmando que há muitos exercícios que os alunos não conseguem resolver.

Na busca por entender a escolha da abordagem adotada pelo autor, lembramo-nos da entrevista que a Professora Shirley B. Gray concedeu ao Los Angeles Times, em ocasião do óbito do Professor Leithold, em que ela afirma que o livro *Cálculo com Geometria Analítica* foi um marco histórico por conta de ter incorporado conceitos da Teoria de Conjuntos, atendendo dessa forma o Movimento da Matemática Moderna (Woo, 2005).

Segundo Miorim (1998):

A organização da Matemática Moderna baseava-se na teoria dos conjuntos, nas estruturas matemáticas e na lógica matemática. Esses três elementos foram responsáveis pela “unificação” dos campos matemáticos, um dos maiores objetivos do movimento. Para isso, enfatizou-se o uso de uma linguagem matemática precisa e de justificações matemáticas rigorosas. Os alunos não precisariam “saber fazer”, mas, sim, “saber justificar” por que faziam. A teoria dos conjuntos, as propriedades estruturais dos conjuntos, as relações e funções, tornaram-se temas básicos para o desenvolvimento dessa proposta (p. 114).

De fato, percebemos características do Movimento da Matemática Moderna ao longo de sua obra, como por exemplo: o uso da linguagem de conjuntos quando o autor define uma função por meio de pares ordenados, a falta de atividades que explorem a noção intuitiva de limites; as tarefas que exploram exaustivamente a definição formal; a forma como privilegia o registro algébrico; e até mesmo no título do livro que tenta unificar o Cálculo com a Geometria Analítica.

Das três principais características da Matemática Moderna apontadas por Silva (2013) que são a conceituação, a manipulação e as aplicações, certamente o aspecto que o livro do Leithold mais se destaca é a manipulação algébrica.

Com relação ao predomínio das representações algébricas, o livro do Leithold é, dos três livros analisados, o segundo em que o registro algébrico lidera com mais folga todos os levantamentos realizados. Além disso, registramos a ausência de gráficos nos enunciados dos exercícios e apenas quatro conversões sugeridas, o que mostra certa divergência entre sua concepção de aprendizagem matemática e as ideias de Duval.

No que diz respeito aos exemplos que apresentam os conceitos matemáticos, apenas um problema que aparece no livro é contextualizado, ou seja, oriundo do dia a dia. Os demais são introduzidos por meio de uma função específica definida por fórmulas.

A Figura 32 mostra a função utilizada para introduzir o conceito de limites.

Figura 32 - Exemplo do livro do Leithold.

Para iniciar nosso estudo de limites, vamos considerar uma dada função:

$$f(x) = \frac{2x^2 + x - 3}{x - 1} \quad (1)$$

Fonte: Leithold, 1994, p. 56.

Isso mostra que o conceito de aplicação dos conteúdos matemáticos relativo a Matemática Moderna não está necessariamente associada a seu uso em problemas do cotidiano, ou situações contextualizadas. Mas sim, associado a resolver problemas abstratos oriundos da própria Matemática.

A ordem escolhida pelo autor para abordar o conceito de limite, embora considerado tradicional, difere muito de sua construção histórica. Enquanto matemáticos do renascimento já utilizavam a ideia de limites em seus cálculos, antes da definição formal se quer existir, pois, ela só seria elaborada no final do século XIX; Leithold sinaliza aos estudantes para,

primeiramente, justificarem os teoremas por meio de demonstrações que se utilizam da definição e, em seguida, aplicarem tais teoremas.

No que diz respeito ao uso dos recursos tecnológicos, não há nada além do incentivo aos estudantes a lançarem mão de calculadoras para realizar os exercícios. Essa quase ausência de novas tecnologias é compreensível pelo fato de ser um livro publicado na década de 1960 e que teve poucas atualizações.

Vimos que o Livro do Leithold foi o terceiro colocado na consulta de preferência entre os livros e que foi reconhecido por todos os entrevistados. Sua aceitação para a possibilidade de adoção em aulas de Cálculo é mista tendo em vista que 66% o consideram entre bom e ótimo.

Acreditamos que esse resultado se deve pelo fato de que a obra, bastante tradicional e por isso muito conhecida, fica no meio do caminho entre o rigor matemático do Guidorizzi e a didática do Stewart. Embora manifeste pouca diversidade com relação a exemplos e exercícios, Leithold tinha uma forma de escrever que valorizava o acompanhamento “passo-a-passo” dos procedimentos. Uma herança de sua forma de lecionar.

Para finalizar, uma conjectura a respeito de sua arte de ensinar: a teatralidade que Leithold usava em sala de aula, nos parece influência de sua paixão pelo cinema. Afinal, na história de vida dele percebemos fatos que podem indicar sua forte relação com a sétima arte: foi dono de uma casa de projeções frequentado por Spielberg em Phoenix, se aposentou perto de Hollywood e teve um discípulo que protagonizou um filme vencedor de Oscar.

7. UM CURSO DE CÁLCULO

“A Matemática é a mais humana das ciências”

Mario Sergio Cortella²⁰

Neste capítulo apresentamos a análise do livro *Um Curso de Cálculo* de Hamilton Luiz Guidorizzi (2001), seguindo as etapas da HP, começando pela interpretação da doxa, seguida das análises sócio-histórica e formal e a interpretação/reinterpretação.

7.1.A INTERPRETAÇÃO DA DOXA

No nosso levantamento, pudemos perceber que o livro do Guidorizzi (2001) foi citado 23 vezes nas ementas dos cursos de Cálculo das 26 instituições pesquisadas. Ele foi segundo com mais citações, ficando atrás apenas do escrito por Leithold (1994) que teve 24. Assim, percebemos a relevância dessa obra para as universidades brasileiras.

Segundo Santos (2013) o Professor Hamilton Guidorizzi é um autor reconhecido pela comunidade matemática brasileira e seu texto é referência para o ensino de Cálculo. Para Lima (2012, p. 60) ele é o “autor de um dos manuais populares no ensino de Cálculo há, pelo menos, 25 anos”.

As publicações dele se originaram do conjunto de apostilas elaboradas por ele e que se popularizaram no Instituto de Matemática e Estatística (IME) da Universidade de São Paulo – (USP) durante as décadas de setenta e oitenta. Porém, a Professora Fernanda Soares Pinto Cardona, em entrevista para Lima (2012) afirma que essas apostilas traziam uma abordagem bem mais formal do que a dos livros publicados. Isso aconteceu porque a ênfase passou a ser o desenvolvimento de habilidades de calcular limites, derivadas e integrais.

Segundo Lima (2012):

Com o passar do tempo, tais apostilas que eram bastante sintéticas e formais foram sendo reformuladas e agrupadas dando origem aos diversos volumes da coleção *Um Curso de Cálculo*, já com um nível de rigor mais moderado e predomínio da manipulação de técnicas de cálculo ao invés da ênfase na formalização dos resultados estudados, como acontecia até então (p. 195).

²⁰ BRASIL FATOS. “A Matemática É a Mais Humana das Ciências” - Mario Sérgio Cortella – 27/10/2015. Youtube, 28 de outubro de 2015. Disponível em: <https://www.youtube.com/watch?v=xvu8-z-GmWU>. Acesso em 15 de Janeiro 2023.

O próprio autor admite que houve modificações entre as apostilas e a publicação. Segundo ele: “É possível que o livro seja menos formal que as apostilas porque este só foi concretizado depois de eu ter ministrado Cálculo para vários níveis de alunos e em diversas Faculdades” (Apud Lima, 2012, p. 361).

Mesmo com as mudanças, é conhecido o formalismo e o rigor apresentado por Guidorizzi em seus materiais de Cálculo. Santos (2013) caracteriza a obra como de texto denso e o que mais se aproxima de uma linguagem para especialistas.

Embora essa visão seja compartilhada por Lima (2012), que afirma que o texto tem um nível de rigor e formalismo bastante alto, segundo ele é possível identificar preocupações didáticas manifestadas pelo autor.

Entre as preocupações citadas por Lima (2012) está a de explicitar o significado de diversas notações de um mesmo conteúdo (o que poderia minimizar as dificuldades enfrentadas pelos alunos na transição da educação básica para o ensino superior), a de dar condições para que os estudantes compreendam o significado de um teorema antes de apresentar a demonstração formal do resultado e a de discutir geometricamente a validade de alguns resultados.

Assim, podemos afirmar que o livro do Guidorizzi é uma importante obra na bibliografia dos cursos de Cálculo das universidades brasileiras.

7.2. ANÁLISE SÓCIO-HISTÓRICA

Apresentaremos a seguir alguns resultados das três ações norteadoras da análise sócio-histórica: a análise de dados biográficos do Professor Guidorizzi, o estudo dos paratextos editoriais e a apreciação das mudanças ocorridas entre as edições da obra.

7.2.1. Hamilton Luiz Guidorizzi

Figura 33 - Hamilton Luiz Guidorizzi.



Fonte: <https://www.uniso.br/noticias/NotCompleta.aspx?noticia=1823>. Acesso em 19/04/2019.

O professor Hamilton Luiz Guidorizzi nasceu na cidade de Arceburgo, uma pequena cidade do interior de Minas Gerais cujo município faz fronteira com o estado de São Paulo, no dia 22 de novembro de 1936. Com 22 anos de idade foi para a capital paulista com o objetivo de estudar (Altarugio, 2022).

Graduou-se em Licenciatura em Matemática na USP entre os anos de 1958 e 1965 (Lima, 2012). No ano de 1968 ingressou no mestrado em Matemática e obteve o título de mestre no ano de 1971 quando defendeu sua dissertação intitulada: “Operadores Analíticos Lineares”. Ingressou no doutorado em 1985 e defendeu a tese “Contribuições ao Estudo de Equações Diferenciais Ordinárias de segunda ordem” em 1988 quando obteve seu título de doutor em Matemática Aplicada (Guidorizzi, 2001).

Entre os anos de 1967 e 1995 lecionou na USP, mesma instituição em que fez graduação, mestrado e doutorado. Assim, ele teve toda sua formação acadêmica construída no ambiente da Universidade de São Paulo. O Curso de Matemática da USP foi implantado em 1934, mesmo ano em que a universidade foi fundada e é considerado o primeiro curso superior de Matemática do Brasil (Gomes, 2016).

Para entender um pouco do ambiente institucional em torno da formação do Professor Guidorizzi, mostramos aqui, brevemente, um pouco da genealogia do Curso de Matemática da USP feito por Lima (2012).

Guidorizzi foi discípulo da professora Elza Furtado Gomide, a primeira mulher a obter o título de doutora por uma instituição brasileira. Ela foi aluna e, depois, assistente do professor Omar Catunda que, por sua vez, foi auxiliar do professor italiano Luigi Fantapiè, um dos

responsáveis pela organização do Curso de Matemática da Faculdade de Filosofia, Ciências e Letras (FFCL) da USP (Lima, 2012).

No período de implantação da FFCL não havia no Brasil um número suficiente de professores qualificados para preencher todos os seus quadros, principalmente no que dizia a pesquisa. A solução encontrada foi buscar pesquisadores no exterior e, nesse momento é que Fantappiè chega ao país para assumir a Cátedra de Análise Matemática e ajudar a organizar o Curso de Matemática da USP (Táboas, 2005).

Fantappiè tinha um perfil acadêmico averso as discussões didáticas e que pouco valorizava a licenciatura. Em seu discurso ao receber o título emérito de educador concedido pela Academia Paulista de Educação, o Professor Benedito Castrucci, que foi seu discípulo, descreve:

O Prof. Luigi Fantappiè, tecendo considerações sobre os cursos de didática, deu a seguinte regra. “A única didática que importa é o conhecimento profundo da matéria que se ensina. Um bom expositor, sem cultura, pode perder gerações, ao passo que um mau didata, firme nos seus conhecimentos, beneficiará os alunos respondendo com exatidão às perguntas, seja na aula, seja fora da sala”. (Castrucci Apud Pires, 2006, p.215).

Esse posicionamento se refletiu na forma como foi elaborado o currículo do curso de Matemática. Fantappiè entendeu que, ao invés de propor uma disciplina de Cálculo, era mais adequado um curso de Análise nos moldes das universidades italianas, ou seja, uma disciplina sistematizada de maneira formal e com alto nível de rigor, ministrada desde o ingresso dos alunos (Lima, 2012).

Disciplinas denominadas Cálculo Diferencial e Integral continuaram a não constar no currículo nos cursos de Matemática da USP durante as três primeiras décadas de implantação. Isso demonstra a força da influência de Fantappiè que, embora politicamente seja controversa (há alguns indícios da relação dele com o fascismo), estabeleceu um modelo para o ensino dos conteúdos de Cálculo no Brasil (Lima, 2012).

De acordo com o próprio Guidorizzi:

Não havia a disciplina de Cálculo, o que existia era (...) Análise Matemática (...) e esta (...) era (...) dividida em duas partes, sendo a primeira próxima de um curso de Cálculo, dando ênfase à manipulação de fórmulas bem como às demonstrações de algumas delas (Guidorizzi apud Lima, 2012, p.148).

Desde cedo, professores como Omar Catunda e Elza Furtado Gomide (que resistiram sem sucesso à influência da perspectiva Bourbarkista no ensino de Cálculo) se manifestaram em defesa de uma disciplina preparatória para curso de Análise, focada em um nível menos elevado de rigor e em aspectos mais manipulativos dos conceitos estudados. Esse movimento

culminou, finalmente, na criação da disciplina de Cálculo Diferencial e Integral, implantada apenas em 1964 (Lima, 2012).

Mesmo após essa implantação, o curso de Cálculo continuou sendo conduzido de maneira analítica e bastante formal. Como o Professor Guidorizzi concluiu sua graduação durante o período de implantação da disciplina de Cálculo Diferencial no curso da USP e logo depois começou a lecionar no mesmo curso, acreditamos que essa abordagem rigorosa e formal dos conceitos de Cálculo teve influência em sua formação.

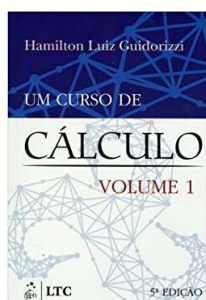
Por conta de uma insatisfação de natureza didática com relação aos livros textos de Cálculo disponíveis, os professores do Instituto de Matemática e Estatística (IME) da USP se organizaram, em meados dos anos 1970, para redigir fascículos que eram utilizados como textos para as disciplinas de Cálculo (Lima, 2012).

Neste período, já como docente, Guidorizzi elaborou apostilas que ganharam muito destaque, a ponto de serem indicadas como referência básica da Disciplina de Cálculo na USP em 1983. Estas apostilas serviram de base para a elaboração dos diversos volumes do livro “Um Curso de Cálculo” adotado hoje em todo o país e objeto de estudo deste trabalho (Lima, 2012).

Além da Universidade de São Paulo, ele trabalhou no Instituto Mauá de Tecnologia (IMT) entre os anos de 1996 e 2000, na Escola de Administração de Empresas de São Paulo (EAESP) da Fundação Getúlio Vargas (FGV), entre 1971 e 1974 e na Universidade Paulista (UNIP), entre 1977 e 1985, lecionando nas áreas de Cálculo, Álgebra Linear, Análise e Equações Diferenciais Ordinárias (Guidorizzi, 2001).

7.2.2. O Livro Um Curso de Cálculo

Figura 34 - Livro Um curso de Cálculo, vol 1, 5 ed.



Fonte: <<https://www.uniso.br/noticias/NotCompleta.aspx?noticia=1823>>. Acesso em 19/04/2019.

No prefácio da quinta edição o autor explica, que a obra teve como base as apostilas confeccionadas para os cursos de Cálculo ministrados na Escola Politécnica, no Instituto de Matemática e Estatística da USP e no Instituto de Ensino de Engenharia Paulista (IEEP), já mencionadas anteriormente (Guidorizzi, 2001).

Com relação ao público-alvo, o autor não menciona claramente a quem o livro é dedicado. Algumas vezes se dirige a alunos e outras vezes a professores. Também não explicita se é voltado para alguma faculdade específica. O único curso mencionado é o de física, ao qual dá dicas ao estudante com relação a pré-requisitos necessários para acompanhar o curso, e a professores com relação a ordem dos conteúdos a serem ministrados.

Com relação ao conteúdo apresentado no livro, ele afirma:

O curso é desenvolvido de forma que os conceitos e teoremas apresentados venham, sempre que possível, acompanhados de uma motivação ou interpretação geométrica ou física. As demonstrações de alguns teoremas ou foram deixadas para o final da seção ou colocadas em apêndice, o que significa que o leitor poderá, numa primeira leitura, omiti-las, se assim desejar (Guidorizzi, 2001, p.iv).

No que diz respeito a exemplos e exercícios, ele afirma que procurou colocar em número suficiente para a compreensão da matéria e que os dispôs em ordem crescente de dificuldade. Assume ter apresentado questões que requerem um maior domínio do assunto, ou seja, com muita dificuldade, e pede para que o leitor não se aborreça caso não consiga resolvê-los. Sugere seguir em frente e retornar à tarefa depois, quando tiver mais confiança em encará-los (Guidorizzi, 2001).

Sobre as edições do livro “Um Curso de Cálculo”, comparamos a quinta edição de 2001, a que mais aparece no nosso levantamento de ementas de cursos, com a sexta edição de 2021 e só encontramos mudanças com relação a cor dos gráficos, dos títulos, dos capítulos e exemplos. Um destaque mais acentuado em dois gráficos, parênteses para destacar uma função dentro de

uma notação de limite e uma troca da palavra “onde” por “em quê” numa demonstração. Nenhuma mudança significativa.

Cabe destacar que na versão e-book da sexta edição aparecem janelas de videoaulas com um professor explanando o assunto ou resolvendo questões marcadas no livro. Esta é uma maneira, mesmo que tímida, de modernizar a obra e incluir nele recursos de tecnologias digitais.

7.3. ANÁLISE FORMAL

O livro “Um Curso de Cálculo”, volume 1, 5ª edição, contém 635 páginas divididas em 17 capítulos, 6 apêndices, além das seções de Respostas, Sugestões ou Soluções, Bibliografia e Índice.

O Capítulo 1 da obra chama-se Números Reais e tem como objetivo apresentar as principais propriedades dos números reais, sem necessariamente tratar da definição deste conjunto numérico que está reservado ao capítulo 6. Aqui, o autor chama a atenção do leitor de que a familiaridade do estudante com as propriedades dos números naturais, inteiros e racionais é um pré-requisito para o acompanhamento do capítulo.

Já o capítulo 2 chama-se Funções e tem como objetivo trabalhar o conceito de função de uma variável real a valores reais, seus diversos tipos, propriedades e suas operações.

7.3.1. Definição de Função

Com relação à definição de função usada pelo autor, pré-requisito indispensável para o estudo do conceito de limites, percebemos um alto nível de rigor e formalidade (vide Figura 35).

Figura 35 - Definição de função no livro do Guidorizzi.

Entendemos por uma função f uma terna

$$(A, B, a \mapsto b)$$

onde A e B são dois conjuntos e $a \mapsto b$, uma regra que nos permite associar a cada elemento a de A um único b de B . O conjunto A é o *domínio* de f e indica-se por D_f , assim $A = D_f$. O conjunto B é o *contradomínio* de f . O único b de B associado ao elemento a de A é indicado por $f(a)$ (leia: f de a); diremos que $f(a)$ é o *valor que f assume em a* ou que $f(a)$ é o *valor que f associa a a* .

Uma função f de domínio A e contradomínio B é usualmente indicada por $f: A \rightarrow B$ (leia: f de A em B).

Embora a definição de função apresentada por Guidorizzi seja repleta de detalhes técnicos, cuidado e rigor, é comum ele representar funções utilizando apenas a fórmula que indica a relação entre dois conjuntos, não explicitando dessa maneira nem o domínio e nem o contradomínio da função.

Porém, sobre isso, é importante perceber que, o autor expõe uma observação logo após definir funções (vide Figura 36).

Figura 36 - Observação no livro do Guidorizzi.

Observação. Por simplificação, deixaremos muitas vezes de explicitar o domínio e o contradomínio de uma função; quando tal ocorrer, ficará implícito que o contradomínio é \mathbb{R} e o domínio o “maior” subconjunto de \mathbb{R} para o qual faz sentido a regra em questão.

Fonte: Guidorizzi, 2001, p. 27.

Essa observação é importante, pois, além de destacar a atenção que o autor demonstra ao se referir ao conceito de função sem deixar de lado nenhum dos seus elementos constitutivos (domínio, contradomínio e a relação entre os dois), também sinaliza para a preocupação com os detalhes formais da Matemática.

Sobre o conceito de funções Lima et al. (2003) afirma:

Deve-se ainda observar que uma função consta de três ingredientes: domínio, contradomínio e a lei de correspondência $x \mapsto f(x)$. Mesmo quando dizemos simplesmente “a função f ”, ficam subentendidos seu domínio X e seu contra-domínio Y . Sem que eles sejam especificados, não existe a função. Assim sendo, uma pergunta do tipo “Qual é o domínio da função $f(x) = \frac{1}{x}$?”, estritamente falando, não faz sentido. A pergunta correta seria: “Qual é o maior subconjunto $X \in \mathbb{R}$ tal que a fórmula $f(x) = \frac{1}{x}$ define uma função $f: X \rightarrow \mathbb{R}$?” Novamente, a pergunta incorreta é mais simples de formular. Se for feita assim, é preciso saber seu significado (Lima et al, 2003, p.39).

Assim, fica claro o cuidado com os detalhes técnicos apresentados pelo autor, ao mesmo tempo em que lança mão da maneira mais simples de se expressar ao tratar das funções.

7.3.2. Análise narrativa e as definições de limite e continuidade

O foco do nosso trabalho é o conteúdo de limites que é apresentado nos capítulos 3 – Limite e Continuidade e 4 – Extensões o Conceito de Limite. Esses capítulos contêm 46 páginas (página 53 à página 120) e representam 10,55 % da extensão do livro.

Em função dos critérios adotados e já expostos no capítulo 4 deste trabalho, fizeram parte do *corpus* para a análise semiótica apenas as seções 3.1 – Introdução, 3.2 – Definição de

Função Contínua (até exemplo 8), 3.3 – Definição de Limite (até exemplo 5), 3.4 – Limites Laterais, 4.1 – Limites no Infinito (até o exemplo 1), 4.2 – Limites Infinitos (até o exemplo 2), 4.3 – Sequência e Limite de Sequência (até o exemplo 5), 4.4 – Limite de Função e Sequências (sem o exemplo) e os seus respectivos exercícios.

No Quadro 12 estão as seções, e suas partes, que ficaram de fora de nossa análise por trabalharem as propriedades operatórias para o cálculo de limites, o que foge aos nossos objetivos.

Quadro 12 - Seções do livro do Guidorizzi que ficaram de fora da análise.

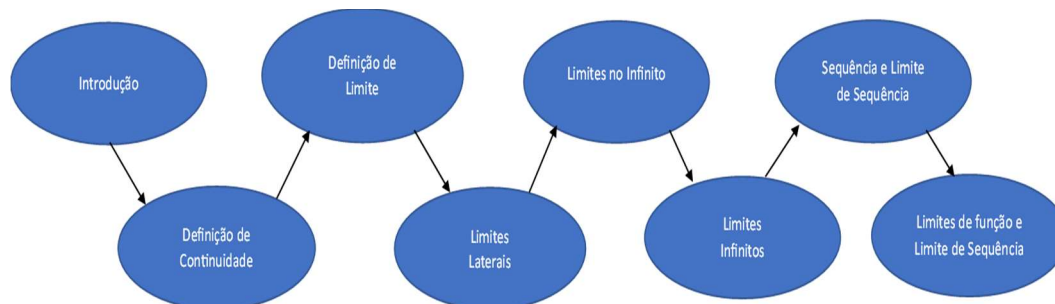
Seção	Título	Extensão
3.2	Definição de função contínua	Exemplo 9 (páginas 67 e 69)
3.3	Definição de limite	Dos exemplos 6 a 18 (páginas 75 a 80)
3.5	Limite de função composta	Toda
3.6	Teorema do confronto	Toda
3.7	Continuidade das funções trigonométricas	Toda
3.8	O limite fundamental $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x}$	Toda
3.9	Propriedades operatórias. Demonstração do Teorema do Confronto	Toda
4.1	Limites no infinito	Exemplos 2 e 3 (página 101)
4.2	Limites infinitos	Do exemplo 3 a 14 (páginas 105 a 109)
4.3	Sequência e limite de sequência	exemplos 6 a 11 (páginas 108 a 115)
4.4	Limite de função e Sequências	O exemplo da páginas 118
4.5	O número e	Toda

Fonte: Guidorizzi, 2001, p. iv

Assim, o *corpus* da análise semiótica compreendeu a um total de 30 páginas, que corresponde a cerca de menos da metade dos capítulos 3 e 4 (44% do texto desses capítulos), Além de aproximadamente 85 exercícios.

Com relação à sequência narrativa apresentada, o autor escolhe expor primeiramente a definição de continuidade para em seguida apresentar o conceito de limites (inclusive limites laterais, limites infinitos e limites no infinito) (vide Figura 37).

Figura 37 - Análise narrativa do livro do Guidorizzi.



Fonte: Guidorizzi, 2001, p. i.x.

Para Reis (2001) essa ordem quebra a “tradição” dos limites, modelo cauchyano, que é tendência predominante no ensino de Cálculo e que consiste em iniciar os estudos com a noção de limite para depois apresentar a de continuidade.

Vale a pena destacar que na seção de introdução, a noção intuitiva dos principais conceitos de Cálculo são apresentados (continuidade, limite e derivada). Guidorizzi mostra os conceitos por meio de gráficos de funções e isso torna possível realizar o cálculo de limites e derivadas, além do reconhecimento de pontos de continuidade e descontinuidade, sem utilizar as definições.

Esse trabalho com noções intuitivas é mais compatível com a ordem histórica do desenvolvimento dos conceitos de Cálculo. Isso porque, como vimos, os conceitos foram sendo criados para resolver de problemas de diferentes épocas e, muitos deles, só foram definidos precisamente no final do século XIX.

A ordem escolhida pelo autor para abordar esses conteúdos impacta diretamente na forma com que ele os define. Associada a opção de Guidorizzi em abordar primeiramente o conceito de continuidade, para depois trabalhar limites está o fato de que ele define uma função contínua em um ponto por épsilons e deltas, (vide Figura 38).

Figura 38 - Definição de Continuidade no Livro do Guidorizzi.

Definição. Sejam f uma função e p um ponto de seu domínio. Definimos:

$$f \text{ contínua em } p \Leftrightarrow \begin{cases} \text{Para todo } \epsilon > 0 \text{ dado, existe } \delta > 0 \text{ (} \delta \text{ dependendo de } \epsilon \text{), tal} \\ \text{que, para todo } x \in D_f, \\ p - \delta < x < p + \delta \Rightarrow f(p) - \epsilon < f(x) < f(p) + \epsilon. \end{cases}$$

Fonte: Guidorizzi, 2001, p.61.

Essa definição é explorada em quase todos os exemplos e exercícios de continuidade presentes no livro. Isso exige que o estudante acompanhe e desenvolva demonstrações utilizando épsilons e deltas nas tarefas propostas sobre o conceito de continuidade.

Lakoff e Núñez (1997 apud Reis, 2001) criticam essa abordagem por três motivos:

- 1) essa definição caracteriza mais a correspondência entre ϵ e δ do que a continuidade em si;
- 2) explicita uma visão discreta e não holística do conceito;

3) não contempla a essência da “continuidade natural” concebida pela “curva descrita pelo movimento livre de uma mão através do plano cartesiano.

As três críticas proferidas acima também podem ser aplicadas ao conceito de limite, o que indica o risco de o autor apenas ter deslocado a “ortodoxia epsilônica”, como se refere Grattan-Guinness (1997), de um conceito para o outro.

A definição de limite apresentada por Guidorizzi em seu livro é apresentado na Figura 39.

Figura 39 - Definição de Limite no Livro do Guidorizzi.

Definição. Sejam f uma função e p um ponto do domínio de f ou extremidade de um dos intervalos que compõem o domínio de f . Dizemos que f tem limite L , em p , se, para todo $\epsilon > 0$ dado, existir um $\delta > 0$ tal que, para todo $x \in D_f$,

$$0 < |x - p| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \epsilon.$$

Tal número L , que quando existe é único, será indicado por $\lim_{x \rightarrow p} f(x)$.

Assim

$$\lim_{x \rightarrow p} f(x) = L \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0 \text{ tal que, para todo } x \in D_f \\ 0 < |x - p| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \epsilon. \end{array} \right.$$

Fonte: Guidorizzi, 2001, p.72.

Embora Guidorizzi apresente uma definição de limite em termos de épsilon e delta em seu texto, nos exercícios ela praticamente não é cobrada. Ou seja, a quebra da “tradição” na ordem de apresentação dos conteúdos é fundamental para a abordagem escolhida pelo autor, pois, ele calcula os limites utilizando o conceito de continuidade.

O autor utiliza o resultado simbolizado na Figura 40, para resolver os exemplos.

Figura 40 - Relação entre Limite e Continuidade no Livro do Guidorizzi 1.

$$f \text{ contínua em } p \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow p} f(x) = f(p).$$

Fonte: Guidorizzi, 2001, p.73.

Assim, os exemplos consistem em identificar se a função dada é contínua no ponto do domínio em que se deseja calcular o limite, para depois apenas substituir o valor da variável da função pelo valor do ponto.

Nos casos em que a função é contínua na vizinhança do ponto do domínio em que se deseja calcular o limite, exceto no próprio ponto, Guidorizzi utiliza o resultado expresso na Figura 41:

Figura 41 - Relação entre Limite e Continuidade no Livro do Guidorizzi 2.

3. Sejam f e g duas funções. Se existir $r > 0$ tal que $f(x) = g(x)$ para $p - r < x < p + r$, $x \neq p$, e se $\lim_{x \rightarrow p} g(x)$ existir, então $\lim_{x \rightarrow p} f(x)$ também existirá e

$$\lim_{x \rightarrow p} f(x) = \lim_{x \rightarrow p} g(x). \text{ (Por quê?)}$$

Fonte: Guidorizzi, 2001, p.73.

Assim, nesses casos basta substituir a função por outra que seja contínua em todos os pontos da vizinhança do ponto em que se deseja calcular o limite e substituir o valor da variável no ponto (vide Figura 42).

Figura 42 - Relação entre Limite e Continuidade no Livro do Guidorizzi 3.

Exemplo 3

Calcule $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1}$

Solução

$\frac{x^2 - 1}{x - 1} = x + 1$ para $x \neq 1$; $g(x) = x + 1$ é contínua em 1, logo $\lim_{x \rightarrow 1} (x + 1) = g(1) = 2$.

Como

$$\frac{x^2 - 1}{x - 1} = g(x) \text{ para } x \neq 1$$

segue da observação 3, que

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} (x + 1) = 2.$$

(2 é o valor que $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 1}$ deveria ter em 1 para ser contínua neste ponto.)

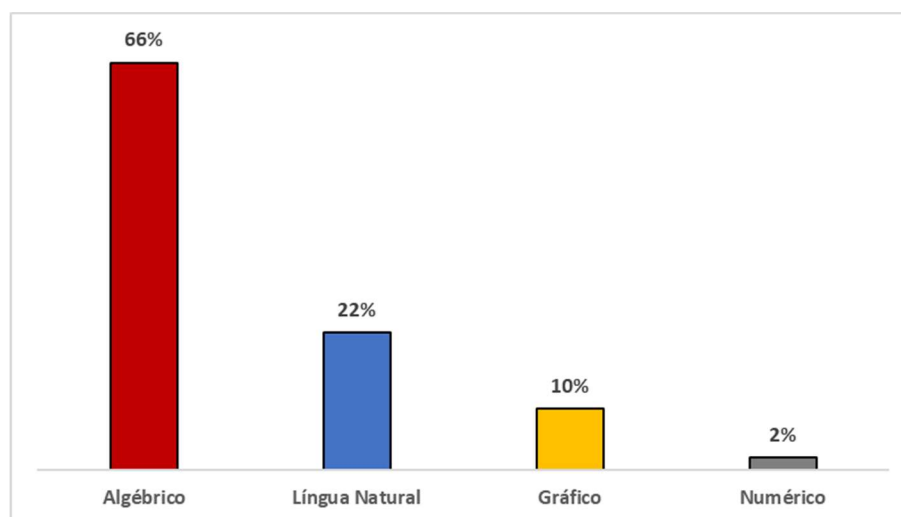
Fonte: Guidorizzi, 2021, p.74.

É importante ressaltar que Guidorizzi reserva a seção de introdução (3.1) para apresentar a noção intuitiva dos conceitos cuja definição é apresentada nas seções posteriores (limite, derivada e integral). A existência dessa seção se alinha com as preocupações didáticas do autor destacadas por Lima (2012).

7.3.3. Registros de Representação Semiótica

Com relação à análise semiótica, foi identificado no texto das seções estudadas²¹ um total de 355 representações de limites ou de funções utilizadas para abordar o conceito de limite. Os registros destas representações estão expostos no Gráfico 9.

Gráfico 9 - Distribuição percentual das representações identificadas no trecho do texto analisado do livro do Guidorizzi.



Fonte: elaborado pelo autor com ajuda do software Excel.

Primeiramente podemos observar que o Guidorizzi lança mão dos quatro registros considerados nesse trabalho: registro algébrico, língua natural, gráfico e numérico. Isso significa que ele não deixa de utilizar nenhum dos tipos de representação, embora utilize uns, bem mais, do que outros.

D'amore, Pinilla e Iori (2015) ressaltam que cada representação semiótica vincula apenas alguns aspectos conceituais do objeto considerado e que:

Por esse motivo, sempre que é utilizada uma representação semiótica, é necessário pensar que o estudante, percebe, reconhece e se apropria de alguns aspectos do objeto, aqueles colocados em evidência, mas não de todos os que o professor têm em mente.

²¹ As partes do livro do Leithold consideradas nessa pesquisa estão descritas na seção 7.3.2 intitulada "Análise narrativa e definição de Limite e Continuidade" na página 144.

Por isso, uma pluralidade de representações favorece a construção cognitiva do objeto representado, uma vez que cada uma contribui de maneira específica com alguns aspectos do objeto (p. 112).

Apesar de se referir à sala de aula podemos usar esse pensamento em relação ao autor e o leitor. Portanto, é importante, do ponto de vista da Teoria dos Registros de Representação Semiótica, que o autor utilize a maior diversidade de registros possível para representar objetos matemáticos em seu texto.

Outro ponto relevante a perceber é que a maioria absoluta das representações pertencia ao registro algébrico (66% do total de representações). Isso era de certa forma esperado, já que esse registro é predominantemente enfatizado por parcela significativa dos professores de Matemática em todos os níveis de ensino (Kamphorst; Nehring, 2016).

Além disso, o registro algébrico tem melhores atributos para a realização de cálculos, que são frequentes em textos matemáticos, como explicado abaixo:

Um registro pode permitir efetuar certos tratamentos de uma maneira muito mais, econômica e mais possante que outro registro. Pelo cálculo, numérico ou algébrico, a escritura decimal dos números e as notações literais constituem um registro incrivelmente mais econômico e mais possante que a linguagem natural (Condillac, 1981 apud Duval, 2009. 80-81).

Por isso a predominância do registro algébrico, em comparação como os outros, é algo bastante comum.

Também já era de se esperar um bom uso da linguagem natural em função de se tratar de um texto didático (22% do total). Assim, o autor precisa explicitar em língua corrente o significado das representações dos conceitos matemáticos expressadas em outros registros.

Com relação ao registro gráfico, embora seu percentual seja pequeno (10% do total), esse tipo de representação tem uma importância muito grande para os objetivos pedagógicos do livro. No prefácio, Guidorizzi promete ao leitor apresentar os conceitos, sempre que possível, acompanhados de uma motivação, interpretação geométrica ou física (Guidorizzi, 2001). De fato, mais de um terço das representações gráficas utilizadas no material analisado está na seção introdutória, dedicada a apresentar a ideia intuitiva dos conceitos. Além da introdução, o uso de gráficos em todo o texto tem como objetivo elucidar conceitos que mais tarde tiveram suas definições formalizadas.

Santos (2013) chega a elogiar a quantidade de vezes que o Guidorizzi usa o registro gráfico. Segundo ela: “Um ponto bastante positivo na produção do autor é o fato de ele trabalhar, de maneira frequente, com o registro gráfico” (p. 193). Embora reconheçamos a importância do uso de gráficos como um importante instrumento pedagógico utilizado pelo

autor, não consideramos que a utilização desse recurso foi feito de modo frequente, pelo menos no que diz respeito ao recorte do livro analisado nessa pesquisa.

Um ponto que destoa da concepção de Duval (2009) diz respeito ao pequeno uso do registro numérico (2% do total). Destes, apenas a metade corresponde a representações tabulares, enquanto outra metade aparece nas seções que tratam de limite de sequências.

Na Figura 43 apresentamos um exemplo de representação tabular.

Figura 43 - Registro tabular no Livro do Guidorizzi.

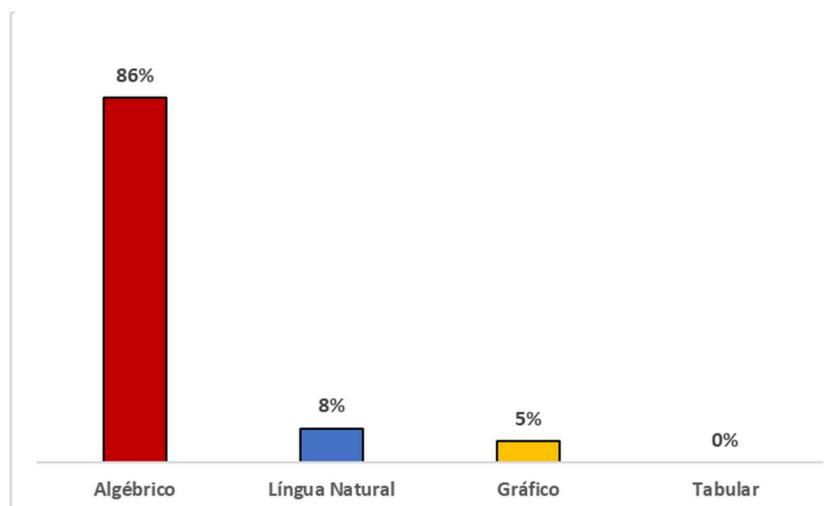
x	$x + 1$	x	$x + 1$
2	3	0,5	1,5
1,5	2,5	0,9	1,9
1,1	2,1	0,99	1,99
1,01	2,01	0,999	1,999
1,001	2,001	↓	↓
↓	↓	1	2
1	2		

Fonte: Guidorizzi, 2001, p.55.

A Figura 43 apresenta duas representações tabulares (numéricas), em que consideramos também como um tratamento numérico. São representações de limites laterais, pela direita e pela esquerda, respectivamente. É interessante observar que para indicar o valor em que o domínio e a imagem da função tendem, o autor usa setas dentro da tabela.

No que diz respeito às transformações de representações ocorridas dentro de um mesmo registro, foi identificado um total de 205 tratamentos que foram classificados conforme o Gráfico 10.

Gráfico 10 - Distribuição percentual dos tratamentos identificadas no trecho do texto analisado do livro do Guidorizzi.



Fonte: elaborado pelo autor com ajuda do software Excel.

Percebemos que mais uma vez a predominância do registro algébrico (86% do total de tratamentos está nesse registro). Esse domínio absoluto do registro algébrico com relação aos tratamentos nos parece ser uma tendência geral dos livros de Cálculo. Isso se deve a “economia” de símbolos proporcionada pela representação algébrica, já que segundo Duval (2011, p. 100) “Em uma expressão algébrica, cada símbolo corresponde geralmente a uma unidade significativa”. Na Figura 44, temos um exemplo de tratamento algébrico apresentado no livro do Guidorizzi.

Figura 44 - Tratamento Algébrico.

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} (x + 1) = 2.$$

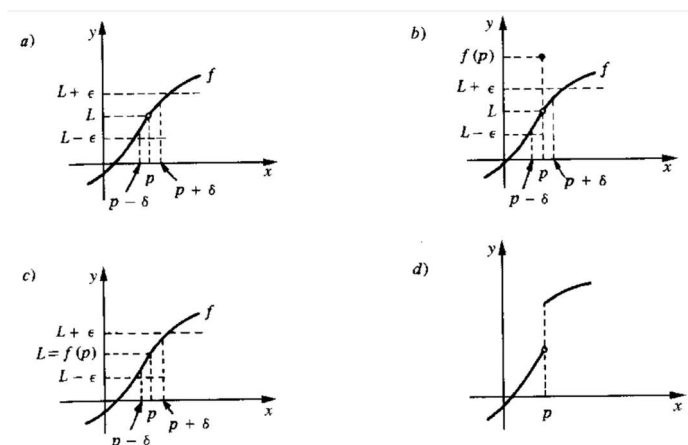
Fonte: Guidorizzi, 2001, p.56.

Na Figura 44 mostramos a resolução de um limite pelo “levantamento” de uma indeterminação, que representa um tratamento algébrico. Observe que a representação se modifica sem sair do registro algébrico.

Além da plena maioria dos tratamentos serem de registro algébrico, um ponto de bastante relevância é a quase ausência de tratamentos numéricos. A baixa utilização do registro numérico nos leva a acreditar que esse tipo de representação é encarado pelos professores e autores apenas como um instrumento auxiliar para construção de gráficos. Como já se pressupõe que, no momento de estudar Cálculo, o estudante já saiba esboçar gráficos, a presença de tabelas fica cada vez mais rara.

Novamente vemos o pouco uso do registro gráfico no que diz respeito ao tratamento (5% do total). Temos um exemplo desse tipo de tratamento na Figura 45.

Figura 45 - Tratamento Gráfico.



Fonte: Guidorizzi, 2001, p.71.

No tratamento apresentado na Figura 45, o autor busca trabalhar simultaneamente os conceitos de limite e continuidade. O sentido da “leitura” das transformações é pontuado pela ordem das letras de cada gráfico. O gráfico da letra a) mostra o limite L da função quando x tende a p , mesmo não existindo $f(p)$. Assim, existe o limite, mas a função não é contínua no ponto p (há um buraco no gráfico). Na letra b) vemos um gráfico muito semelhante ao anterior, mudando apenas o fato de que $f(p)$ existe, porém, a função permanece descontínua em p (pois, ainda há um buraco no gráfico). Na letra c) a modificação consiste na remoção da descontinuidade, fazendo $f(p) = L$. Finalmente na letra d) temos a inexistência do limite perante uma continuidade não removível (há uma “quebra” no gráfico).

Destacamos na Figura 45 a presença dos intervalos definidos por épsilons e deltas nos gráficos em que há limites. Isso acontece porque o autor utiliza esse tratamento como motivação geométrica para definir o conceito de limite.

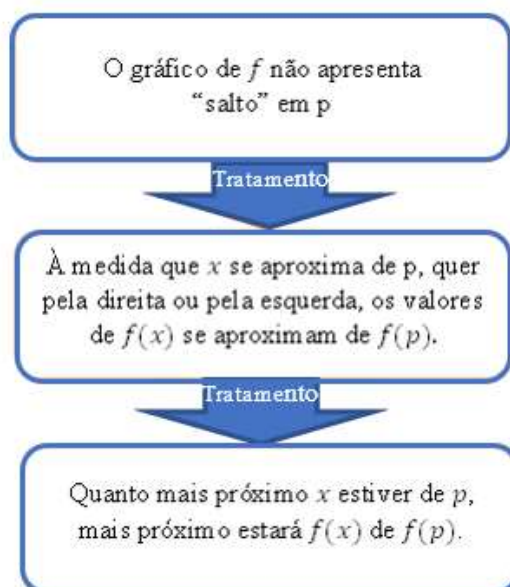
Acredita-se que o uso do tratamento gráfico ajuda o estudante a discriminar as variáveis visuais que compõe esse registro. Além disso, tratamentos como o apresentado na Figura 45, incentivam o aluno a realizar correspondências entre essas variações e as alterações da escrita algébrica. Essa forma de abordagem vai ao encontro do que pensa Duval (2011), que ao defendê-la critica a prática vigente em sala de aula:

Este modo de pensar a leitura das representações gráficas vai na contramão da prática corrente, a qual utiliza regras de codificação para construir representações gráficas fundamentadas na associação entre pares ordenados de números e pontos do plano. Isto leva a um abismo cognitivo entre a interpretação global, que se espera dos alunos, e a leitura ponto a ponto na qual o professor se baseia para introduzir o registro gráfico (Duval, 2011, p.96).

Apesar de se referir a sala de aula, essa crítica se aplica a livros que podem contribuir para que o estudante realize uma interpretação gráfica mais global.

Com relação aos tratamentos em língua natural, embora apareçam em pequena quantidade (6% do total), algumas são muito importantes como a que diz respeito ao conceito de continuidade num ponto (Figura 46).

Figura 46 - Tratamento em Língua Natural

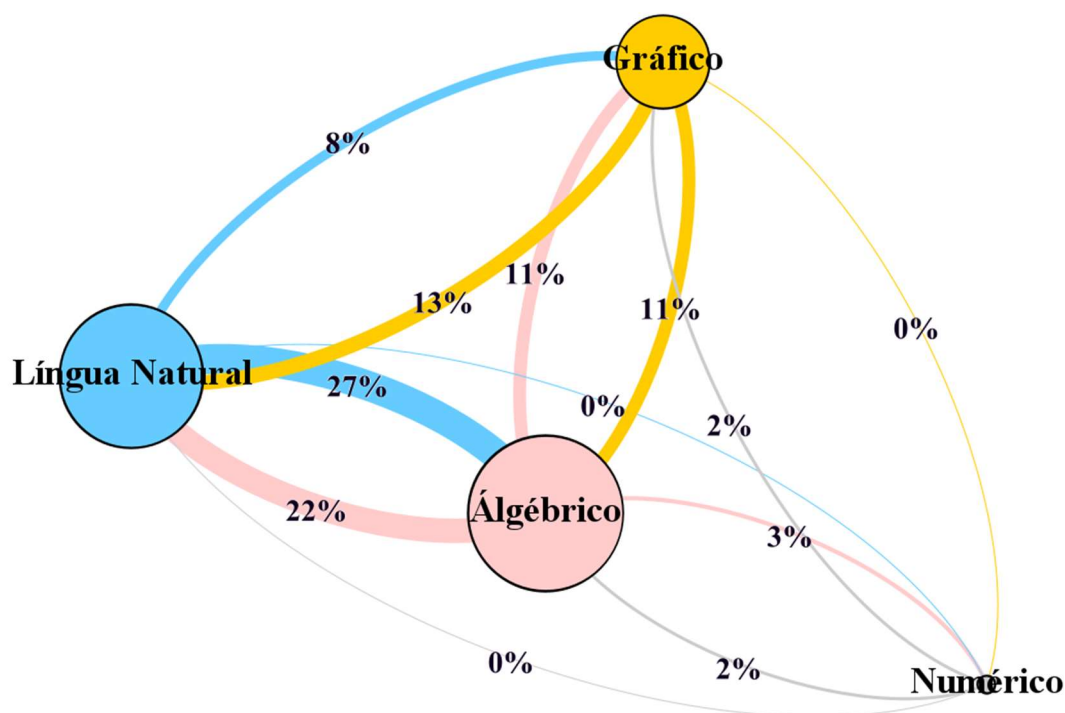


Fonte: Guidorizzi, 2001, p.71.

Na Figura 46 vemos um tratamento em língua natural relativo ao conceito de continuidade. Observe que o conceito parte da noção intuitiva para a descrição em língua corrente da definição por épsilons e deltas. Acima percebemos a preocupação didática do autor com relação a compreensão da noção intuitiva do conceito, característica apontada por Lima (2012).

Sobre as mudanças de registro, foi identificado um total de 135 conversões identificadas no texto considerado. Novamente apresentamos no Gráfico 11 um mapa de rede, construído com a ajuda do software Gephi. Como já explicamos no capítulo anterior neste mapa, os nós representam os registros, enquanto as arestas representam as conversões entre os registros. A cor de cada aresta é a mesma do registro de origem da conversão e sua espessura é proporcional ao número de conversões identificadas daqueles registros. O tamanho de cada nó também é proporcional ao número de conversões que partem dele somado ao número de conversões que ele recebe e o número escrito em cada aresta indica a porcentagem de uso do tipo de registro representado pela aresta com relação ao total de conversões.

Gráfico 11 - Distribuição percentual das conversões identificadas no trecho do texto analisado no livro do Guidorizzi.



Fonte: elaborado pelo autor com ajuda do software Gephi.

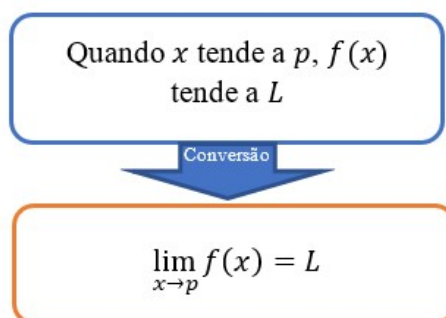
No mapa de rede do Gráfico 11, verificamos que nem todas as conversões foram identificadas no texto. As conversões que partem da língua natural para o registro numérico, de gráfico para o registro numérico e de numérico para língua natural não aparecem no livro. Ou seja, foram identificadas 9 das 12 conversões possíveis.

Percebemos mais uma vez, pela espessura dos nós, a predominância do registro algébrico (76% do total das conversões identificadas envolve este registro), um menor número de conversões que envolvem a língua natural e gráficos (70% e 45% do total, respectivamente), além do uso quase nulo do registro numérico (7% do total).

Ainda sobre as conversões, percebemos que quase metade delas envolvem os registros algébricos e língua natural (49% do total). As conversões entre língua natural e o registro algébrico (correspondem a 27% do total) dizem respeito a algebrização de um conceito enunciado.

Um exemplo de conversão envolvendo língua natural e registro algébrico é apresentado na Figura 47.

Figura 47 - Exemplo de conversão no texto do Guidorizzi.



Fonte: Guidorizzi, 2001, p.55.

Já a conversão do registro algébrico para a língua natural, corresponde geralmente a uma explanação do que é representado por meio de fórmulas (representam 22% do total).

Também destacamos uma quantidade razoável de conversões que envolvem o registro gráfico (45% do total). Como já foi dito anteriormente, este registro é muito usado pelo autor para explicar geometricamente os conceitos matemáticos antes de formalizá-los por meio de definições (Lima, 2012).

Sobre esse aspecto Santos (2013) descreve a abordagem utilizada por Guidorizzi em seu texto, ao mesmo tempo em que destaca o uso pedagógico do registro gráfico:

O texto de Guidorizzi (2001) é denso porque trabalha essencialmente com a percepção mais formalizada dos conceitos. No entanto esse autor traz, em vários momentos, o registro gráfico próximo ao registro algébrico – o que pode ajudar na compreensão e na conversão de um registro em outro (p. 205).

Assim, mesmo que o registro gráfico não tenha sido utilizado com grande frequência no texto do livro, os tratamentos e conversões que envolvem esse tipo de representação exercem um papel fundamental para os objetivos pedagógicos do autor.

Com relação às conversões que envolvem o registro numérico (7% do total), percebemos que a grande parte dessas transformações ocorrem nas seções que envolvem limites de seqüências. Esse conteúdo, apresentado pelo autor, nem sempre é trabalhado num primeiro curso de Cálculo.

7.3.4. Representações Semióticas nos Exercícios

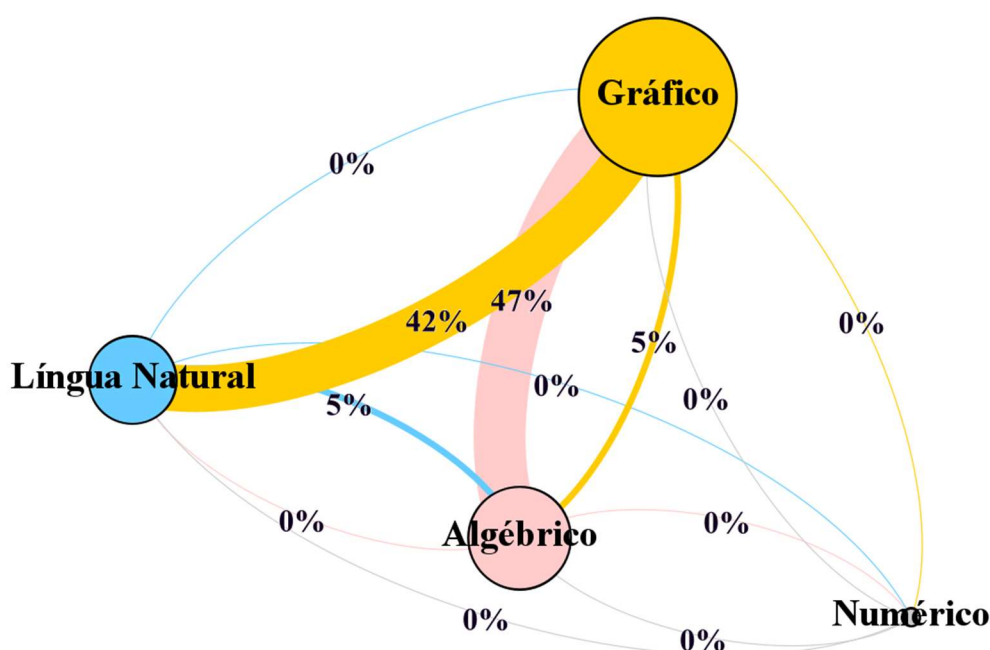
Aproximadamente 85 exercícios presentes no texto do Guidorizzi²² foram analisados em três frentes: com relação aos registros de representação semióticas presentes no enunciado dos exercícios, às conversões propostas nas questões e aos verbos utilizados na proposição das questões.

Sobre os registros presentes no enunciado, encontramos no material analisado do livro de Guidorizzi 81 representações, todas em registro algébrico. Ou seja, 100% dos conceitos presentes nos enunciados estavam descritos por meio de fórmulas matemáticas. Assim, não identificamos nenhum gráfico, tabela ou descrição de conceito em língua natural nas questões analisadas.

Ainda que Santos (2013) tenha elogiado a frequência do uso de gráficos no texto do Guidorizzi, ela destaca a ausência desse registro ao analisar alguns exercícios do livro: “Novamente chamamos a atenção para o fato de o autor não explorar os gráficos. Acreditamos que a utilização de mais um registro contribuiria para a melhor compreensão do que está sendo feito” (p. 232).

Com relação às conversões propostas nos exercícios, dos 85 enunciados apenas 19 propunham mudanças de registros. Elas foram categorizadas conforme o Gráfico 12.

Gráfico 12 - Distribuição percentual das conversões propostas nos exercícios analisados do livro do Guidorizzi.



Fonte: Elaborado pelo autor com ajuda do Software Gephi.

²² As partes do livro do Leithold consideradas nessa pesquisa estão descritas na seção 6.3.2 intitulada “Análise narrativa e definição de Limite e Continuidade” na página 144.

Além da baixa quantidade de exercícios que propõe conversões, observamos no Gráfico 12 a falta de diversidade de transformações: Das doze conversões possíveis foram identificadas apenas quatro tipos. Percebemos que quase todas as conversões envolvem o registro gráfico (94% do total de conversões propostas está relacionado ao registro gráfico). O segundo registro predominante é o registro algébrico (57% do total) e a conversão de maior percentual envolve justamente os dois registros mais solicitados: do registro algébrico para o registro gráfico (47% do total).

Um exemplo de questão que propõe conversão de representações no livro do Guidorizzi é descrita na Figura 48:

Figura 48 - Exercício de conversão do registro algébrico para gráfico.

3. Esboce o gráfico de $f(x) = \frac{4x^2 - 1}{2x - 1}$. Utilizando a ideia intuitiva de limite, calcule $\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} \frac{4x^2 - 1}{2x - 1}$.

Fonte: Guidorizzi, 2021, p.59.

Podemos ver que o enunciado pede para esboçar o gráfico da função a partir de sua representação algébrica. Logo, temos um caso de conversão do registro algébrico para o gráfico, além de um tratamento algébrico por conta do cálculo do limite.

Com relação à construção do gráfico, não há exemplos na seção que evidencie o tipo de abordagem adotada. O papel dos gráficos no livro, diz respeito à motivação para a exposição de conceitos. Pelos exemplos expostos no capítulo sobre funções, podemos inferir que seja uma abordagem ponto a ponto.

No que diz respeito ao tratamento, nessa questão já aparece a problemática discutida anteriormente sobre definir uma função utilizando apenas a fórmula. A intenção do autor é fazer o estudante perceber que a função não é definida no ponto $x = \frac{1}{2}$, embora seja definida em todos os pontos de sua vizinhança.

O método para calcular o limite sugerido pelo autor é fazer o aluno observar que a função “definida” pela expressão $f(x) = \frac{4x^2 - 1}{2x - 1}$ é idêntica a $g(x) = 2x + 1$ em todos os pontos menos em $x = \frac{1}{2}$. Como g é contínua em $x = \frac{1}{2}$, basta então calcular o valor de $g\left(\frac{1}{2}\right)$, pois

$$\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} f(x) = \lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} g(x) = g\left(\frac{1}{2}\right).$$

As questões propostas pelo Guidorizzi para calcular limites seguem esse modelo. Não há questões desse tipo que sugira o uso de épsilons e deltas, pois essa abordagem já foi utilizada para demonstrar a continuidade de funções em um ponto.

Uma conversão que merece destaque é a que parte do registro gráfico para língua natural (42% do total de conversões é desse tipo). Tal transformação aparece nos exercícios depois que o autor solicita ao estudante que esboce o gráfico e pede para explicar algo sobre o gráfico. Isso nos mostra a centralidade da representação gráfica com relação aos exercícios.

Na Figura 49 temos uma questão que envolve algumas conversões.

Figura 49 - Conversão nos Exercícios do Guidorizzi.

$$5. f(x) = \begin{cases} 2x & \text{se } x \leq 1 \\ 1 & \text{se } x > 1 \end{cases} \text{ é contínua em } 1? \text{ Justifique.}$$

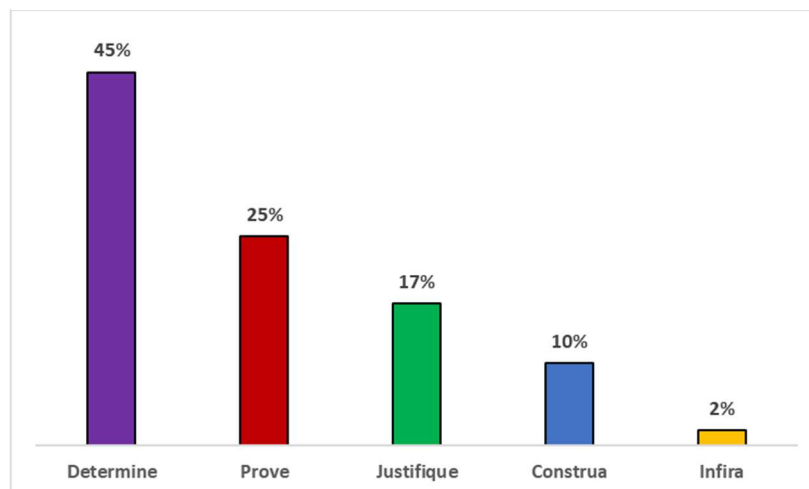
Fonte: Guidorizzi, 2001, p. 68.

Neste item, o autor pede para o leitor responder se a função dada é contínua num ponto, além de solicitar uma justificativa. Embora o enunciado não peça para construir um gráfico, neste caso consideramos a conversão do registro algébrico para o gráfico, pois, todos os exemplos similares resolvidos no texto se utilizavam desse artifício para responder à questão. Assim, temos nesse caso uma dupla conversão, além da que referimos (do registro algébrico para o registro gráfico), temos outra do registro gráfico para a língua natural, já que o verbo justificar, neste caso, está associado à linguagem corrente.

Sobre os verbos, conseguimos identificar um total de 110 deles utilizados nos enunciados das questões do Guidorizzi. Houve questões que utilizaram mais de um verbo, por isso a quantidade de verbos é superior a quantidade de exercícios (85).

Os verbos estão classificados conforme o Gráfico 13.

Gráfico 13 - Distribuição percentual dos verbos encontrados nos enunciados dos exercícios analisados no livro do Guidorizzi.



Fonte: Elaborado pelo autor.

Podemos verificar que quase a metade dos exercícios utiliza o verbo *determine* (45% do total de verbos utilizados). Afirmamos mais uma vez que esse resultado já era esperado, pelo uso constante de enunciados do tipo “calcule o limite...” nos livros de Cálculo. Santos (2013) afirma em sua pesquisa que “[..] em todos os livros encontramos a tarefa “calcule o limite da função” para os mais diferentes tipos: polinomiais, racionais, trigonométricas etc.” (p. 213).

Chama a atenção que, uma em cada quatro questões consideradas no livro do Guidorizzi é do tipo *prove* (25% do total). Essa quantidade nos parece bastante elevada, tendo em vista que o livro *Um Curso de Cálculo* deveria ter como foco a manipulação dos conceitos fundamentais e o desenvolvimento em calcular limites, derivadas e integrais.

Segundo Reis (2001) essa concepção do ensino de Cálculo é compartilhada pelo professor Elon Lages Lima que, ao comparar o ensino de Cálculo com o de Análise, caracteriza o primeiro como um ensino com ênfase nas aplicações e manipulações, enquanto o segundo teria como foco o raciocínio e o método dedutivo.

Outro verbo que aparece em uma quantidade razoável (17% do total) é o *justifique*. Esse verbo pode sugerir o uso de língua natural, como na questão vista anteriormente na Figura 100/Figura 49. Segundo Santos (2013): “Guidorizzi trabalha também com exercícios nos quais é solicitada a justificativa nas respostas ao aluno, o que proporciona a esse aluno condições de trabalhar com o registro em língua natural” (p. 234). Porém, pelo menos no que se refere aos trechos analisados neste trabalho, alguns exemplos resolvidos nos mostram que, muitas vezes, a justificativa esperada pelo autor se trata de um argumento algébrico.

Abaixo mostramos a resolução de uma questão contida no e-book do livro do Guidorizzi.

Determine L para que a função

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^3 - 8}{x - 2}, & \text{se } x \neq 2. \\ L, & \text{se } x = 2. \end{cases}$$

Seja contínua em $p = 2$. Justifique.

Resposta:

Para $x \neq 2$

$$\frac{x^3 - 8}{x - 2} = \frac{(x - 2)(x^2 + 2x + 4)}{x - 2} = x^2 + 2x + 4$$

$g(x) = x^2 + 2x + 4$ é contínua em 2.

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 8}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} [x^2 + 2x + 4] = g(2) = 12.$$

Portanto, devemos tomar $L = 12$ para que a função f seja contínua em $p = 2$.

(Guidorizzi, 2021, p.80)

Essa resolução mostra que a justificativa esperada pelo autor é basicamente algébrica.

Com relação ao verbo *construa*, ele é usado com pouca frequência (10% do total ou apenas 11 vezes). Foram consideradas nessa categoria 4 exercícios com enunciados do tipo “Dê exemplo de uma função...”. Como nesse caso o autor não especifica o tipo de transformação a ser realizada, não computamos conversões.

Os outros 7 casos estão relacionados ao esboço de gráficos, o que diz respeito à conversão que parte do registro algébrico para gráfico. A baixa quantidade de questões desse tipo reforça as observações feitas por Santos (2013) com relação à ausência da proposição de construção de gráficos nos exercícios, já comentadas anteriormente. Ela fez um levantamento sobre os exercícios do Guidorizzi que constatou que apenas estas 7 questões, das 290 presentes em todo o capítulo de limites, propunham o esboço de gráficos (Santos, 2013).

Já o verbo *inferir* está relacionado a sugerir que o estudante conclua algo a partir de hipóteses dadas. Geralmente está relacionado com o uso da língua natural e, no texto analisado, aparece numa quantidade quase nula de vezes (2% do total).

7.4. INTERPRETAÇÃO/REINTERPRETAÇÃO

O Professor Guidorizzi é oriundo de uma cidade muito pequena no interior de Minas Gerais e que muito cedo foi para São Paulo concluir sua formação na USP, instituição mais tradicional e uma das maiores universidades da América Latina, onde também trabalhou durante muito tempo.

Mesmo tendo lecionado em várias instituições especializadas em cursos que têm a Matemática como instrumento de aplicação, o que provavelmente lhe motivou a fazer um doutorado em Matemática Aplicada, a USP foi a instituição que mais o influenciou na produção de seu livro (Lima, 2012).

Embora a origem de seu livro sejam apostilas escritas a partir do descontentamento com alto nível de rigor do material usado na USP, elas são conhecidas, atualmente, por terem como característica principal a rigidez e o cuidado técnico. Assim, percebemos indícios da influência bourbakista na obra do Guidorizzi.

O conceito de limite, por exemplo, só é definido depois que é provado que o número que atende a possível definição, é único. Ou seja, a definição do conceito só é exposta depois de provada sua unicidade. Sobre esses cuidados técnicos presentes no livro, destacamos também a atenção dispendida pelo autor quando explica notações, bem como a observação feita por ele ao definir funções pela fórmula algébrica.

As primeiras décadas do Curso de Matemática da USP teve uma influência muito grande da Matemática praticada na Europa, principalmente bourbakista. Por mais que alguns professores discordassem da tendência de ensino implantada por Fantappiè, ela foi predominante durante muito tempo e influenciou o ensino de Matemática do país inteiro (Lima, 2012).

Quanto à ordem dos conteúdos apresentados no livro, o autor inverte a tendência tradicional de explicar continuidade a partir do conceito de limite, apresentando continuidade antes. Essa ordem facilita o trato com limites, porém dificulta o trabalho com o conceito de continuidade.

Embora a inversão da ordem feita por Guidorizzi pareça uma questão fundamental, ele apenas desloca a definição em termos de épsilons e deltas, do conceito de limite para continuidade. Parece-nos mais relevante do que a ordem dos conteúdos, discutir sobre o trabalho feito com as noções intuitivas. Verificar se há exercícios que explorem a noção intuitiva de limite e de continuidade, nos parece mais importante do que definir que conteúdo deve vir primeiro.

Ainda no que diz respeito à ordem, uma questão que precisa ser resolvida antecipadamente é saber se devemos trabalhar a definição em termos de ϵ e δ de continuidade ou não. Se a resposta for não, a ordem está dada: trabalhar limites primeiro. Se a resposta for sim, acreditamos que se pode trabalhar em qualquer ordem.

Achamos interessante apresentar ao estudante a definição de continuidade por ϵ s e δ s, para que ele não estranhe a ideia de continuidade de funções de domínio discreto quando estiver em outra disciplina. Dos três livros analisados, apenas o Guidorizzi trabalha tal definição.

É importante ressaltar que Guidorizzi reserva uma seção desse capítulo para tratar da noção intuitiva dos conceitos de Cálculo. Utilizando-se de representações geométricas, numéricas e algébricas, esta seção auxilia inclusive na realização de cálculo de limites, mesmo que a definição não seja conhecida pelo estudante, o que está alinhado à construção histórica do conceito, que surge antes de sua definição.

Com relação aos registros de representação, percebemos um predomínio algébrico em quase todos os levantamentos, inclusive 100% das representações dos enunciados dos exercícios pertencem a este registro, o que também indica influências do tratamento analítico bourbakista. Há, no entanto, uma disputa com a língua natural no que diz respeito ao envolvimento em conversões no texto e um predomínio gráfico no que tange ao envolvimento em conversões nos exercícios.

Quanto a língua natural, vemos que o autor descreve muitas vezes o conceito de limite por meio desse registro. Enquanto o registro gráfico ganha papel de destaque no texto como motivação para introduzir conceitos e na conversão dos exercícios, embora a ausência de gráficos no enunciado dificulte a adoção de uma abordagem global.

Todas as definições relativas a limites são motivadas no livro por gráficos de funções genéricas, sempre partindo do geral para o particular e nenhuma introdução de conceito é feito com situações-problemas específicas. No que diz respeito ao uso de tecnologias, apenas foram incluídas na versão e-book do livro, videoaulas sobre resolução de exercícios

Outro ponto que evidencia a influência europeia na escrita do livro, diz respeito aos verbos dos enunciados dos exercícios. A maioria dos verbos utilizados nos enunciados das questões é do tipo *determine*, porém, a grande quantidade de exercícios do tipo *prove* e *justifique* nos mostram que a prioridade da obra é a manipulação algébrica e as demonstrações.

Embora o verbo *justificar* se associe comumente à língua natural, no caso do livro em questão ele é comumente associado ao registro algébrico. Isso porque nos exemplos resolvidos o autor se utiliza de justificativas algébricas para responder os enunciados.

Mesmo que a diversificação de registros seja um ponto fraco do livro do Guidorizzi, não se pode negar que ele manifeste preocupações didáticas. Um exemplo claro é que o autor reserva seção 3.1 para tratar apenas da noção intuitiva dos conceitos de Cálculo. Ele também utiliza gráficos para motivar a maioria dos conceitos a serem discutidos e têm grande preocupação em explicar sobre as diversas notações utilizadas.

8. CÁLCULO

"A arte de ensinar é a arte de ajudar a descoberta a acontecer."

Mark Van Doren²³

Essa frase, cunhada por um poeta defensor da educação liberal (citada no prefácio do livro *Cálculo*), diz muito sobre o autor do livro cujo estudo será apresentado nesse capítulo. Assim, Stewart considera o momento da descoberta, ou da euforia diante da resolução de um problema, como o ápice da aprendizagem. Nesse sentido, o papel do professor e, conseqüentemente, do livro-texto, seria garantir as condições necessárias para proporcionar ao estudante tal momento. A motivação diante de uma situação-problema real, o uso de tecnologias digitais para resolvê-lo e a compreensão conceitual dos objetos matemáticos por meio da coordenação de diversos registros de representação, são alguns dos objetivos estabelecidos pelo autor da obra que analisamos nesta seção.

Neste capítulo apresentamos a análise do livro *Cálculo* de autoria do professor canadense James Stewart (2013), seguindo as etapas da Hermenêutica da Profundidade.

8.1. A INTERPRETAÇÃO DA DOXA

Dentre as ementas dos cursos de licenciatura em Matemática das 26 instituições pesquisadas, o livro do Stewart aparece em 19. Isso já mostra a grande importância dada a essa obra estrangeira pela comunidade acadêmica brasileira.

Tal importância não se restringe apenas ao Brasil e a terra natal do autor. Numa das entrevistas reportadas nesse trabalho, Stewart é apresentado como o autor da área de Matemática mais vendido no mundo desde Euclides (Watson, 2014). Muito provavelmente, Stewart foi um dos autores de Matemática mais bem sucedidos financeiramente no mundo.

Segundo Neto, Lima e Souza (2021), ele obteve grande reconhecimento pela publicação de uma série de livros didáticos voltados para o ensino médio e obras direcionadas aos cursos de Engenharia, Física e Matemática. Embora Stewart tenha escrito outros livros, o mais famoso deles, sem dúvida, é *Cálculo*.

²³ Fonte: DOREN. M. V. Liberal Education. New York: Henry Holt and Company, 1943.

Com relação às características da abordagem da obra, no que diz respeito ao conceito de limites, Neto, Lima e Souza (2021) afirmam que:

Destaca-se o problema da tangente como uma motivação para iniciar as discussões sobre a teoria de limites, o problema de velocidade e o estudo de limite de funções reais. A partir da abordagem desse conteúdo, foi possível concluir que uma das estratégias utilizadas por James Stewart, teve como base a resolução de problemas, contudo observou-se no texto a presença de elementos que indicam uma preocupação do autor com aspectos pedagógicos, principalmente a indicação de leituras complementares, aplicações de tecnologia, elementos históricos e modelagem, evidenciando a influência de tendências em educação matemática para a promoção dos processos de ensino e aprendizagem de limite (p. 1139).

Embora, assim como no nosso trabalho, Neto, Lima e Souza (2021) tenham se ocupado apenas com a abordagem que o autor dá ao conteúdo de limites, as características apontadas por eles, como o uso de tecnologias digitais, curiosidades históricas e uso da modelagem etc. permeiam toda a obra do Stewart. Isso reforça o cuidado do autor com a didática apresentada em seu livro e o conhecimento que ele tinha das tendências e discussões acerca do ensino de Matemática na época da publicação.

Moura (2014) destaca no livro o uso da regra dos três, que Stewart expande para a regra dos quatro (que consiste em abordar os conceitos matemáticos algebricamente, graficamente, numericamente e em língua natural), e a grande influência que o movimento da Reforma do Cálculo teve com relação à didática apresentada. Esse movimento teve como principal característica o uso das tecnologias digitais no ensino do Cálculo (Rezende, 2003).

Dessa forma, podemos concluir que a comunidade acadêmica vê no livro do Stewart uma obra moderna, orientada por diversas correntes das tendências em Educação Matemática, inclusive com relação às representações semióticas, de grande apelo tecnológico e influente em todo o mundo.

8.2. ANÁLISE SÓCIO-HISTÓRICA

A seguir descrevemos a análise de dados biográficos do James Stewart, o estudo dos paratextos editoriais e das mudanças ocorridas entre as edições da obra.

8.2.1. James Drewry Stewart

Figura 50 - James Stewart.



Fonte: Disponível em: https://en.wikipedia.org/wiki/James_Stewart_%28mathematician%29 <http://>
Acesso em: 03 de Jun de 2020.

James Drewry Stewart nasceu em 29 de março de 1941 na cidade de Toronto no Canadá. Quando jovem, era um bom aluno e se interessava por todas as disciplinas, incluindo idiomas, história e música. Estudou violino dos 7 aos 17 anos e por muito pouco não trocou a Matemática pela Música: “pensei que seria melhor me tornar um matemático cujo hobby é a música do que um músico cujo hobby é a matemática” afirmava (Everett-Green, 2014).

Fazia o ensino médio no *Earl Haig Collegiate* quando seu professor de Matemática Ross Honsberger, em uma de suas digressões, demonstrou que os números racionais são enumeráveis, enquanto os números reais não. Isso impressionou tanto o jovem Stewart que ele resolveu entrar no programa de Ciências Exatas da Universidade de Toronto (Peterson, 2009).

Depois de concluir sua graduação fez seu mestrado em Stanford em Palo Alto, Califórnia. Foi atraído pelo clima californiano e pela especialização em análise, já que todo o corpo docente da instituição era formado por analistas (Peterson, 2009).

Concluída a graduação, voltou ao Canadá para fazer seu doutorado na Universidade de Toronto. Stewart sabia que o professor sul-africano Lionel Cooper trabalharia na instituição canadense por dois anos e, por isso, correu para concluir seu doutorado dentro deste prazo a fim de aproveitar as orientações do Professor Cooper (Peterson, 2009).

Em seguida foi para Europa realizar seus estudos pós-doutorais, também com o Professor Cooper na Universidade de Londres. Sua estadia na Inglaterra lhe proporcionou voltar a estudar música na *Guildhall School of Music* (Peterson, 2009).

Quando voltou para o Canadá, Stewart conseguiu seu primeiro emprego como professor da Universidade MacMaster em Hamilton e voltou a tocar música de câmara. Fez tanto sucesso

como violinista que foi convidado para ser Spalla da MacMaster Symphony e chegou a tocar profissionalmente por alguns anos na Orquestra Filarmônica de Hamilton (Peterson, 2009).

Como homem gay, Stewart esteve profundamente envolvido com o movimento LGBT e fez um trabalho importante na luta pelos direitos dos homossexuais de Hamilton. No início dos anos de 1970 ele conseguiu levar para dar uma palestra na Universidade de MacMaster George Hislop, um dos ativistas canadenses mais influentes, o que incentivou o movimento a ponto de realizarem no ano seguinte a primeira marcha do orgulho gay de cidade (Watson, 2014).

Foi lecionando em MacMaster que dois de seus alunos deram a sugestão para ele escrever o seu próprio livro de Cálculo. Segundo eles, as notas que o professor fazia no quadro negro eram melhores do que o livro que seguiam. Stewart achou a ideia interessante, porém, antes que colocasse em prática tal plano, foi abordado por professores que tinham contrato com a editora McGraw-Hill para escrever livros didáticos para o ensino médio e solicitaram sua ajuda (Peterson, 2009).

A experiência o animou e o fez começar a escrever seu livro de Cálculo entre 1979 e 1980. Segundo ele próprio, trabalhou por 13 horas, diariamente, durante 7 anos para concluir a escrita. Seu livro foi finalmente publicado em 1987 pela editora Brooks/Cole. As vendas foram modestas no primeiro ano de lançamento, mas na medida em que o tempo foi passando, o sucesso comercial da obra foi crescendo, a ponto de em 1992 se tornar o livro mais vendido da área (Peterson, 2009).

Sua obra foi traduzida em diversos países e, por isso, ele foi alçado ao status de celebridade da área. Era comum dar autógrafos em eventos e visitas internacionais. O dinheiro oriundo da venda de livros, aumentado por investimentos certos, o tornaram um homem rico. Isso lhe proporcionou continuar com a promoção de eventos e a arrecadação de fundos para a caridade e movimento LGBT (Watson, 2014).

A riqueza também lhe propiciou realizar um sonho que aliasse tudo que mais amava: Matemática e Música. Um projeto extremamente ambicioso que consistiu na construção de uma casa que tivesse a acústica perfeita para a realização de concertos musicais e um *design* com elaboradas curvas matemáticas. Ele chamou sua proposta de Casa Integral (Watson, 2014).

O projeto era tão grande que entre o início do planejamento e a inauguração, se passaram 10 anos. Em 1999, Stewart entrevistou diversos arquitetos para escolher aqueles que ele julgava a melhor opção para a concepção da obra. Em 2002 ele comprou a propriedade que daria lugar a sua casa e em 2003 iniciou a construção que só foi concluída em 2009 (Garcia, 2015).

O resultado foi uma mansão projetada, pelos arquitetos Brigitte Shim e Howard Sutcliffe, com 1.670 m², situada na encosta de uma colina, com três andares abaixo do nível da rua e dois andares visíveis do lado de fora. Ela contém uma piscina, espaço de reuniões e uma sala para concertos com capacidade para 150 pessoas. Foi construída utilizando-se de alta tecnologia e atende questões ecológicas por incorporar técnicas como aquecimento geotérmico, resfriamento e telhados plantados. Ao todo o projeto custou entre 24 e 32 milhões de dólares e foi condecorado com diversos prêmios, incluindo a Medalha do Governador-Geral do Canadá em 2012 (Garcia, 2015).

Figura 51 - A Casa Integral



Fonte: Disponível em <https://www.prof-edigleyalexandre.com/2023/05/casa-integral-james-stewart.html>. Acesso em 04/06/2023.

A edificação chamou a atenção do arquiteto paisagista Joseph Clement enquanto este trabalhava em Nova York e viu as fotos da construção da Casa Integral. Clement então resolveu fazer um documentário sobre a casa e o homem que a concebeu. Esse documentário teria como história base a vida do matemático mais publicado desde Euclides, seu ativismo junto aos direitos dos homossexuais, bem como sua paixão pela Casa Integral. A produção começou em 2013 (Watson, 2014).

As coisas iam como o planejado, porém tudo mudou quando no meio das filmagens, Stewart foi diagnosticado com câncer na medula óssea (Everett-Green, 2014). A partir de então o documentário passou a adquirir novos significados. A doença foi muito severa com o professor e, ao perceber que não teria muito tempo de vida, ele organizou sua despedida:

“Boa noite, senhoras e senhores, e bem-vindos ao meu velório.” Foi assim que James Stewart deu as boas-vindas a uma grande multidão para a última de muitas noites de concertos em sua esplêndida casa em Toronto, a Integral House. Vestido com uma jaqueta de bordado vermelho, o eminente matemático e educador levantou-se para apresentar vários dos intérpretes, embora muito debilitado pelo câncer que – como dizia nos convites – o deixara com apenas algumas semanas de vida (Everett-Green, 2014).

Stewart faleceu no dia 3 de dezembro de 2014 em decorrência do mieloma múltiplo. Como homenagem, seu nome batiza o Centro de Matemática da Universidade de MacMaster e a Biblioteca do Instituto Fields para Pesquisa em Matemática e Ciências. O Documentário *Integral Man* de Joseph Clement foi lançado em 2017 (Watson, 2014).

Figura 52 - Cartaz de *Integral Man*.

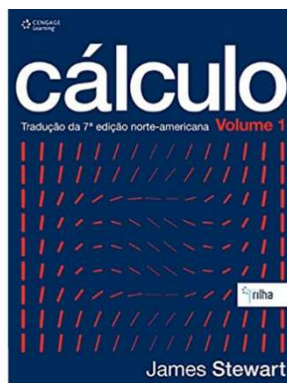


Fonte: Disponível em: <https://www.imdb.com/title/tt5725614>. Acesso em: 04 de Jun de 2018.

Seus amigos o descreviam como uma pessoa humilde e gentil, tão apaixonado por música que usava uma foto do tampo de um violino como capa de alguns de seus livros de Cálculo (Watson, 2014). Seus textos, certamente, são seu maior legado. Em 2012, 70% das universidades estadunidenses e 90% das canadenses adotavam o seu livro, enquanto o Brasil era responsável pela venda de cerca de 30.000 exemplares por ano (Simões, 2016).

8.2.2. O livro Cálculo.

Figura 53 - O Livro *Cálculo*, vol 1, 7 ed.



Fonte: Disponível em: <https://www.amazon.com.br/C%C3%A1lculo-1-James-Stewart/dp/8522112584>
Acesso em: 01/06/2023.

O extenso prefácio da sétima edição do livro *Cálculo* começa com o autor explicando sobre algumas modificações promovidas com relação às edições anteriores. Essas alterações dizem respeito a mudanças de unidades de medida (das habituais norte-americanas para as unidades métricas) e a adição de exercícios contextualizados que contemplassem a realidade de países que estão fora da América Anglo-Saxônica, tendo em vista atender a uma abrangência internacional. Ele comenta que essas mudanças representam cerca de 10% do conteúdo original da obra.

Ao expor a filosofia do livro, Stewart logo destaca a intenção de explorar o papel ativo do estudante como ser descobridor e o aspecto utilitário do Cálculo.

Dessa forma ele esclarece que:

Nesta edição, assim como nas seis primeiras, minha intenção é transmitir ao estudante uma noção de utilidade do cálculo e desenvolver a competência técnica, mas também me esforço para propiciar certo apreço pela beleza intrínseca do tema. Newton indubitavelmente experimentou uma sensação de triunfo quando fez suas grandes descobertas. Quero que os estudantes compartilhem um pouco desse entusiasmo (Stewart, 2013, p. ix).

Assim, ele se mostra um grande entusiasta de um movimento educacional norte-americano chamado “Calculus Reform” que teve como ponto de partida um polêmico documento em que o famoso matemático húngaro Peter Lax ataca os cursos de Cálculo (Rezende, 2003).

Neste documento, para explicar a baixa demanda pelo estudo de Cálculo, que disputava espaço com a Matemática Discreta, em alta na época por conta dos avanços das pesquisas computacionais, Lax afirma:

Quanto ao cálculo: os matemáticos não precisam de menos, mas de mais. A verdadeira crise é que atualmente ele é mal ensinado; o currículo permaneceu estacionário e os pontos de vista modernos, especialmente aqueles que têm a ver com o papel dos aplicativos e da computação, estão mal representados (Lax, 1986, p. 2).

O desabafo de Lax desencadeou uma série de debates sobre o ensino de Cálculo, o que culminou com a conferência de Tulane em 1986, citada por Stewart no prefácio de seu livro como grande influência para sua concepção de ensino de Cálculo. Esse evento é considerado o marco inicial do “Calculus Reform”.

Sobre essa corrente de pensamento Rezende (2003) afirma:

Segundo seus precursores, o “Calculus Reform” tem como características básicas: o uso de tecnologia, isto é, software computacional e calculadoras gráficas, tanto para o aprendizado de conceitos e teoremas como para a resolução de problemas; o ensino via a “Regra dos Três”, isto é, todos os tópicos e todos os problemas devem ser abordados numericamente, geométrica e analiticamente; grande preocupação, ou pretensão, em mostrar a aplicabilidade do Cálculo através de exemplos reais e com dados referenciados; tendência a exigir pouca competência algébrica por parte dos alunos, suprimindo essa falta com o treinamento no uso de Sistemas de Computação Algébrica (p. 4).

Assim, Stewart atribui a esse movimento a recomendação de que o ensino de Cálculo deve “concentrar-se na compreensão de conceitos” e que, para atingir esse objetivo deve-se usar a “Regra dos Três”. Stewart adiciona às abordagens numérica, geométrica e algébrica, o ponto de vista verbal para expandir a “Regra dos Três” e chamá-la de “Regra dos Quatro”.

Dessa forma ele afirma que seu livro contém elementos da reforma, principalmente por conta da busca de uma compreensão conceitual dos objetos matemáticos, porém, dentro de um contexto tradicional, pois, pretende manter as melhores tradições do ensino de Cálculo (Stewart, 2013).

Quanto ao público-alvo, na seção chamada *Ao aluno* o autor argumenta que, por conta da grande quantidade de material, o livro pode ser utilizado em qualquer curso. Além disso, ele recomenda que o estudante guarde o livro pois ele pode servir de lembrete para cientistas e engenheiros em atuação.

Ainda nessa seção o autor dá dicas de como se deve ler um livro de Cálculo. Segundo ele:

A leitura de um livro didático de cálculo difere da leitura de um jornal ou de um romance, ou mesmo de um livro de física. Não desanime se precisar ler o mesmo trecho muitas vezes antes de entendê-lo. E, durante a leitura, você deve sempre ter lápis, papel e calculadora à mão, para fazer contas e desenhar diagramas (Stewart, 2013, p. xix).

Além disso, ele afirma que, para um maior aproveitamento do livro, acredita que ler e compreender toda a seção antes de partir para os exercícios é muito mais interessante. Também sugere que o estudante tente resolver os exemplos sozinhos antes de ler o desenvolvimento feito no livro e que, ao realizar as tarefas, escreva os estágios da resolução de forma articulada, explicando-a passo a passo, pois parte do objetivo da obra é treinar o leitor a pensar logicamente (Stewart, 2013).

Também no prefácio, o autor apresenta como recursos didáticos: Exercícios conceituais, diversificados e com dificuldade progressiva; dados reais, ou seja, exemplos e exercícios baseados em situações mais próximas da realidade possível, como as que envolvem sismogramas de terremotos e tabelas sobre o consumo de energia elétrica; trabalho por meio de diversos projetos, para despertar o interesse do aluno e proporcionar a realização de estudos mais aprofundados; uma seção de resolução de exercícios denominados Problemas Quentes com questões que envolvem mais de um procedimento de resolução; e a sugestão e disponibilidade de recursos tecnológicos em um site da internet que serve de suporte.

Com relação aos projetos, ele elenca vários tipos: Projetos aplicados, que tem o objetivo de estimular a imaginação dos estudantes; Projetos de Laboratórios, que envolve tecnologia; Projetos Escritos, que pedem o acadêmico para comparar métodos atuais com os dos fundadores do Cálculo; e Projetos de descoberta, que antecipam resultados a serem discutidos posteriormente e incentivam o reconhecimento de padrões (Stewart, 2013).

No que diz respeito aos recursos tecnológicos, o autor disponibiliza em seu site www.stewartcalculus.com uma série instrumentos complementares à leitura do livro. Entre eles está o Homework Hints que funciona como lição de casa on-line e consiste em um encadeamento de exercícios com dicas para serem realizadas fora da sala de aula. Também há o Tools for Enriching Calculus que compreende um conjunto de gráficos dinâmicos que auxiliam na visualização dos conceitos matemáticos.

Além desses recursos, existem textos que complementam os assuntos do livro como tópicos de História da Matemática, curiosidades sobre calculadoras e revisões sobre álgebra e geometria analítica. Também há recursos disponíveis para compra por meio do site da editora como tutoriais e resoluções em vídeo, bem como materiais para professores como slides de aulas baseados nos capítulos do livro.

Sobre a diferença entre edições, comparamos a sétima edição de *Cálculo Volume 1* de 2013 com a quinta edição de 2006, também muito citada nas ementas dos cursos de Cálculo no Brasil. Consideramos também o lançamento póstumo do Stewart da nona edição norte-americana de 2021, lançada por seus colaboradores Daniel Clegg e Saleem Watson.

Com relação ao texto, há pouca diferença entre os livros. Pequenas mudanças ocorrem com relação à adição de imagens que servem para ilustrar situações complementares e que não afetam em nada o texto. Um exemplo de uma situação como essa, ocorre quando há uma questão resolvida sobre o Cálculo da velocidade de uma bola solta no alto da torre CN de Toronto e do lado do enunciado, o autor acrescenta uma foto da torre com a informação de que ele foi a mais alta do mundo.

Uma diferença que merece destaque diz respeito à forma com que a definição precisa de limite é representada. Na quinta edição ela aparece da seguinte forma: “Se para todo número $\varepsilon > 0$ há um número correspondente $\delta > 0$ tal que $|f(x) - L| < \varepsilon$ sempre que $0 < |x - a| < \delta$ ”. Em seguida, Stewart reescreve o finalzinho afirmando que outra forma de expressar é “se $0 < |x - a| < \delta$ então $|f(x) - L| < \varepsilon$ ”. Nas edições posteriores não há esta primeira forma de escrever.

Percebemos também que à medida que o tempo passa o livro acrescenta algumas questões em seus exercícios.

8.3. ANÁLISE FORMAL

O livro *Cálculo*, volume 1, 7ª edição, possui 661 páginas, divididas em 8 capítulos, além de prefácio, testes de verificação, uma seção de apresentação ao Cálculo, apêndices (que inclui as respostas dos exercícios ímpares) e índice remissivo.

O capítulo introdutório, chamado de *Uma Apresentação do Cálculo*, tem como objetivo trabalhar as noções intuitivas dos três principais conceitos da disciplina: o limite, a derivada e a integral. Ele serve para dar uma ideia ao leitor sobre assunto ao qual ele se debruçará nos capítulos seguintes sem, contudo, se aprofundar em definições e teoremas.

O capítulo 1, intitulado *Funções e Modelos*, serve para sintetizar os conteúdos que são pré-requisitos da disciplina e, com isso, expor os mais diversos tipos de funções necessárias para o estudo do Cálculo.

Com relação a este capítulo, nos chamou a atenção o fato de que o autor reserva nele uma seção chamada de *Quatro Maneiras de Representar uma Função* onde destaca que uma função pode ser representada de diversas formas.

Segundo ele:

É possível representar uma função de quatro maneiras:

- verbalmente (descrevendo-a com palavras)
- numericamente (por meio de uma tabela de valores)
- visualmente (através de um gráfico)
- algebricamente (utilizando-se uma fórmula explícita) (Stewart, 2013, p. 12).

Além disso, o autor ainda afirma que “Se uma função puder ser representada de quatro maneiras, em geral é útil ir de uma representação para a outra, a fim de obter um entendimento adicional da função” (Stewart, 2013, p. 12). Assim, percebemos certa aproximação entre a forma com que o Stewart trabalha os objetos matemáticos em seu livro e a concepção de aprendizagem matemática da TRRS.

Também é nesse capítulo que o Stewart apresenta a definição de função trabalhada na obra e que discutimos a seguir.

8.3.1. Definição de Função

A ideia de função é sintetizada pelo autor logo na primeira frase do Capítulo 1. Segundo ele: “As funções surgem quando uma quantidade depende da outra” (Stewart, 2013, p. 10). Essa afirmação é sucedida no livro por diversas situações-problemas que descrevem algum tipo de função em que é destacada a relação de dependência entre as grandezas.

Depois disso, o livro define uma função da seguinte forma:

Figura 54 - Definição de função do Stewart.

Uma **função** f é uma lei que associa, a cada elemento x em um conjunto D , exatamente um elemento, chamado $f(x)$, em um conjunto E .

Fonte: Stewart, 2013, p.10.

Sobre esse primeiro capítulo nos chama a atenção a concepção de um pré-

A partir dessa definição são apresentados os conceitos de domínio e imagem de uma função, sempre associados com as ideias de variável independente e variável dependente, respectivamente. Vale a pena ressaltar que o autor não define o que é o contradomínio.

Com relação à definição de função apresentada no livro, nos chama a atenção o papel central dado pelo autor à lei de associação entre as variáveis. Embora a regra que associa os elementos do domínio com os elementos do contradomínio (conceito que o autor não define) seja de indiscutível importância, concordamos com Lima (2003) quando afirma que uma função é estabelecida por três elementos: o domínio, o contradomínio e a lei de associação.

Essa ênfase, dada a lei de associação, é confirmada por uma analogia apresentada no livro logo após a função ser definida: segundo o autor, é útil considerar a função como uma máquina que transforma um elemento de entrada x , se este estiver no domínio da função f , em um elemento de saída $f(x)$ de acordo com a lei que define a função. Assim, o domínio seria o conjunto de todas as entradas, enquanto a imagem seria o conjunto de todas as saídas possíveis (Stewart, 2013).

Uma ilustração da Figura 55 sintetiza a analogia:

Figura 55 - Diagrama de máquina para uma função.



Fonte: Stewart, 2013, p. 10.

Outro elemento que reforça esse posicionamento é o fato de haver no livro, sem qualquer ressalva, exemplos e exercícios que pedem para determinar o domínio e a imagem de uma função. Se pensarmos que antes de definir uma função é preciso estabelecer o seu domínio e o contradomínio, esse tipo de exercício não faz sentido.

A internalização dessa centralidade da lei de associação de variáveis como fator definidor de uma função pode causar, ao longo do tempo de estudo, algumas dificuldades com relação à compreensão de conceitos matemáticos por parte do acadêmico. Algumas dessas possíveis dificuldades são, inclusive, percebidas pelo próprio Stewart, quando ele tenta trabalhá-las pontualmente na sequência de seu texto.

Um exemplo aparece na seção em que o livro aborda o conceito de integral. Nela Stewart indaga:

Figura 56 - Exemplo de dificuldade que pode ser ocasionada pela má compreensão do conceito de função.

O que está errado no seguinte cálculo?

$$\int_{-1}^3 \frac{1}{x^2} dx = \left. \frac{x^{-1}}{-1} \right|_{-1}^3 = -\frac{1}{3} - 1 = -\frac{4}{3}$$

Fonte: Stewart, 2013, p. 356.

É fácil chegar à conclusão de que esse cálculo está equivocado, pois a resposta da integral deu um número negativo enquanto a função é sempre positiva. O erro está no fato de que a função não está definida para $x = 0$, e, portanto, não é contínua no intervalo $[-1,3]$. Assim ela não é integrável nesse intervalo.

Entendemos que a crença, por parte do estudante, de que a fórmula (lei de formação) define a função pode contribuir para que esse tipo de erro aconteça, pois, uma vez que o acadêmico tem essa concepção, apenas realizará os cálculos que está acostumado a fazer, sem se preocupar com o domínio da função.

Uma última observação com relação à definição de função está relacionada a representação do conceito por meio do diagrama de Venn. O Stewart apresenta esse tipo de representação, que ele chama de diagrama de flechas, mas não explora com exemplos e contra exemplos.

1.1.1. Análise narrativa e as definições de limite e continuidade

Para o estudo do conceito de limite, concentramos nossas análises, especificamente, no capítulo introdutório chamado Uma Apresentação do Cálculo e no Capítulo 2: Limites e Derivadas. Juntos, esses capítulos contém 88 páginas (da página 1 à página 7 e da 75 à 155), o que representa 13,31 % da extensão do livro.

Obedecendo aos critérios adotados nesse trabalho, expostos no capítulo 4, compuseram o *corpus* para as análises: o capítulo introdutório Uma Apresentação do Cálculo e as seções do Capítulo 2 Limites e Derivadas: 2.1 Os problemas da Tangente e da Velocidade, 2.2 O Limite de uma Função, 2.4 A definição Precisa de um Limite, 2.5 Continuidade e 2.6 Limites no Infinito, assim como os exercícios correspondentes.

Na Quadro 13 estão as seções, e parte da seção 2.5, que ficaram de fora de nossa análise por trabalharem as propriedades operatórias do cálculo de limites, o que foge aos nossos objetivos.

Quadro 13 - Seções do livro do Stewart que ficaram de fora da análise.

Seção	Título	Extensão
2.3	Cálculo Usando Propriedades dos Limites	Página 91 a 100
2.5	Continuidade	(exemplo 4 ao exemplo 10) Página 111 a 117
2.7	Derivadas e Taxas de Variação	Páginas 131 a 139
2.8	A Derivada como uma Função	Páginas 140 a 155

Fonte: Stewart, 2013, p. v.

Assim, a parcela do livro que compôs o *corpus* do trabalho compreendeu a um total de 49 páginas, o que corresponde a pouco mais da metade dos capítulos reservados para tratar do conceito de limites, além de aproximadamente 303 exercícios.

No que diz respeito à ordem de apresentação do conteúdo, Stewart introduz o conceito de limite ao desenvolver situações-problemas que necessitem de tal conceito para serem resolvidas e apresenta em seguida a noção intuitiva de limite, limite lateral e limite infinito. Só depois disso é que expõe as definições matemáticas desses objetos. Dessa forma, ele finaliza essa parte do livro descrevendo o conceito de continuidade, para depois trabalhar as definições de limites no infinito.

A ordem de apresentação de conteúdos escolhida pelo Stewart é sintetizada na Figura 57:

Figura 57 - Análise narrativa do livro do Stewart.



Fonte: Elaborado pelo autor.

Alguns aspectos chamam à atenção na sequência narrativa escolhida pelo Stewart para abordar o conceito de limite e continuidade. O primeiro diz respeito a escolha por trabalhar extensivamente quase todos os conceitos de limites (limites, limites laterais, limites infinitos) por meio da noção intuitiva, ou “definição menos rigorosa”, desses conceitos. Assim ele destaca

duas definições de limites: a primeira menos formal e a segunda que ele chama de “definição precisa”.

Na Figura 58 apresentamos a definição menos precisa do conceito de limite dado pelo Stewart.

Figura 58 - Definição menos formal de limite.

1 Definição Suponha que $f(x)$ seja definido quando está próximo ao número a . (Isso significa que f é definido em algum intervalo aberto que contenha a , exceto possivelmente no próprio a .) Então escrevemos

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$$

e dizemos “o limite de $f(x)$, quando x tende a a , é igual a L ”

se pudermos tornar os valores de $f(x)$ arbitrariamente próximos de L (tão próximos de L quanto quisermos), tornando x suficientemente próximo de a (por ambos os lados de a), mas não igual a a .

Fonte: Stewart, 2013, p. 81.

É importante destacar que o Stewart não dá nome a essa definição inicial usada por ele. Chamamos a definição apresentada na Figura 58 de “menos formal”, “menos rigorosa” ou “menos precisa” por dois motivos. Primeiramente, em oposição à segunda definição que o próprio autor denomina de “definição precisa de limite”, e posteriormente por apresentar termos que não têm significado matematicamente precisos, como “arbitrariamente próximos” e “suficientemente próximos”.

Vale ressaltar que o autor trabalha essa “definição menos precisa” para calcular limites e apresentar suas propriedades operatórias, antes mesmo de se utilizar da definição precisa desse conceito. Primeiramente ele trabalha a ideia de encontrar os limites por meio de estimativas numéricas e inferências gráficas, para em seguida apresentar as propriedades operatórias (antes mesmo que estas sejam demonstradas).

Na Figura 59 temos um exemplo em que o autor usa a estimativa numérica para se encontrar o limite de uma função e que serve de modelo para que o leitor resolva os exercícios similares propostos.

Figura 59 - Exemplo de estimativa de limite dado pelo Stewart.

Estime o valor de $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x - 1}{x^2 - 1}$.

SOLUÇÃO

$x < 1$	$f(x)$	$x > 1$	$f(x)$
0,5	0,666667	1,5	0,400000
0,9	0,526316	1,1	0,476190
0,99	0,502513	1,01	0,497512
0,999	0,500250	1,001	0,499750
0,9999	0,500025	1,0001	0,499975

Com base nesses valores, podemos conjecturar que

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x - 1}{x^2 - 1} = 0,5$$

Fonte: Stewart, 2013, p. 81-82.

Além da estimativa numérica utilizada para encontrar o limite de uma função, Stewart apresenta também a construção de gráficos como recurso para resolver exercícios similares. Cabe aqui ressaltar que o autor incentiva a todo momento o uso de recursos digitais, como calculadoras gráficas e sistemas de computação algébrica, para resolução de exercícios.

Logo após trabalhar com as definições “menos formais” sobre limites, Stewart apresenta uma lista com as propriedades operatórias. Como dito anteriormente, essas propriedades são utilizadas pelo estudante para calcular os limites propostos, porém sem serem demonstradas, já que para isso se faz necessário definir limite por meio de épsilons e deltas.

Assim, o Stewart trabalha o conceito de limite e continuidade, primeiramente por meio de estimativas numéricas e interpretações gráficas. Usa propriedades operatórias como conjecturas matemáticas, para, a partir daí, definir formalmente os conceitos de Cálculo. Essa forma de abordar o conceito de limite é mais compatível com a trajetória histórica do surgimento do conceito, tendo em vista que este foi a ordem do caminho percorrido pelos antigos matemáticos até que a formulação da definição formal no final do Século XIX,

Embora o foco do nosso estudo não tenha contemplado a seção 2.3, outro aspecto interessante diz respeito a como o autor deixa claro, no exercício do cálculo de limites, qual o procedimento utilizado por ele ao levantar algumas indeterminações.

Ao se referir ao procedimento utilizando no exemplo (o autor enumera como exemplo 3) em que calcula o limite:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x - 1)(x + 1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} (x + 1) = 1 + 1 = 2$$

Stewart faz a seguinte observação:

Figura 60 - Levantamento de indeterminação no livro do Stewart.

OBSERVAÇÃO: No Exemplo 3 conseguimos calcular o limite substituindo a função dada $f(x) = (x^2 - 1)/(x - 1)$ por outra mais simples, $g(x) = x + 1$, que tem o mesmo limite. Isso é válido porque $f(x) = g(x)$, exceto quando $x = 1$ e, no cômputo de um limite, quando x tende a 1, não consideramos o que acontece quando x é exatamente *igual* a 1. Em geral, temos o seguinte fato útil.

Se $f(x) = g(x)$ quando $x \neq a$, então $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} g(x)$, desde que o limite exista.

Fonte: Stewart, 2013, p. 94.

A observação da Figura 60 é importante, pois, esclarece para o estudante, que ao levantar uma indeterminação desse tipo, ele está na verdade substituindo uma função por outra com comportamento parecido. Esse procedimento nem sempre é explicitado para o acadêmico que, por muitas vezes, o faz de forma automática, sem se dar conta do que realmente está a fazer.

Depois de trabalhar com o cálculo de limites por meio das propriedades operatórias, o livro expõe a definição precisa de limite descrita na Figura 61.

Figura 61 - Definição precisa de limite no livro do Stewart.

2 Definição Seja f uma função definida em algum intervalo aberto que contenha o número a , exceto possivelmente no próprio a . Então dizemos que o **limite de $f(x)$ quando x tende a a é L** , e escrevemos

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$$

se para todo número $\varepsilon > 0$ houver um número $\delta > 0$ tal que

$$\text{se } 0 < |x - a| < \delta \quad \text{então} \quad |f(x) - L| < \varepsilon$$

Fonte: Stewart, 2013, p. 101.

É por meio da definição da Figura 61 que o autor demonstra alguns limites específicos e prova uma das propriedades operatórias que o estudante, na seção anterior, já tinha tomado

como verdade. As provas das outras propriedades operatórias estão expostas no apêndice F do livro.

O outro aspecto relevante está relacionado à maneira como a sequência narrativa escolhida pelo Stewart influencia na forma com que ele define os conceitos de limite e continuidade. Assim, ele opta, primeiramente, por trabalhar a definição precisa de limite por meio de épsilons e deltas, para em seguida definir continuidade.

Essa definição é explorada em exemplos e exercícios, e, portanto, exige que o estudante acompanhe as demonstrações realizadas pelo autor e que as reproduza nas questões propostas.

Com relação ao conceito de continuidade de uma função no ponto, a definição é feita pelo conceito de limite, sem utilizar as famosas letras gregas.

Na Figura 62 temos a definição de continuidade utilizada pelo Stewart.

Figura 62 - Definição de continuidade do livro do Stewart.

1 Definição Uma função f é **contínua em um número a** se

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$$

Fonte: Stewart, 2013, p. 109.

Assim, o autor prefere trabalhar a definição de limites em termos de épsilon e delta e se exige de manipular os épsilons quando trabalha o conceito de continuidade. Além disso, ele utiliza a definição de continuidade para calcular facilmente alguns limites, pois, se a função é contínua no ponto a , basta determinar $f(a)$ para se calcular o limite de $f(x)$ quando x tende a a .

1.1.2. Representações Semióticas

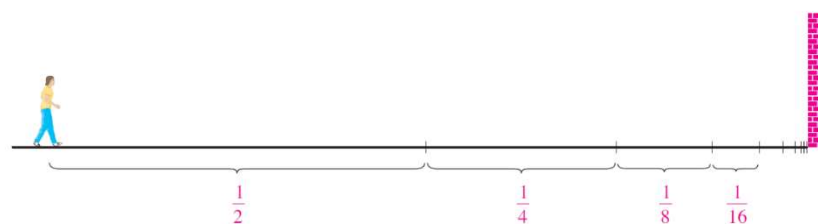
Sobre a análise semiótica, identificamos ao longo do texto das seções estudadas²⁴ um total de 484 representações de limites ou de funções utilizadas para abordar o conceito de limite.

Ao classificar essas representações de acordo o tipo de registro, percebemos a presença de representações com características diferentes das demais e que não apareceram nas outras obras: o registro figural.

Na Figura 63 temos um exemplo de registro figural.

²⁴ As partes do livro do Leithold consideradas nessa pesquisa estão descritas na seção 6.3.2 intitulada “Análise narrativa e definição de Limite e Continuidade” na página 178.

Figura 63 - Registro Figural



Fonte: Stewart, 2013, p. 6.

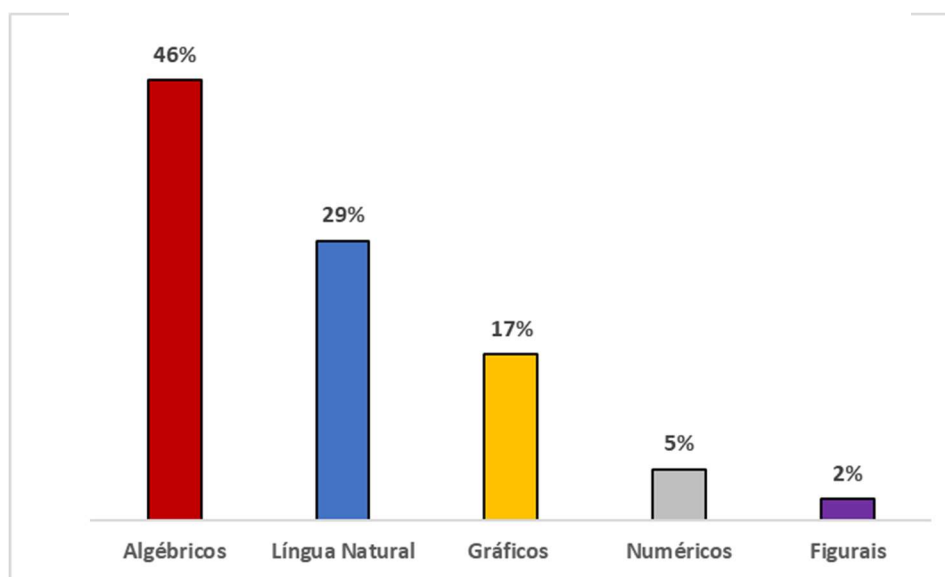
A Figura 63 se refere a um dos paradoxos de Zenão apresentados no livro (e discutidos nesse trabalho no capítulo 3) em que afirma que uma pessoa não pode caminhar diretamente de certo ponto da sala até a parede. Para isso ele precisaria percorrer primeiramente a metade do percurso, depois a metade da distância restante, e depois a metade da nova distância restante e assim sucessivamente, de forma que por mais que ele se aproxime da parede sempre vai existir uma distância restante para percorrer.

Consideramos essa imagem uma representação figural, pois a parede representa o limite da sequência de distâncias marcadas pelos traços sobre a reta, fazendo, dessa forma menção a medidas de comprimento da figura.

Assim, consideramos nesse trabalho representação em registro figural aquela que faz menção a medidas de comprimento de figuras.

Dessa forma, a classificação das representações semióticas, de acordo com os registros aos quais pertencem, é apresentada no Gráfico 14.

Gráfico 14 - Distribuição percentual das representações identificadas no trecho do texto analisado no livro do Stewart.



Fonte: Elaborado pelo autor com ajuda do software Excel.

Primeiramente, podemos destacar no texto do Stewart a presença de todos os registros considerados nesse trabalho (inclusive, obviamente, o registro figural). Assim, não houve omissão de nenhum tipo de representação.

Outro aspecto relevante é a grande quantidade de representações utilizadas. 484 é o maior número de representações dentre os três livros considerados nesse trabalho (o segundo maior tem 355). Isso mostra que o autor se utiliza de muitos exemplos para explicar os conceitos relacionados a limites.

Com relação ao uso dos registros, percebemos que, como os demais livros analisados, a maioria das representações pertence ao registro algébrico, porém com o menor percentual registrado (46% do total de registros). O segundo, terceiro e quarto registros mais utilizados pelo Stewart são os mesmos que os dos outros livros, ou seja, Língua Natural (29% total), Gráfico (17% do total) e registro numérico (5% do total), respectivamente. O Stewart tem o maior percentual em todos esses três itens, o que mostra um maior equilíbrio com relação ao uso dos registros.

Assim, podemos afirmar que este é o livro que tem mais representações, com maior diversidade de registros e com distribuição mais equilibrada entre esses registros.

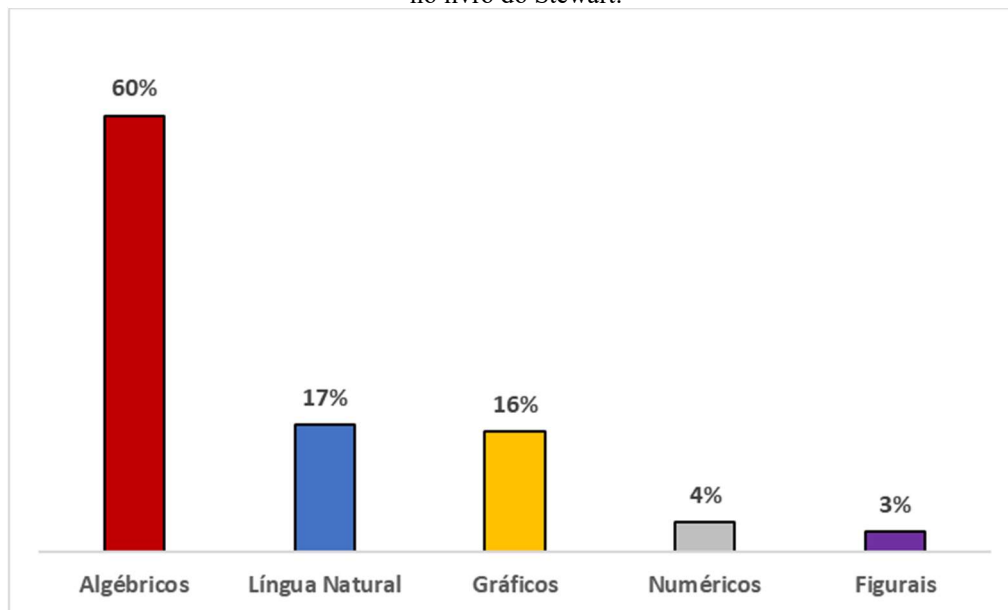
Segundo Silva (2022):

[...] a compreensão dos objetos matemáticos pressupõe a coordenação de ao menos dois registros de representação, pois desta maneira evita-se a confusão entre o objeto e sua representação. A coordenação de forma espontânea de distintos registros de representação semiótica é o ponto chave da aprendizagem matemática (p. 20).

Portanto, essa quantidade, diversidade e equilíbrio na utilização das representações presente no livro do Stewart pode contribuir para evitar que o estudante confunda o objeto matemático com sua representação, o que Duval chama de paradoxo cognitivo do pensamento matemático.

Já com relação aos tratamentos, percebemos que o livro do Stewart é mais parecido como as demais obras. Os dados levantados estão expostos no Gráfico 15.

Gráfico 15 - Distribuição percentual dos tratamentos identificados no trecho do texto analisado no livro do Stewart.



Fonte: elaborado pelo autor com ajuda do software Excel.

Conseguimos identificar um total de 225 operações de tratamento dentro do texto. Essa também é a maior quantidade de tratamentos encontrada entre os livros analisados (o livro que tem a segunda maior quantidade é o do Leithold com 173), e mais uma vez identificamos a presença de todos os registros, incluindo aí o registro figurais.

A maioria absoluta dos tratamentos presentes da obra do Stewart acontece entre registros algébricos (60% do total de tratamentos identificados). Mesmo apresentando um percentual alto de transformações internas relativas a tal registro, devemos perceber que esta taxa ainda está longe do percentual encontrado nos outros livros analisados que atingem a faixa de 80%.

Logo após apresentar a primeira definição (menos rigorosa) de limite, Stewart apresenta um exemplo de tratamento algébrico ao chamar atenção para outra forma de representação:

“Uma notação alternativa para $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$ é $f(x) \rightarrow L$ quando $x \rightarrow a$ ” (Stewart, 2013, p. 81).

Consideramos a passagem acima como tratamento, pois, numa leitura da esquerda para direita verificamos uma mudança na representação sem sair do registro algébrico. Embora haja a palavra “quando” no centro da segunda representação, o registro algébrico é predominante.

Na obra também há um percentual de tratamento em língua natural (17% do total) muito superior à dos demais livros aqui considerados (o segundo colocado é o do Leithold que tem 7% do total). Vale lembrar que Stewart apresenta a definição menos formal de limites por meio de um tratamento em língua natural ao explicar o significado da expressão algébrica

$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$: “[...] dizemos ‘o limite de $f(x)$, quando x tende a a , é igual a L ’ se pudermos tornar os valores de $f(x)$ arbitrariamente próximos de L (tão próximos de L quanto quisermos), tornando x suficientemente próximo de a (por ambos os lados de a), mas não igual a a ” (Stewart, 2013, p. 81).

Neste caso, temos primeiramente uma conversão do registro algébrico para a língua natural e em seguida um tratamento em linguagem natural. Aqui verificamos que a mudança entre uma representação e outra reside na modificação das expressões “o limite de $f(x)$ é igual a L ” para “pudermos tornar os valores de $f(x)$ arbitrariamente próximos de L ” e “quando x tende a a ” para “tornando x suficientemente próximo de a ”.

Percebemos também que a informação de que x não pode ser igual a a fica subentendida na primeira representação e que as palavras “arbitrariamente” e “suficientemente” foram escolhidas cuidadosamente. “Suficientemente” se refere a x tendendo a a porque, na definição mais formal, essa expressão é a primeira proposição da condicional, ou seja, “ x está próximo de a a uma determinada distância δ ” é condição suficiente para que “ $f(x)$ esteja próximo de L a uma determinada distância ε ”.

Falando ainda com outras palavras, Sempre que x estiver próximo de a a uma determinada distância δ , $f(x)$ estará próximo de L a uma determinada distância ε . Mas nem sempre que $f(x)$ estiver próximo de L a uma determinada distância ε , significa que x estará próximo de a a uma determinada distância δ .

Um exemplo disso é $\lim_{x \rightarrow 2} x^2 = 4$. Toda vez que x estiver próximo de 2, $f(x) = x^2$ estará próximo de 4. Porém nem sempre que $f(x) = x^2$ estiver próximo de 4, significa que x estará próximo de 2, ele poderá estar próximo de -2 , por exemplo. Outro exemplo é o limite de uma função constante $\lim_{x \rightarrow a} c = c$. Sempre que x tender a a , $f(x) = c$ tenderá a c . Porém quando $f(x) = c$ tender a c , x poderá tender para qualquer número real.

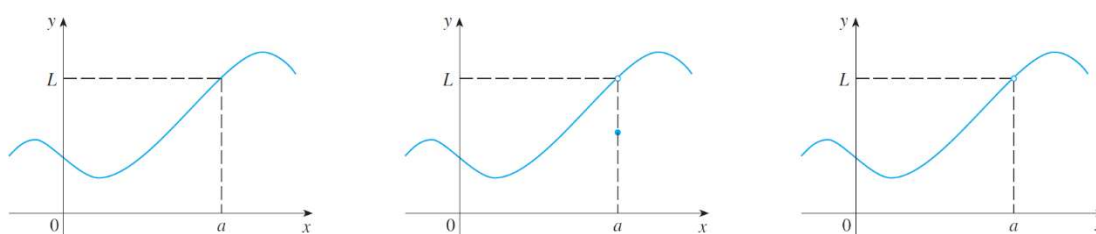
Por outro lado, a palavra “arbitrariamente” se refere a $f(x)$ tendendo a L . Isso acontece por causa do quantificador universal “todo” (ou “para todo”) que é aplicado ao ε que se refere à determinação de uma distância entre $f(x)$ e L . Enquanto o quantificado existencial “existe” é aplicado a δ que se refere a uma distância entre x e a . Há entre esse quantificadores, no que diz respeito a essa definição, outra condicional: para todo ε existe um δ . Assim, pode-se referir ao quantificador universal de diversas maneiras: “para todo ε ”, “qualquer que seja ε ” ou “arbitrado um ε ”.

Stewart lembra que a definição mais precisa é apresentada em uma seção posterior. Enquanto a definição menos rigorosa é expressa predominantemente em língua natural, a definição precisa é representada prioritariamente pela linguagem algébrica.

No que diz respeito ao tratamento gráfico (16% do total) houve um grande aumento no percentual com relação a esse tipo de registro se comparado com os outros livros analisados, que oscilavam entre 5% e 6% do total de tratamentos (Guidorizzi e Leithold, respectivamente).

Na Figura 64 apresentamos um tratamento gráfico que aparece na seção da primeira definição de limite.

Figura 64 - Tratamento Gráfico no Livro do Stewart.



Fonte: Stewart, 2013, p. 81.

Consideramos tais exemplos como tratamentos gráficos por percebermos, numa leitura da esquerda para direita, modificações em cada gráfico no sentido de que a existência do limite independe de $f(a)$. No primeiro caso, $f(a) = L$, no segundo $f(a) \neq L$ e no terceiro caso $f(a)$ não está definida. Ou seja, o autor utiliza tratamentos gráficos para discutir o que acontece com o limite quando a imagem de a muda.

Consideramos na Figura 64 cada passagem de um gráfico para o outro como um tratamento. Isso porque claramente as representações se alteram, mas continuam sendo gráficos, ou seja, são modificadas dentro de um mesmo registro.

Com relação aos tratamentos em registro numérico, embora o percentual tenha sido pequeno (4% do total), o Stewart apresenta o maior percentual entre os livros analisados.

Cabe aqui ressaltar a importância desse tipo de tratamento para a proposta pedagógica da obra. Como o autor busca exemplos e exercícios que atendam uma aproximação com a realidade e o incentivo ao uso de ferramentas digitais, as representações numéricas são utilizadas em maior quantidade e em momentos importantes. Assim, todos os conceitos relacionados a limites são primeiramente apresentados por meio de tabelas. Isso indica uma orientação para que os estudantes realizem estimativas com o uso de calculadoras gráficas.

Na Figura 65 mostramos as tabelas usadas no livro do Stewart para representar o comportamento da função dada por $f(x) = x^2 - x + 2$, nas proximidades de $x = 2$.

Figura 65 - Tabela no livro do Stewart.

x	$f(x)$	x	$f(x)$
1,0	2,000000	3,0	8,000000
1,5	2,750000	2,5	5,750000
1,8	3,440000	2,2	4,640000
1,9	3,710000	2,1	4,310000
1,95	3,852500	2,05	4,152500
1,99	3,970100	2,01	4,030100
1,995	3,985025	2,005	4,015025
1,999	3,997001	2,001	4,003001

Fonte: Stewart, 2013, p. 80.

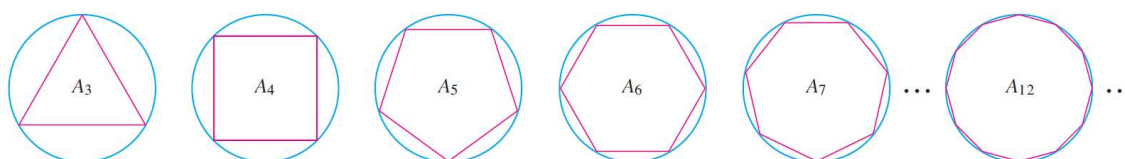
A tabela da Figura 65 representa a função utilizada como motivação para a apresentação da definição de limite. Na tabela lado esquerdo observamos que os valores de $f(x)$ vão se aproximando de 4 pela esquerda (ou seja, por valores inferiores a 4), na medida em que os valores de x se aproximam de 2 pela esquerda (ou seja, por valores inferiores a 2).

Na tabela do lado direito podemos observar que os valores de $f(x)$ vão se aproximando de 4 pela direita (ou seja, por valores superiores a 4), na medida em que os valores de x se aproximam de 2 pela direita (ou seja, por valores superiores a 2).

Consideramos que entre essas duas tabelas há um tratamento numérico, pois são elas estão dispostas lado a lado para podermos comparar comportamento de $f(x)$. Com relação as aproximações de x na direção de a , pela esquerda e pela direita.

Diferentemente dos demais livros, encontramos na obra do Stewart tratamentos que envolvem representações em registro figural (3% do total). A Figura 66 mostra um tratamento figural utilizado no texto do Stewart.

Figura 66 - Tratamento Figural



Fonte: Stewart, 2013, p. 2.

A Figura 66 mostra, em sequência, seis polígonos regulares inscritos em circunferências idênticas. À medida que fazemos a “leitura” dessa imagem da esquerda para a direita, vemos que os polígonos vão aumentando em uma unidade o número de lados até aparecerem os pontos de reticência, seguido de um novo polígono inscrito numa circunferência, seguida de mais pontos de reticência.

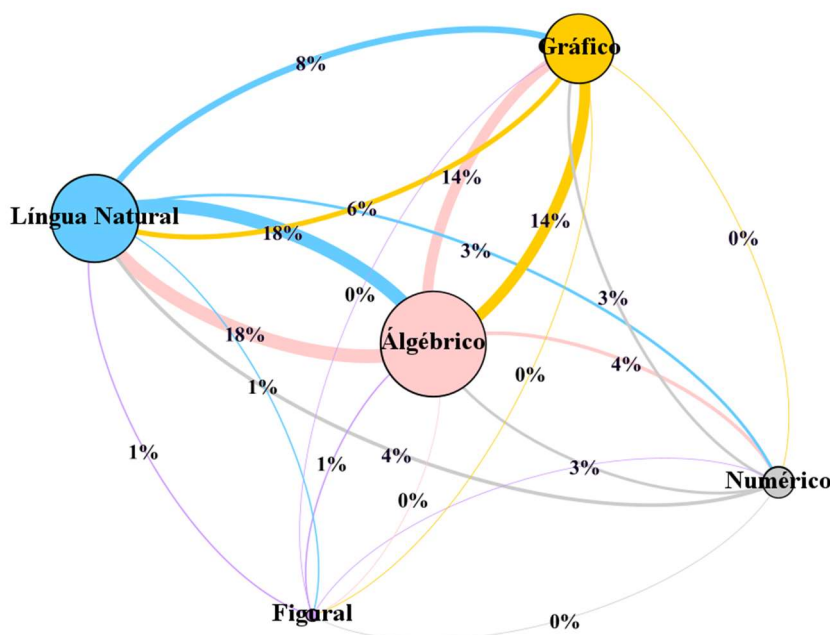
Classificamos essa imagem como representação figural de limite por entendermos que, cada vez em que a quantidade de lados do polígono regular vai aumentando, mais próximo o polígono fica da circunferência. Assim, entendemos que a circunferência representa o limite (no infinito) do polígono regular quando a quantidade de lados tende a infinito.

Embora haja pouca quantidade de representações figurais ao longo do texto, acreditamos que elas ajudem a ilustrar para o estudante o significado do conceito de limite e que a presença desse tipo de registro reforça o compromisso do autor em trabalhar com a diversidade de representações dos conceitos matemáticos.

No que diz respeito às conversões, foram identificadas ao longo do texto um total de 294 transformações entre representações de registros diferentes. Mais uma vez o Stewart apresenta a maior quantidade de operações desse tipo dentre os livros estudados (o Guidorizzi teve 135, enquanto o Leithold 162).

No Quadro 16 apresentamos um mapa de rede, construído com a ajuda do software Gephi, que expõe os registros e suas conversões.

Gráfico 16 - Distribuição percentual das conversões identificadas no trecho do texto analisado no livro do Stewart.



Fonte: Elaborado pelo autor com auxílio do software Gephi.

Como consideramos nesse livro um registro a mais (o registro figural), observamos que, no mapa do Gráfico 16, há 5 nós, sendo que o registro figural está em cor roxa. Dessa forma, dos 20 tipos de conversões possíveis, o Stewart lança mão de 18. Apenas as conversões de registro gráfico para figural e de numérico para figural não foram identificadas no texto.

As conversões de registro algébrico para figural, de figural para gráfico, de figural para numérico e de gráfico para numérico tiveram apenas um exemplar no levantamento e, por isso, não atingiram a um ponto percentual.

No Gráfico 16 percebemos que o registro algébrico é o que mais participa das conversões, sendo que 71% do total de conversões parte ou chega a alguma representação algébrica.

Se observarmos os tipos de conversão mais frequentes, podemos dividir nossa análise em duplas. As conversões mais utilizadas no livro do Stewart são as do registro em língua natural para o registro algébrico (18% do total) e as do registro algébrico para língua natural (18% do total). Ou seja, 36% do total das conversões envolve o registro algébrico e a língua natural.

A seguir expomos um exemplo de conversão da língua natural para o registro gráfico presente no livro do Stewart:

Seja A_n a área do polígono inscrito com n lados. À medida que aumentamos n , fica evidente que A_n ficará cada vez mais próxima da área do círculo. Dizemos, então, que a área do círculo é o limite das áreas dos polígonos inscritos e escrevemos

$$A = \lim_{n \rightarrow \infty} A_n$$

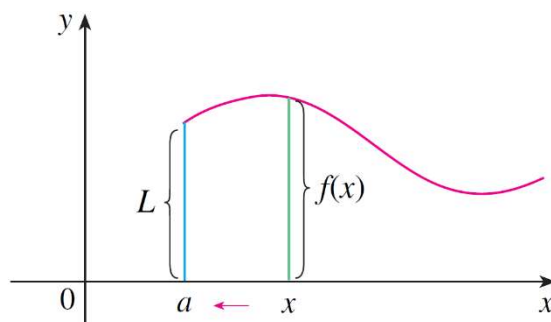
(Stewart, 2013, p. 12).

O texto acima descreve o que acontece com os polígonos apresentados na Figura 66. Assim, essa conversão é precedida de uma conversão do registro figural para a língua natural. A expressão algébrica indica que a área do polígono A_n (função definida em $n \in \mathbb{N}$) vai alcançar a área do círculo A (o limite) se aumentarmos o número de lados n indefinidamente.

As conversões que envolvem a dupla, registro gráfico e registro algébrico, representam 28% do total. Metade dessa porcentagem se refere à conversão de gráfico para algébrico e a outra metade a conversão inversa.

Na Figura 67 apresentamos um exemplo de conversão de gráfico para algébrico presente no livro do Stewart.

Figura 67 - Conversão do registro gráfico para o algébrico presente no livro do Stewart.



$$(b) \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = L$$

Fonte: Stewart, 2013, p. 85.

Essa conversão se refere a um limite lateral pela direita. No gráfico observamos, na curva de uma função f , o que acontece quando x se aproxima de a pela direita, ou seja, por valores superiores a a . Essa aproximação é indicada pela setinha em vermelho. Enquanto isso, são destacados no gráfico os comprimentos de $f(x)$ e de L , o que indica que o valor deles se aproximam na média em que x se aproxima de a .

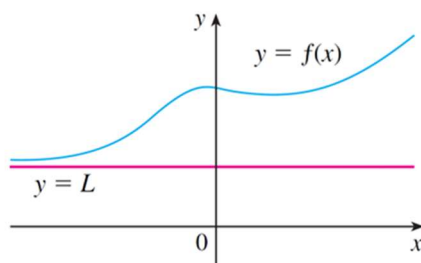
Toda essa representação é sintetizada pela expressão algébrica exposta abaixo do gráfico, onde a aproximação por valores superiores a a (pela esquerda) é indicada por um sinal de mais sobrescrito em a .

A terceira dupla mais frequente em conversões são a língua natural e o gráfico com 14% do total das transformações dessa natureza. 8% do total é de língua natural para gráfico e 6% de conversões inversas.

Na Figura 68 temos um exemplo de conversão da língua natural para o registro gráfico presente no livro do Stewart.

Figura 68 - Conversão da Língua Natural para o Registro Gráfico no Livro do Stewart.

“o limite de $f(x)$, quando x tende a menos infinito, é L ”



Fonte: Stewart, 2013, p.120 – 121.

Na Figura 68 vemos um limite no infinito sendo exemplificado no gráfico. Enquanto a proposição afirma que L é o limite da função quando x decresce indefinidamente, o gráfico mostra a assíntota vermelha indicando o limite e a curva em azul representando o comportamento da função.

Assim, podemos constatar que, em detrimento das representações numéricas e figurais, as conversões se concentraram em torno dos registros algébricos, gráficos e em língua natural. Mesmo assim, a frequência do uso de conversões que envolvem representações numéricas, em números absolutos, ficou consideravelmente acima dos demais livros: o que tem o segundo maior número de conversões com representações numéricas é o livro do Leithold com 29, enquanto no Stewart identificamos 54.

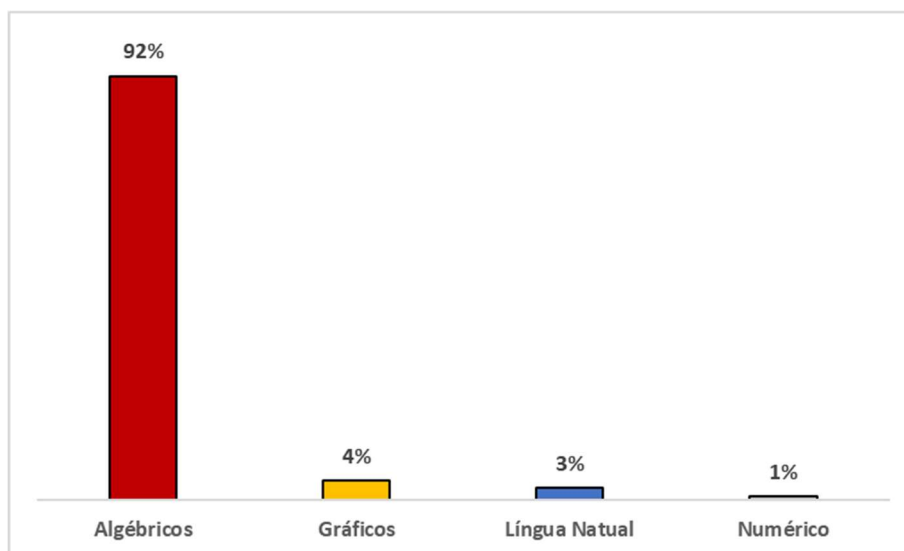
1.1.3. Representações Semióticas nos Exercícios

No que diz respeito aos exercícios considerados²⁵, identificamos um total de 336 representações nos enunciados das, aproximadamente 303 questões. O livro do Stewart é disparado, entre as obras analisadas, o que propõe mais exercícios e o que tem mais representações semióticas de limites ou funções em seus enunciados.

No Gráfico 17 apresentamos a classificação das representações presentes nos enunciados.

²⁵ As partes do livro do Leithold consideradas nessa pesquisa estão descritas na seção 6.3.2 intitulada “Análise narrativa e definição de Limite e Continuidade” na página 178.

Gráfico 17 - Distribuição percentual das representações identificadas nos enunciados dos exercícios analisados no livro do Stewart.



Fonte: elaborado pelo autor com ajuda do software Excel.

Vemos no Gráfico 17 que o único registro que não foi contemplado nos enunciados dos exercícios é o figural, que não aparece nos demais livros analisados.

É fácil perceber o predomínio do registro algébrico entre as representações dos enunciados (92% do total), não havendo, portanto, sequer 10% de representatividade dos demais registros. Nesse aspecto o livro do Stewart se assemelha às demais obras pesquisadas, porém, mais uma vez, em números absolutos ele supera estes livros com relação à língua natural (9 contra 6 dos demais somados).

Surpreendentemente o livro do Stewart é o único que apresenta gráficos nos enunciados dos trechos analisados. Embora haja nos exercícios dos outros livros questões que envolvam conversões, nenhum deles apresenta o gráfico no enunciado, pois, solicitam que o estudante o construa.

Embora a construção de gráficos seja uma atividade importante, que inclusive envolve a conversão de representações, acreditamos que a presença deles nos enunciados dos exercícios oportuniza o trabalho com a identificação visual dos conceitos, proporcionando assim a abordagem de interpretação global defendida por Duval.

Sobre essa abordagem, ele afirma que:

A leitura das representações gráficas requer dos alunos a discriminação das diferentes variáveis visuais pertinentes constituintes deste tipo de representação. Requer também que os alunos tenham consciência das correspondências entre as variações visuais dos gráficos e as alterações significativas na escrita algébrica da relação (Duval, 2011, p. 96).

Duval destaca ainda que tal abordagem vai na contramão da prática corrente que fundamenta as construções gráficas na associação entre pares ordenados de números e pontos no plano.

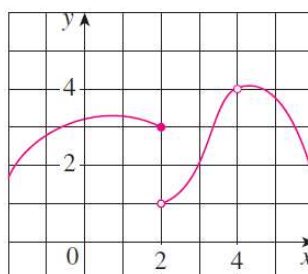
Na Figura 69 temos um exercício do livro do Stewart que apresenta gráfico no enunciado.

Figura 69 - Gráfico no Exercício do Stewart.

4. Use o gráfico dado de f para dizer o valor de cada quantidade, se ela existir. Se não existir, explique por quê.

(a) $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x)$ (b) $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x)$ (c) $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$

(d) $f(2)$ (e) $\lim_{x \rightarrow 4} f(x)$ (f) $f(4)$



Fonte: Stewart, 2013, p. 88.

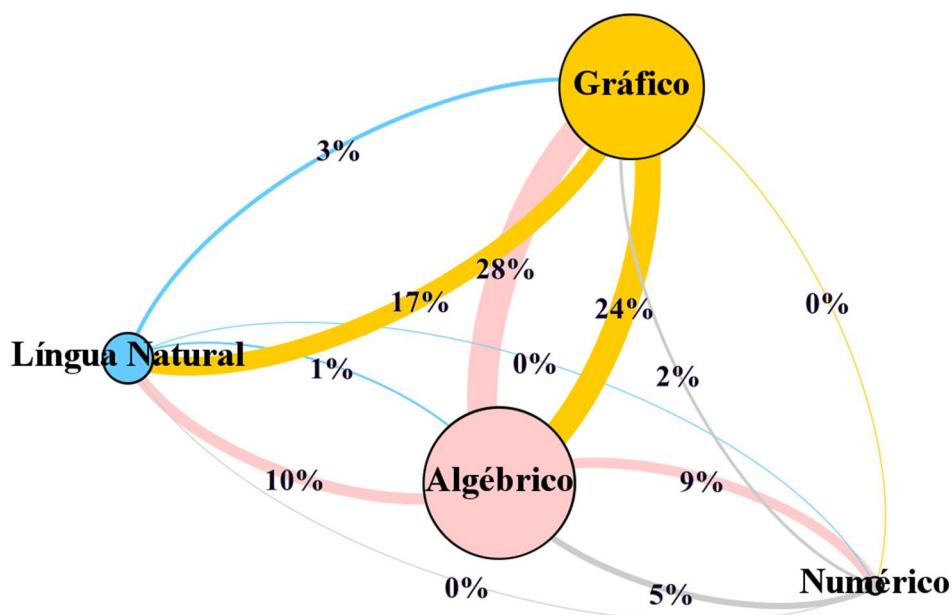
O exercício da Figura 69 apresenta duas conversões: a do registro gráfico para o algébrico, quando o estudante identifica no gráfico cada um dos limites e depois os representa algebricamente; e do registro algébrico para a língua natural, em casos de não existência do valor procurado.

Por meio do gráfico da Figura 69 o estudante pode identificar conceitos como limites laterais (pela direita e esquerda), o próprio conceito de limite quando os limites laterais coincidirem e, ainda, o conceito de continuidade pode ser explorado.

Com relação às conversões sugeridas nos enunciados dos exercícios analisados, conseguimos identificar um total de 258 dessas transformações. Mais uma vez é a maior quantidade de conversões sugeridas nos exercícios entre as obras analisadas, superando o livro do Leithold com 115 e o do Guidorizzi com apenas 19.

No Gráfico 18 apresentamos a distribuição percentual das conversões presentes nos exercícios do Stewart.

Gráfico 18 - Distribuição percentual das conversões propostas nos exercícios analisados no livro do Stewart.



Fonte: Elaborado pelo autor com auxílio do software Gephi.

Como não identificamos conversões que envolvem o registro figural, não o consideramos no mapa de rede do Gráfico 18.


Vemos que das 12 conversões possíveis, apenas 2 não foram propostas pelo autor: de língua natural para o registro numérico e do registro numérico para língua natural. A conversão do registro gráfico para o numérico só apareceu uma vez e, por isso, não atingiu um por cento.

Assim, podemos ver que, confirmando uma tendência dos demais livros, as representações algébricas e gráficas são as que mais participam das conversões sugeridas nos exercícios (77% do total das conversões sugeridas conta com a participação do registro algébrico, enquanto 74% com a de gráficos). O registro em língua natural aparece com 32% do total e em seguida o registro numérico com 16% do total de conversões.

As conversões com maior frequência são as do registro algébrico para o gráfico (28% do total), que indicam quando o exercício pede para se construir um gráfico a partir da fórmula da função. Em seguida aparecem as que partem do registro gráfico para o algébrico, que são as que geralmente pedem para que se identifique alguma fórmula, ou se calcule algo, por meio de uma leitura de gráfico, seja ele explícito no enunciado ou construído pelo próprio estudante (24% do total);

Na Figura 70 temos um exemplo de exercício que envolve a conversão do registro algébrico para o gráfico, presente no livro do Stewart.

Figura 70 - Conversão do registro algébrico para o gráfico no exercício do Stewart.

-  **27.** (a) A partir do gráfico da função $f(x) = (\cos 2x - \cos x)/x^2$ e dando *zoom* no ponto em que o gráfico cruza o eixo y , estime o valor de $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$.
 (b) Verifique sua resposta da parte (a), calculando $f(x)$ para valores de x que se aproximem de 0.

Fonte: Stewart, 2013, p.90.

O símbolo vermelho expresso no exercício acima indica que, para resolver a questão, se faz necessário o uso de alguma calculadora gráfica ou software. Por isso o autor pede para dar um *Zoom* em determinado ponto do gráfico. É importante destacar que Stewart utiliza esses exercícios em que sugere o uso de recursos digitais em questões mais complexas.

Segundo Goldenberg (2000):

Alguns problemas são difíceis demais para serem colocados em uma sala de aula apenas com lápis. Algumas lições exigem que os alunos experimentem certos objetos matemáticos e vejam como eles respondem. Alguns requerem representações visuais—gráficos, diagramas, figuras geométricas, imagens em movimento - que respondem às perguntas, respostas ou comandos dos alunos (p.1).

Ainda segundo Goldenberg (2000), a tecnologia auxilia os estudantes a desenvolver novos olhares para os problemas matemáticos, ajuda no desenvolvimento das habilidades de generalização e flexibilidade de pensamento, além de permitir a construção de modelos mentais.

Mesmo, nos exercícios em que o estudante precisa utilizar algum recurso digital para construir o gráfico, consideramos essas transformações como conversões do registro algébrico para o gráfico.

Neste exercício, não é sugerido o cálculo (tratamento) algébrico, pois, no livro, até esta seção, o autor não apresenta os recursos necessários para se efetuar esse tipo de procedimento. Além disso, para identificar as transformações sugeridas, consideramos os procedimentos realizados nos exemplos.

Ainda sobre o exercício da Figura 70, podemos afirmar que há três conversões sugeridas: a letra a) sugere a conversão do registro algébrico $\left(\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\cos 2x - \cos x}{x^2}\right)\right)$ para o registro gráfico; e a letra b) sugere uma conversão do registro gráfico para uma tabela (numérico) e do numérico para o algébrico ao solicitar que o estudante realize uma inferência.

Outra conversão com uma frequência significativa foi a do registro gráfico para a língua natural (17% do total). Esse tipo de transformação ocorre quando se pede para se descrever algo sobre um gráfico.

Na Figura 71 temos um exemplo de questão do livro do Stewart que necessita de conversão do gráfico para língua natural, e vice-versa, para ser resolvida.

Figura 71 - Conversão de gráfico para língua natural do Stewart.

9. A tarifa T cobrada para dirigir em um certo trecho de uma rodovia com pedágio é de \$ 5, exceto durante o horário de pico (entre 7 da manhã e 10 da manhã e entre 4 da tarde e 7 da noite), quando a tarifa é de \$ 7.
- (a) Esboce um gráfico de T como função do tempo t , medido em horas após a meia-noite.
 - (b) Discuta as descontinuidades da função e seu significado para alguém que use a rodovia.

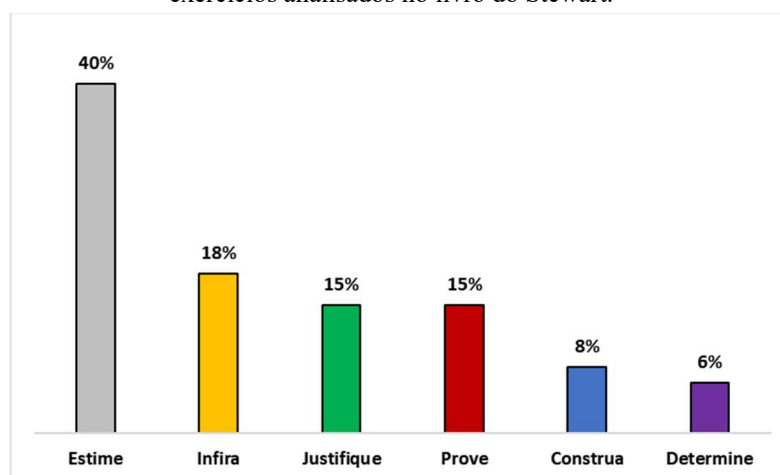
Fonte: Stewart, 2013, p. 117.

Na Figura 71 temos duas conversões sugeridas: na letra a) pede-se para esboçar o gráfico e, portanto, há uma conversão de língua natural para gráfico, e; na letra b) pede-se para discutir as descontinuidades, o que indica uma conversão do gráfico construído por conta da letra a) para língua natural.

No que diz respeito aos verbos dos enunciados, identificamos um total de 558 utilizados nos exercícios considerados no livro do Stewart. Assim, a obra em questão, também nesse quesito, é recordista entre os livros considerados nesse trabalho, sendo que o segundo livro que utiliza mais verbos é o do Leithold com 168.

Os verbos utilizados no livro do Stewart estão classificados conforme a Gráfico 19.

Gráfico 19 - Distribuição percentual dos verbos encontrados nos enunciados dos exercícios analisados no livro do Stewart.



Fonte: Elaborado pelo autor com auxílio do software excel.

O primeiro aspecto que podemos destacar no Gráfico 19 é que todos os verbos considerados nesse trabalho estão presentes no livro do Stewart, o que indica uma diversidade de exercícios propostos.

Outro ponto relevante é que há praticamente uma inversão entre os verbos mais citados no livro do Stewart com relação aos demais livros. O verbo *determine*, por exemplo, é o mais citado nos enunciados dos outros livros, enquanto no livro do Stewart é o menos utilizado (6% do total de verbos presentes no enunciado). Enquanto isso, o verbo *estime*, pouco é citado nos enunciados das outras obras, enquanto no livro do Stewart é o mais utilizado (40% do total).

Na Figura 72 temos um exemplo de questão que envolve o verbo *estime*.

Figura 72 - Verbo estimar no enunciado da Stewart.

 28. (a) Estime o valor de

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{sen } x}{\text{sen } \pi x}$$

traçando o gráfico da função $f(x) = (\text{sen } x)/(\text{sen } \pi x)$. Forneça sua resposta com precisão de duas casas decimais.

Fonte: Stewart, 2013, p. 90.

Mais uma vez o símbolo em vermelho indica que o estudante necessita de recursos digitais para resolver a questão. Identificamos nessa questão dois verbos: *estime* e *construa*. Isso porque além de pedir para estimar o valor do limite ainda pede para traçar (construir) o gráfico da função. Tanto o verbo *estimar* quanto o verbo *construir*, normalmente, estão associados ao uso de gráficos ou tabelas (registro numérico).

Os verbos *infira* e *justifique* geralmente estão entre os menos citados nos demais livros, enquanto no livro do Stewart aparecem em segundo e terceiro lugar, (18% e 15% do total, respectivamente).

Na Figura 73 expomos uma questão que envolve o verbo *justifique*.

Figura 73 - Verbo Justificar no Exercício do Stewart.

1. Explique com suas palavras o significado da equação

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 5$$

É possível que a equação anterior seja verdadeira, mas que $f(2) = 3$? Explique.

Fonte: Stewart, 2013, p. 88.

Neste trabalho o verbo explicar foi classificado na categoria *justifique*. Esse tipo de questão está associado geralmente ao registro da língua natural. Na questão da Figura 73, temos também um exemplo de conversão do registro algébrico ($\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 5$) para a língua natural.

Por fim, constatamos que os verbos *prove* e *construa*, como os demais livros, continuam em posições intermediárias no livro do Stewart (15% e 8% do total, respectivamente).

1.2. INTERPRETAÇÃO/REINTERPRETAÇÃO

James Stewart é natural da cidade de Toronto, fez sua formação acadêmica em instituições de grande prestígio internacional e com professores renomados. Estudou no Canadá, Estados Unidos, Inglaterra e trabalhou em grandes instituições canadenses, tendo a Universidade de Toronto como a que teve maior vínculo.

Foi músico profissional, membro de orquestras, e muito engajado na luta pelos direitos dos grupos LGBT. A Música dividiu com a Matemática grande parte de seus estudos e seu ativismo lhe mobilizou para promover eventos beneficentes, evidenciando-o como homem sensível e humanista.

Obteve muito dinheiro e prestígio com o sucesso da venda de seus livros e ficou famoso por gastar uma fortuna na construção de Casa Integral, uma mansão que abriga uma área para concertos de música clássica, com excelente acústica e toda caracterizada por curvas inspiradas em funções matemáticas famosas.

Teve grande influência do movimento “Calculus Reform” para a elaboração de seu livro, que buscar atender também, em seu conteúdo e metodologia de ensino, outras tendências da Educação Matemática como: o uso de tecnologias digitais, a Modelagem Matemática, a

diversificação de representações semióticas (regra dos quatro), a resolução de problemas e o uso da História da Matemática.

Percebemos que a definição de função adotada no livro, tem na sua fórmula algébrica uma centralidade exagerada e que este destaque pode acarretar problemas conceituais apontados pelo próprio autor em seções pontuais.

Embora haja predominância do registro algébrico em todos os levantamentos, seu livro é, dentre os considerados nesse trabalho, o que utiliza a maior quantidade e diversidade de representações de limites e funções em seu texto, o que propõe maior quantidade e diversidade de conversões nos exercícios, e o que apresenta uma maior variedade de questões, tendo em vista os verbos do enunciado.

Há muitos exemplos e exercícios contextualizados no livro e, diferentemente das outras obras que têm como verbo predominante no enunciado dos exercícios o *determine*, os verbos mais utilizados no livro do Stewart são o *estime* e o *infira*. Além disso, ele é o único em que foi identificado o registro figural.

A sequência narrativa utilizada pelo autor para abordar o conceito de limites é bastante alinhada com a história do conceito. Exemplos e exercícios de estimar, a definição menos rigorosa de limites, bem como as propriedades anunciadas em forma de conjecturas, dão ao leitor a possibilidade de compreender o conceito e calculá-lo antes mesmo de se conhecer sua definição precisa.

Com relação à tecnologia, o livro do Stewart é certamente o que mais sugere e disponibiliza recursos digitais. Exercícios são preparados especialmente para serem resolvidos mediante aos recursos disponibilizados em sites referentes ao livro ou por meio de calculadoras gráficas.

Acreditamos que essas inovações, aliadas a diversidade de exercícios e as tendências de Educação Matemática contempladas, são as grandes responsáveis pela boa aceitação do livro. Em nosso levantamento, todos os entrevistados afirmaram conhecê-lo e 86% dos professores consultados o consideram bom ou ótimo para adotar em um curso de Cálculo.

Assim, vemos o livro do Stewart como uma obra que mais se alinha com a concepção de aprendizagem da TRRS, embora haja problemas quanto à definição de função adotada e espaço para um equilíbrio ainda maior entre os registros de representação, principalmente no que se refere aos exercícios.

9. CONSIDERAÇÕES

“O sábio começa no fim; o tolo termina no começo.”

George Polya²⁶

Encerramos nossa discussão, repassando as fases da HP, falando da importância da TRRS para a consecução desse trabalho, retomando os problemas de pesquisa, fazendo um comparativo entre as três obras analisadas, salientando as diferenças, semelhanças e deixando algumas sugestões para futuras investigações.

A Hermenêutica da Profundidade foi a metodologia de pesquisa que nos guiou pela construção desse trabalho investigativo a respeito das abordagens que os livros de Cálculo trazem sobre o conceito de limites.

Por meio da análise sócio-histórica pudemos conhecer um pouco da trajetória formativa e profissional de cada um dos autores dos livros, nos situando sobre o momento em que conceberam suas obras, os espaços ocupados por eles nesse período e, tendo a oportunidade de entender um pouco sobre as influências de cada um.

Conhecer a história de vida de cada autor foi uma experiência surpreendente e emocionante. Ao estudar um livro de Cálculo, nem passa pela cabeça do estudante a cinefilia de um autor, ou se o outro é músico e ativista, ou ainda a opinião do autor no que diz respeito aos rumos do ensino de sua instituição formadora. Seria bastante interessante se essas informações estivessem ao alcance dos estudantes, pois elas humanizam o autor, os aproximam do leitor e ajudam a compreender aspectos importantes de sua escrita.

A análise formal nos permitiu conhecer com profundidade as definições utilizadas, a sequência narrativa escolhida, bem como a forma com que mobilizaram as representações semióticas, tanto no texto como nos exercícios, a fim de ensinar o conceito de limite.

Constatar que as sequências narrativas dos livros de cálculo são bastante diferentes, e verificar as consequências disso na definição dos conceitos matemáticos, foi bastante surpreendente e nos fez refletir, como docentes, sobre qual a melhor maneira de apresentar os conceitos de cálculo nas aulas para facilitar a aprendizagem do estudante. Embora não tenhamos

²⁶ POLYA, G. **How to Solve it**. Garden City, Doubleday, 1957. p.223.

encontrado resposta única para essa reflexão, já temos as indicações de quais definições de conceitos devemos utilizar para cada sequência narrativa escolhida.

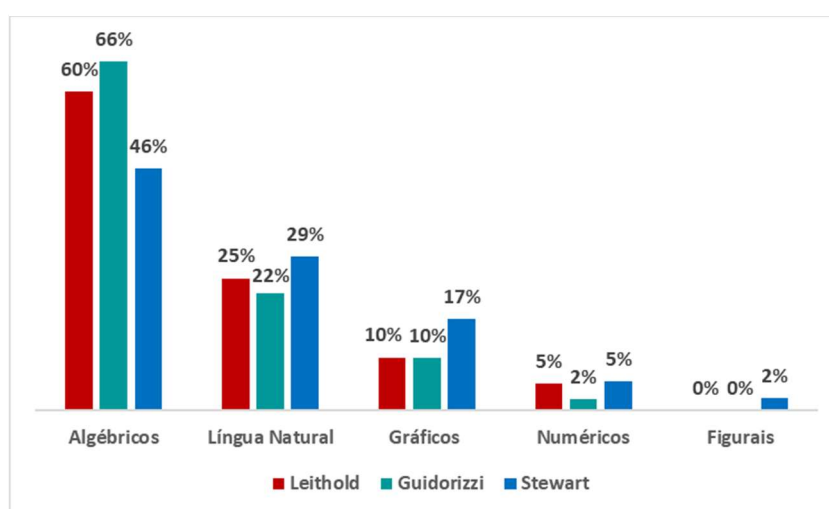
Da mesma maneira, o estudo sobre a TRRS nos trouxe reflexões a respeito da diversificação de registros no que tange o trabalho docente e na elaboração de exercícios que contemplem o tratamento e a conversão de representações. Elaborar exercícios que proponham o tratamento numérico e a conversão do registro numérico para a língua natural é bastante desafiador, por exemplo.

Na fase de interpretação/reinterpretação fizemos uma síntese das análises de cada livro, para refletirmos sobre a relação entre sua estrutura formal e o contexto em que ele foi produzido, evitando assim a falácia do internalismo e do reducionismo.

Diante de tais procedimentos realizados, voltamos ao nosso primeiro problema de pesquisa: **Quais os tipos de registros de representação semiótica é possível identificar nessas obras e como eles podem influenciar no ensino de limites de funções?**

Quanto ao texto, todos os livros utilizam predominantemente o registro algébrico, seguido da língua natural, dos gráficos e do registro numérico, respectivamente. O livro do Stewart é o único que se utiliza de registros figurais, além de ser o que tem a distribuição mais equilibrada entre os registros (vide Gráfico 20).

Gráfico 20 - Comparação sobre o uso de registros no texto.



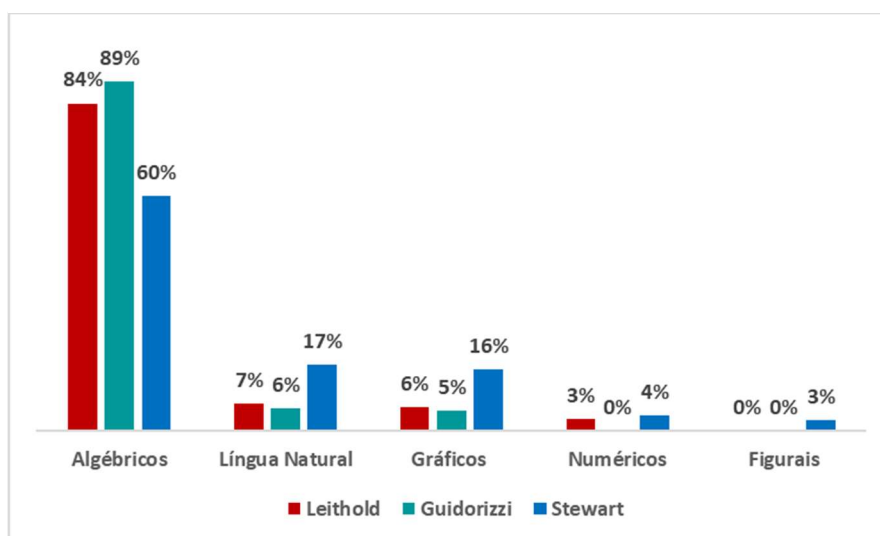
Fonte: Elaborado pelo autor com auxílio do software Excel

Vemos que, dentre os três livros, o Stewart tem o menor percentual de representações algébricas e o maior percentual de todas as outras representações, demonstrando, dessa forma um melhor equilíbrio com relação ao uso dos registros. Por outro lado, o Guidorizzi tem o maior

uso de representações algébricas e menor resultado entre todos os outros registros, mostrando maior disparidade entre eles.

Com relação aos tratamentos, o predomínio algébrico em todos os livros fica ainda mais evidente: dois deles superam a faixa dos 80% de tratamento algébrico. Mais uma vez o livro do Stewart se mostra menos desequilibrado, havendo tratamentos em língua natural e gráficos em percentuais superiores a 15% (Gráfico 21).

Gráfico 21 - Comparação entre os tratamentos encontrados nos textos.

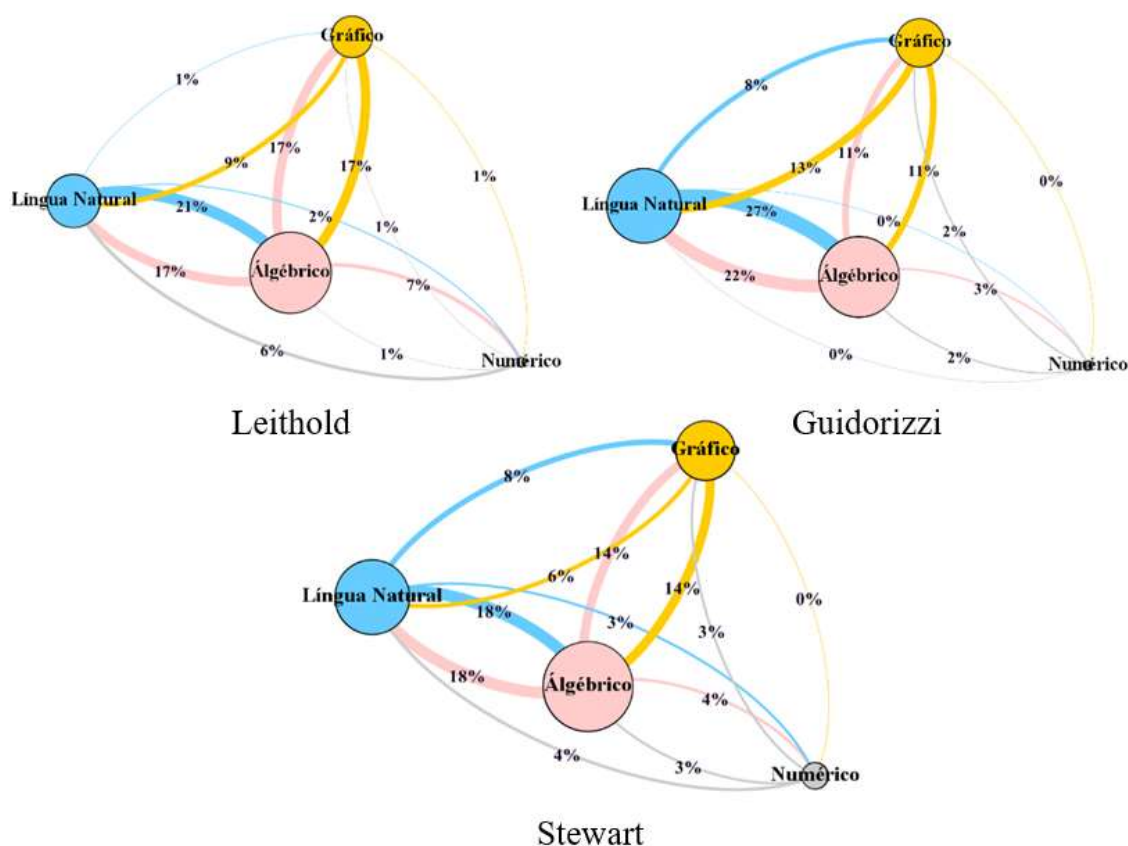


Fonte: Elaborado pelo autor com auxílio do software Excel.

Percebemos que, de novo, o livro do Stewart é o que tem a menor frequência de tratamentos algébricos e o maior percentual em todos os outros registros, enquanto o Guidorizzi tem o maior índice de tratamento algébrico e o menor em todos os demais registros.

Quanto às conversões, o registro algébrico divide espaço com a língua natural, mas continua sendo o mais utilizado (vide Gráfico 22).

Gráfico 22 - Comparação entre as conversões dos textos.



Fonte: Elaborado pelo autor com auxílio do software Gephi.

No Gráfico 22 excluímos o nó do registro figural do livro do Stewart por conta da tímida participação desse registro nas conversões e para uma melhor comparação entre os demais livros.

Assim, vemos que no quesito conversões, os livros são mais parecidos. Em todos eles: o registro algébrico é de maior percentual, seguido de perto pela língua natural, com os gráficos em posição intermediária e com pouquíssimos registros numéricos participando das transformações.

Como discutimos anteriormente, é compreensível que o uso de registros algébricos seja maioria num texto matemático, por conta de suas características de economia e potência. Também nos parece compreensível que num texto que tem alguma preocupação em ser didático, a língua natural seja o segundo tipo de representação mais usado.

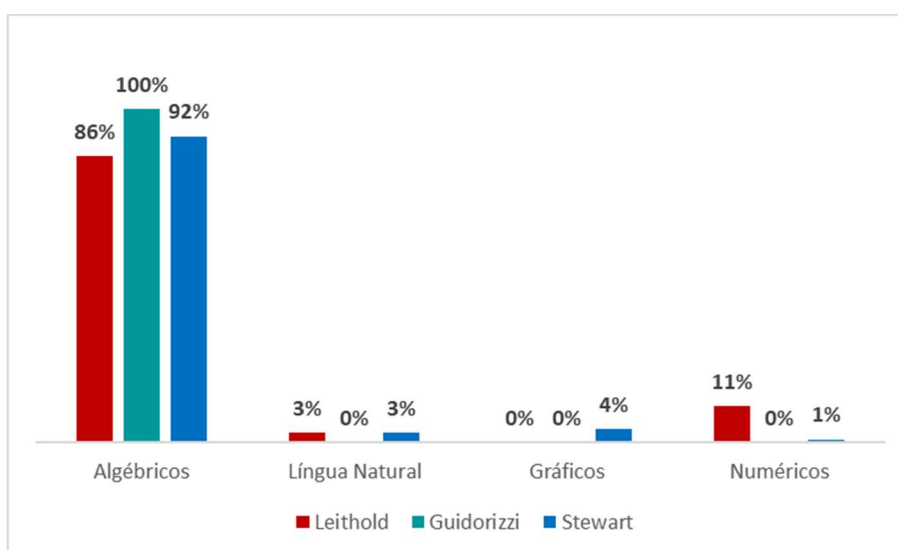
Porém, a ausência de representações e conversões no texto, como acontece no livro do Guidorizzi onde faltam três conversões, é algo que diverge da concepção de aprendizagem da TRRS.

É importante lembrar que a porcentagem zerada no tratamento numérico no livro do Guidorizzi e a conversão zerada no texto do Stewart, não significam que estas transformações não foram utilizadas. Acontece que elas tiveram uma frequência abaixo de um ponto percentual.

Ao fazermos comparações entre os livros, percebemos que o livro do Stewart continua prezando pela diversidade de registros. Isso é notável no Gráfico 22, se olharmos que no mapa deste livro o nó do registro numérico é maior e que as arestas das conversões menos utilizadas são mais espessas do que o mapa dos outros livros.

Com relação ao estudo dos exercícios dos livros, o resultado de nosso levantamento mostra um desequilíbrio mais impactante entre os registros. No Gráfico 23 aparecem os registros que foram identificados nos enunciados dos exercícios dos livros em questão.

Gráfico 23 - Comparação entre os registros presentes nos enunciados dos exercícios.

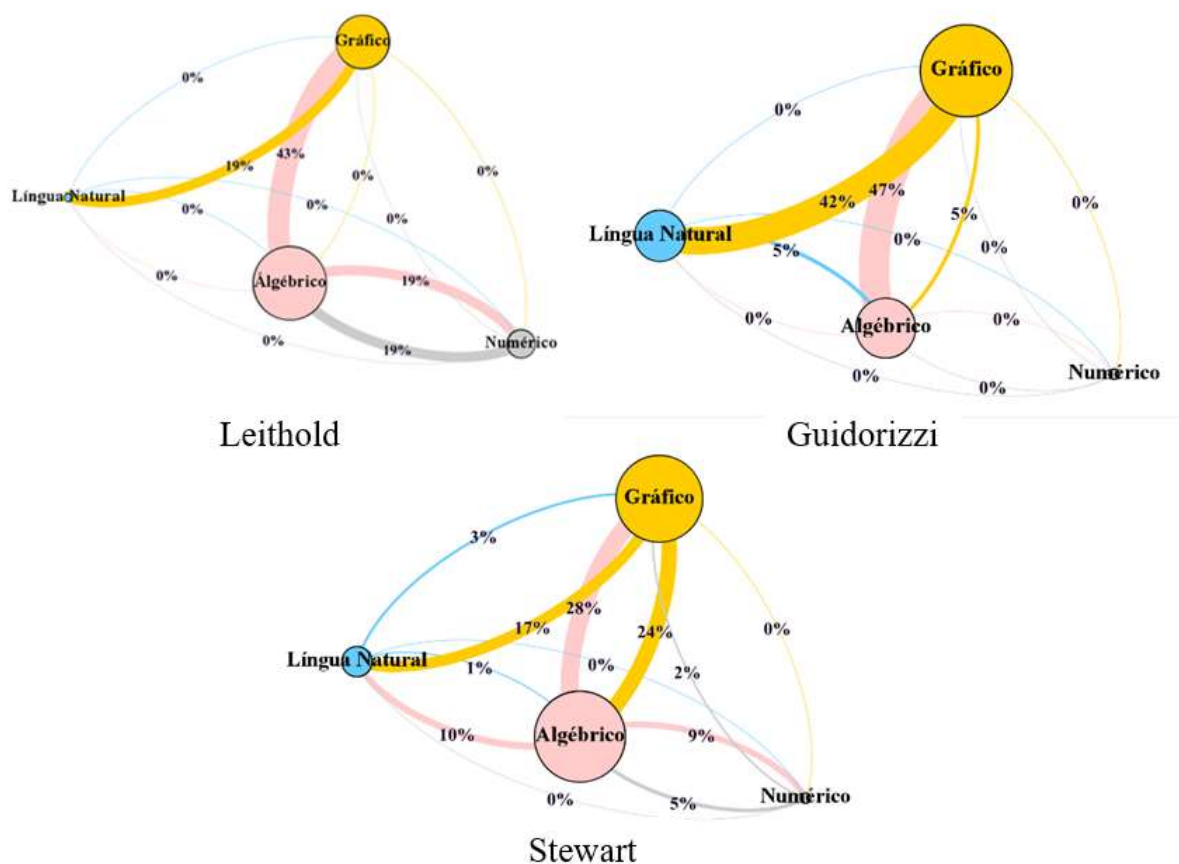


Fonte: Elaborado pelo autor com auxílio do software Excel.

Temos que, nos enunciados dos exercícios do Guidorizzi, há somente representações algébricas do conceito de limite e de funções. Nos outros livros a realidade não é muito diferente: mais de 80% das representações são algébricas, enquanto há sempre um tipo de representação ausente em algum dos livros.

Com relação às conversões propostas nos exercícios, um grande número delas foi negligenciado pelos autores, (vide Gráfico 24).

Gráfico 24 - Comparação entre as conversões propostas nos exercícios.



Fonte: Elaborado pelo autor com auxílio do software Gephi.

Como o registro figural foi trabalhado em apenas um livro e por não termos identificado exercícios que propusessem conversões que envolvessem tal tipo de representação, excluimos este registro do Gráfico 24. Assim, dos 12 tipos de conversões possíveis, Leithold e Guidorizzi propõem apenas 4, enquanto o Stewart pede para que sejam realizadas 10.

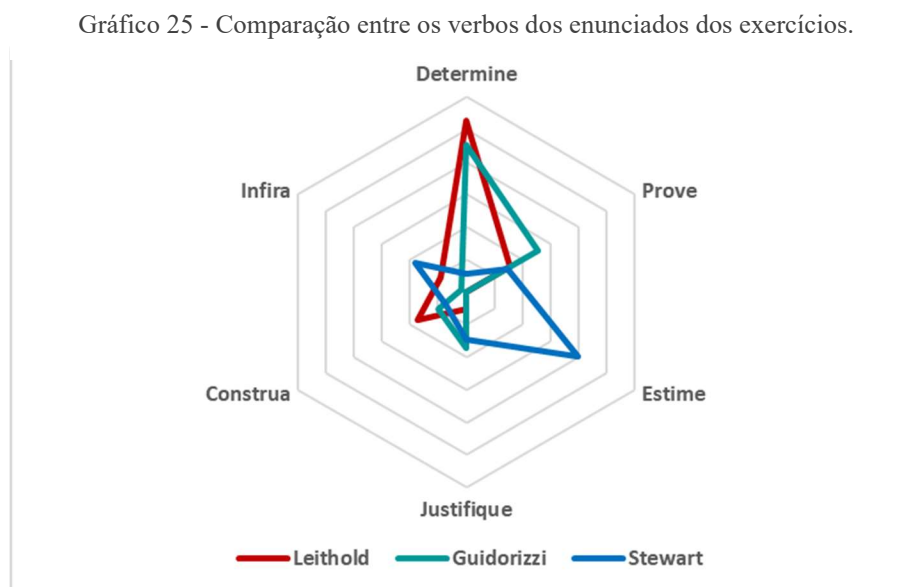
Alguns pontos específicos chamam a atenção, como o uso significativo do registro numérico feito pelo Leithold, o predomínio dos gráficos no Guidorizzi e a distribuição mais equilibrada no livro do Stewart.

Ainda sobre os exercícios, o resultado dos dados acima é corroborado pela classificação do tipo de tarefa proposta, realizada por meio dos verbos utilizados nos enunciados.

Para apresentar esse levantamento optamos por um gráfico do tipo radar, pois, ele permite comparar os resultados dos três livros numa mesma representação. Esse gráfico consiste em distribuir os 6 verbos encontrados nos vértices de um hexágono. Dentro desse hexágono há outros hexágonos concêntricos menores. São ao todo 6 hexágonos e a distância entre o menor e o maior subsequente representa 10% do total de verbos identificados.

Os polígonos coloridos desenhados representam cada livro. Assim, quanto mais próximo do vértice referente ao verbo do maior hexágono o vértice do polígono estiver, maior será a porcentagem daquele verbo com relação ao total. Como são 6 hexágonos, isso significa que o máximo de porcentagem que um verbo pode ter é 60% do total.

Dito isso, os resultados estão sintetizados no Gráfico 25.



Fonte: Elaborado pelo autor com auxílio do software Excel.

Observamos que, assim como nos outros levantamentos, com relação aos verbos do enunciado, os livros do Leithold e do Guidorizzi são mais parecidos, enquanto o Stewart diverge totalmente dos dois. Enquanto Leithold e Guidorizzi valorizam exercícios do tipo *determine* e em maior ou menor escala, *prove*, *construa* e *justifique*; o Stewart foca suas tarefas em verbos como *estime* e *infira*.

Alguns desses resultados dialogam com os levantamentos sobre os registros de representação, enquanto outros precisam de contextualização para ser explicados. Verbos como *determine* e *prove*, de fato, estão associados a manipulações algébricas. Porém o livro do Guidorizzi se utiliza de justificativas algébricas, ao invés da língua natural na resolução dos exercícios, e o percentual significativo de conversões em registro numérico encontrado no livro do Leithold aparecem em tarefas de *determine*, ao invés de *estime*.

Dessa forma, fica claro que os livros do Leithold e do Guidorizzi contém mais exercícios que contribuem para o predomínio da manipulação algébrica com relação aos outros registros, enquanto o Stewart procura variar um pouco mais as tarefas propostas.

De todo modo, podemos concluir que, no que diz respeito ao uso dos registros de representações semióticas, a falta de diversidade fica mais evidente nos exercícios. O que contraria completamente a ideia de aprendizagem da TRRS, já que a manipulação das representações e transição entre registros, são atividades fundamentais para que os estudantes compreendam os conceitos matemáticos.

Acreditamos que isso pode influenciar diretamente no ensino de limites, já que é um conceito de natureza dinâmica, em que os livros têm limitações físicas óbvias para representar a mobilidade de aproximação de um ponto a outro numa reta. Assim, o uso e a proposição de atividades de conversões entre registros, podem ajudar o estudante a compreender melhor a dinâmica desse conceito.

Outro recurso importante para o ensino de limites é o uso de ferramentas digitais. Percebemos que os livros aqui pesquisados, cada um à sua maneira, propõem atividades que incentive o emprego de novas tecnologias. O Leithold recomenda o manuseio de calculadoras, o Guidorizzi traz em sua versão E-book vídeo aulas e o Stewart disponibiliza recursos gráficos e materiais de suporte em seus sites.

Em tempos em que o uso da Inteligência Artificial no ensino é uma realidade, a presença dessas inovações acrescentadas aos livros pelos autores e editoras, já não é mais incremento de mercado. É uma questão de sobrevivência.

Não acreditamos que os livros deixarão de existir num futuro próximo. Ele sempre terá espaço para estudos e pesquisas. Porém, autores e editoras precisarão se adequar as necessidades do mundo digital.

Aproveitamos o tema para responder a segunda questão de pesquisa: **quais aspectos sócio-históricos de produção desses livros influenciaram o autor na escolha por determinada abordagem?**

Percebemos claramente três correntes de pensamento do ensino da Matemática influenciando cada um desses autores. Obviamente isso se deve a condição de espaço e tempo em que estes personagens se inseriam no momento da concepção de suas obras.

Louis Leithold, por exemplo, publicou sua obra no final da década de 1960, momento em que estava no auge o Movimento da Matemática Moderna, um movimento internacional cuja origem remonta a corrida espacial, em que os Estados Unidos se viram com a necessidade de reformar o currículo da Matemática escolar a fim de formar cientistas e, por isso, tinham como objetivo aproximar o conteúdo estudado nas escolas da Matemática universitária (Silva, 2013).

Vemos indícios dessa influência na maneira como o autor define uma função por meio de pares ordenados; a falta de exercícios que explore a noção intuitiva de limites; o excesso de tarefas que trabalham exaustivamente a definição ϵ - δ ; a ausência de exemplos e questões que trabalhem situações-problema; a tentativa de unificar a Geometria Analítica e o Cálculo; e, principalmente, a maneira com que privilegia o registro algébrico, embora não seja o autor que mais se destaque nesse aspecto.

Isso porque Hamilton Luiz Guidorizzi teve influência de uma Matemática menos pragmática e muito mais teórica, formal e rígida, que foi a escola europeia bourbakista. Tal influência se deve menos ao período em que escreveu seu livro, mas sim pelo espaço em que fez sua formação acadêmica e profissional: a Universidade de São Paulo.

Como a análise sócio-histórica nos revelou, o Curso de Matemática da USP foi fundado por professores europeus que trouxeram com eles todo o formalismo e rigor da Análise Matemática para a academia brasileira. Embora encontrasse resistência de alguns docentes nativos, tal movimento deixou marcas profundas na educação superior nacional (Lima, 2012).

Mesmo que a obra do Guidorizzi tenha surgido de um descontentamento do material usado até então, ele ainda preserva a rigidez da formação promovida na USP, o que culmina na predominância do uso do registro algébrico.

Embora, na época em que escreveu seu livro Guidorizzi não tivesse a orientação de como melhor trabalhar os registros de representação semiótica (tais discussões só ganhariam destaque anos mais tarde), os cuidados que este autor tem com as definições e as preocupações didáticas manifestadas em sua obra são bastante relevantes. É sempre bom lembrar que a seção inicial que apresenta as noções intuitivas dos conceitos de Cálculo permite ao estudante de seu livro calcular limites básicos, reconhecer pontos de continuidade e descontinuidade, e até resolver derivadas, sem a necessidade de se recorrer às respectivas definições. Isso, graças à maneira com que o livro utiliza o registro gráfico na motivação de seus conteúdos.

Também devemos ressaltar o cuidado técnico apresentado pelo Professor Guidorizzi em sua obra. Consideramos a definição de função adotada por ele, e as observações a respeito de seu uso, uma verdadeira reverência a Matemática como ciência.

Outro autor que trabalha bastante a noção intuitiva de limites é James D. Stewart. Esse professor é declaradamente influenciado pelo movimento do “Reform Calculus” que tinha, entre outros objetivos, incorporar novas tecnologias ao ensino de Cálculo.

Aliás, Stewart nos parece orientado por várias discussões ocorridas até a década de 1980 sobre Educação Matemática. Isso porque, além de atender minimamente as concepções da

TRRS e do uso de tecnologias digitais, ele também mostra conhecimento da metodologia de ensino de resolução de problemas, do uso da História da Matemática e da Modelagem.

Além disso, o livro do Stewart é o que apresenta a maior quantidade de representações do conceito de limite e de funções utilizadas para trabalhar tal conceito, além de ter a maior quantidade de tratamentos e conversões, seja no trecho do texto analisado ou nos exercícios considerados. Também foi a obra que apresentou o maior número de exercícios que envolvem a definição de limites (vide Quadro 14).

Quadro 14 - Números Totais

	Leithold	Guidorizzi	Stewart
Quantidade de representações identificadas no texto	250	355	484
Quantidade de Tratamentos identificados no texto	173	205	225
Quantidade de conversões identificadas no texto	162	135	294
Quantidade de exercícios identificados	155	85	303
Quantidade de representações identificadas no enunciado dos exercícios	170	81	336
Quantidade de conversões sugeridas nos enunciados dos exercícios.	115	19	258

Fonte: elaborado pelo autor.

O Quadro 14 mostra que, enquanto o Stewart é o que mais trabalha com representações, tratamentos e conversões no que diz respeito ao conceito de limites, o livro do Guidorizzi é o que trabalha menos, enquanto a obra do Leithold fica em uma posição intermediária.

Assim, por toda discussão feita até aqui, podemos afirmar que, sem dúvida nenhuma, o livro mais alinhado aos preceitos da TRRS é *Cálculo, volume 1* de James Stewart. Porém, também constatamos que todas essas obras analisadas deixam a desejar quanto à diversificação de registros, principalmente com relação aos exercícios propostos.

Dessa forma, temos o livro do Stewart como uma referência no que diz respeito à TRRS, porém indicamos melhorias com relação à proposição de exercícios que motivem as transformações de representações, sejam tratamentos ou conversões, de maneira mais diversificada. Um belo desafio aos próximos autores de livros de Cálculo.

Há muito ainda o que se investigar sobre as abordagens dos livros de Cálculo. Além da definição de limites, há outros elementos da matéria que ainda intrigam os estudantes, como é o caso das indeterminações. Muitos estudantes sabem as técnicas de se “levantar” indeterminações, mas não sabem muito bem o que isso significa.

Também conhecemos pouco sobre o que dizem as neurociências cognitivas a respeito da mobilização das representações no ensino de Matemática: “Mas, sabemos, por exemplo, com base em evidências neurocientíficas, que há uma correlação entre um ambiente rico de atividades diversificadas e o aumento das sinapses (conexões entre as células cerebrais)” (Alvarenga, 2019, p.101).

Assim, nos parece que a aprendizagem por meio da coordenação de registros pode ser confirmada por estudos sobre as atividades neurais. O mapeamento do cérebro humano, com relação às regiões responsáveis pelas atividades matemáticas, podem nos indicar que essa diversificação de representações favorece a aprendizagem dos conceitos matemáticos.

Trabalhos sobre o Pensamento Matemático Avançado – PMA, como os realizados pelo Grupo de Estudos em Educação Matemática – GEEM da UFG, também podem se articular com a TRRS na medida em que os tratamentos e as conversões contemplam ações mentais bastante relevantes para a aprendizagem matemática.

Dessa forma, estudos sobre as abordagens dos livros são muito importantes, na medida em que levantam discussões sobre qual a melhor forma de se apresentar e trabalhar conceitos e definições de determinado conteúdo matemático, subsidiam a tomada de decisão com relação à escolha de qual livro adotar ou até sugerem a elaboração de manuais para suprir novas necessidades.

Com relação à preferência pessoal entre os três livros, podemos resumir assim: se um professor de Cálculo tiver dúvida sobre o conteúdo, dos três livros, recomendamos que ele consulte o Guidorizzi. Se precisar de ideias para atividades diferenciadas, indicamos o Stewart. O Leithold seria um livro mais tradicional que consultamos quando queremos resolver algumas questões pela definição.

Por fim, devemos lembrar que, ao avaliar uma obra, fazemos num período muito diferente da que ela foi concebida. Cada livro é produto de seu tempo e se hoje temos parâmetros para analisá-los e apontar suas possíveis falhas, devemos ter em mente que esses parâmetros foram construídos, muito por conta do surgimento e impacto de tais obras.

Assim, não é intenção desse trabalho vilanizar os autores ou responsabilizá-los, unicamente, por todo o mal existente no ensino de Cálculo atual. Tecemos críticas, mas, não atacamos as obras por conta de discordâncias. Pelo contrário, reconhecemos a importância

histórica desses livros, pois, por décadas eles continuam sendo citados em ementas de disciplinas e conhecidas por professores do mundo todo.

Esse sucesso é fruto do trabalho de professores, que chamaram a atenção de alguém pela maneira de ensinar, e que se propuseram o desafio de colocar no papel o que acreditavam ser a melhor forma de escrever Matemática para estudantes.

A eles, nosso agradecimento e respeito.

10. REFERÊNCIAS

- ALTARUGIO, T. H. B. [Informações sobre Hamilton Luiz Guidorizzi] Destinatário: Leniedson Guedes dos Santos. 23 de Jan. 2022. 9:52. 1 mensagem de WhatsApp.
- ALVARENGA, K. B. **Contribuições das Neurociências para a Educação Matemática.** In: I Congresso Virtual Iberoamericano sobre Formación de Profesores de Matemática, Ciencias y Tecnología, 2019, Natal. Anais [...] Natal: UFRN, 2019. P. 91 – 102.
- ALVARENGA, K. B; DORR, R. C; VIEIRA, V. D. O ensino e a aprendizagem de Cálculo Diferencial e Integral: Características e interseções no centro-oeste brasileiro. **Revista Brasileira de Ensino Superior.** Passo Fundo, v. 2, p. 46-57, 2017.
- ALVARENGA, K. B; PAIXÃO, A. Hermenêutica: Análise de um Livro Didático de Cálculo Diferencial e Integral. **Acta Latinoamericana de Matemática Educativa**, v. 30, p. 132 – 145, 2017.
- ALVES, R. **Filosofia da Ciência: Introdução ao Jogo e Suas Regras.** Brasília: Editora Brasiliense. 1981.
- ANDRADE, M. M. **Ensaio Sobre o Ensino em Geral e o de Matemática em Particular, de Lacroix:** Análise de um Forma Simbólica à luz do Referencial Metodológico da Hermenêutica de Profundidade. 2012. 281 f. Tese (Doutorado em Educação Matemática) - Universidade Estadual Paulista. Rio Claro. 2012.
- ARISTÓTELES. **Organon III: Analíticos Anteriores.** Tradução: Pinharada Gomes. Lisboa: Guimarães Editores, 1986.
- ASSIS, E. M. **Limites: História e Aplicações.** 2017. 69 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática) - Universidade Federal de Viçosa, Florestal, 2017.
- ÁVILA, G. **Introdução ao Cálculo.** Rio de Janeiro: LTC, 1998.
- AZEVEDO, D. P; SALANDIM, M. E. M. Livros Didáticos de Matemática da EJA: uma análise com Hermenêutica de Profundidade. **Zetétike.** Campinas, v. 27. P. 1-14, 2009.
- BARBOSA, J. L. M. **Geometria Euclidiana Plana.** Rio de Janeiro: SBM, 1985.
- BARDIN, L. **Análise de conteúdo.** Tradução Luís Antero Reto, Augusto Pinheiro. São Paulo: Edições 70, 1977.
- BONGIOVANNI, V. As Duas Maiores Contribuições de Eudoxo de Cnido: a teoria das proporções e o método da exaustão. **Revista Ibero-Americana de Educação Matemática. Espanha**, n.2, p. 91-110. Junho, 2005.
- BOULOS, P. **Cálculo Diferencial e Integral.** São Paulo: Pearson, 1999.
- BOYER, C.B. **História da Matemática.** 3. ed. São Paulo: Blucher, 2012.

BRASIL. Ministério da Educação. Instrumento de Avaliação dos Cursos de Graduação presencial e a distância. Brasília- DF, Ministério da Educação, 2017.

BREUNIG, R. T. **Coordenação de Registro de Representação e o Processo de mediação docente: Conceito de Limite em Cursos de Engenharia.** 2015, 94f. Dissertação (Mestrado em Educação em Ciências e Matemática) – Universidade Regional do Noroeste do Estado do Rio Grande do Sul, Ijuí, 2015.

CARDOSO, Virgínia Cardia. **A Cigarra e a Formiga: uma reflexão sobre a Educação Matemática brasileira da primeira década do século XXI.** 2009. 212 f. Tese (Doutorado em Educação) - Universidade Estadual de Campinas, Campinas, 2009.

CARVALHO, J. B. P. F; LIMA, P. Figueiredo. Escolha e Uso do livro Didático. In: **Matemática: Ensino Fundamental. Coleção Explorando o Ensino.** Brasília: Ministério da Educação, 2010, p.15-30.

CHOPPIN, A. História dos livros e das edições didáticas: sobre o estado da arte. **Educação e Pesquisa.** São Paulo, v.30, n.3, p. 549-566, 2004.

CORNU, B. **Apprentissage de la notion de limite, conceptions et obstacles.** 1983. 186 f. Tese (Doutorado em Matemática Pura) - Université Scientifique et Médicale de Grenoble, Grenoble, 1983.

CURY, F. G. Análise de um Livro Didático de Geometria Plana Apoiada na Hermenêutica de Profundidade. **Zetetiké.** Campinas, v. 27, p. 1-21, 2019.

CURY, H. N. **Análise de erros: o que podemos aprender com os erros dos alunos.** Belo Horizonte: Autêntica, 2007.

D'AMORE, B; PINILLA, M. I; IORI, M. **Primeiros elementos de semiótica: Sua presença e sua importância no processo de ensino-aprendizagem da matemática.** São Paulo: Editora Livraria da Física, 2015.

DELICE, A; SEVIMLI. An Investigation of the Pre-Services Teachers`Ability of Using Multiple Representation in Problem-solving Success: The Case of Definite Integral. **Educational Sciences: Theory and Practice,** Gaziantep, v. 10, n. 1, p. 137 – 149, 2010.

DONALD, J. Etymological Dictionary of the English Language. London and Edinburgh: W. & R. Chambers, 1874.

DUVAL, R. Gráficos e equações: a articulação entre dois registros. **REVEMAT.** Florianópolis, v.6, n. 2, p. 96-112, 2011.

DUVAL, R. Questões epistemológicas e cognitivas para pensar antes de começar uma aula de matemática. **REVEMAT.** Florianópolis, v.11, n. 2, p. 1-78,2016.

DUVAL, R. **Registros de Representação semiótica e funcionamento cognitivo da compreensão em matemática.** In: MACHADO, S.D.A. (Org.). Aprendizagem em matemática: registros de representação semiótica. Campinas: Papyrus, 2005, p. 11-34.

DUVAL, R. Registros de representação semiótica e funcionamento cognitivo do pensamento. **REVEMAT,** Florianópolis, v. 07, n. 2, p.266-297, 2012.

DUVAL, R. **Semiósis e Pensamento Humano**: Registros semióticos e aprendizagens intelectuais-Tradução: LÊNIO FERNANDES LEVY e MARIA ROSÂNI ABREU DA SILVEIRA. São Paulo: Livraria da Física, 2009.

ENCYCLOPAEDIA BRITANNICA. **Louis Leithold American Mathematician**. 2005. Disponível em: < <https://www.britannica.com/biography/Louis-Leithold> > Acesso em 01/09/2018.

EVERETT-GREEN, R. James Stewart Devoted His Life to Math and Music. **The Globe and Mail**. [2014]. Disponível em:< <https://www.theglobeandmail.com/news/toronto/james-stewart-devoted-his-life-to-math-and-music/article22168574/> >. Acesso em 04/06/2023.

EVES, H. **Introdução à História da Matemática**. Tradução: DOMINGUES, H. 5ª ed. Campinas: Editora da Unicamp. 2011.

FARIA, G. F. **A Origem da Deriva e da Integral**. 2018. 81 f. Monografia (Licenciatura em Matemática) Universidade Tecnológica Federal do Paraná, Cornélio Procópio, 2018.

FERRAZ, M; LOPES, M C; BACK, R. **Filosofia Pop #052 – Hermenêutica**. Filosofia Pop, 13 nov. 2017. Podcast.1:19:42 hs. Disponível em: <https://filosofiapop.com.br/podcast/filosofia-pop-052-hermeneutica/>. Acesso em: 20 ago. 2018.

FILHO, Lourival Santana. **Uma Análise Textual**: Outro Olhar sobre a Análise de Livros Didáticos. 2017. 86 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Universidade Federal de Mato Grosso do Sul, Campo Grande, 2017.

GARCIA, I. Integral House by Shim-Sutcliffe Architects. **Metalocus**. 2015. Disponível em: < <https://www.metalocus.es/en/news/integral-house-shim-sutcliffe-architects> >. Acesso em 04/06/2023.

GARNICA, A.V. M. Resgatando Oralidades para a História da Matemática e da Educação Matemática Brasileira: a Faculdade de Filosofia, Ciências e Letras da Universidade de São Paulo. **Revista Brasileira de História da Matemática**. São Paulo, v. 7, n. 14, p. 247-279, 2007.

GARZELLA, C.F. **A Disciplina de Cálculo I**: A Análise das Relações Entre as Práticas Pedagógicas e seus Impactos nos Alunos. 2013. 275 f. Tese (Doutorado em Educação), Universidade Estadual de Campinas, Campinas, 2013.

GENETTE, G. **Paratextos Editoriais**. Cotia: Ateliê Editorial, 2009.

GODOY, L. F. S. **Registros de Representação da Noção de Derivada e o Processo de Aprendizagem**. 2004. 106. f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática), Pontifícia Universidade Católica, São Paulo, 2004.

GOLDENBERG, P. **Thinking (And Talking) About Technology in Math Classrooms**. In: Education Development Center, 2000. Disponível em: < http://www2.edc.org/mcc/PDF/iss_tech.pdf >. Acesso em 15/06/2023.

GOMES, M. L. **As Práticas Culturais de Mobilização de Histórias da Matemática em Livros Didáticos Destinados ao Ensino Médio**. 2008. 166 f. Dissertação (Mestrado em Educação) - Universidade Estadual de Campinas, Campinas, 2008.

GOMES, M. L. M. Os 80 Anos do Primeiro Curso de Matemática Brasileiro: sentidos possíveis de uma comemoração acerca da formação de professores no Brasil. **Bolema**, Rio Claro, v.30, n. 55, p. 424-438, ago. 2016.

GRATTAN-GUINNESS, I. O que foi e o que deveria ser o Cálculo? **Zetetiké**. Campinas. v. 5. n. 1. 1997.

GUIDORIZZI, H. L. **Um Curso de Cálculo**. 5. ed. Rio de Janeiro: Livros Técnicos e Científicos, 2001.

GUIDORIZZI, H. L. **Currículo do sistema currículo Lattes**. [Brasília], 03 de jul. 2001. Disponível em: < <http://lattes.cnpq.br/4468400093836636>>. Acesso em 17/01/2023.

HENRIQUES, A; ALMOULOU, S. A. Teoria dos registros de representação semiótica em pesquisas na Educação Matemática no Ensino Superior: uma análise de superfícies e funções de duas variáveis com intervenção do software Maple. **Ciência e Educação**. Bauru, n. 2, v.22, p. 465 – 487, 2016.

IEZZI, G; MACHADO, N; MURAKAMI, C. **Fundamentos de Matemática Elementar Volume 8**. São Paulo: Atual, 1983.

JÚNIOR, A. O. Primeiro Ano num Curso de Matemática: a definição de função e a dualidade local/global em conceitos de Cálculo. **Bolema**, Rio Claro, v.20, n. 28, p. 39-67, 2007.

JUSTIA US LOW. **Leithold v. Plass**. [S.I.][1967]. Disponível em: <<https://law.justia.com/cases/texas/supreme-court/1967/a-11509-0.html>>. Acesso em 09/01/2023.

KAMPHORST, E. M; NEHRING, C.M. **Tratamento e Conversão entre Registros de Representação Semiótica dos Conceitos de Limite**. In: XXI Jornada de Pesquisa, 2016. Anais do [...], Ijuí: Editora Unijuí, 2016. [S.I].

KUZU, O. Preservice mathematics teachers' competencies in the process of transformation between representations for the concept of limit: A qualitative study. **Pegem Journal of Education and Instruction**, Ancara. v.13, n 2, p. 1037–1066, 2020.

LARSON, E. **Cálculo com Aplicações**. 6. ed. Rio de Janeiro: LTC, 2003.

LAX, P. 1986. **In Praise of Calculus**. In: R. G. Douglas (Ed.), *Toward a Lean and Lively Calculus*, Washington, D.C. p. 1- 2, 1986.

LEITHOLD, L. **O Cálculo com Geometria Analítica**. vol 1. 3. Ed. São Paulo: Harbra, 1994. 776 p.

LIMA, E. L. CARVALHO, P. C. WAGNER, E. MORGADO, A. C. **A Matemática do Ensino Médio Volume 1**. Rio de Janeiro: SBM, 2003.

LIMA, E. L. **Números e funções reais**, Coleção PROFMAT. Rio de Janeiro: SBM, 2014.

- LIMA, G. L. **A Disciplina de Cálculo I do Curso de Matemática da Universidade de São Paulo: Um Estudo de seu Desenvolvimento, de 1934 a 1994.** 2012. 631 f. Tese (Doutorado em Educação Matemática) - Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2012.
- MACHADO, N. J. **Matemática e Realidade.** São Paulo: Editora Cortez, 2009.
- MEDEIROS, L. A. **Aspectos do Teorema Fundamental do Cálculo.** Belém: UFPA, 2008.
- MIORIM, M. A. **Introdução à História da Educação Matemática.** São Paulo: Atual, 1998.
- MONDINI, F. MOCROSKY, L. F. BICUDO, M. A. V. A Hermenêutica em Educação Matemática: Compreensões e Possibilidades. **REVEMAT**, Florianópolis, v. 11, n.1, p. 317 – 327. 2016.
- MOURA, D. A. S. **Perspectivas no estudo de limite: numa perspectiva figural e conceitual: foco em objetos de aprendizagem.** 2014, 145f. Dissertação (Mestrado Profissional em Ensino) - Pontifícia Universidade Católica de Minas Gerais, Belo Horizonte, 2014.
- NEGRU, T., “**O debate entre Gadamer e Habermas e a Universalidade da Hermenêutica**”. Disponível em: <www.academia.edu/406539/negru-T_o_debate_entre_gadamer_e_habermas_e_a_universalidade_da_hermen%C3%AAutica>. Acesso em: 14 jul. 2014.
- NETO, J. N. A; LIMA, F. J; SOUSA, D. E. B. Abordagem do Conceito de Limite apresentado por James Stewart e suas contribuições para aprendizagem e formação de professores de Matemática. **BOCEHM.** Fortaleza, v. 8, n. 23, p. 1139 – 1154, 2021.
- NETO, U. S. S. **A Teoria dos Registros de Representação Semiótica Aplicada ao Estudo de Funções Afins e Quadráticas.** 2017. 64 f. Monografia (Licenciatura em Matemática) – Universidade do Estado da Bahia, Barreiras, 2017.
- NETTO, F. P. C. PULCINELLI, M.C.G. ANDRADE, M.M. A Hermenêutica da Profundidade em Alguns Trabalhos de Pesquisa em Educação Matemática. Encontro Paranaense de Educação Matemática, 2017, Cascavel. Anais [...], Cascavel, Unioeste, 2017, n. p.
- NEVES, P. T. S. **Introdução ao Ensino de Cálculo e Aplicações da Derivada no Ensino Médio.** 2016. 74 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática) – Universidade Federal do Amapá – UNIFAP, Macapá, 2016.
- NÖTH, W. **Panorma da semiótica: De Platão à Peirce.** São Paulo: Annablume, 2008.
- OLIVEIRA, F. D. **Análise de Textos Didáticos: Três estudos.** 2008. 222 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) - Universidade Estadual Paulista, Rio Claro, 2008.
- OLIVEIRA, F. D. ANDRADE, M, M. SILVA, T.T.P. A Hermenêutica da Profundidade: Possibilidades em Educação Matemática. **ALEXANDRIA Revista de Educação em Ciência e Tecnologia**, Florianópolis. v.6, n.1, p. 119-142, 2013.
- OLIVEIRA, F. F. **O School Mathematics Study Group e o Movimento da Matemática Moderna no Brasil.** 2009. 181 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Universidade Bandeirante de São Paulo – UNIBAN, São Paulo, 2009.

PALISADIAN-POST. **Louis Leithold, 82; Esteemed Calculus Teacher in Malibu.** [S.I], 2005. Disponível em: < <https://www.palipost.com/louis-leithold-82-esteemed-calculus-teacher-in-malibu/>>. Acesso em 09/01/2023.

PALMER, R. E. **Hermenêuticas.** Lisboa: Edições 70, 1996.

PARDIM, C. S. **Orientações Pedagógicas nas Escolas Normais de Campo Grande: Um olhar sobre o manual metodologia do ensino primário**, de Theobaldo Miranda Santos. 2013. 124 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) - Universidade Federal de Mato Grosso do Sul. Campo Grande, 2013.

PEREIRA, M. V. C. **Análise sobre os índices de reprovação nos cursos de Cálculo I da UFERSA.** 2018. 9 f. Artigo (Bacharelado em Ciência e Tecnologia), Universidade Federal Rural do Semiárido, Mossoró-RN, 2018.

PETERSON, I. An Interview with James Stewart. **Mathematical Association of America.** 2009. Disponível em: < <https://www.maa.org/news/an-interview-with-james-stewart> >. Acesso em 04/06/2023.

PIRES, R. C. **A Presença de Nicolas Bourbaki na Universidade de São Paulo.** 2006. 577 f. Tese (Doutorado em Educação Matemática), Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2006.

PONTE, J. P; BROCADO, J. H. O. **Investigações Matemáticas na Sala de Aula.** São Paulo: Autêntica, 1999.

REIS, F. S. **A Tensão entre Rigor e Intuição no Ensino de Cálculo e Análise: A visão de professores-pesquisadores e autores de livros didáticos.** 2001. 302 f. Tese (Doutorado em Educação) - Universidade Estadual de Campinas. Campinas, 2001.

REZENDE, W. M. **O Ensino de Cálculo: Dificuldades de Natureza Epistemológica.** 2003.468 f. Tese (Doutorado em Educação) - Universidade de São Paulo, São Paulo, 2003.

ROGÉRIO, M. U; SILVA, H. C; BADAN, A. A. **Cálculo Diferencial e Integral: funções de uma variável.** 2. ed. Goiânia: CEGRAF UFG, 1992. (Coleção Didática, n.9).

ROLKOUSKI, E. **Vida de Professores de Matemática: (im) possibilidades de Leitura.** 2006. 288 f. Tese (Doutorado em Educação Matemática), Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática, Universidade Estadual Paulista. Rio Claro, 2006.

ROQUE, T. **História da Matemática: Uma visão crítica, desfazendo mitos e lendas.** Rio de Janeiro: Zahar, 2012.

ROQUE, T. PITOMBEIRA, J.B. **Tópicos de História da Matemática,** Coleção PROFMAT. Rio de Janeiro: SBM, 2012.

ROZENTALSKI, E. F. **O Estatuto Ontológico e Epistemológico do Conceito de Orbital em Livros Didáticos de Química Geral no Século XX: Uma Análise de seus Fundamentos e Implicações para a Aprendizagem.** 2013. 169 f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências) - Universidade de São Paulo. São Paulo, 2013.

- RUBIO, J. A. S. **Uso didático da Calculadora no Ensino Fundamental Fundamental: Possibilidades e Desafios**. 2003. 114 f. Dissertação (Mestrado em Educação) – Universidade Estadual Paulista, Marília, 2003.
- SALGUEIRO, N. C. G. **Como Estudantes do Ensino Médio Lidam com Registros de Representação Semiótica de Funções**. 2011. 132 f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Educação Matemática), Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2011.
- SANTOS, D. M. N. **Análise de Livros Didáticos Conforme as Considerações do Programa Nacional do Livro Didático: Estatística e Probabilidade**. 2016. P. 136. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Matemática) Universidade Federal de Sergipe, São Cristóvão, 2016.
- SANTOS, M. B. S. **Um olhar para o Conceito de Limite: constituição, apresentação e percepção de professores e alunos sobre seu ensino e aprendizado**. 2013, 388 f. Tese (Doutorado em Educação Matemática), Pontifícia Universidade Católica, São Paulo, 2013.
- SCHUBRING, G. **Análise histórica de livros de Matemática: notas de aula**. Campinas: Autores Associados, 2018a. Não paginado.
- SCHUBRING, G. O que é e ao que Serve a Hermenêutica? **Jornal Internacional de Estudos em Educação Matemática - JIEEM**, Londrina, v. 11, n.2, p.194 - 200, 2018b.
- SIEGEL, R. NPR. **Late Author, Teacher Demystified Calculus for Thousands**. 2005. Disponível em: <<https://www.npr.org/templates/story/story.php?storyId=4645383>>. Acessado dia 01 de Set de 2018.
- SILVA, C. M. M. **O Conceito de Doxa (Opinião) em Aristóteles**. Linha D'água. São Paulo, v. 29, n. 2, p. 43 – 67, 2016.
- SILVA, C. M. S. Livro Aberto: Uma Análise Histórica. **Perspectivas da Educação Matemática**. Campo Grande, v. 8, número temático, p. 378 – 395, 2015.
- SILVA, S. A. C. S. **Registros de representação semiótica da função afim em livros didáticos do 9º ano do ensino fundamental**. 2022, 98 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática), Universidade Federal de Pernambuco, Recife, 2022.
- SILVA, T. T. P. **Os Movimentos Matemática Moderna: compreensões e perspectivas a partir da análise da obra "Matemática-Curso Ginásial" do SMSG**. 2013. p. 148. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) - Universidade Estadual Paulista. Rio Claro, 2013.
- SIMÕES, M. Escrever é bom para aprender (e enriquecer). **Imagário Puro**. 2016. Disponível em: < <https://imaginariopuro.wordpress.com/2016/10/24/escrever-e-bom-para-aprender-e-enriquecer/> >. Acesso em 04/06/2023.
- SOUZA, L. J; DASSIE, B. A; ANDRADE, M. M. **Alguns Apontamentos Acerca da Mobilização da Hermenêutica de Profundidade como Referencial Teórico- Metodológico em Pesquisas em Educação Matemática**. In: IV Encontro Nacional de Pesquisa em História da Educação Matemática. 2018. Anais [...] Campo Grande, UFMS. 2018. P. 1-14.
- STEWART, J. Cálculo, vol 1. ed. 7. São Paulo: Cengage Learning, 2013.

TÁBOAS, P. Z. **Luigi Fantappiè: Influências na Matemática Brasileira, Um Estudo de História como Contribuição para a Educação Matemática.** 2005. 212 f. Tese (Doutor em Educação Matemática) - Universidade Estadual Paulista, Rio Claro, 2005.

TALL, D. (org.). **Advanced Mathematical Thinking.** [S.I.]: Kluwer, 2002.

TALL, D; VINNER, S. Concept Image and Concept Definition in Mathematics with particular reference to Limits and Continuity. **Educational Studies in Mathematics**, Berlin. v.12, [S.I.] p. 151 – 169, 1981.

THE NEW YORK TIMES. **Louis Leithold, an Innovator in the Teaching of Calculus, Dies at 80** [S.I.]. 2005. Disponível em: < <https://www.nytimes.com/2005/05/10/us/louis-leithold-an-innovator-in-the-teaching-of-calculus-dies-at-80.html>>. Acesso em 13/01/2023.

THOMAS, G. B. J; WEIR, M. D; HASS, J. **Cálculo Volume 1.** São Paulo: Ed. Addison Wesley, 2002.

THOMPSON, J. B. **Ideologia e Cultura Moderna: teoria social crítica na era dos meios de comunicação em massa.** 9.ed. Petrópolis: Vozes, 2011.

TRIVIÑOS, A. N. S. **Introdução à pesquisa em ciências sociais: A pesquisa qualitativa em educação.** São Paulo: Editora Atlas, 1987.

WATSON. H. G. The Many Parts of James Stewart. **Internet Archive.** [2014]. Disponível em: < <https://web.archive.org/web/20141213232150/http://dailyxtra.com/toronto/life/proud-lives/the-many-parts-james-stewart-96867>> . Acesso em 04/06/2023.

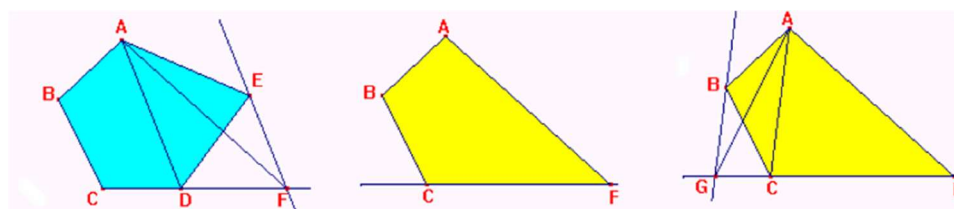
WOO, E. **His Math Text Was the Standard, His Touch in Class Exceptional.** [2005]. Disponível em: < <http://articles.latimes.com/2005/may/08/local/me-leithold8>> . Acesso em 01/09/2018.

APENDICE 1: MÉTODO DA EXAUSTÃO

Os gregos sabiam transformar qualquer polígono em um quadrado de área equivalente. Essa operação era conhecida como quadratura.

A Figura 74 mostra um pentágono ABCDE sendo transformado no quadrilátero ABCF, que por sua vez é transformado no triângulo AGF.

Figura 74 - Transformação de um Pentágono em um Triângulo.

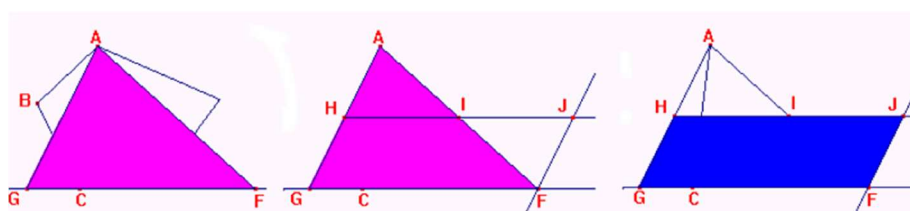


Fonte: Bongiovanni, 2005, p. 101.

O procedimento utilizado é simples: no pentágono ABCDE construímos uma reta paralela a diagonal AD e que passe por E. Esticamos o lado CD até que este intercepte a reta construída anteriormente no ponto F. Assim, obtemos o segmento de reta EF. Como EF é paralelo a AD, as alturas dos triângulos ADE, tomando AD como base, e do triângulo ADF, também tomando AD como base, são iguais, pois são a distância entre as retas AD e EF. Logo as áreas dos triângulos ADE e ADF, também são iguais, já que eles também têm a mesma base. Portanto podemos substituir na Figura 74 o triângulo ADE pelo triângulo ADF, de modo que o quadrilátero ABCF tenha a mesma área do pentágono ABCDE.

Esse procedimento é repetido: encontramos o ponto G como a interceptação da reta que passa por B paralela à reta AC com a reta CF. Daí substituímos na figura o triângulo ACB pelo triângulo ACG sem qualquer prejuízo com relação à área.

Figura 75 - Transformação de um Triângulo em um Paralelogramo.

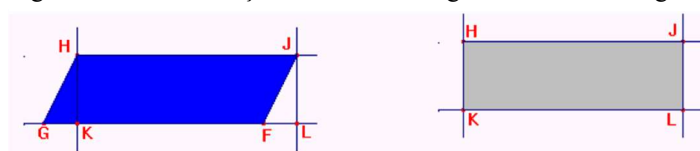


Fonte: Bongiovanni, 2005, p. 101.

Utilizando-se dos pontos médios H e I dos lados do triângulo AGF se obtém o paralelogramo GFJH de área equivalente ao pentágono inicial ABCDE, traçando-se uma reta paralela a GH a partir de F e prolongando HI até esta interceptar com esta nova reta no ponto J. De fato, os triângulos AHI e FIJ são equivalentes pelo caso Ângulo-Lado-Ângulo já que os ângulos \widehat{AIH} e \widehat{FIJ} são opostos pelo vértice (consequentemente, congruentes), os lados AI e IF têm o mesmo comprimento (já que I é o ponto médio de AF) e os ângulos \widehat{HAI} e \widehat{IFJ} são alternos internos (portanto, congruentes), tendo em vista que as retas AG e FJ são paralelas e HI é uma transversal a elas.

Assim, o paralelogramo GFJH também pode ser transformado num retângulo KLJH de área equivalente, como mostra a Figura 76.

Figura 76 Transformação de um Paralelogramo em um retângulo.

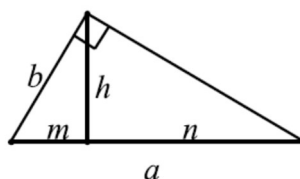


Fonte: Bongiovanni, 2005, p. 101.

Traçam-se perpendiculares à reta GF que passam pelos pontos H e J, respectivamente. Prolongando a reta GF até ela interceptar esta última reta perpendicular encontramos o ponto L. Como o triângulo GHK e FJL são congruentes, por serem triângulos retângulos com lados congruentes (GH e FJ por serem lados de um paralelogramo) e ângulos congruentes (\widehat{HGK} e \widehat{JFL} são colaterais correspondentes, já que os lados GH e FJ são paralelos e GF é uma transversal), e por isso podem ser substituídos um ao outro sem que se perca área.

Finalmente, percebe-se que a medida do lado do quadrado de área equivalente à de um retângulo dado é igual a média geométrica dos lados deste retângulo. Assim, tal média é encontrada utilizando-se a relação do triângulo retângulo $h^2 = mn$, conforme a Figura 77.

Figura 77 - Transformação de um retângulo em um quadrado.

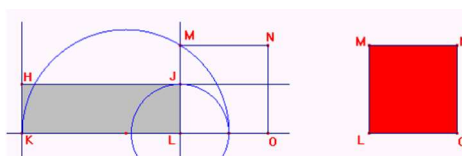


Fonte: Bongiovanni, 2005, p. 101.

Dessa forma, um quadrado de lado h tem a mesma área de um retângulo cujo comprimento mede m e a altura n .

Assim, para construir um quadrado MNOL de mesma área do retângulo HJLK dado, basta construir um segmento adjacente ao lado KL que tenha mesma medida do lado consecutivo JL. Dessa forma já se tem a hipotenusa do triângulo retângulo cuja medida é $m + n$ (no caso KL+JK), bastando agora encontrar a altura h . Essa altura é encontrada construindo-se uma semicircunferência de diâmetro $m + n$ e prolongando o lado JL até a reta interceptar a semicircunferência, conforme a Figura 78.

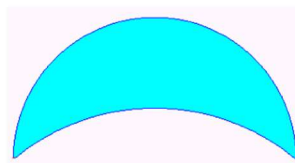
Figura 78 - Transformação de um retângulo em um quadrado.



Fonte: Bongiovanni, 2005, p.101.

Os gregos sabiam fazer quadraturas de certos tipos de lúnulas, figura limitada por dois arcos circulares de raios diferentes (Figura 79), mas não conheciam um método para comparar figuras quaisquer, curvilíneas ou não.

Figura 79 - Lúnula.



Fonte: Bongiovanni, 2005, p. 102.

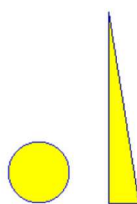
Eudoxo se valeu da antifaírese para sugerir um método de comparar figuras curvas com figuras poligonais (Bongiovanni, 2005).

O método de exaustão não é um método de descoberta. Por exemplo, para comparar a área A de um seguimento parabólico com uma outra área B precisamos inicialmente descobrir uma superfície equivalente ao segmento parabólico. Em seguida provamos que as duas superfícies A e B têm áreas iguais procedendo da seguinte maneira: supõe-se que $A > B$, obtêm-se a diferença $A - B$ e aplicando o princípio da exaustão deve-se chegar a um absurdo. Em seguida procede-se da mesma maneira supondo que $A <$

B , obtendo a diferença $B - A$ que deve levar a uma segunda contradição. Conclui-se finalmente que $A = B$ (p.103).

A seguir o método da exaustão será ilustrado na quadratura do círculo feita por Arquimedes (287 a. C.-212 a.C). Primeiramente enunciamos a proposição: “A área de um círculo é igual à do triângulo retângulo no qual um dos lados que formam o ângulo reto é igual ao raio e o outro lado que forma o ângulo reto é a circunferência deste círculo” (Roque; Pitombeira, 2012, p. 147).

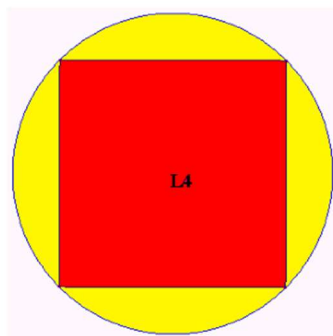
Figura 80 - Área do círculo.



Fonte: Bongiovanni, 2005, p. 104.

Seja A a área do círculo e T a área do triângulo, temos três hipóteses: $A > T$, $A = T$ e $A < T$. Vamos supor primeiramente que $A > T$ e vamos aplicar o método da exaustão às grandezas A e $A - T$, ou seja, vamos tirar de A , que é a maior área, um quadrado inscrito cuja área $L4$ é maior que a metade de A . Dessa forma, sobrarão $A - L4$ (vide Figura 81).

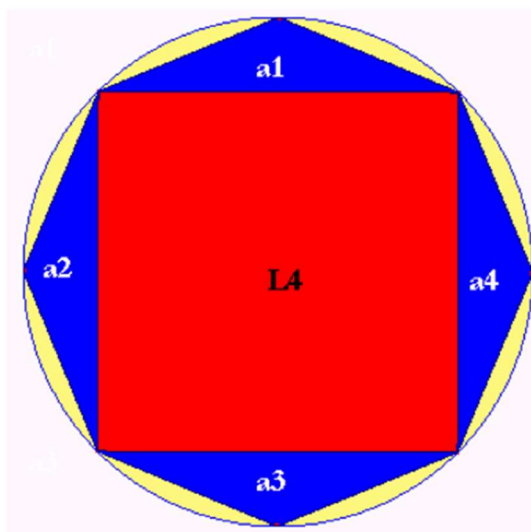
Figura 81 - Área do Círculo 2.



Fonte: Bongiovanni, 2005, p.104.

Continuamos o procedimento retirando de $A - L4$ uma parte maior que sua metade $(a1 + a2 + a3 + a4)$. Logo sobrarão $(A - L4) - (a1 + a2 + a3 + a4)$, que chamamos de $A - L8$, representada pela região amarela da Figura 82.

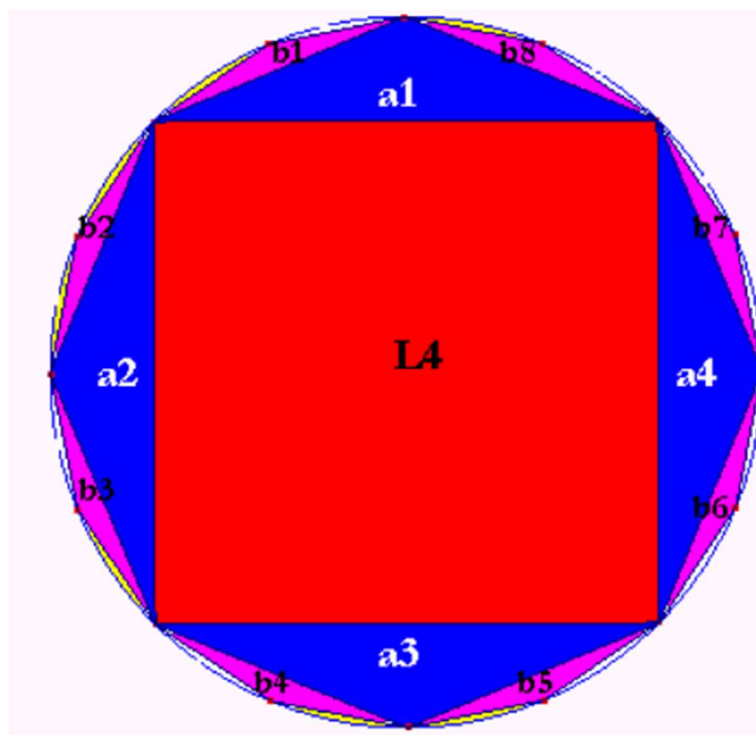
Figura 82 - Área do Círculo 3.



Fonte: Bongiovanni, 2005, p. 104.

Prosseguimos com o método retirando de $A - L8$ uma parte maior que sua metade $(b1 + b2 + b3 + b4 + b5 + b6 + b7 + b8)$. Assim, sobrará $(A - L8) - (b1 + b2 + b3 + b4 + b5 + b6 + b7 + b8)$, que chamamos de $A - L16$, de acordo com a pequena região amarela ilustrada na Figura 83.

Figura 83 - Área do Círculo 4.

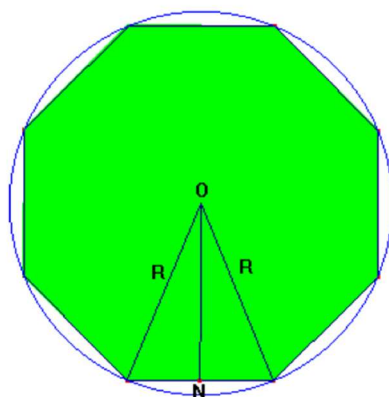


Fonte: Bongiovanni, 2005, p. 104.

Depois de um número finito de etapas o que sobra é uma região $A - Ln$ que será menor do que as duas grandezas iniciais A e $A - T$. Assim $A - Ln < A - T$ e, portanto, $T < Ln$.

Se considerarmos um polígono regular de área Ln inscrito no círculo de área A (vide Figura 84). Como o apótema ON do polígono regular é menor que o raio R da circunferência e o perímetro P do mesmo polígono é menor que o comprimento C da circunferência, temos que $ON \cdot P < R \cdot C$. Logo, $\frac{ON \cdot P}{2} < \frac{R \cdot C}{2}$, ou seja, a área do polígono regular Ln (lado esquerdo da inequação anterior) é menor do que a área do triângulo T (lado direito da inequação anterior) o que é um absurdo, pois já tínhamos constatado que $T < Ln$.

Figura 84 - Área do Círculo 5.

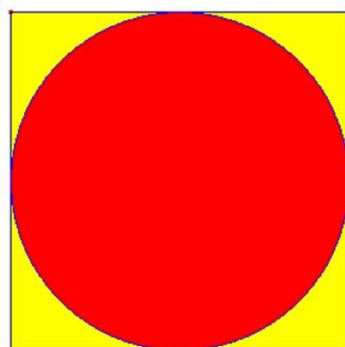


Fonte: Bongiovanni, 2005, p. 107.

Agora vamos supor que $A < T$.

Seja $L4$ a área do quadrado circunscrito ao círculo. Assim vamos considerar a diferença $T - A$ e $L4$ para aplicar o princípio de exaustão. Primeiramente, sabendo que a área do círculo mede mais do que a metade do quadrado, retiramos do quadrado este círculo, restando assim $L4 - A$, referente a região amarela da Figura 85.

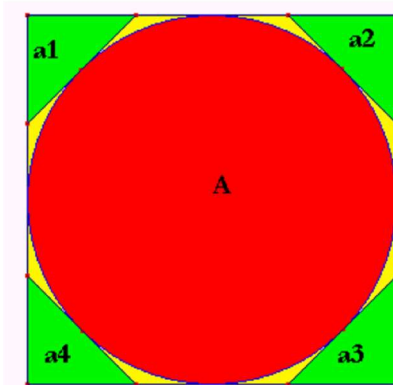
Figura 85 - Área do Círculo 6.



Fonte: Bongiovanni, 2005, p. 107.

A seguir, retiramos dessa sobra uma parte que é maior do que sua metade $a_1 + a_2 + a_3 + a_4$, restando assim $(L_4 - A) - (a_1 + a_2 + a_3 + a_4)$ que chamamos de $L_8 - A$, que corresponde a região amarelada da Figura 86.

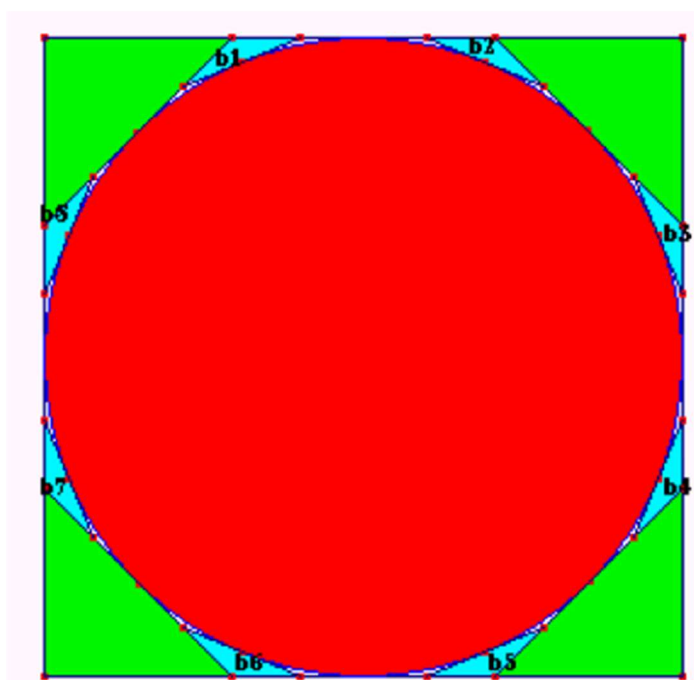
Figura 86 - Área do Círculo 7.



Fonte: Bongiovanni, 2005, p. 108.

Da mesma forma, retiramos de $L_8 - A$ uma parte maior que sua metade $(b_1 + b_2 + b_3 + b_4 + b_5 + b_6 + b_7 + b_8)$. O que sobra é $(L_8 - A) - (b_1 + b_2 + b_3 + b_4 + b_5 + b_6 + b_7 + b_8)$ que corresponde a parte amarela da Figura 87.

Figura 87 - Área do Círculo 8.

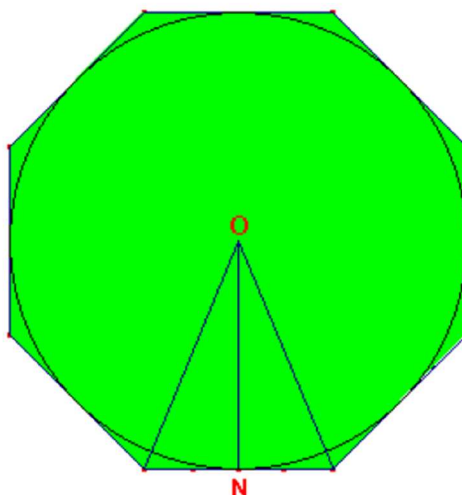


Fonte: Bongiovanni, 2005, p. 108.

Depois de repetir esse procedimento um número infinito de vezes obtemos um polígono regular de área L_n tal que $L_n - A$ será menor do que as grandezas iniciais $T - A$ e L_4 . Assim, $L_n - A < T - A$, o que implica em $L_n < T$.

Dessa forma, se considerarmos um polígono regular de área L_n circunscrito ao círculo de área A e o apótema ON igual ao raio R do círculo e cujo perímetro P é maior do que o comprimento C da circunferência (vide Figura 88). Logo $ON \cdot P > R \cdot C$. Assim $\frac{ON \cdot P}{2} > \frac{R \cdot C}{2}$, ou seja, a área do polígono regular L_n (lado esquerdo da inequação anterior) é maior do que a área do triângulo T (lado direito da inequação anterior). Logo $L_n > T$ o que é um absurdo, pois já tínhamos constatamos que $L_n < T$.

Figura 88 - Área do Círculo 9.



Fonte: Bongiovanni, 2005, p. 109.

Como a hipótese $T > A$ levou-nos a um absurdo e a hipótese $A < T$ que também nos levou a outro absurdo, concluímos que $T = A$.

Esse método de demonstração por absurdo duplo foi utilizado com frequência até o século XVI e foi o embrião da noção da operação de limite, mesmo sem invocar o conceito de infinito.

APÊNDICE 2: DADOS DO LEVANTAMENTO DOS LIVROS

No Quadro 15 apresentamos as instituições cujos PPCs foram consultados para a escolha dos livros objetos de estudo e no Quadro 16 estão as cidades onde estão localizados os cursos dos devidos PPCs.

Quadro 15 - Instituições Pesquisadas.

Bahia: 6 instituições
Universidade Federal do Oeste da Bahia - UFOB, Universidade do Estado da Bahia - UNEB, Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia da Bahia - IFBA, Universidade Estadual do Sudoeste da Bahia - UESB, Universidade Estadual de Feira de Santana - UEFS, Universidade Estadual Santa Cruz – UESC.
Goiás-3 instituições
Instituto Federal de Goiás -IFG, Universidade Estadual de Goiás - UEG, Universidade Federal de Goiás – UFG.
Tocantins-2 instituições
Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Tocantins – IFTO, Universidade Federal do Tocantins – UFT.
Minas Gerais-12 instituições
Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de Minas Gerais – IFMG, Instituto Federal do Norte de Minas Gerais – IFNMG, Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Sul de Minas Gerais – IFSULDEMINAS, Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Triângulo Mineiro – IFTMG, Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Sudeste de Minas Gerais – IF Sudeste MG, Universidade do Estado de Minas Gerais – UEMG, Universidade Federal de Juiz de Fora – UFJF, Universidade Federal de São João Del-Rei – UFSJ, Universidade Federal do Triângulo Mineiro – UFTMG, Universidade Federal de Uberlândia- UFU, Universidade Federal dos Vales do Jequitinhonha e Mucuri – UFVJM, Universidade Federal de Itajubá – UNIFEI.
Paraná-3 instituições
Instituto Federal do Paraná – IFPR, Universidade Estadual do Paraná – UNESPAR, Universidade Federal da Integração Latino-Americana – UNILA.
Total: 26 Instituições.

Fonte: Elaborado pelo autor.

Quadro 16 - Cidades das instituições pesquisadas.

Cidades Sedes dos Cursos	Instituições
Bahia – 4 cidades	
Barreiras	UNEB, IFBA, UFOB
Vitória da Conquista	UESB
Ilhéus	UESC
Feira de Santana	UFFS
Goiás – 2 cidades	
Goiânia	IFG, UFG
Anápolis	UEG
Tocantins – 2 cidades	
Palmas	IFTO
Araguaína	UFT
Minas Gerais- 13 cidades	
Formiga	IFMG
Januária	IFNMG
Salinas	IFNMG
Passos	IFSMG
Paracatu	IFTMG
Santos Dumont	IF Sudeste MG
Ibirité	UEMG
Juiz de Fora	UFJF
São João Del-Rei	UFSJ
Uberaba	UFTM
Uberlândia	UFU
Teófilo Otoni	UFVJM
Itajubá	UNIFEI
Paraná – 3 cidades	
Capanema	IFPR
Paranaguá	UNESPAR
Foz do Iguaçu	UNILA
Total: 24 cidades.	

Fonte: Elaborado pelo autor.

Os livros citados nessas bibliografias foram listados, contabilizados e organizados de acordo com o número de citações (vide Quadro 17).

Quadro 17 - Livros citados.

Livro	Ano da primeira edição	BA	GO	MG	PR	TO	Quantidade
LEITHOLD, Louis. Cálculo com Geometria Analítica	1968 (inglês) fonte: Biblioteca da UFG 1977 (português) fonte: Biblioteca da UFG	6	3	10	3	2	24
GUIDORIZZI, Hamilton L. Um Curso de Cálculo – Volume 1	1985 fonte:LTC	5	3	11	2	2	23
FLEMMING, D. M.; GONÇALVES, M. B. Cálculo A,	1987 Fonte: O próprio livro.	5	2	11	2	2	22
STEWART, James. Cálculo	1987 (inglês) fonte: Biblioteca da UNB 1999 (português) Fonte: Biblioteca da USP	2	2	12	1	2	19
THOMAS, George B. Cálculo,	1951 (Inglês) Fonte: Biblioteca UFRJ 1965 (Português) Fonte: Biblioteca UFRJ	1	0	7	3	2	13
SIMMONS, G. F. Cálculo com Geometria Analítica	1984 (Inglês) Fonte: dokumen.tip 1987 (português) Fonte: Biblioteca UFRJ	3	2	7	0	1	13
MUNEM Mustafá A; FOULUS, David. Cálculo	1982 (Português) Fonte: Google	3	0	5	1	1	10
SWOKOWSKI, Earl W. Cálculo com Geometria Analítica	1977 (inglês) Fonte: Google 1983 (português) Fonte: Biblioteca UNB	4	2	3	0	0	9

ÁVILA, Geraldo. Cálculo das Funções de uma Variável	1978 fonte: LTC	2	2	2	0	0	6
ANTON, Howard; BIVENS, Irl; DAVIS, Stephen. Cálculo, v. 1.	1986 fonte: Google	0	0	3	2	0	5
ÁVILA, Geraldo. Cálculo I.	1994. Fonte: Google.	2	0	1	1	1	5
LANG, Serge, Cálculo.	1964 (inglês) Fonte: Biblioteca da UFG 1969 (português) Fonte: Biblioteca UFG	3	0	2	0	0	5
BOULOS, P., Introdução ao Cálculo,		0	0	3	1	0	4
IEZZI, Gelson; MURAKAMI, Carlos; MACHADO, Nilson José.; Fundamentos de Matemática Elementar – volume 8		0	0	3	1	0	4
APOSTOL, Tom M. Cálculo 1	1961 (inglês) Fonte: Biblioteca USP 1979 (português) Fonte: Biblioteca UFG	1	1	2	0	0	4
BOULOS, P. Cálculo Diferencial e Integral	1999 Fonte: Estante Virtual	2	1	1	0	0	4
HOFFMANN, L. D. Cálculo: Um Curso Moderno e suas Aplicações.		1	1	1	0	1	4
ANTON, H. Cálculo Um Novo Horizonte	1980 (Inglês) Fonte: goodreads 2000 (português) Fonte: Google	1	0	2	0	0	3
MORETTIN, Pedro A., BUSSAB, Wilton O e HAZZAN, Samuel. Cálculo Funções de uma Variável.		1	0	2	0	0	3

PISKOUNOV, Nikolai Semenovich. Cálculo Diferencial e Integral.	1966 (francês) Fonte: Biblioteca UNB 1969 (português) Fonte: Biblioteca UFRJ	3	0	0	0	0	3
ANTON, Howard; BIVENS, Irl; DAVIS, Stephen. Cálculo, v. 2.		0	0	2	0	0	2
LARSON, Ron, EDWARDS, Bruce. Cálculo com Aplicações	1978 (Inglês) Fonte: Google. 1995 (português) Fonte: Estantevirtual	1	0	1	0	0	2
HUGHES; HALLETT. Cálculo Aplicado.		0	0	1	0	1	2
EDWARDS, P. Cálculo com Geometria Analítica. Vol.1.		1	0	1	0	0	2
HOFFMAN, Laurence, BRADLEY, Gerald. Cálculo: Um Curso Moderno e suas Aplicações	1986 (Inglês) Fonte: goodreads 1996 (português) Fonte: Estante virtual	2	0	0	0	0	2
AYRES, F. Cálculo Diferencial e Integral. Coleção Schaum.		2	0	0	0	0	2
FINNEY, R. L.; WEIR, M. D.; GIORDANO, F. R. Cálculo.		1	0	0	0	1	2
GONÇALVES, M. B.; FLEMMING, D. M. Cálculo B		0	0	1	0	0	1
IEZZI, Gelson. Fundamentos de matemática elementar 3:		0	0	0	1	0	1
IEZZI, Gelson; MURAKAMI, Carlos. Fundamentos de matemática elementar 1		0	0	0	1	0	1
BOYER, Carl B. História da matemática.		0	0	0	1	0	1

BOYER, Carl B; DOMINGUES, Hygino H. Cálculo		0	0	0	1	0	1
DOLCE, Osvaldo; POMPEO, José Nicolau. Fundamentos de matemática elementar 10:		0	0	0	1	0	1
STEWART, Ian. Fantástico mundo do números: a matemática do zero ao infinito.		0	0	0	1	0	1
AL SHENK. Cálculo e Geometria Analítica, Rio		0	0	0	1	0	1
CAPUTO, Homero Pinto. Matemática para a engenharia: para uso de estudantes e profissionais.		0	0	0	1	0	1
D'AMBRÓSIO, Ubiratan. Introdução ao cálculo com revisão de matemática elementar.		0	0	0	1	0	1
D'AMBRÓSIO, U. Etnomatemática: Elo entre as tradições e a modernidade.		0	0	0	0	1	1
KAPLAN, Wilfred. Cálculo e Álgebra linear.		0	0	0	1	0	1
MOISE, Edwin E.. Cálculo: um curso universitário.		0	0	0	1	0	1
SEELEY, Robert T. Cálculo de uma variável.		0	0	0	1	0	1
WOODS, Frederick S. Elementos de Cálculo.		0	0	0	1	0	1
THOMAS, George B.. Cálculo, Volume II		0	0	1	0	0	1
IEZZI, Gelson. Tópicos de Matemática.	1980 Fonte: Mercado livre	1	0	0	0	0	1

ÁVILA, Geraldo. Introdução às Funções e à Derivada.		1	0	0	0	0	1
LARSON, R. Cálculo aplicado: curso rápido.		0	0	1	0	0	1
LARSON, Ron; HOSTELER, Robert P.; EDWARDS, Bruce H. Cálculo: volume 2.		0	0	1	0	0	1
HUGHES-HALLETT, Deborah. Cálculo.	1997 Fonte: Blucher	1	0	0	0	0	1
HALLETT, D. H.; GLEASON, A. M.; LOCK, P. F.; FLATH, D.E. Cálculo e Aplicações.		1	0	0	0	0	1
LIMA, E. L. Curso de Análise.		0	0	1	0	0	1
TAHAN, Malba.; O homem que calculava.		0	0	1	0	0	1
DEMANA, F. D., WAITS, B. K., FOLEY, G. D., KENNEDY, D. Pré-cálculo		0	0	1	0	0	1
HIMONAS, Alex; HOWARD, Alan. Cálculo: Conceitos e Aplicações.		0	0	1	0	0	1
Courant, Richard. Calculo diferencial e integral		0	1	0	0	0	1
Rogério, Mauro Urbano. Cálculo diferencial e integral : funções de uma variável,		0	1	0	0	0	1
Silva, Valdir V.; Reis, Genésio L.. Geometria Analítica		0	1	0	0	0	1
STEWART, James. Calculus Single Variable.		1	0	0	0	0	1

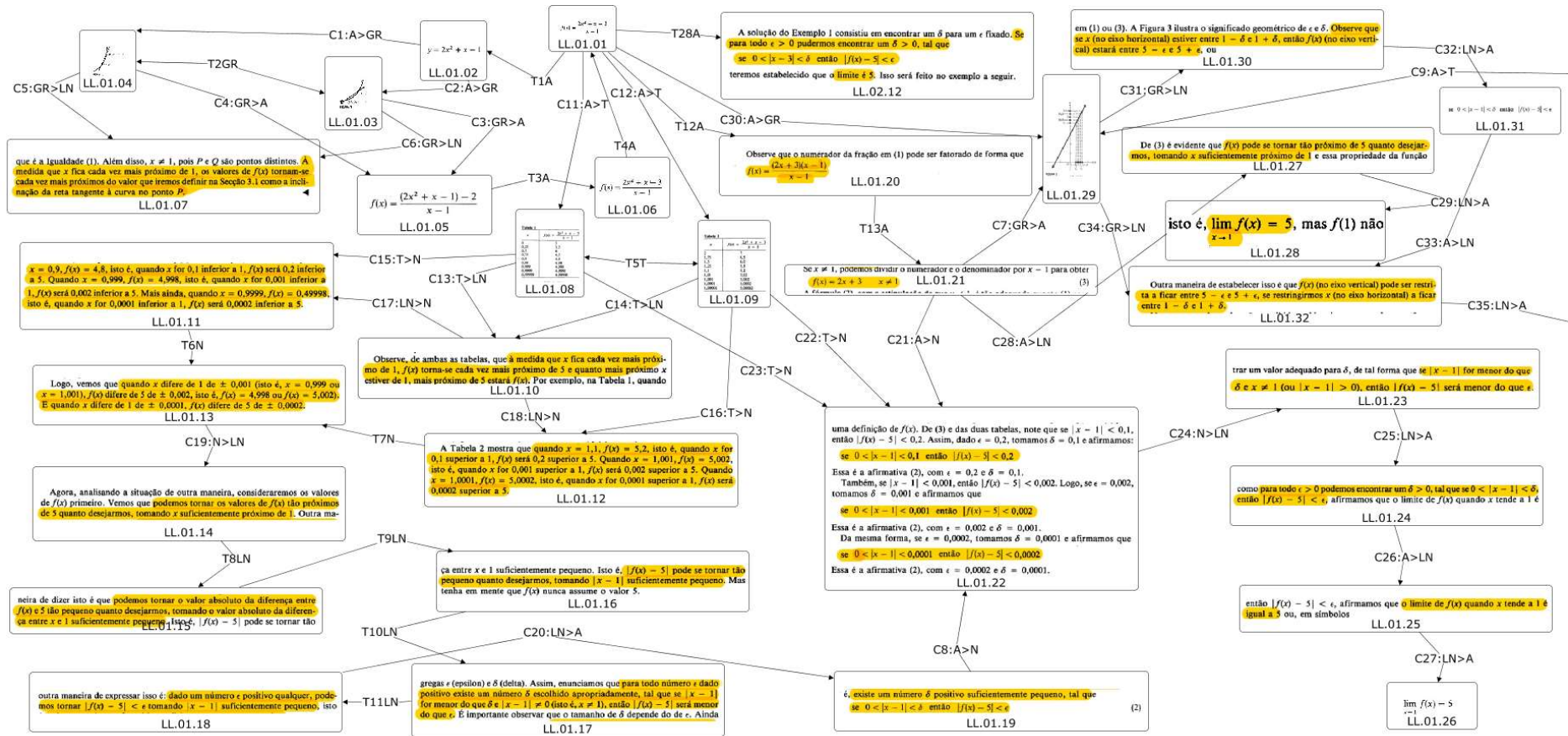
LARSON, R.; HOSTETLER, R. P.; EDWARDS, B. H. Cálculo. Vol. 1.		1	0	0	0	0	1
JANOS, M. Matemática e Natureza.		0	0	0	0	1	1
UHLKAMP, Nilo. Cálculo I.	1999 Fonte: Estantevirtual	1	0	0	0	0	1
SPIVAK, Michael, Cálculo Infinitesimal.	1967 (inglês) Fonte: Biblioteca USP 1970 (português) Fonte: Biblioteca UFRJ	1	0	0	0	0	1
GRANVILLE, Willian Antohone. Elementos de Cálculo Diferencial e Integral.		1	0	0	0	0	1
MALTA, I.; PESCO, S.; LOPES, H. Cálculo a uma Variável.		1	0	0	0	0	1
MUNIZ NETO, A. C. Fundamentos de Cálculo.		1	0	0	0	0	1
PATRÃO, M. Cálculo 1.		1	0	0	0	0	1
ANDRADE, L. N. Introdução à Computação Algébrica com o Maple.		1	0	0	0	0	1
ALMAY, Péter. Elementos de Cálculo Diferencial e Integral, Volume I.		1	0	0	0	0	1
Totais:		66	22	101	30	18	237

Fonte: Elaborado pelo autor.

APÊNDICE 3: ESQUEMAS DAS CONVERSÕES

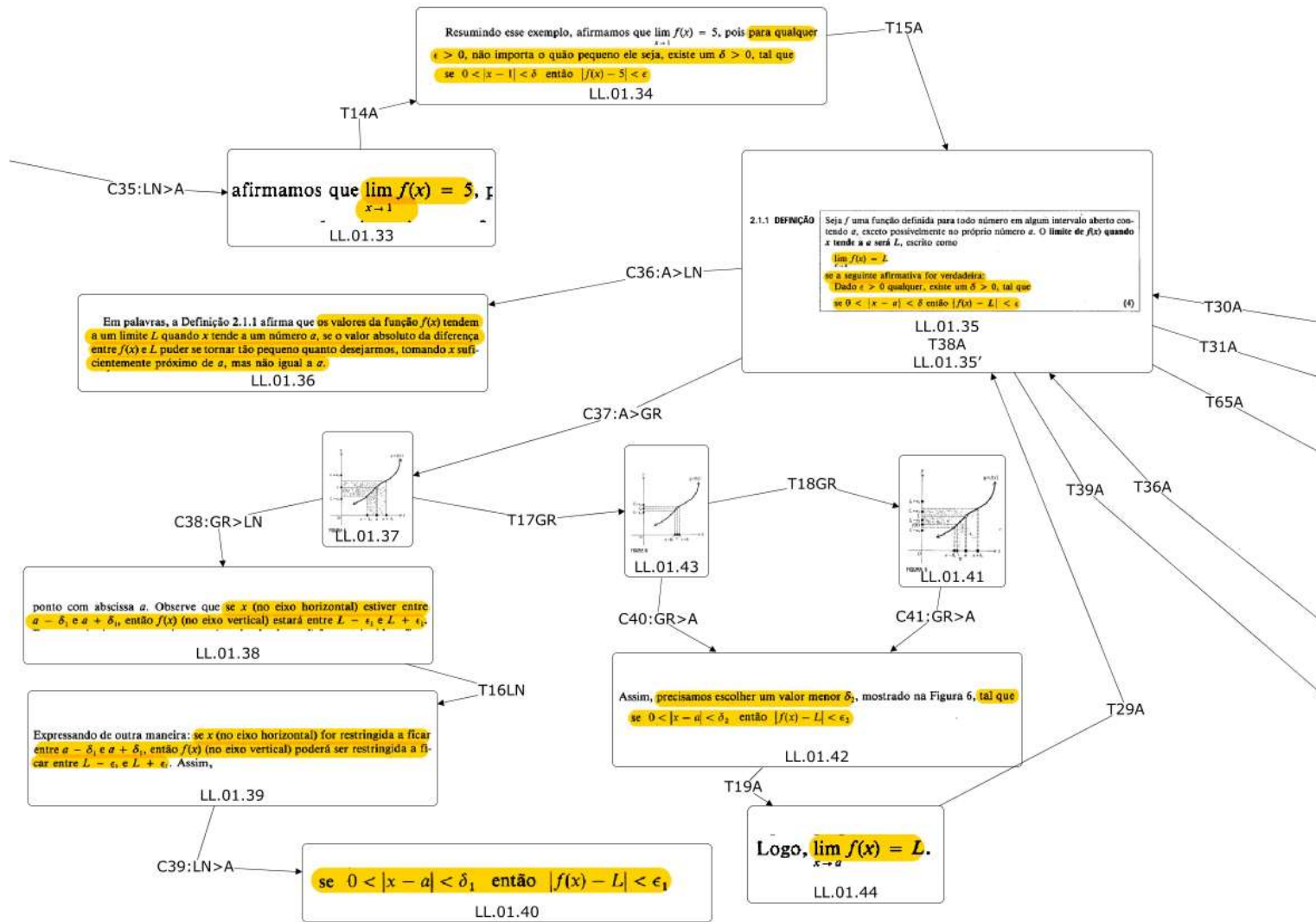
ESQUEMAS DO LIVRO DO LEITHOLD:

Figura 89 - Esquema das conversões da primeira parte da introdução da seção 2.1 do livro do Leithold.



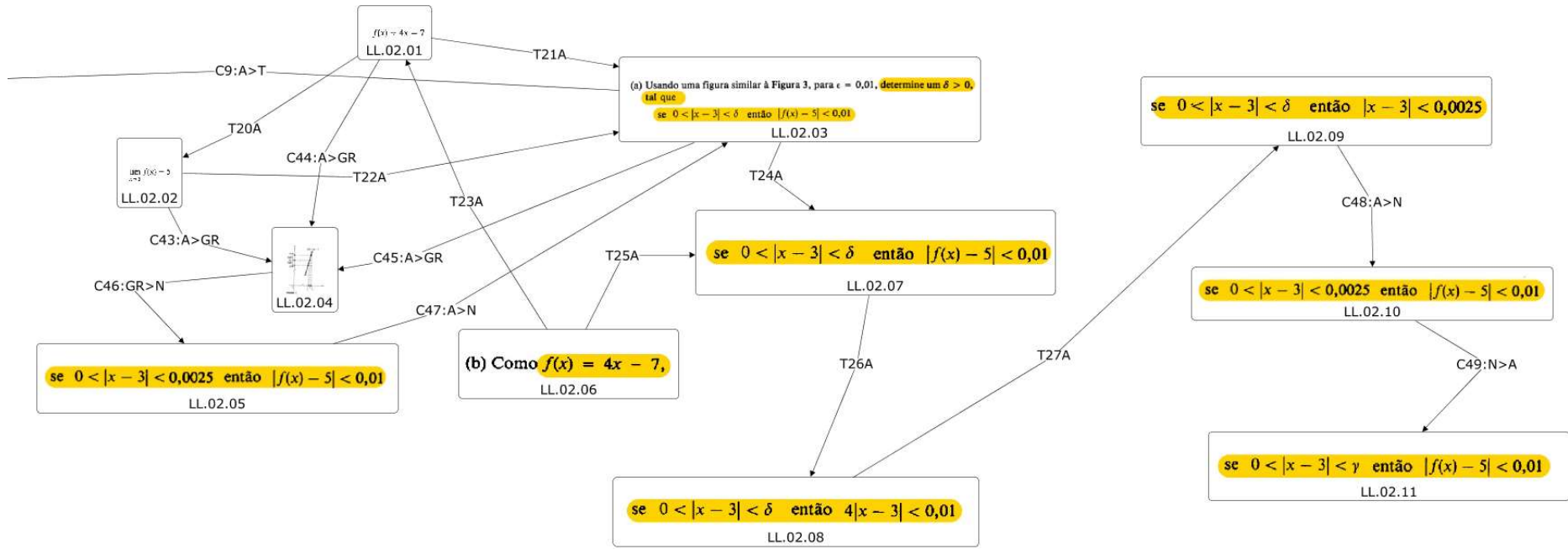
Fonte: Elaborado pelo autor.

Figura 90 - Esquema das conversões da segunda parte da introdução da seção 2.1 do livro do Leithold.



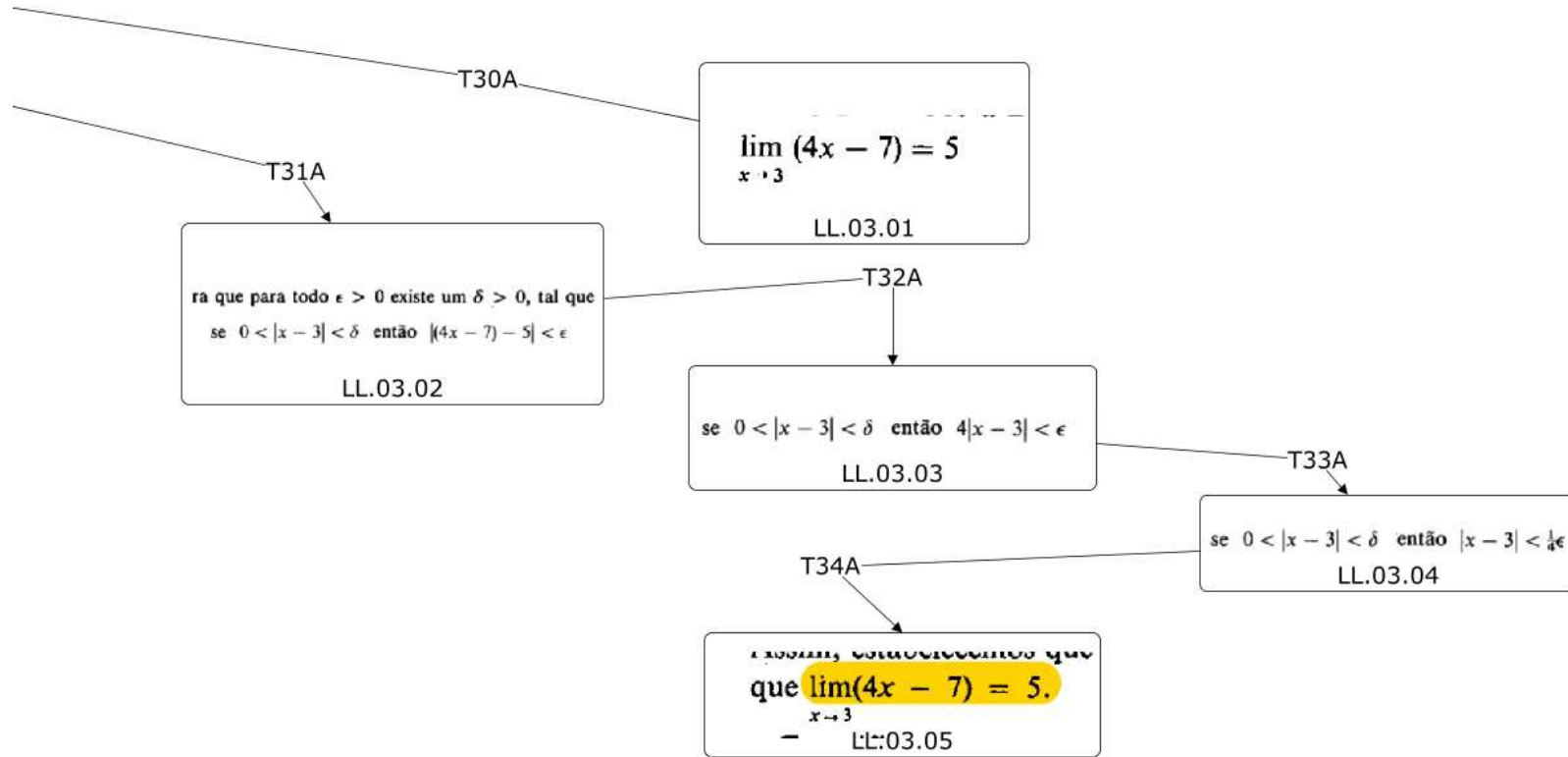
Fonte: Elaborado pelo autor.

Figura 91 - Esquemas de conversões do exemplo 1 da seção 2.1 do livro do Leithold.



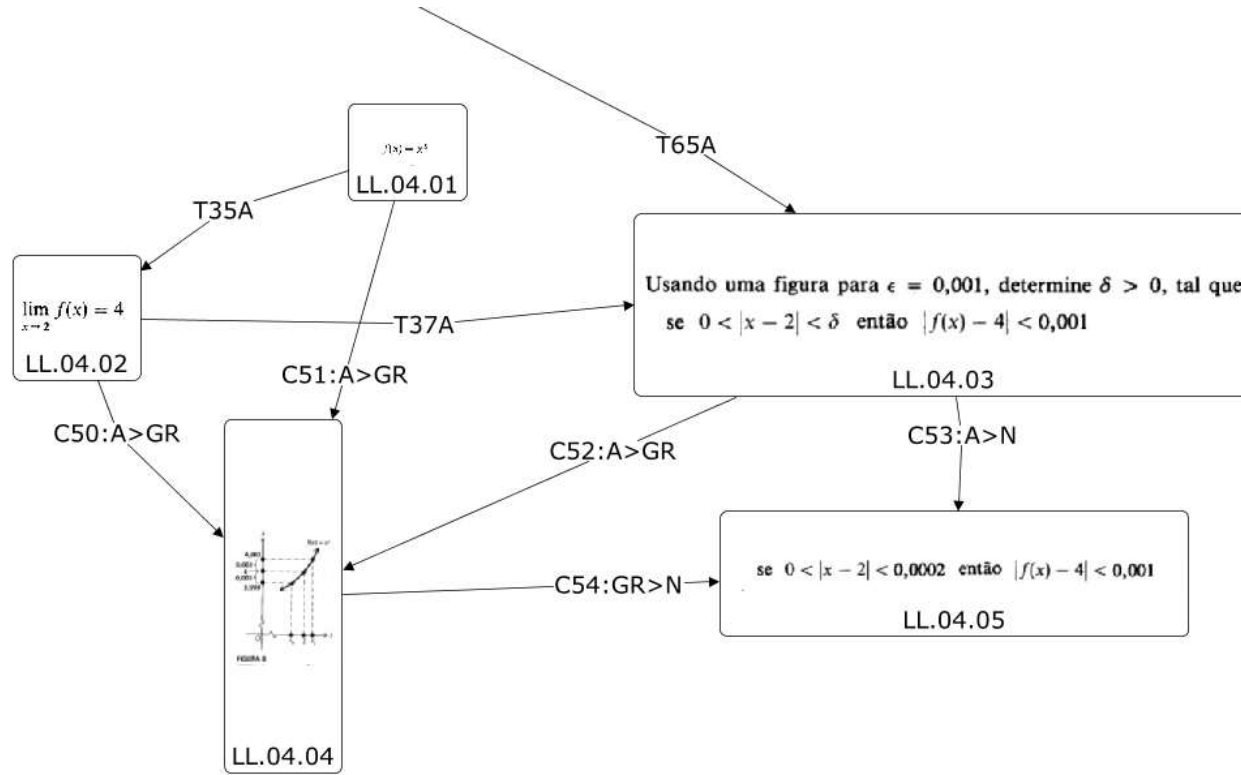
Fonte: Elaborado pelo autor.

Figura 92 - Esquemas de conversões do exemplo 2 da seção 2.1 do livro do Leithold.



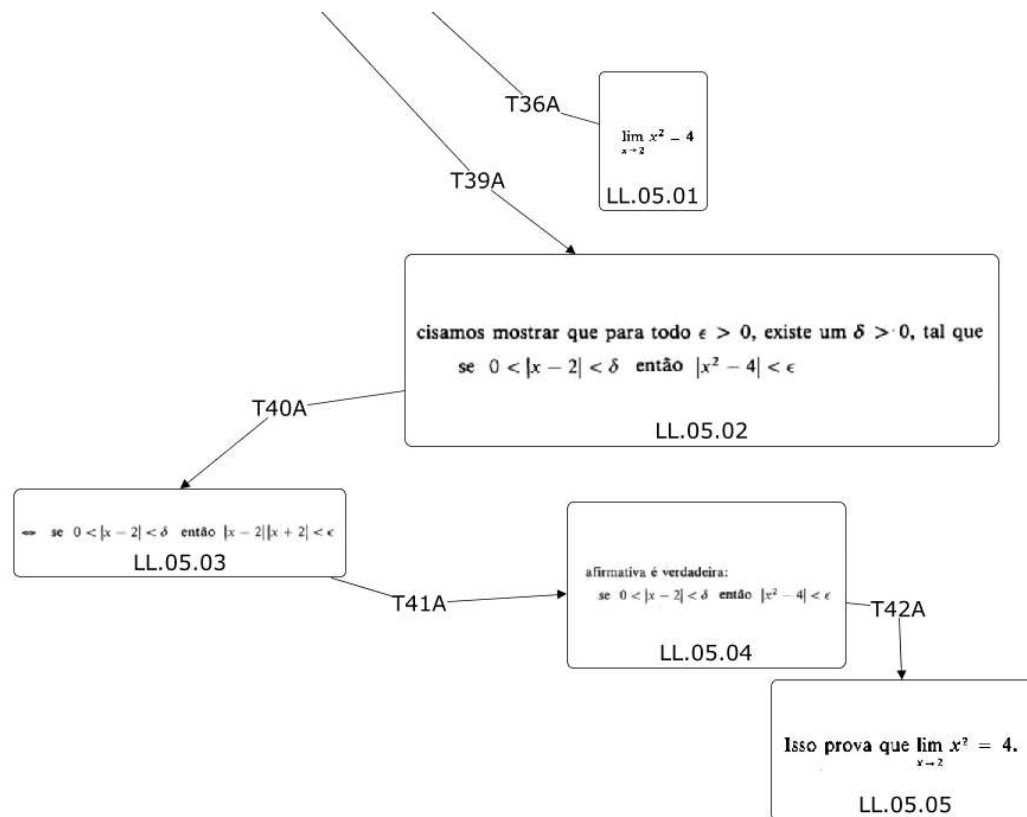
Fonte: Elaborado pelo autor.

Figura 93 - Esquemas de conversões do exemplo 3 da seção 2.1 do livro do Leithold.



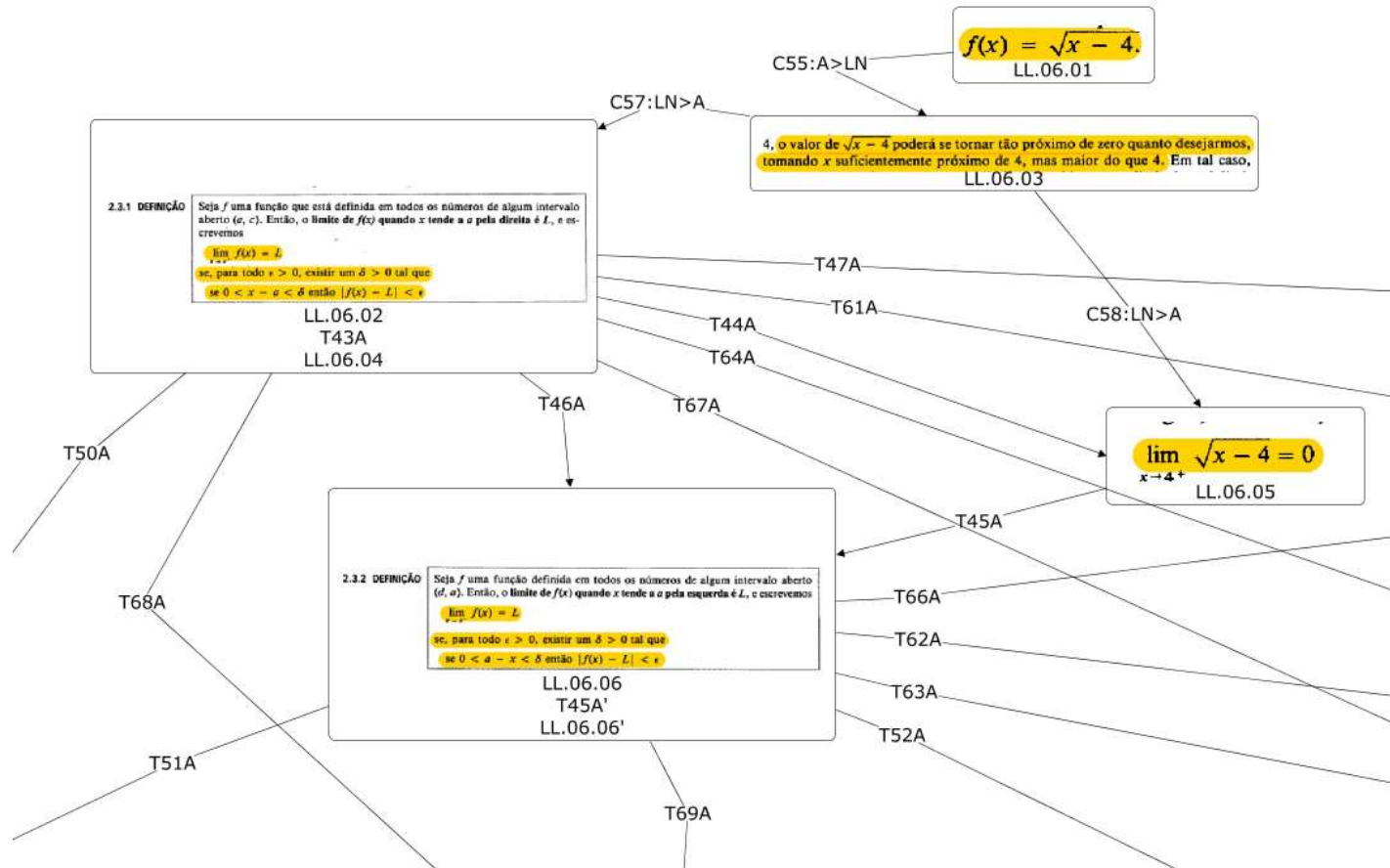
Fonte: Elaborado pelo autor.

Figura 94 - Esquemas de conversões do exemplo 4 da seção 2.1 do livro do Leithold.



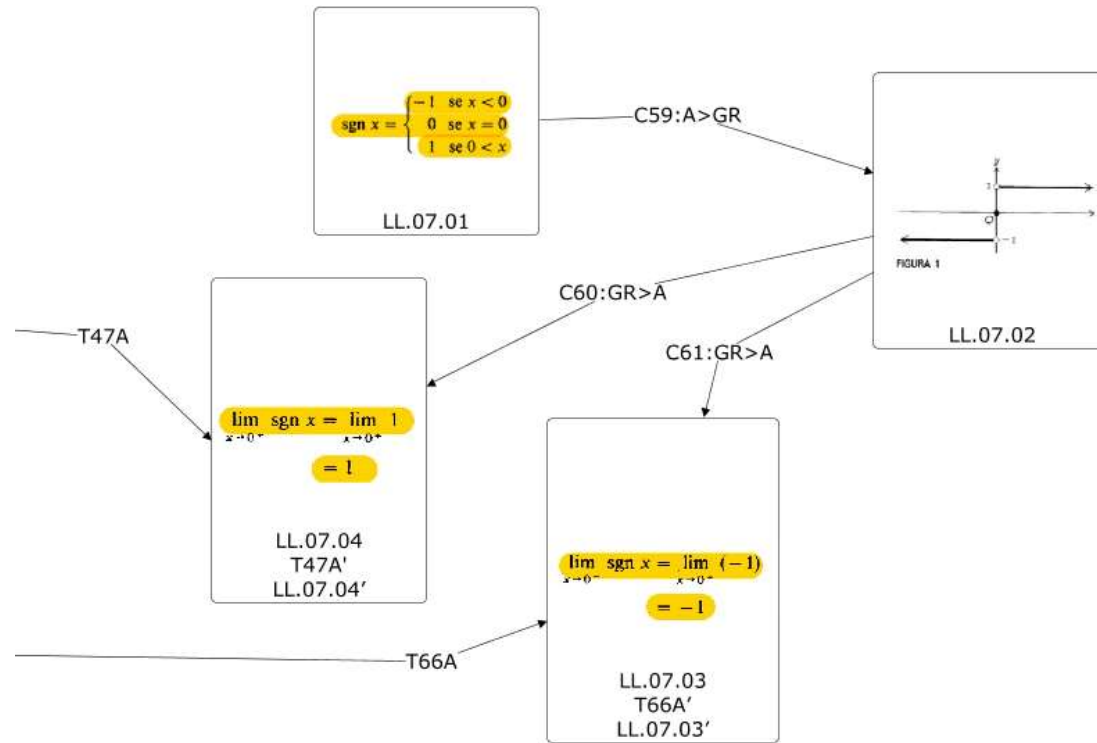
Fonte: Elaborado pelo autor.

Figura 95 -Esquemas de conversões da introdução da seção 2.3 do livro do Leithold.



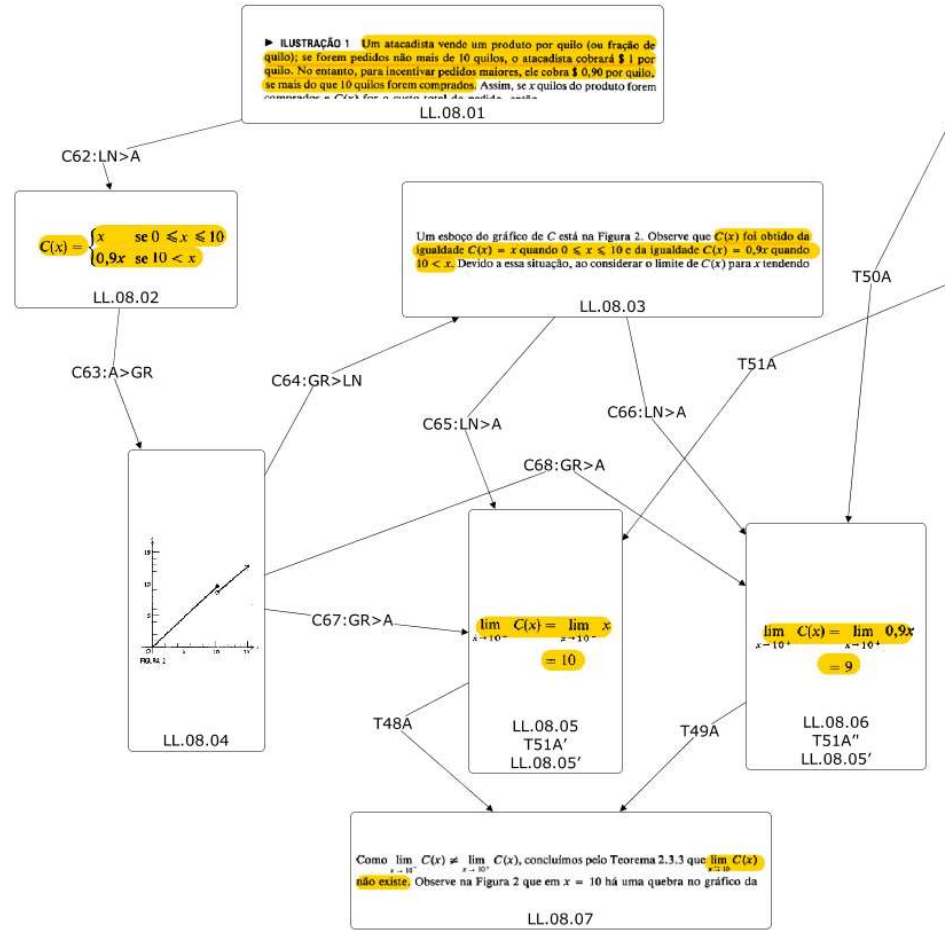
Fonte: Elaborado pelo autor.

Figura 96 - Esquemas de conversões do exemplo 1 da seção 2.3 do livro do Leithold.



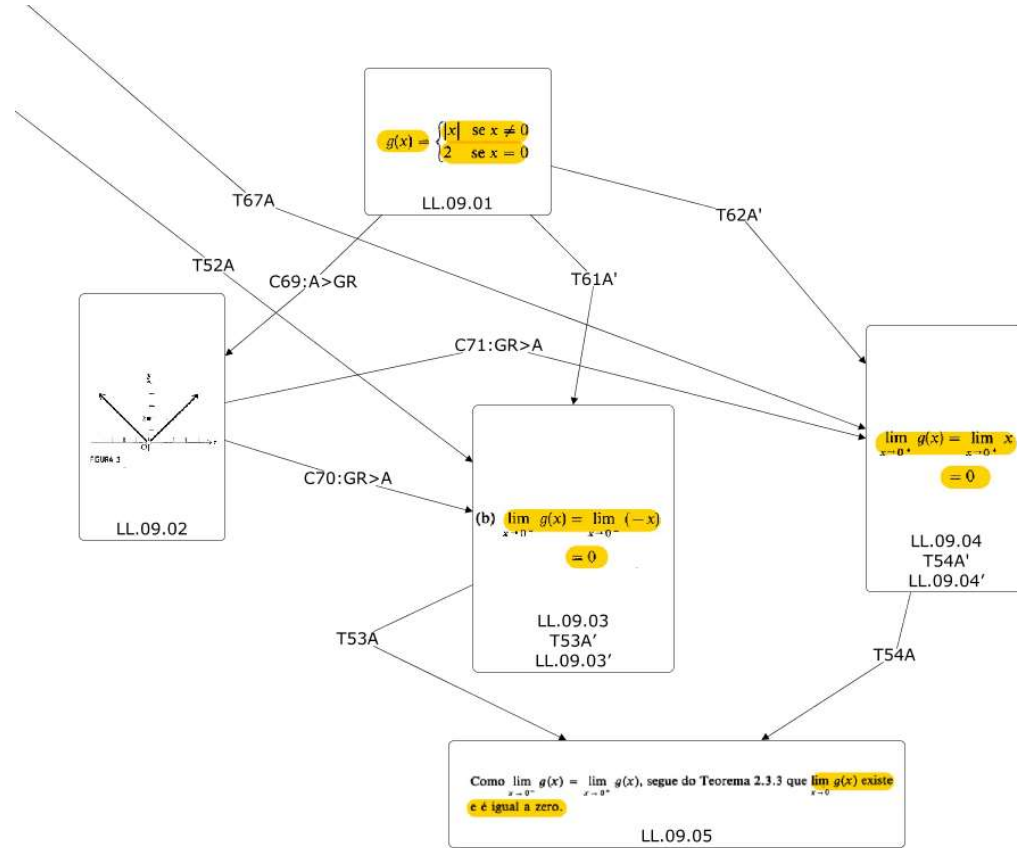
Fonte: Elaborado pelo autor.

Figura 97 - Esquemas de conversões da ilustração 1 da seção 2.3 do livro do Leithold.



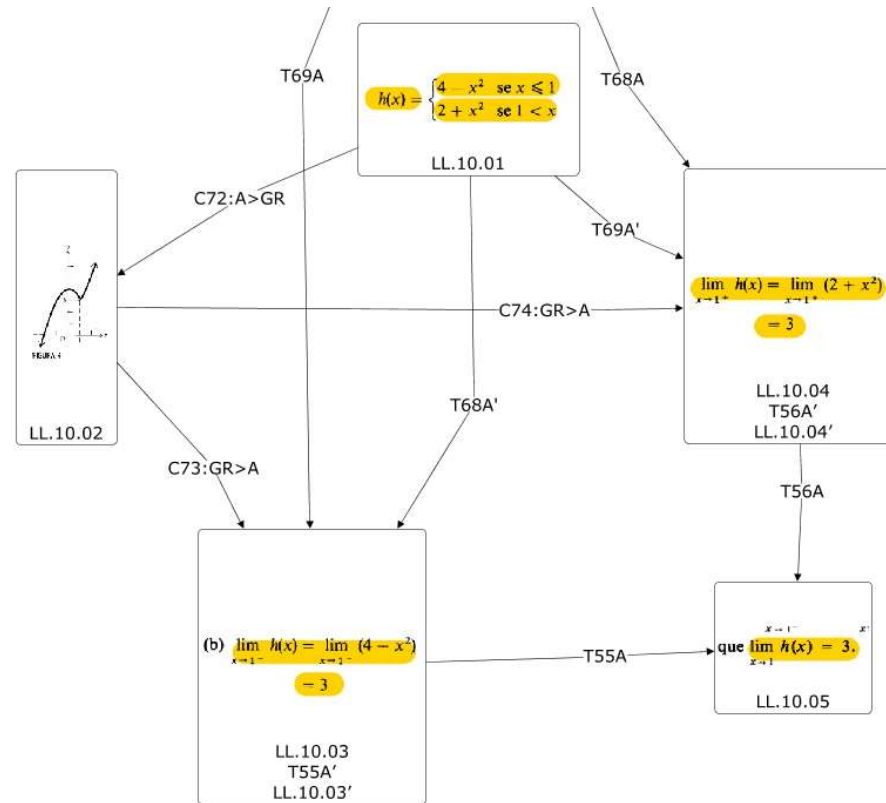
Fonte: Elaborado pelo autor.

Figura 98 - Esquemas de conversões do exemplo 2 da seção 2.3 do livro do Leithold.



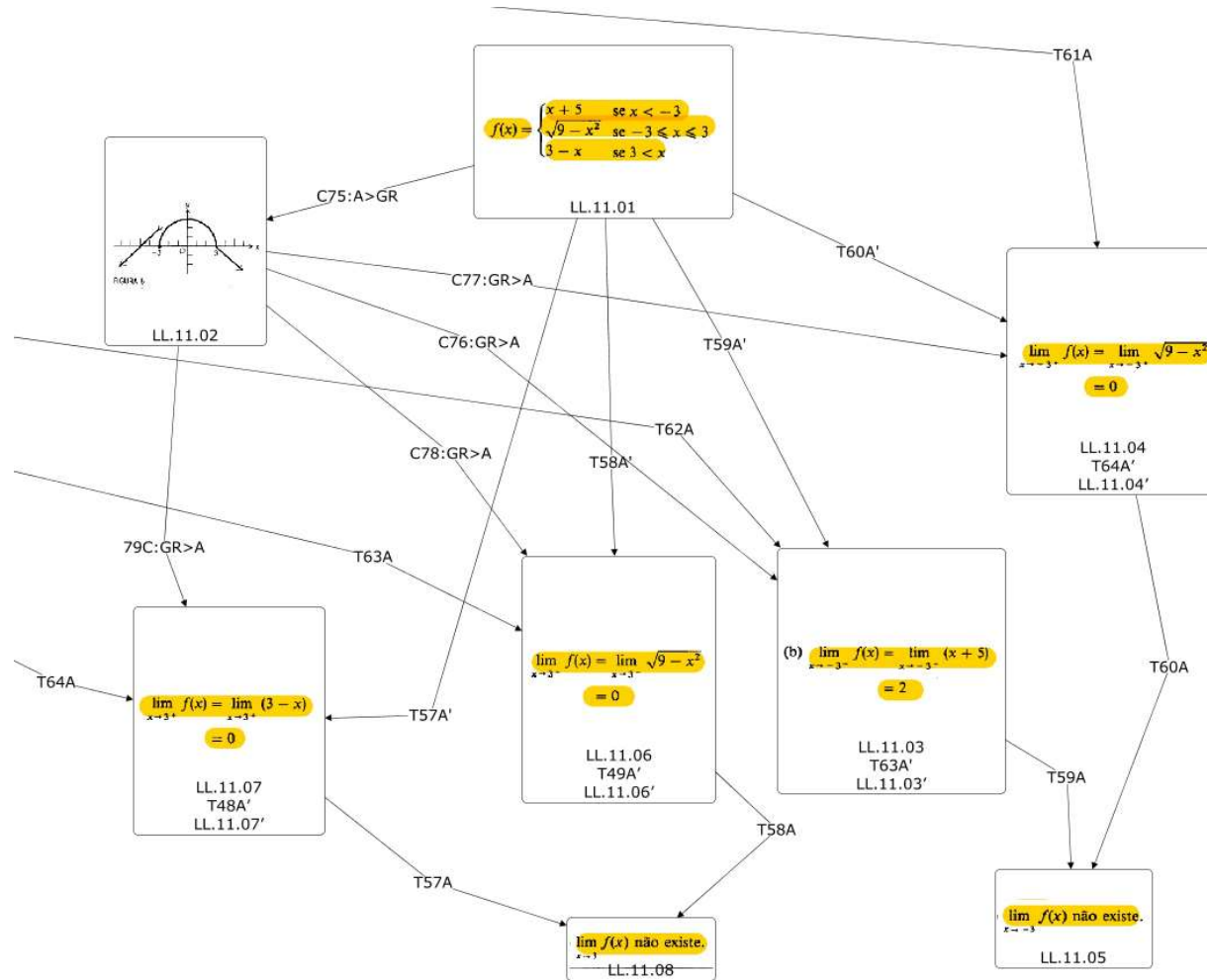
Fonte: Elaborado pelo autor.

Figura 99 - Esquemas de conversões do exemplo 3 da seção 2.3 do livro do Leithold.



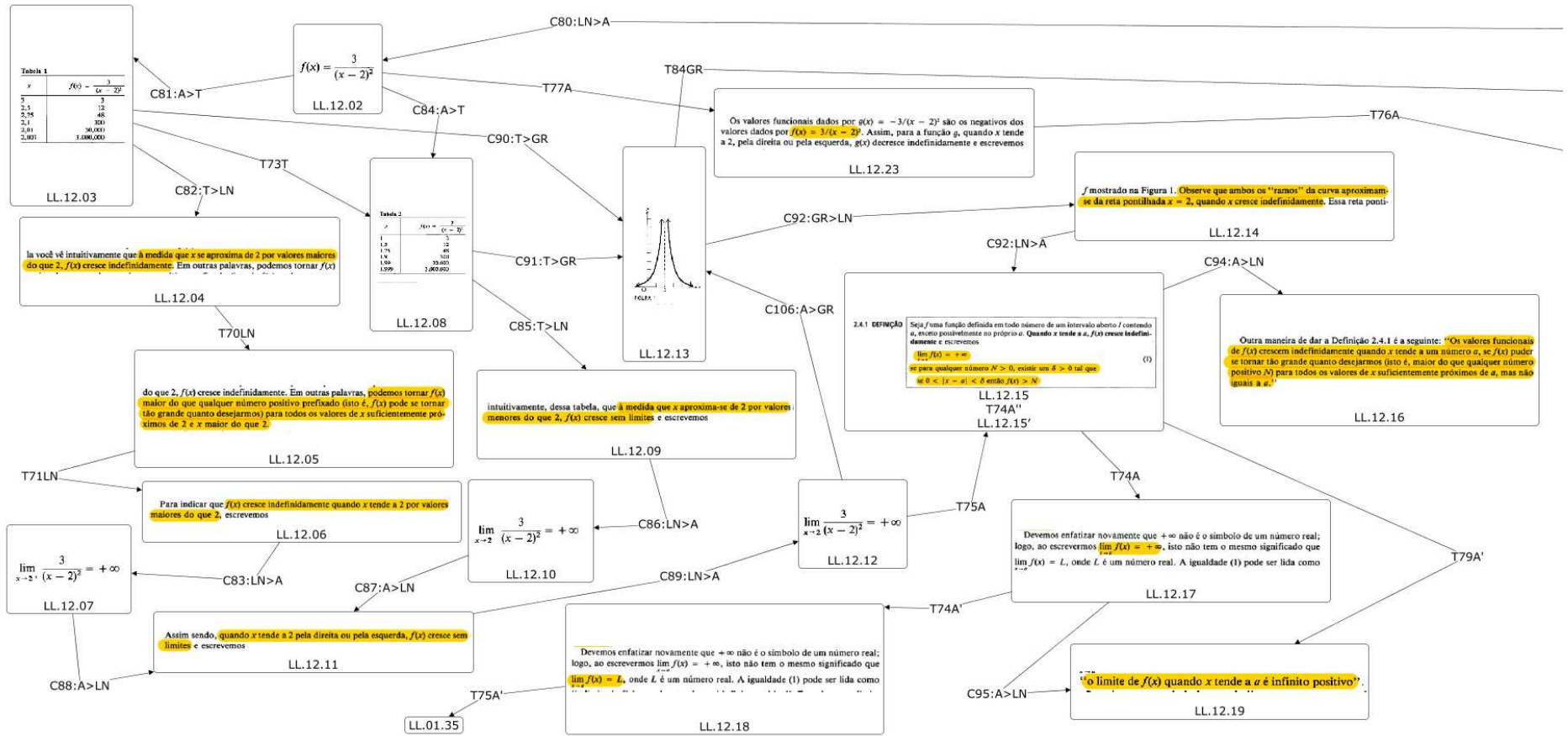
Fonte: Elaborado pelo autor.

Figura 100: Esquemas de conversões do exemplo 4 da seção 2.3 do livro do Leithold.



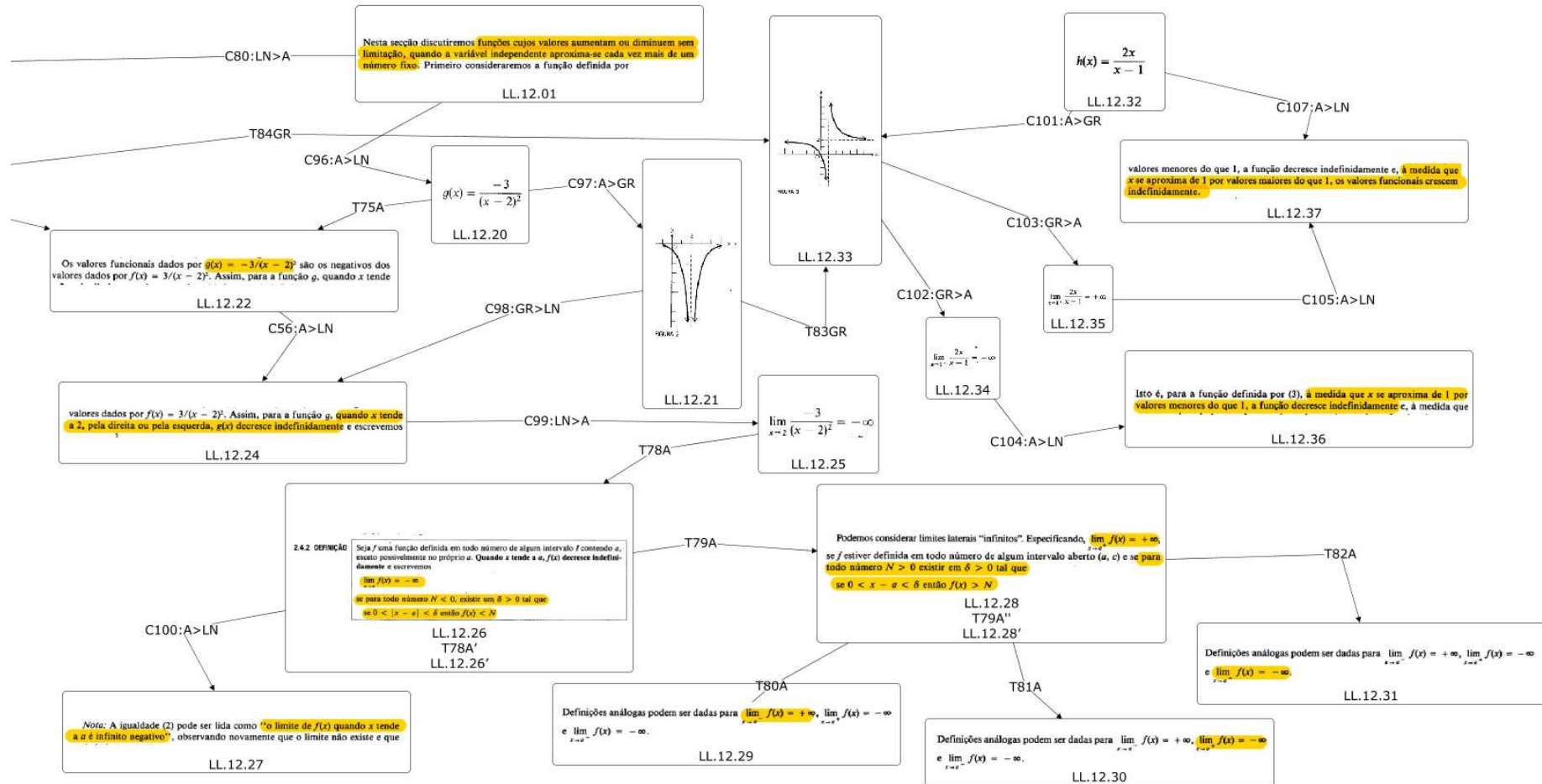
Fonte: Elaborado pelo autor.

Figura 101 - Esquemas de conversões da primeira parte da introdução da seção 2.4 do livro do Leithold.



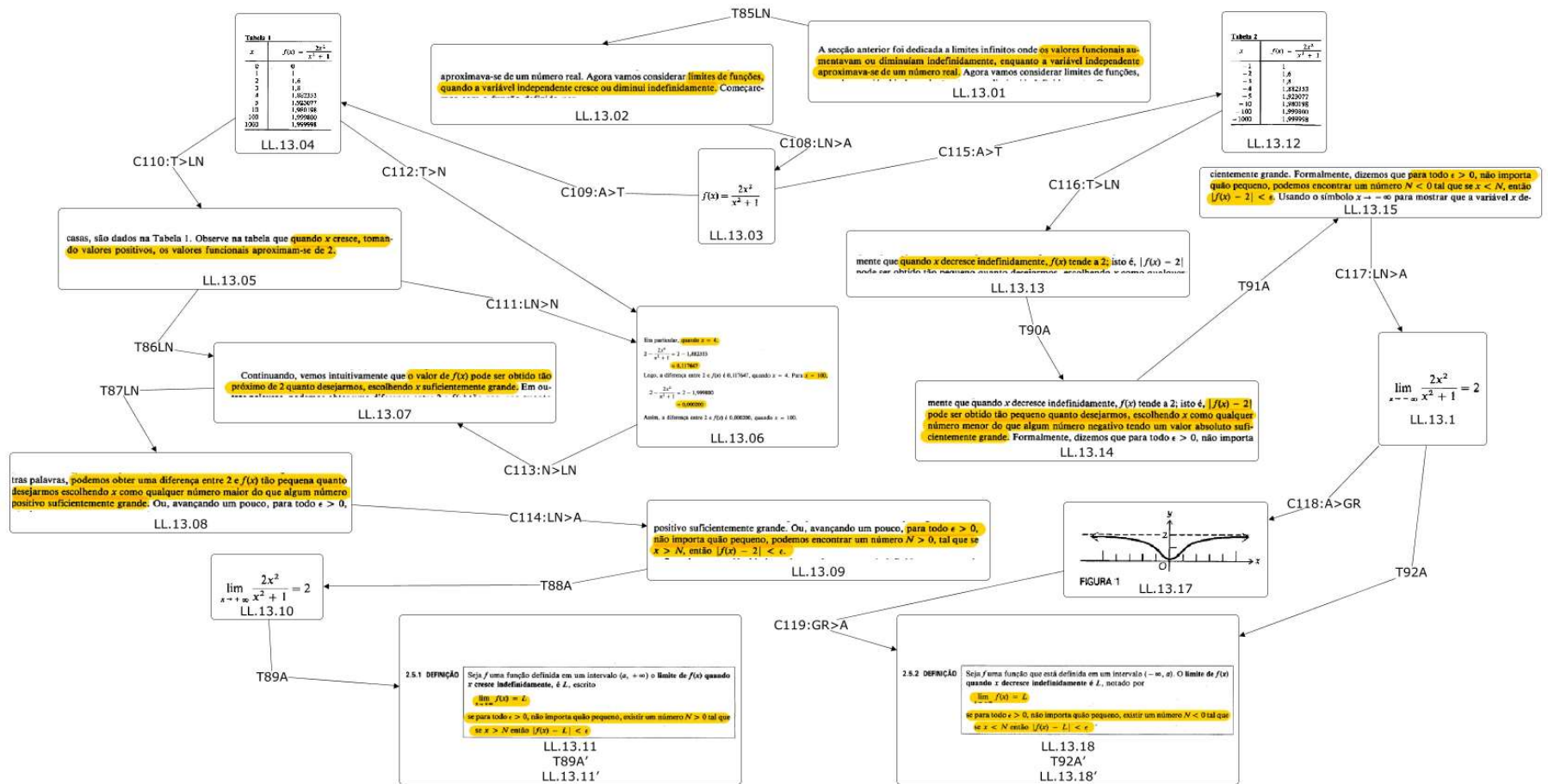
Fonte: Elaborado pelo autor.

Figura 102 -Esquemas de conversões da segunda parte da introdução da seção 2.4 do livro do Leithold.



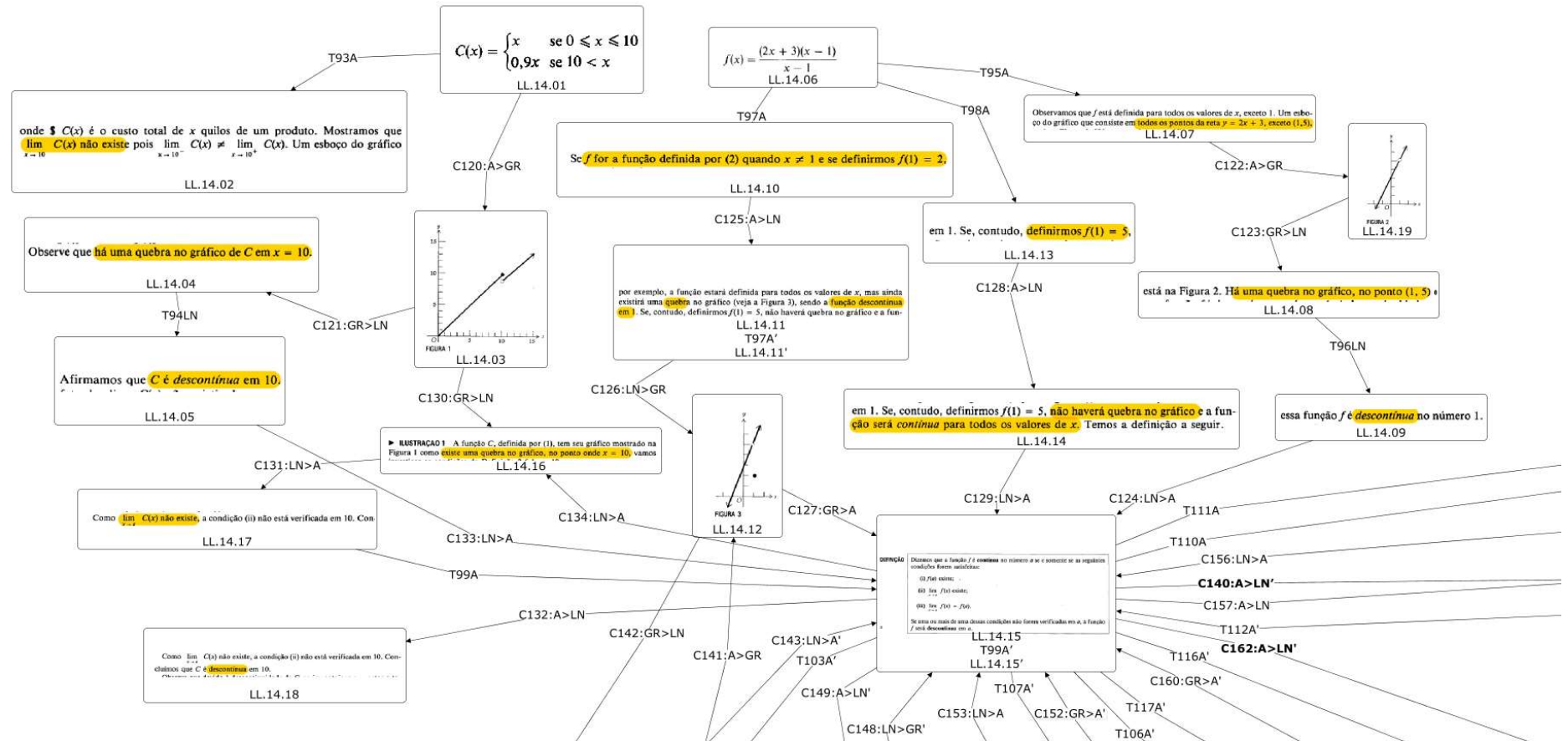
Fonte: Elaborado pelo autor.

Figura 103 - Esquemas de conversões da seção 2.5 do livro do Leithold.



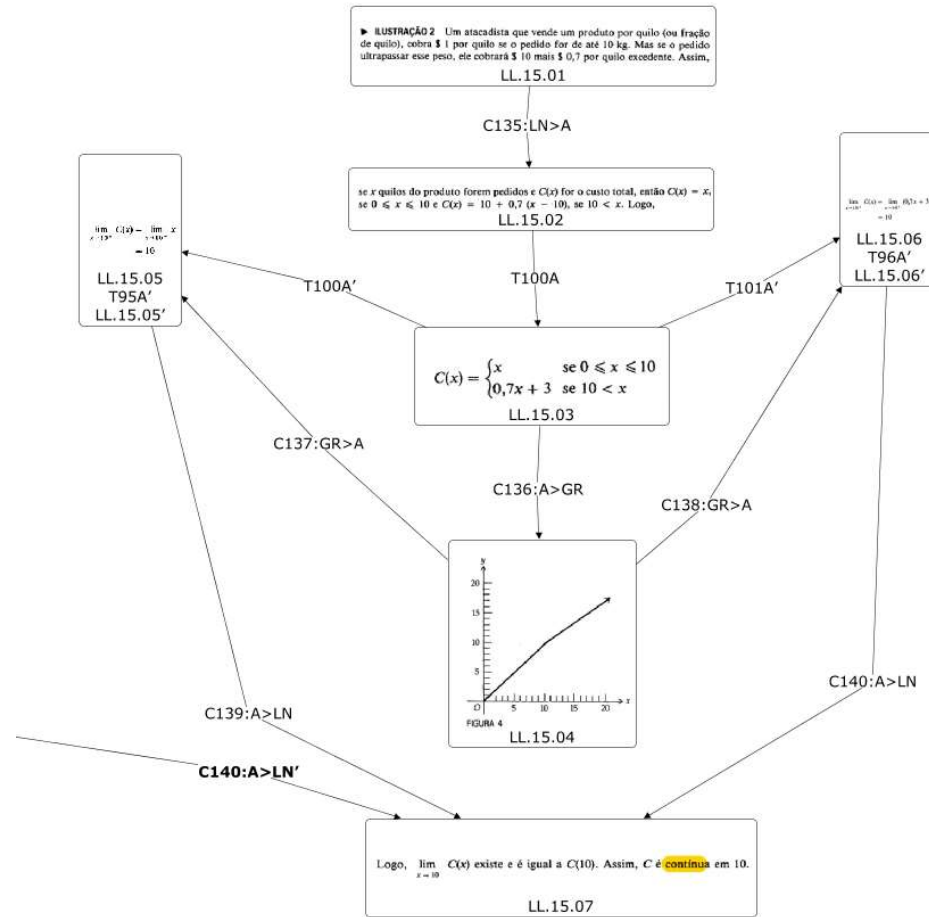
Fonte: Elaborado pelo autor.

Figura 104 - Esquemas de conversões da ilustração 1 da seção 2.6 do livro do Leithold.



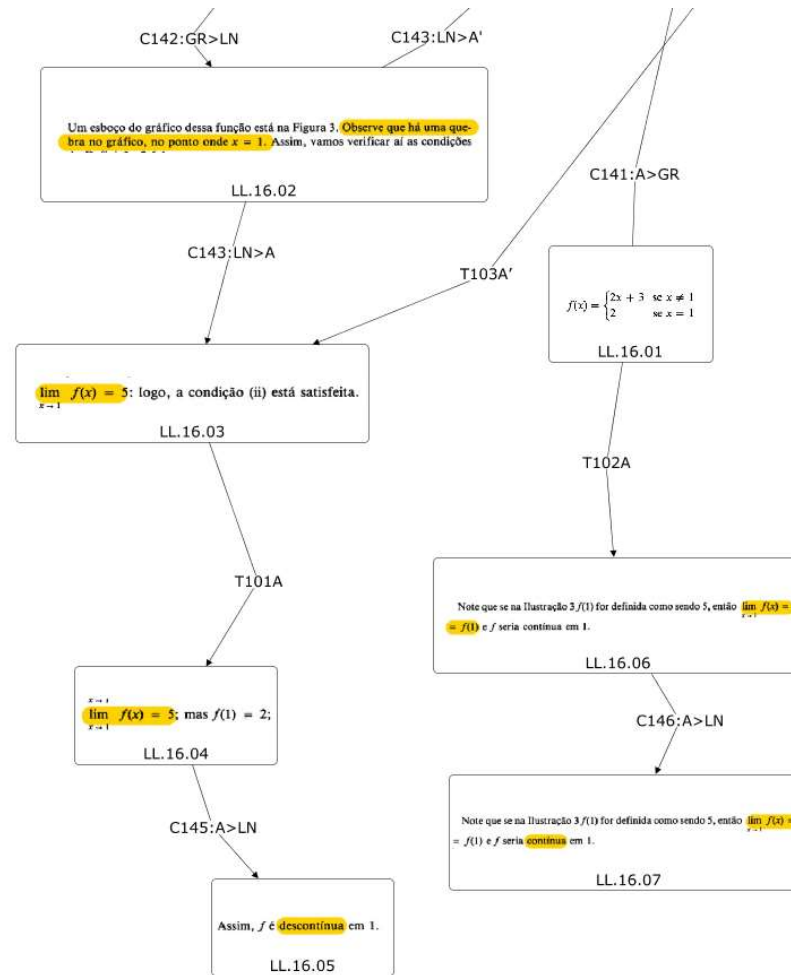
Fonte: Elaborado pelo autor.

Figura 105 - Esquemas de conversões da ilustração 2 da seção 2.6 do livro do Leithold.



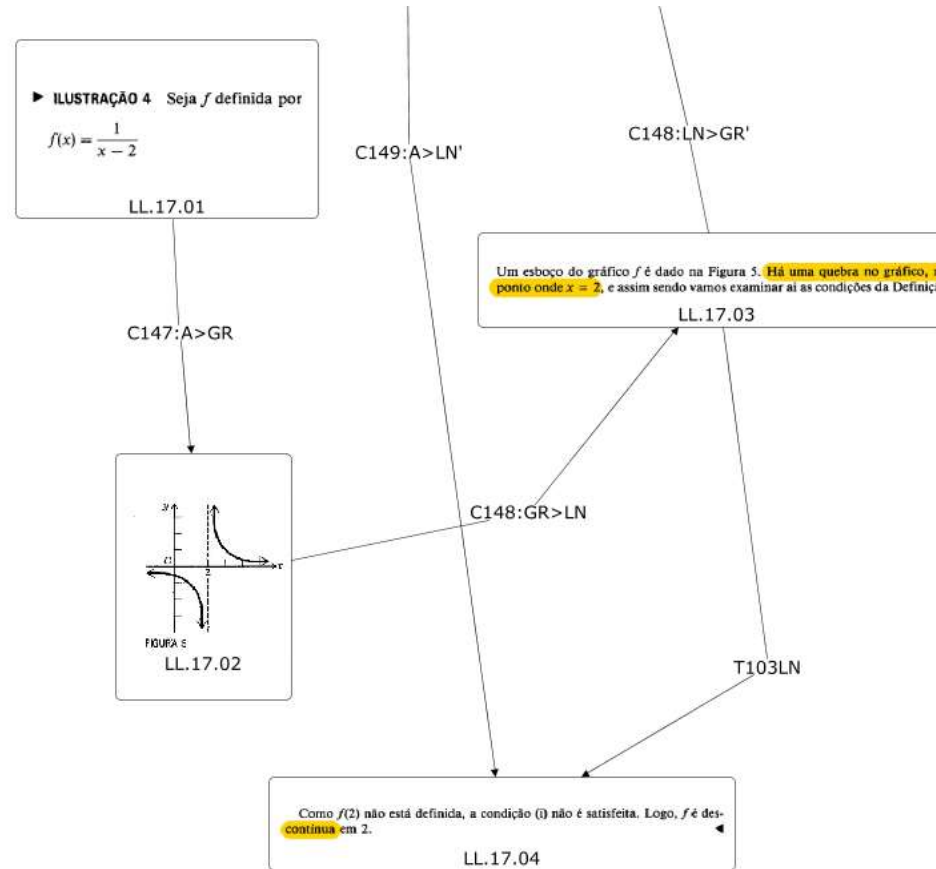
Fonte: Elaborado pelo autor.

Figura 106 - Esquemas de conversões da ilustração 3 da seção 2.6 do livro do Leithold.



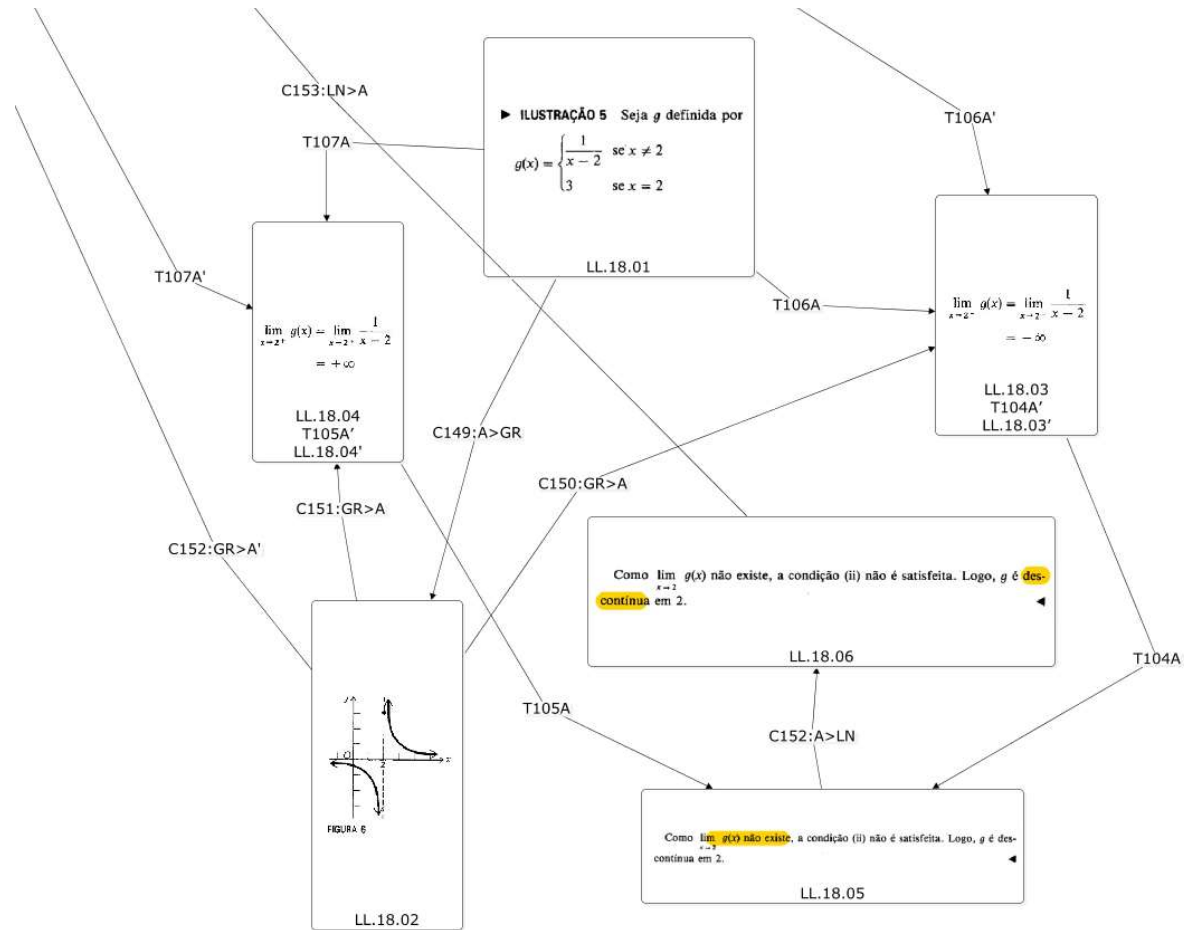
Fonte: Elaborado pelo autor.

Figura 107 - Esquemas de conversões da ilustração 4 da seção 2.6 do livro do Leithold.



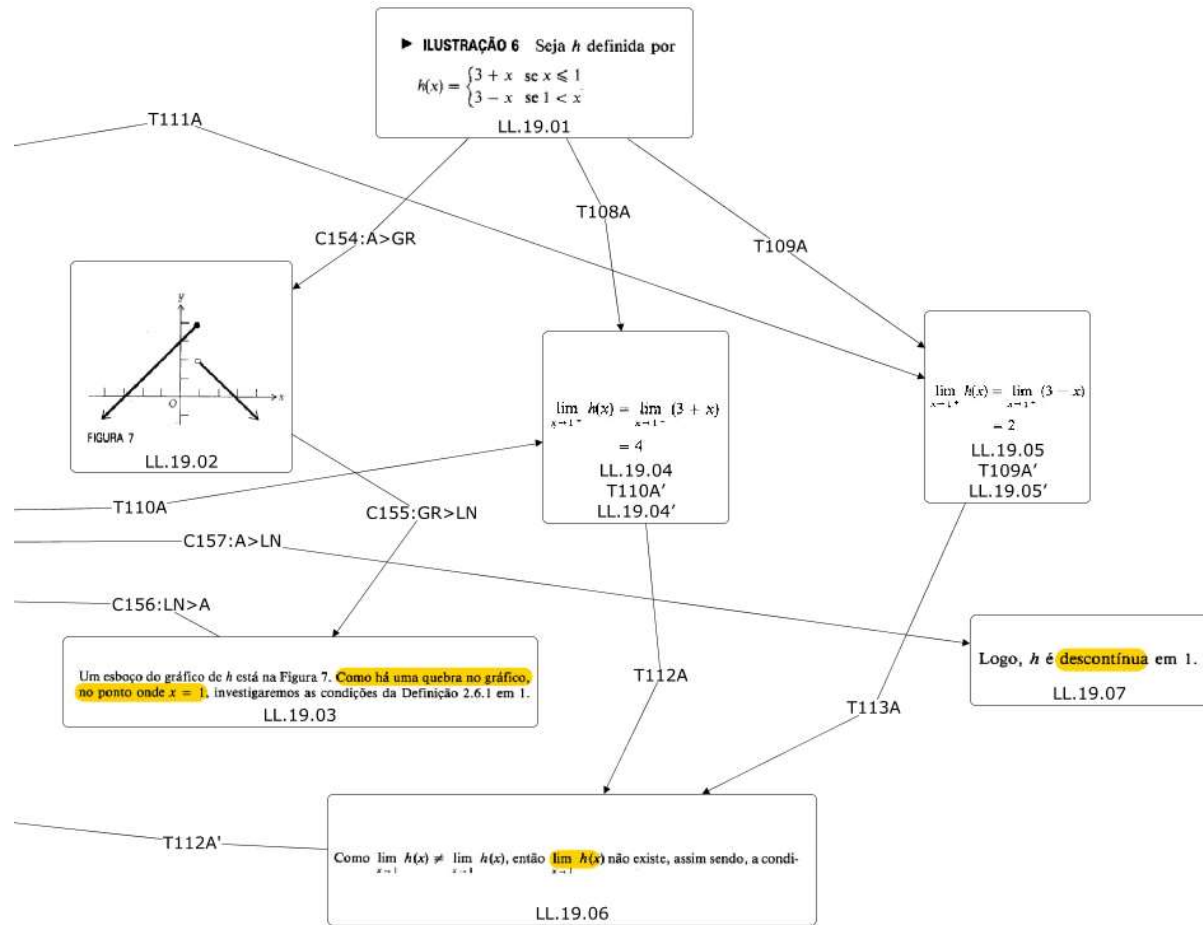
Fonte: Elaborado pelo autor.

Figura 108 - Esquemas de conversões da ilustração 5 da seção 2.6 do livro do Leithold.



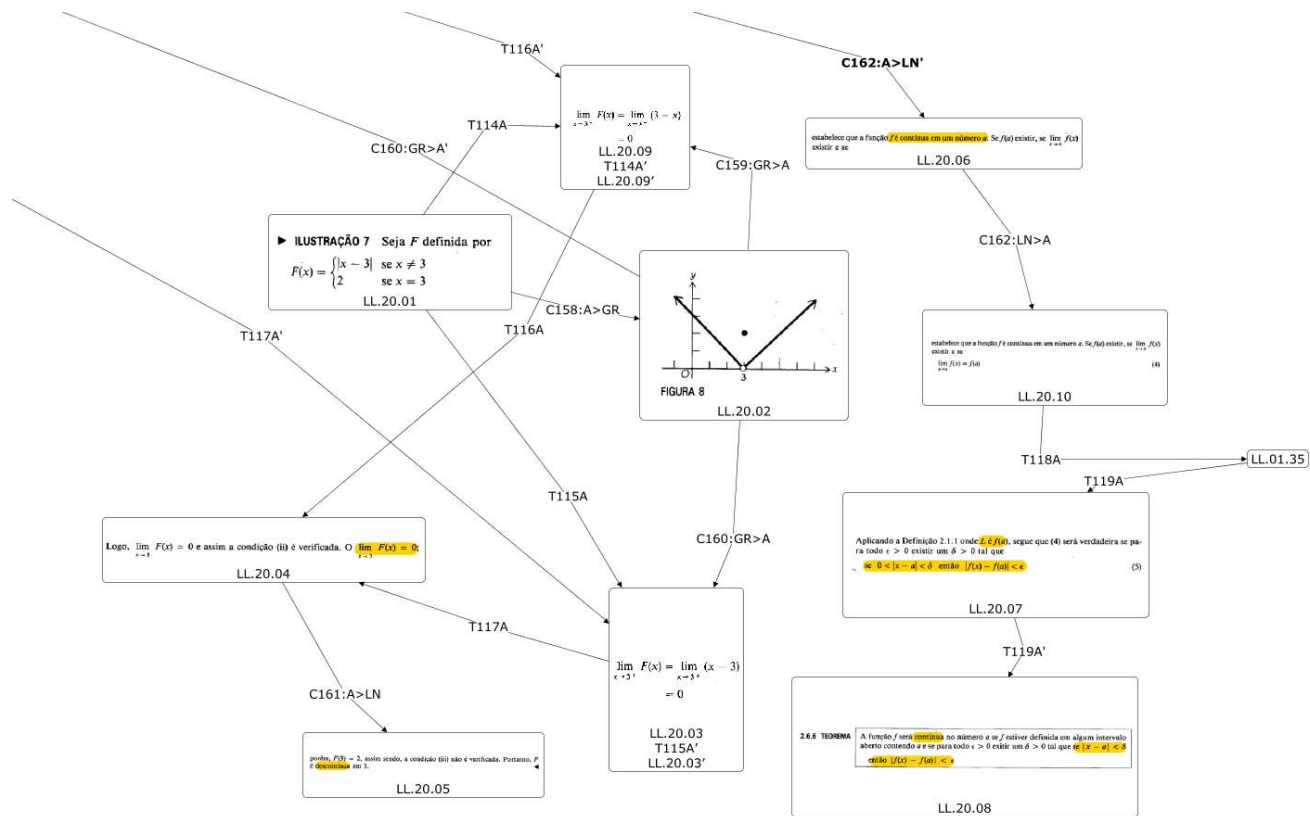
Fonte: Elaborado pelo autor.

Figura 109 - Esquemas de conversões da ilustração 6 da seção 2.6 do livro do Leithold.



Fonte: Elaborado pelo autor.

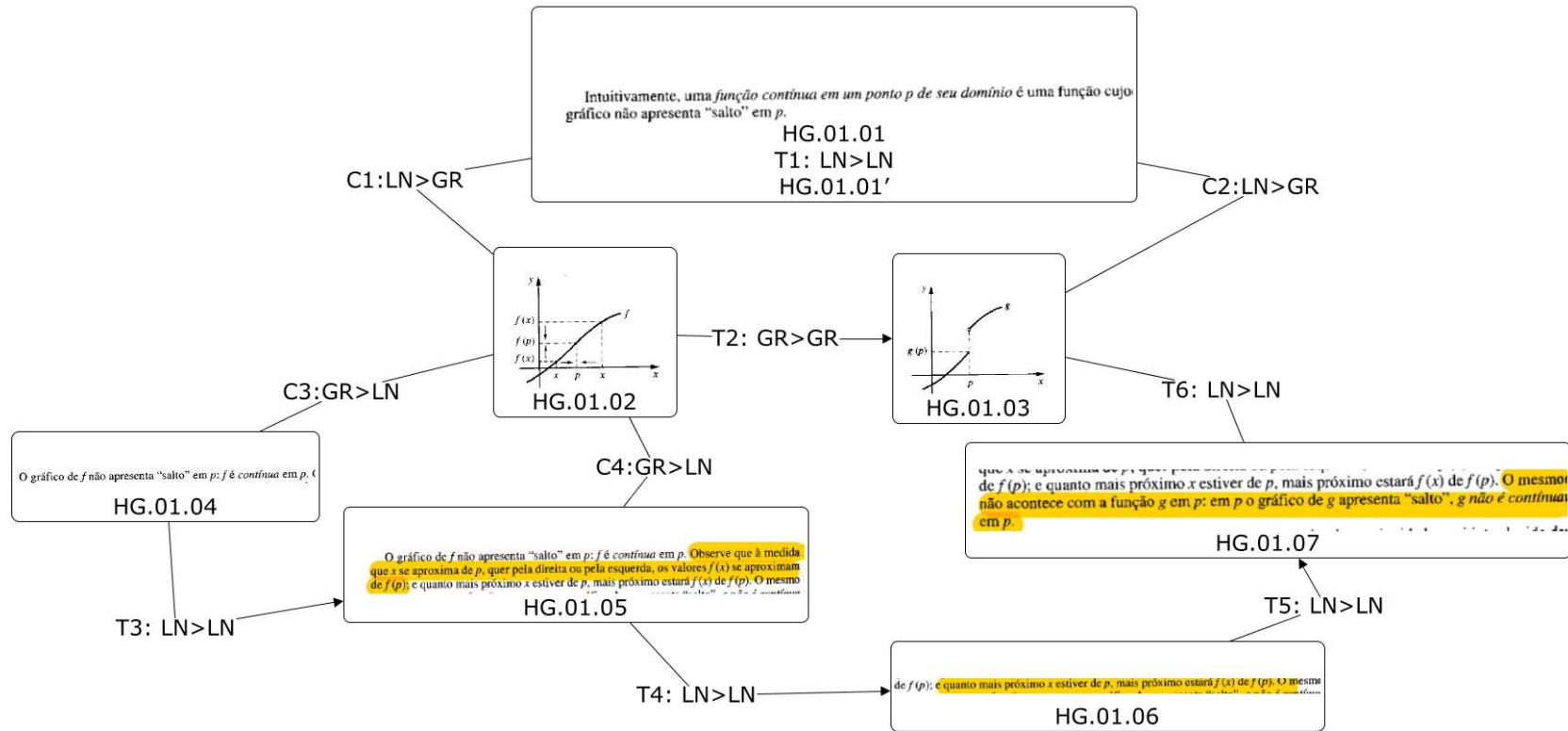
Figura 110 - Esquemas de conversões da ilustração 7 da seção 2.6 do livro do Leithold.



Fonte: Elaborado pelo autor.

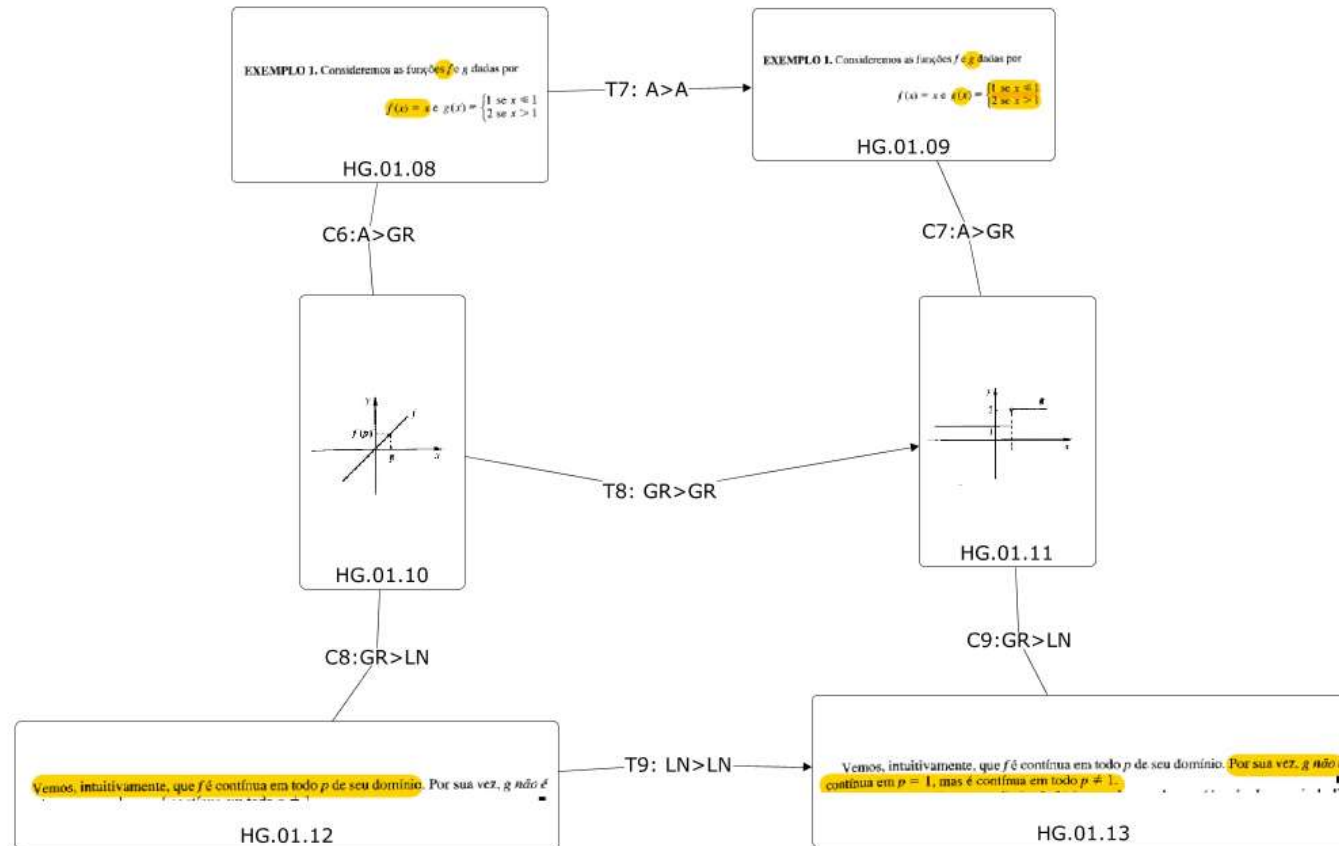
ESQUEMAS DO LIVRO DO GUIDORIZZI

Figura 111 - Esquemas das conversões da introdução da seção 3.1 do livro do Guidorizzi.



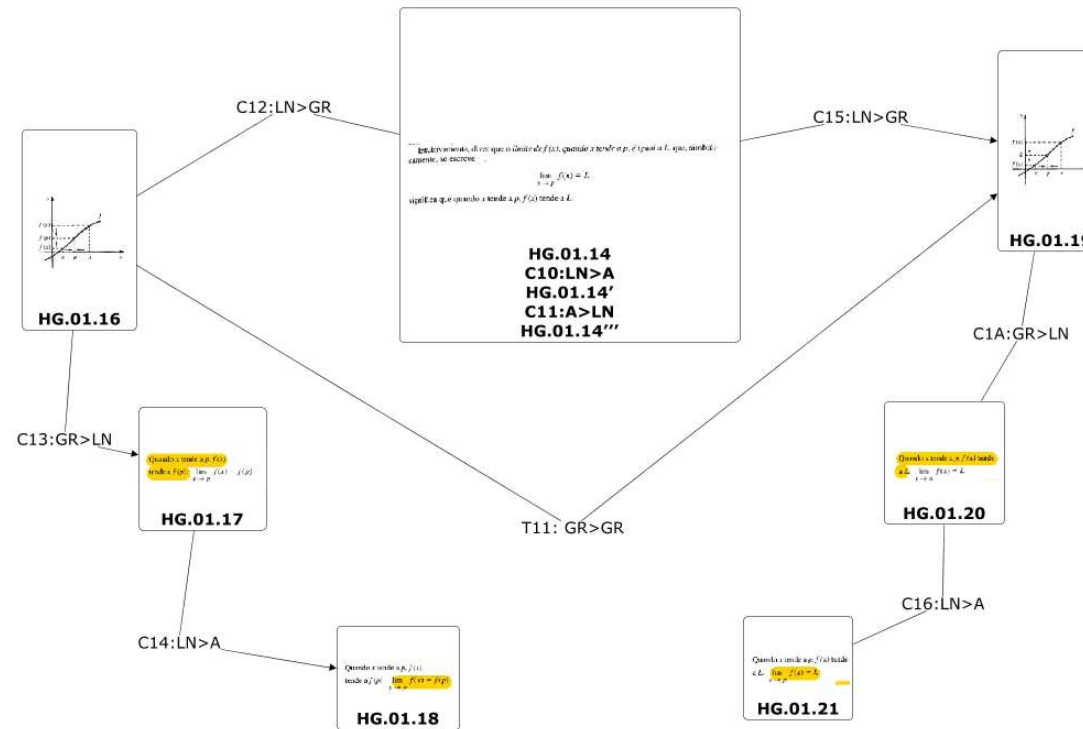
Fonte: Elaborado pelo autor.

Figura 112 - Esquemas das conversões da primeira parte do exemplo 1 da seção 3.1 do livro do Guidorizzi.



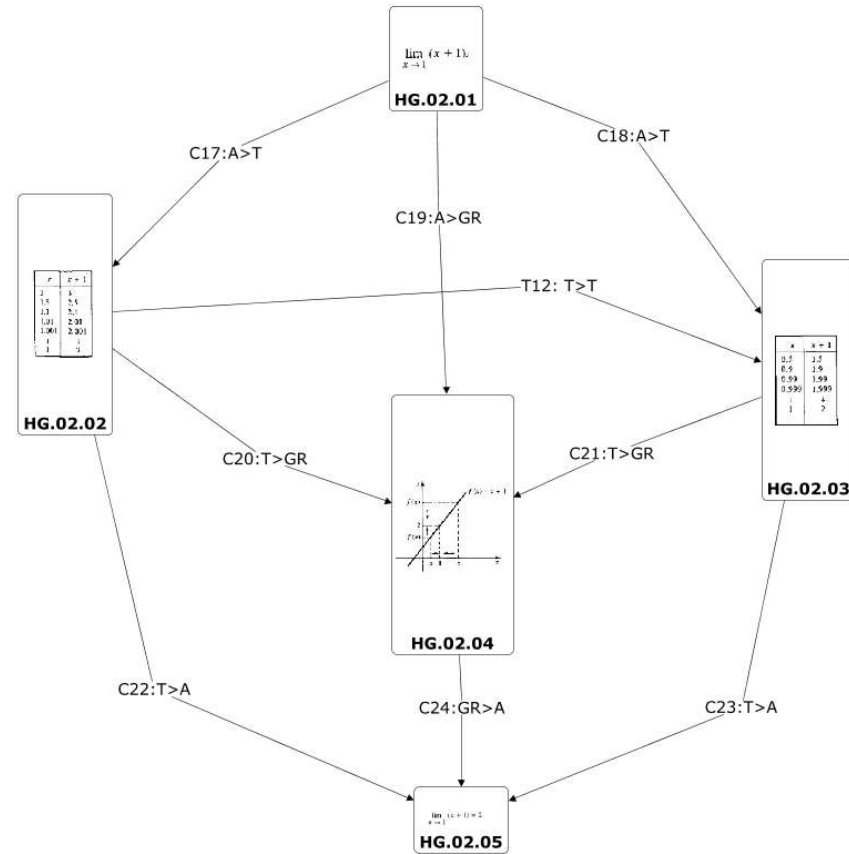
Fonte: Elaborado pelo autor.

Figura 113 - Esquemas das conversões da segunda parte do exemplo 1 da seção 3.1 do livro do Guidorizzi.



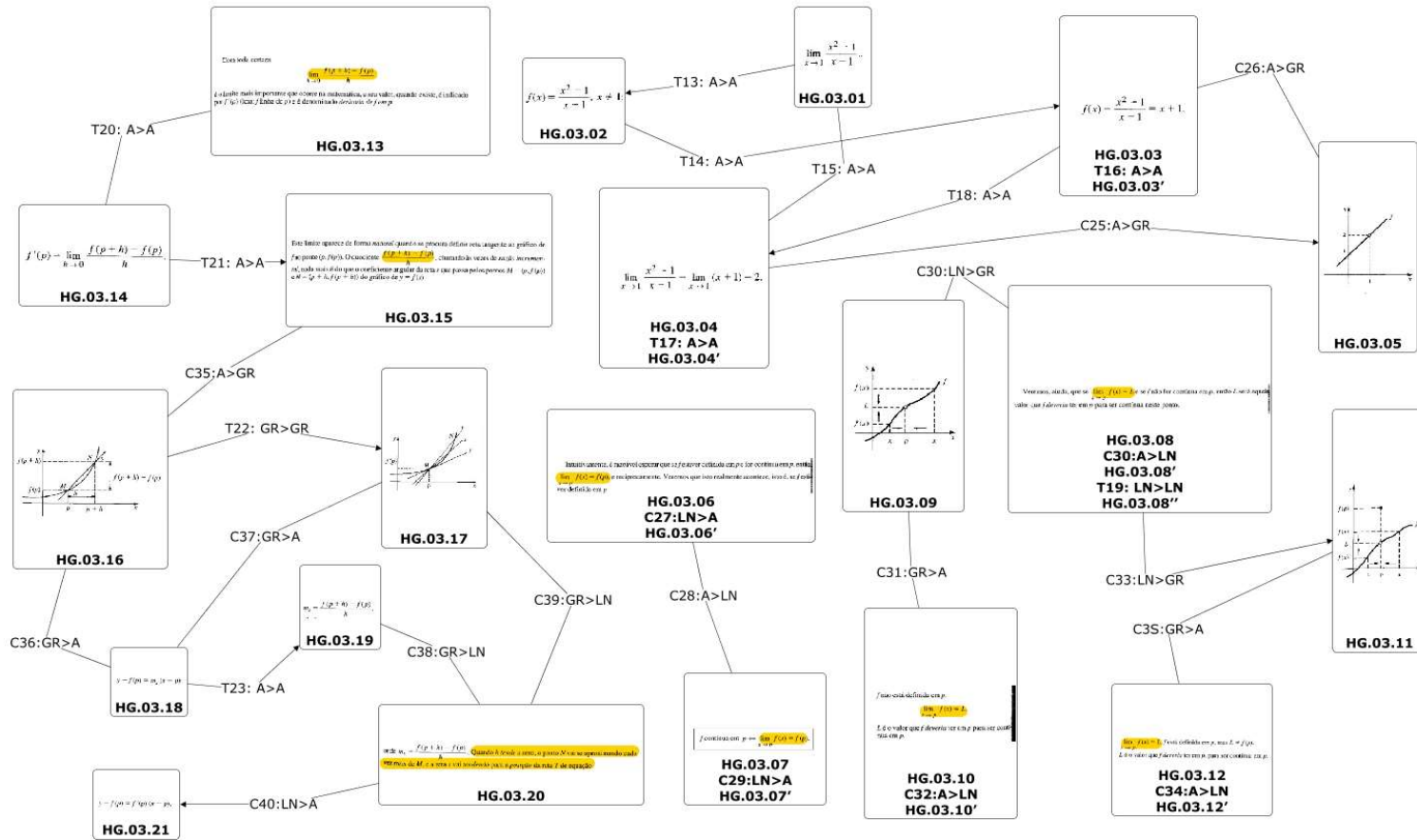
Fonte: Elaborado pelo autor.

Figura 114 - Esquemas de conversões do exemplo 2 da seção 3.1 do livro do Guidorizzi.



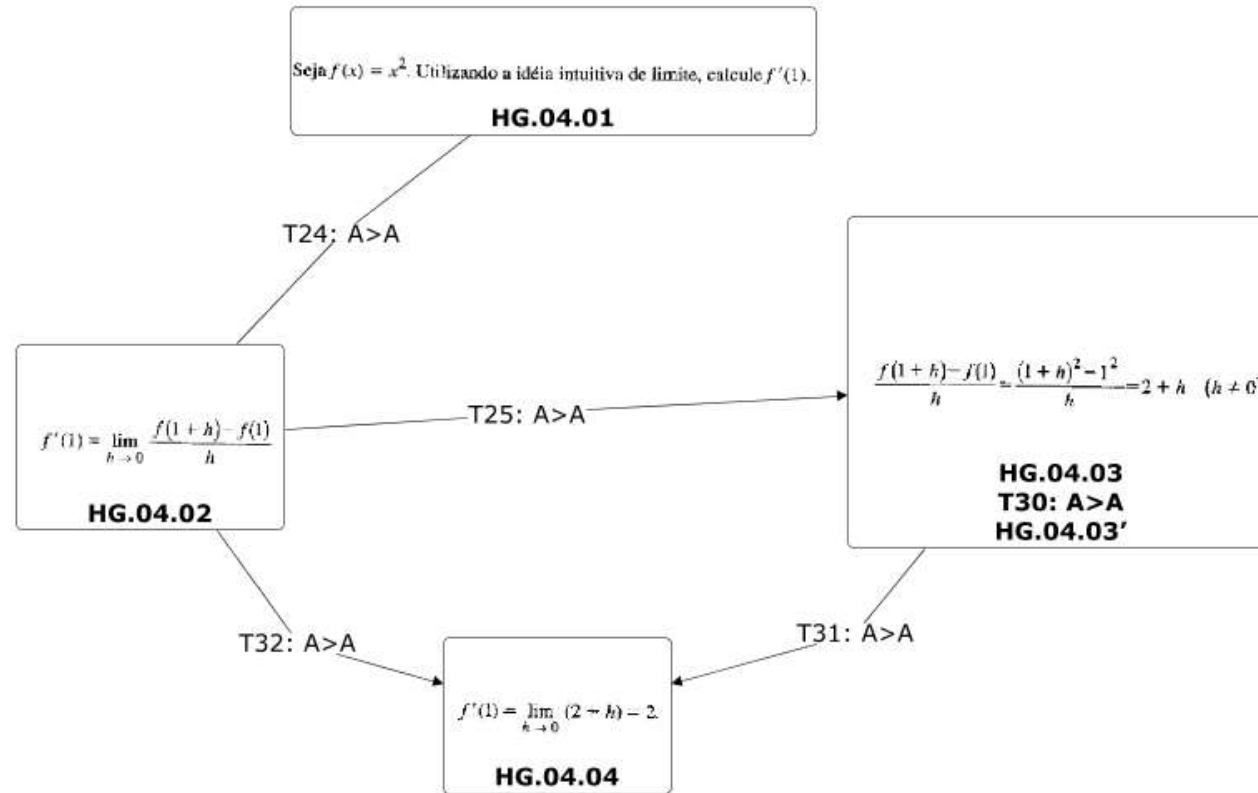
Fonte: Elaborado pelo autor.

Figura 115 - Esquema de conversões do exemplo 3 da seção 3.1 do livro do Guidorizzi.



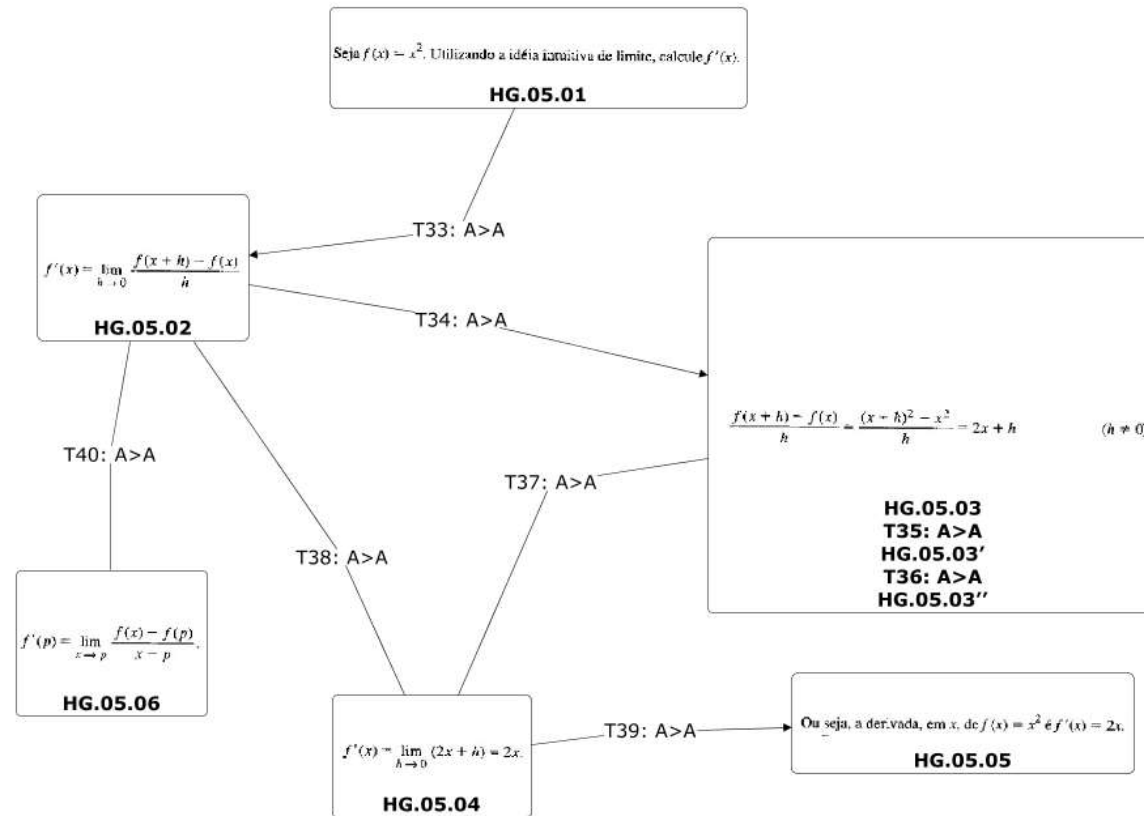
Fonte: Elaborado pelo autor.

Figura 116 - Esquema das conversões do exemplo 4 da seção 3.1 do livro do Guidorizzi.



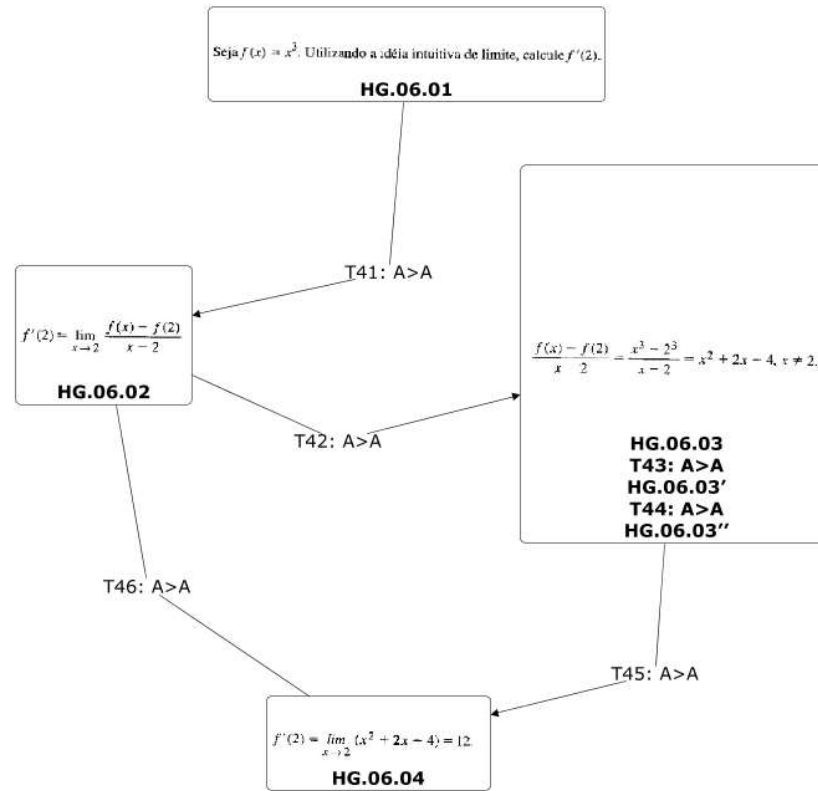
Fonte: Elaborado pelo autor.

Figura 117 - Esquema de conversões do exemplo 5 da seção 3.1 no livro do Guidorizzi.



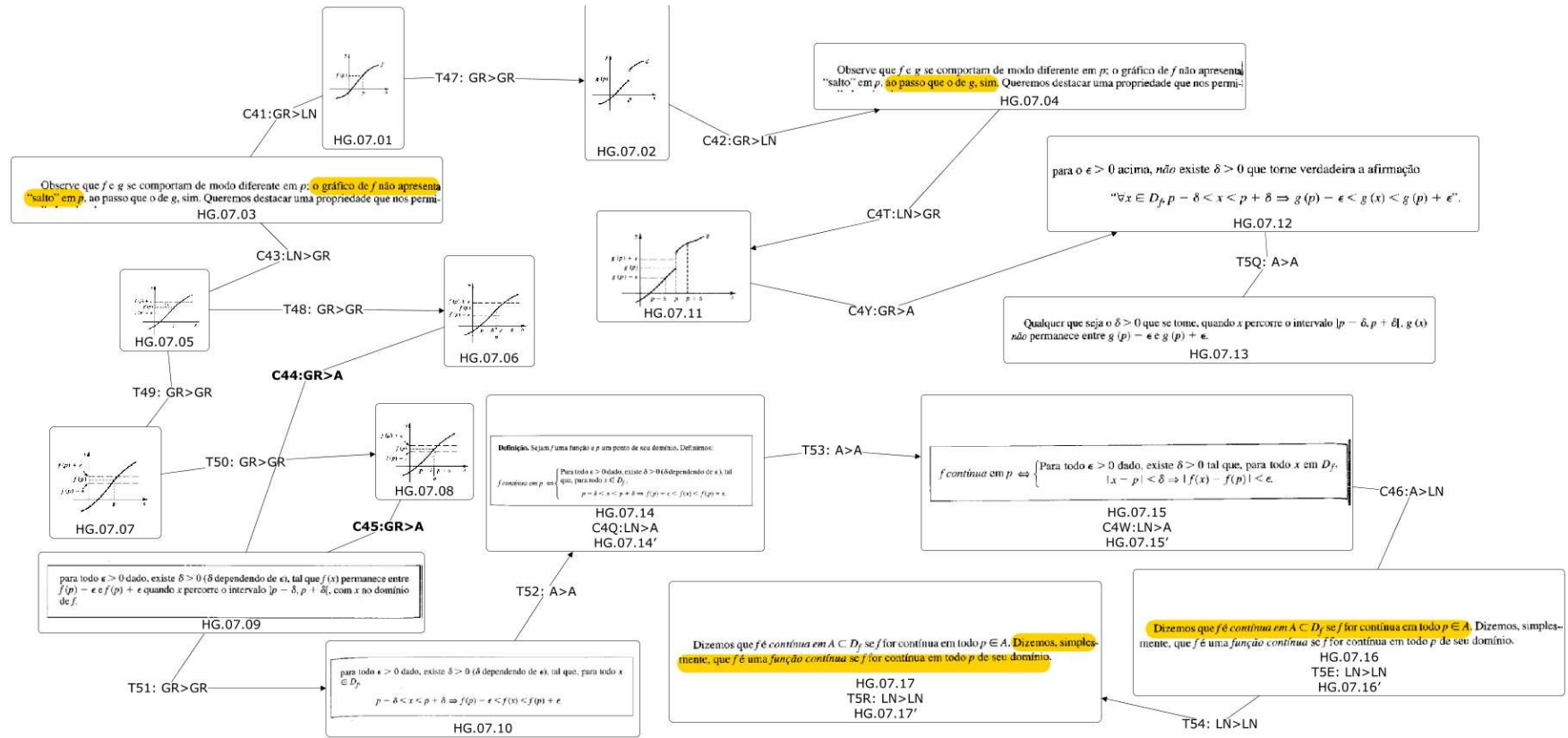
Fonte: Elaborado pelo autor.

Figura 118 - Esquema de conversões do exemplo 6 da Seção 3.1 do livro do Guidorizzi.



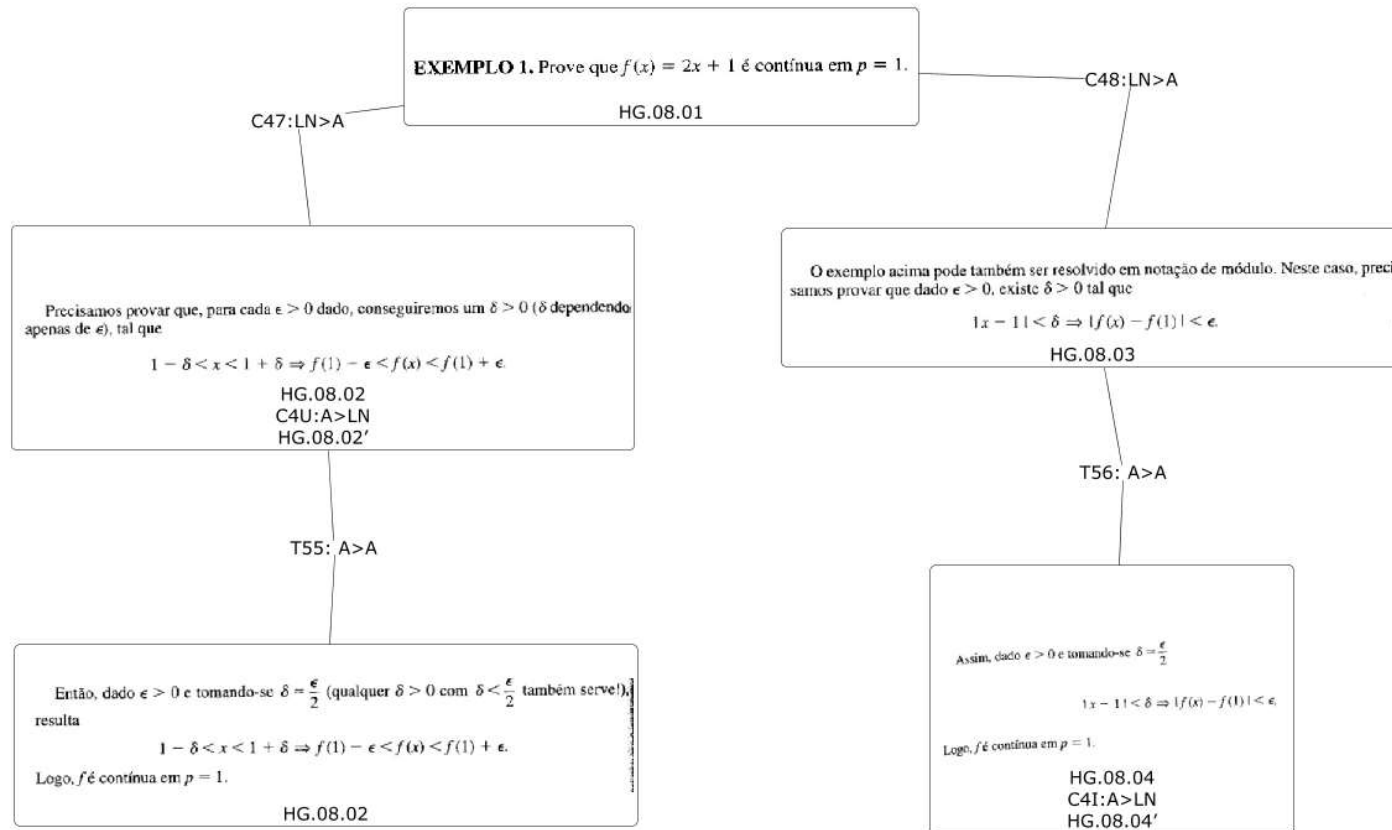
Fonte: Elaborado pelo autor.

Figura 119 - Esquema de conversões da introdução da Seção 3.2 do livro do Guidorizzi.



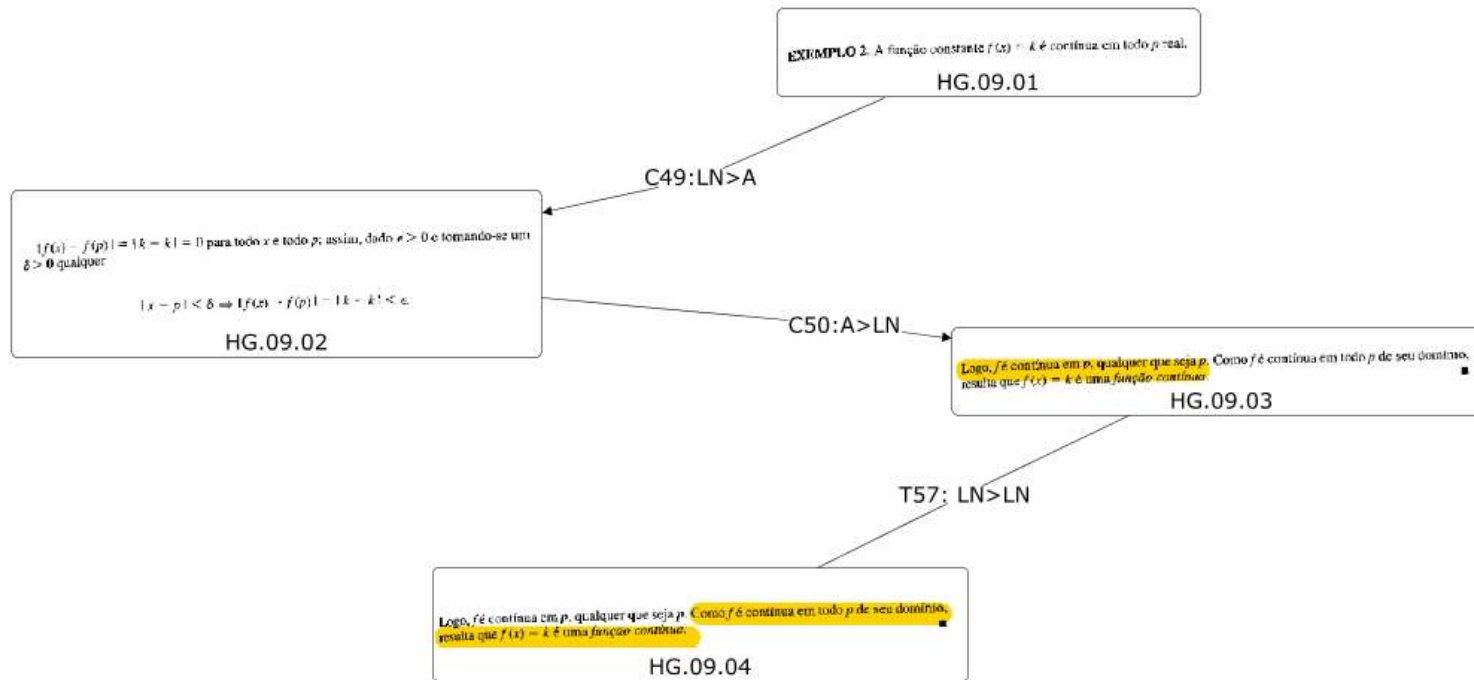
Fonte: Elaborado pelo autor.

Figura 120 - Esquema de conversões do exemplo 1 da Seção 3.2 do livro do Guidorizzi.



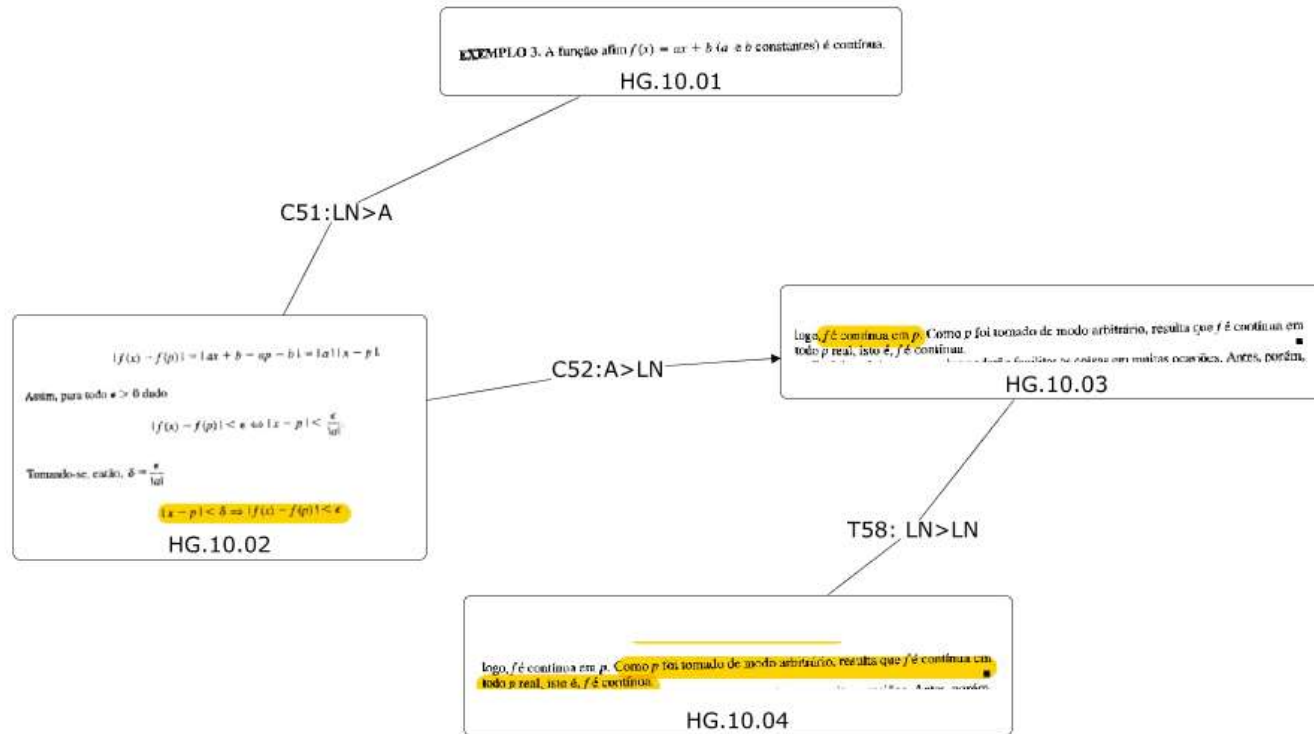
Fonte: Elaborado pelo autor.

Figura 121 - Esquema de conversões do exemplo 2 da Seção 3.2 do livro do Guidorizzi.



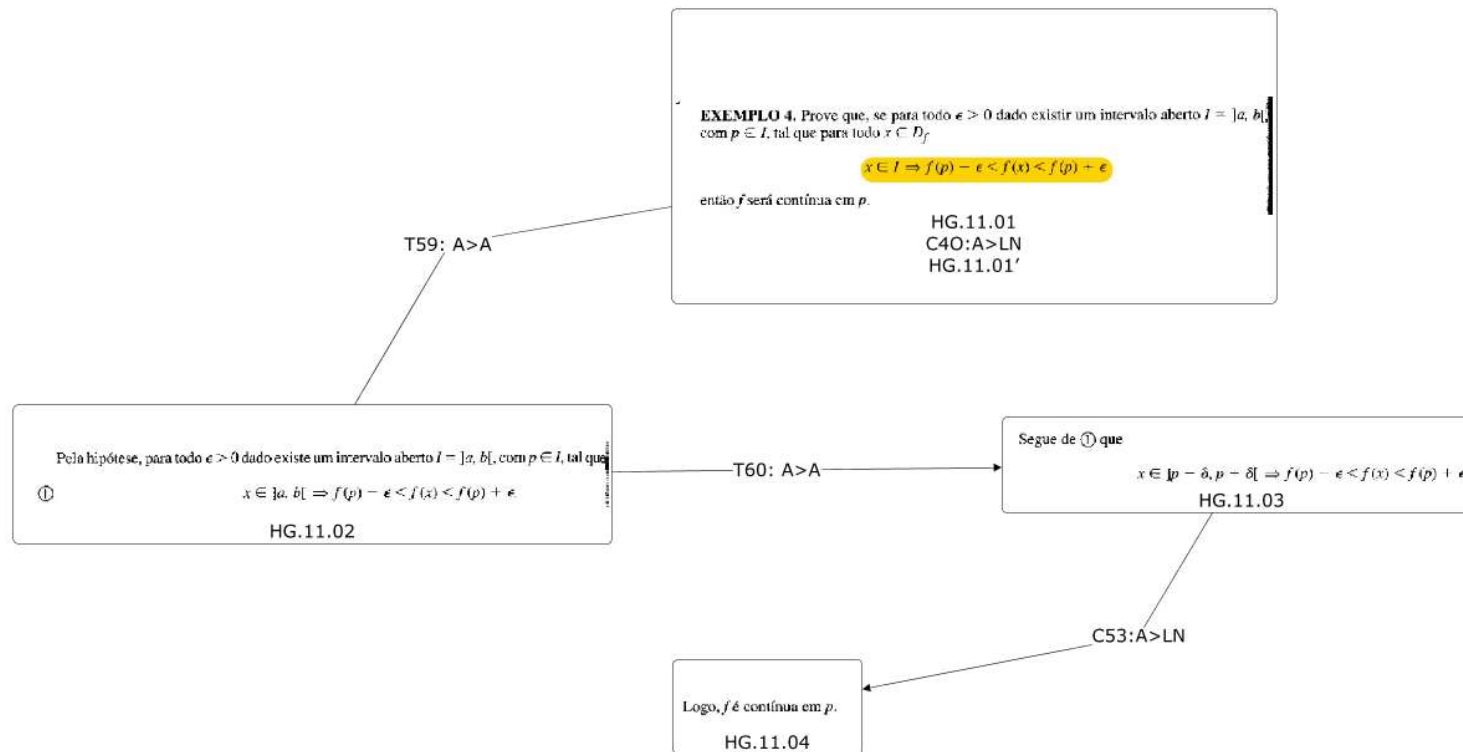
Fonte: Elaborado pelo autor.

Figura 122 - Esquema de conversões do exemplo 3 da Seção 3.2 do livro do Guidorizzi.



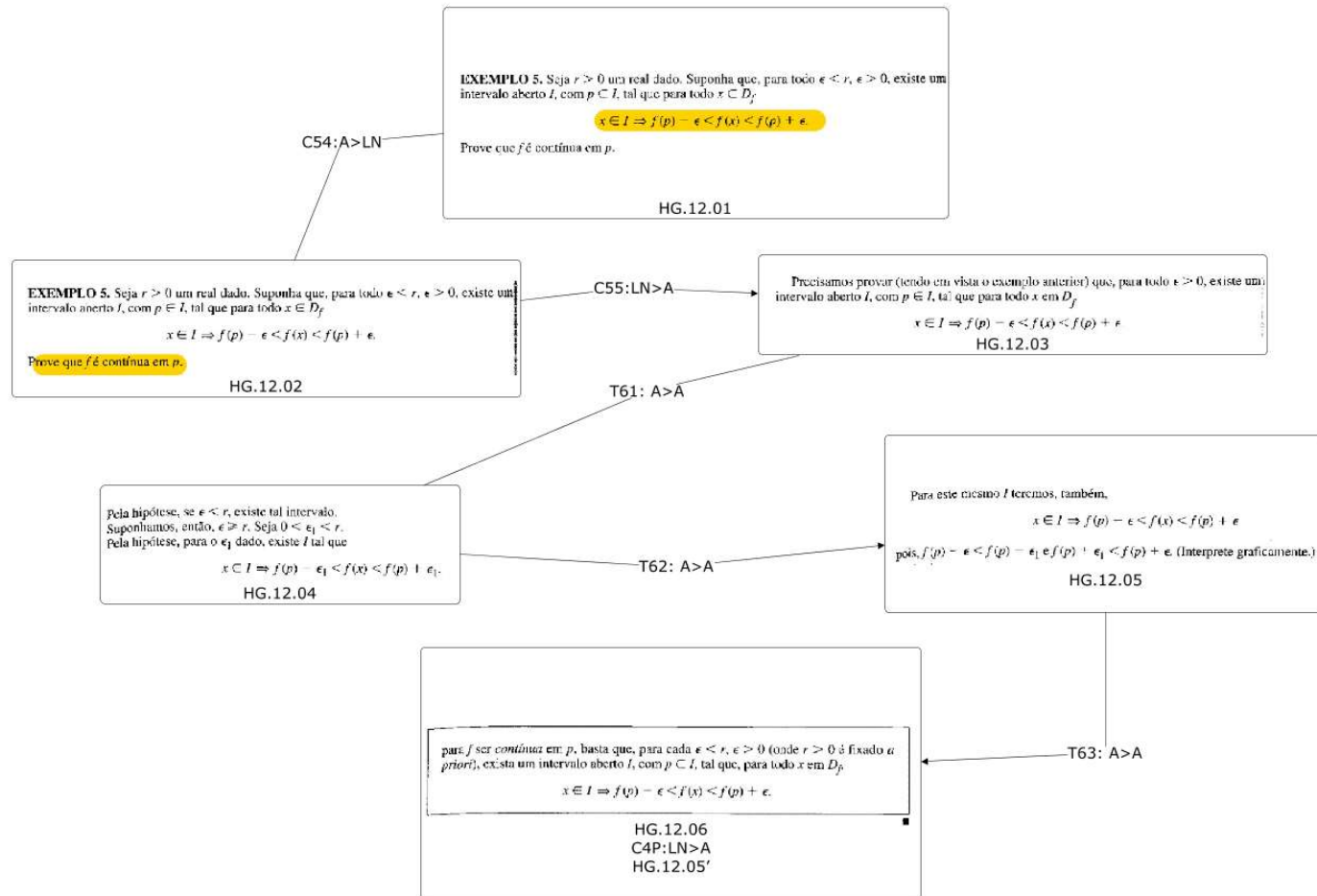
Fonte: Elaborado pelo autor.

Figura 123 - Esquema de conversões do exemplo 4 da Seção 3.2 do livro do Guidorizzi.



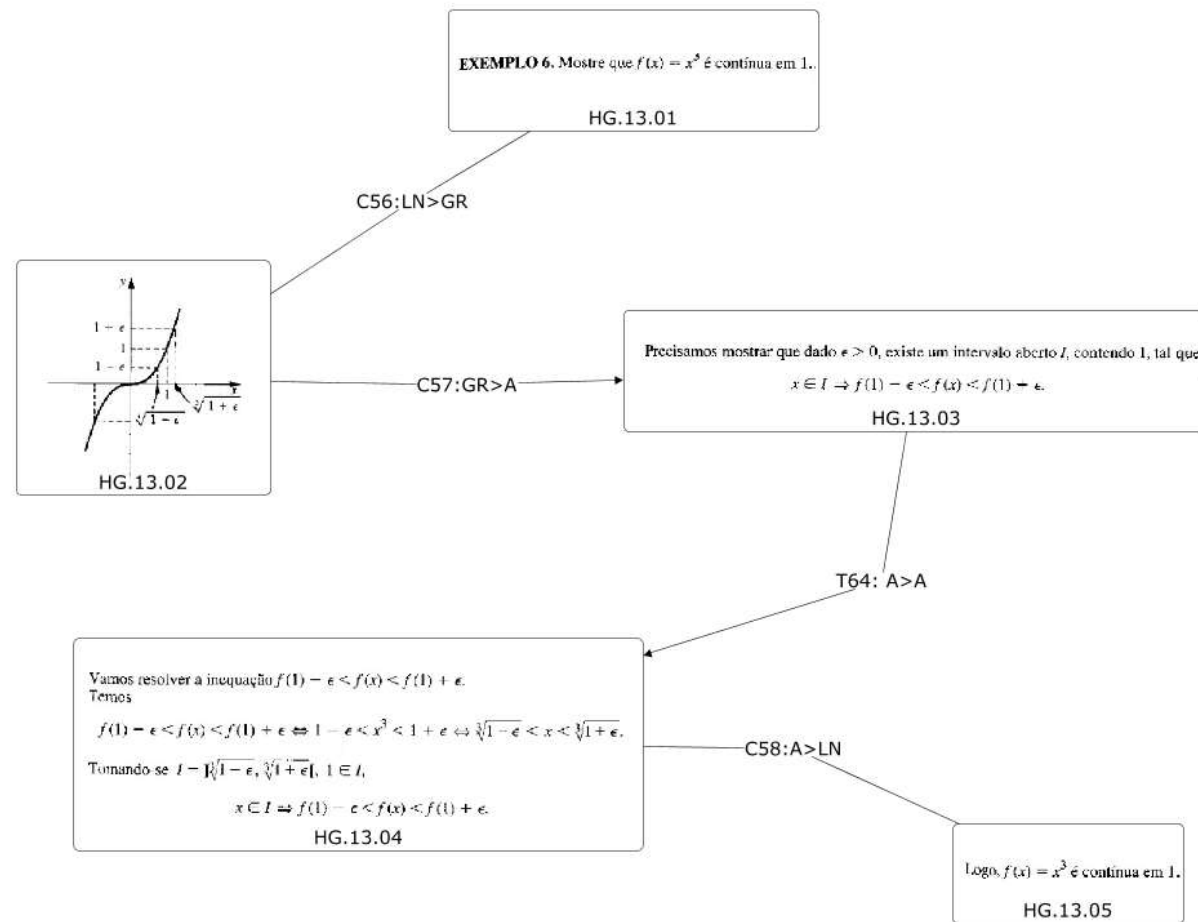
Fonte: Elaborado pelo autor.

Figura 124 - Esquema de conversões do exemplo 5 da Seção 3.2 do livro do Guidorizzi.



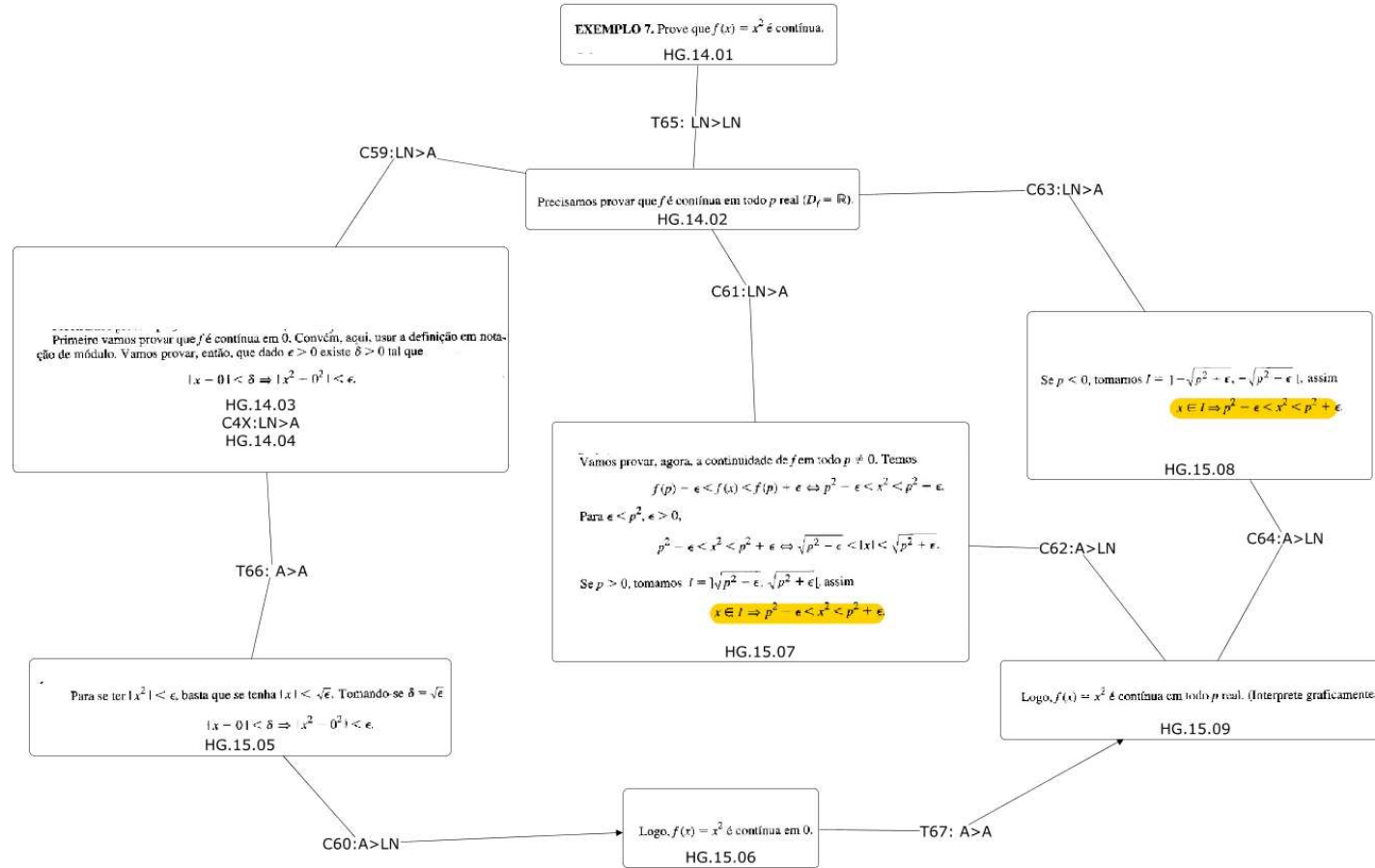
Fonte: Elaborado pelo autor.

Figura 125 - Esquema de conversões do exemplo 6 da Seção 3.2 do livro do Guidorizzi.



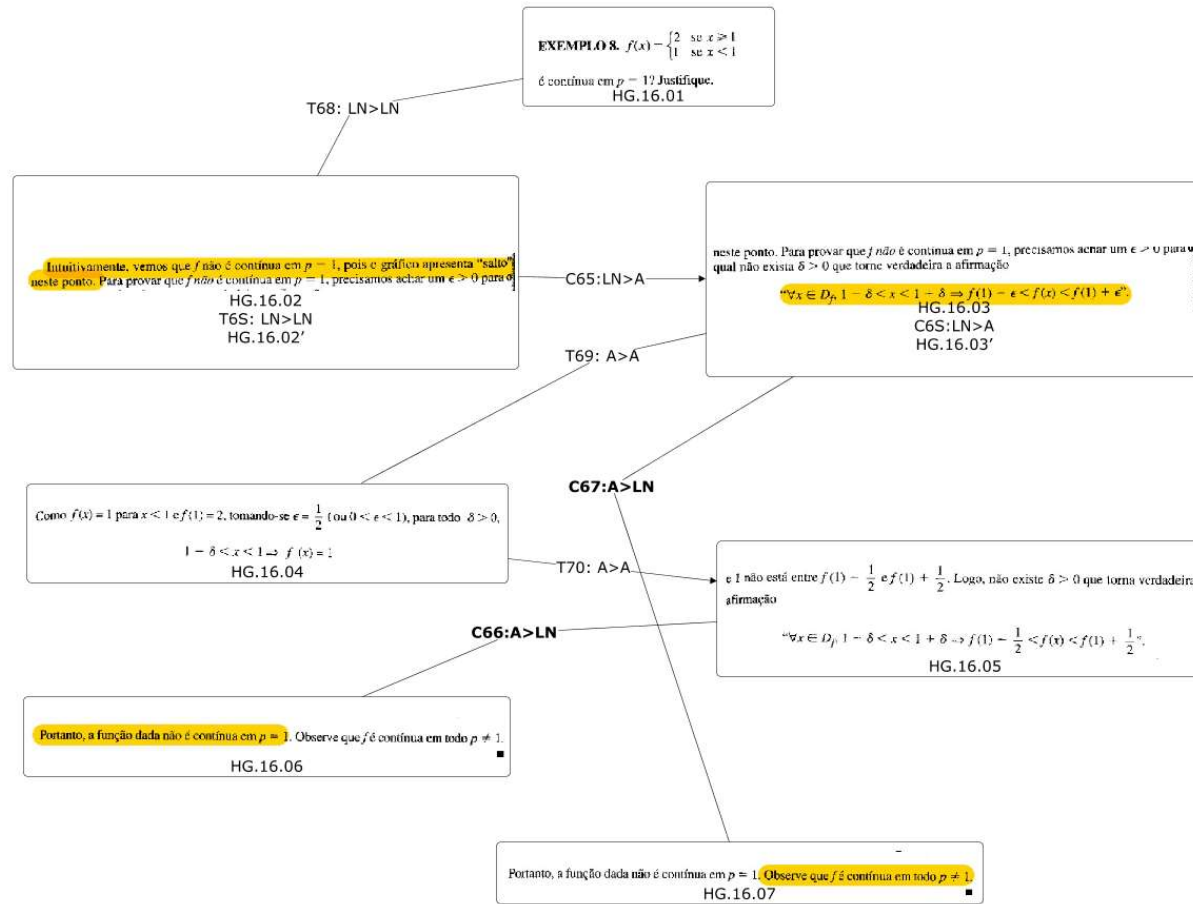
Fonte: Elaborado pelo autor.

Figura 126 - Esquema de conversões do exemplo 7 da Seção 3.2 do livro do Guidorizzi.



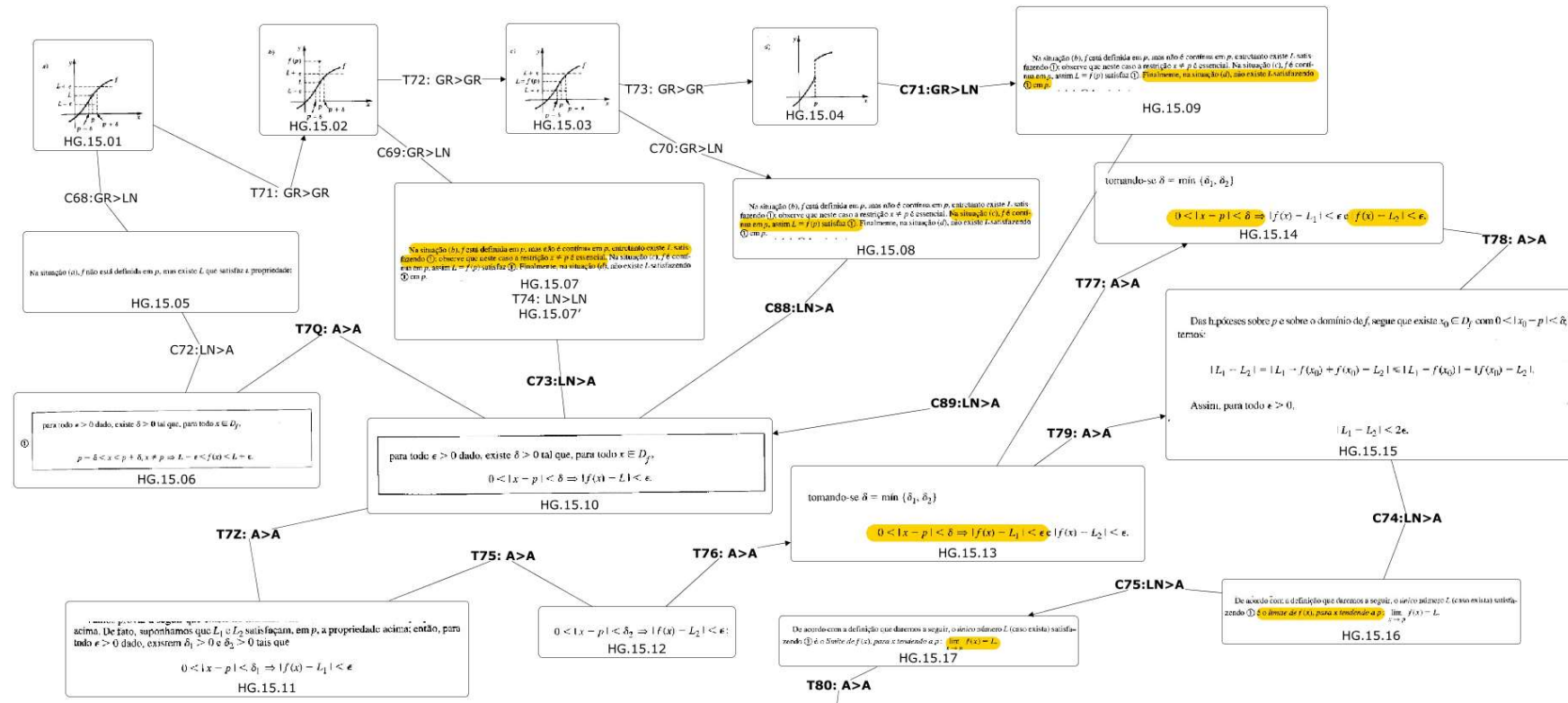
Fonte: Elaborado pelo autor.

Figura 127 - Esquema de conversões do exemplo 8 da Seção 3.2 do livro do Guidorizzi.



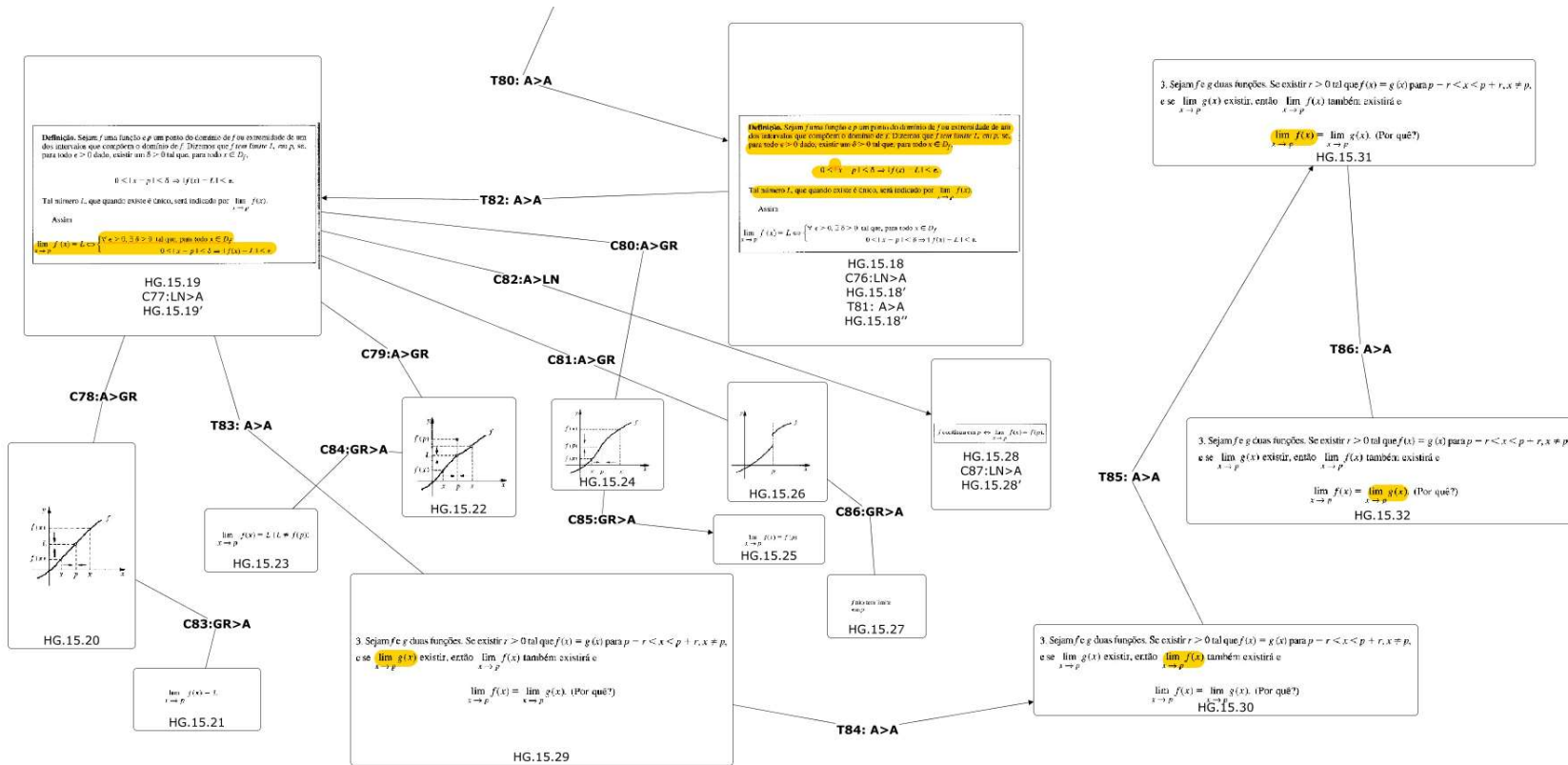
Fonte: Elaborado pelo autor.

Figura 128 - Esquema de conversões da primeira parte da introdução da Seção 3.3 do livro do Guidorizzi.



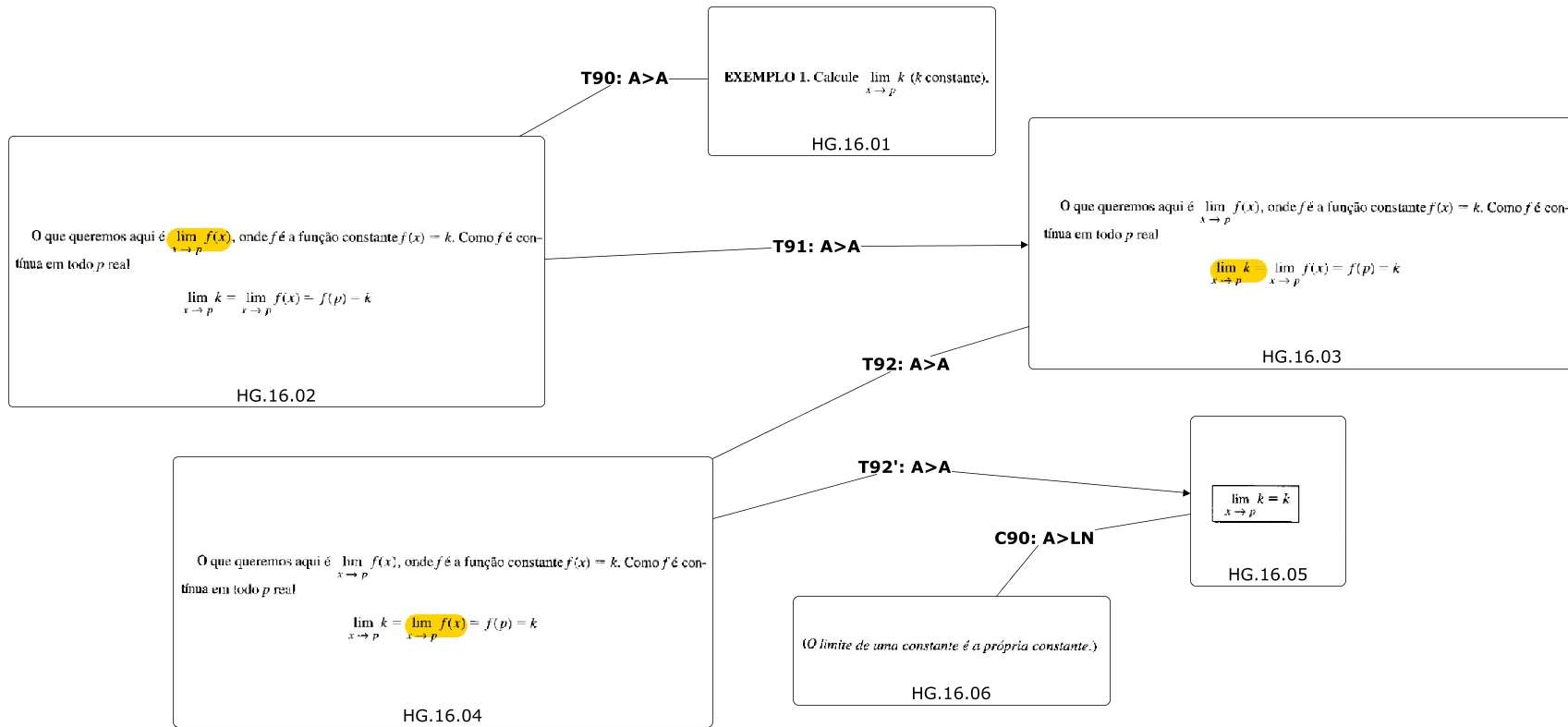
Fonte: Elaborado pelo autor.

Figura 129 - Esquema de conversões da segunda parte da introdução da Seção 3.3 do livro do Guidorizzi.



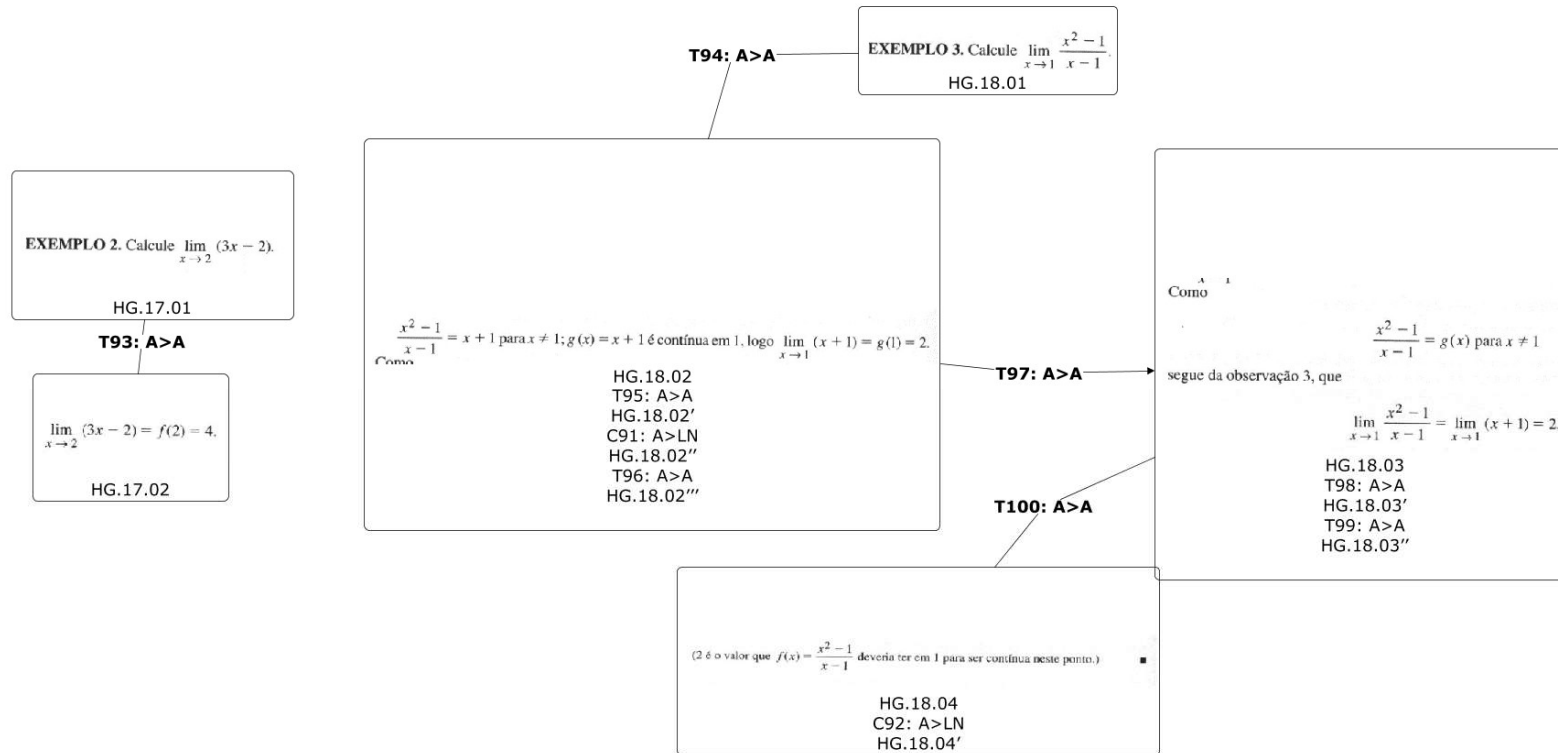
Fonte: Elaborado pelo autor.

Figura 130 - Esquema de conversões do exemplo 1 da Seção 3.3 do livro do Guidorizzi.



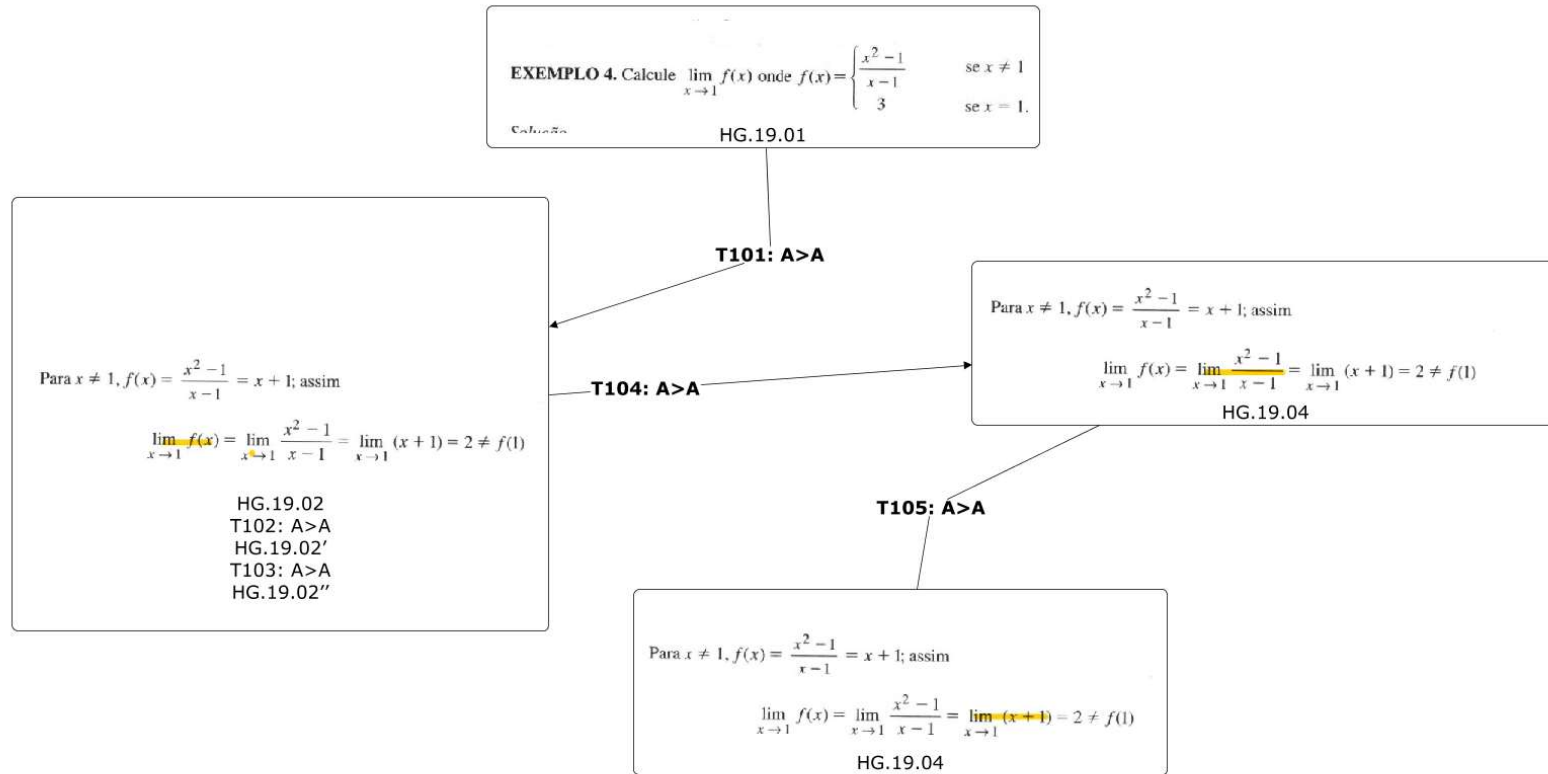
Fonte: Elaborado pelo autor.

Figura 131 - Esquema de conversões dos exemplos 2 e 3 da Seção 3.3 do livro do Guidorizzi.



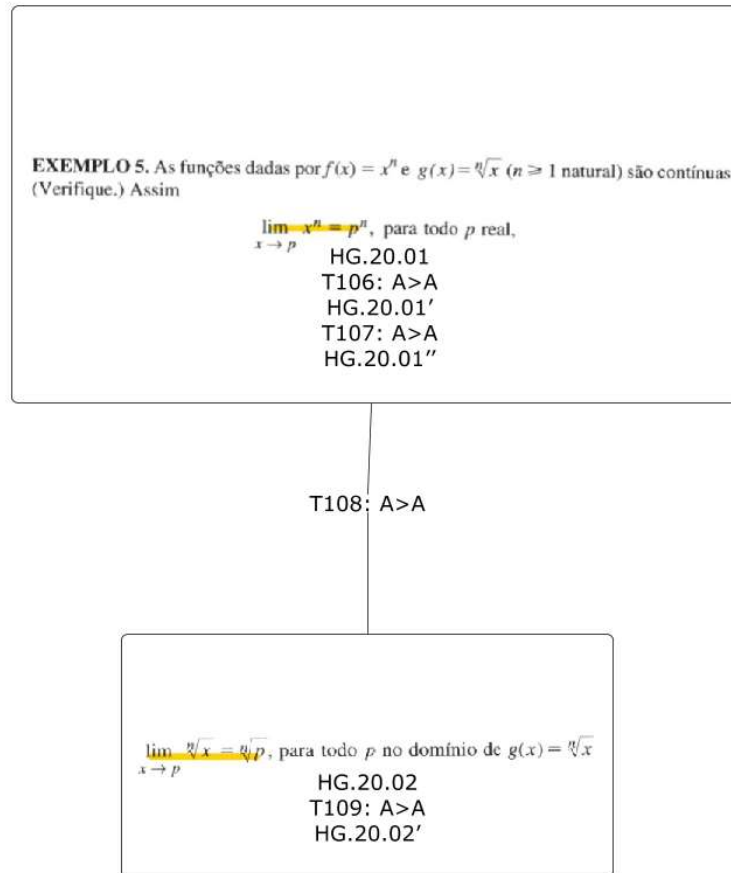
Fonte: Elaborado pelo autor.

Figura 132 - Esquema de conversões do exemplo 4 da Seção 3.3 do livro do Guidorizzi.



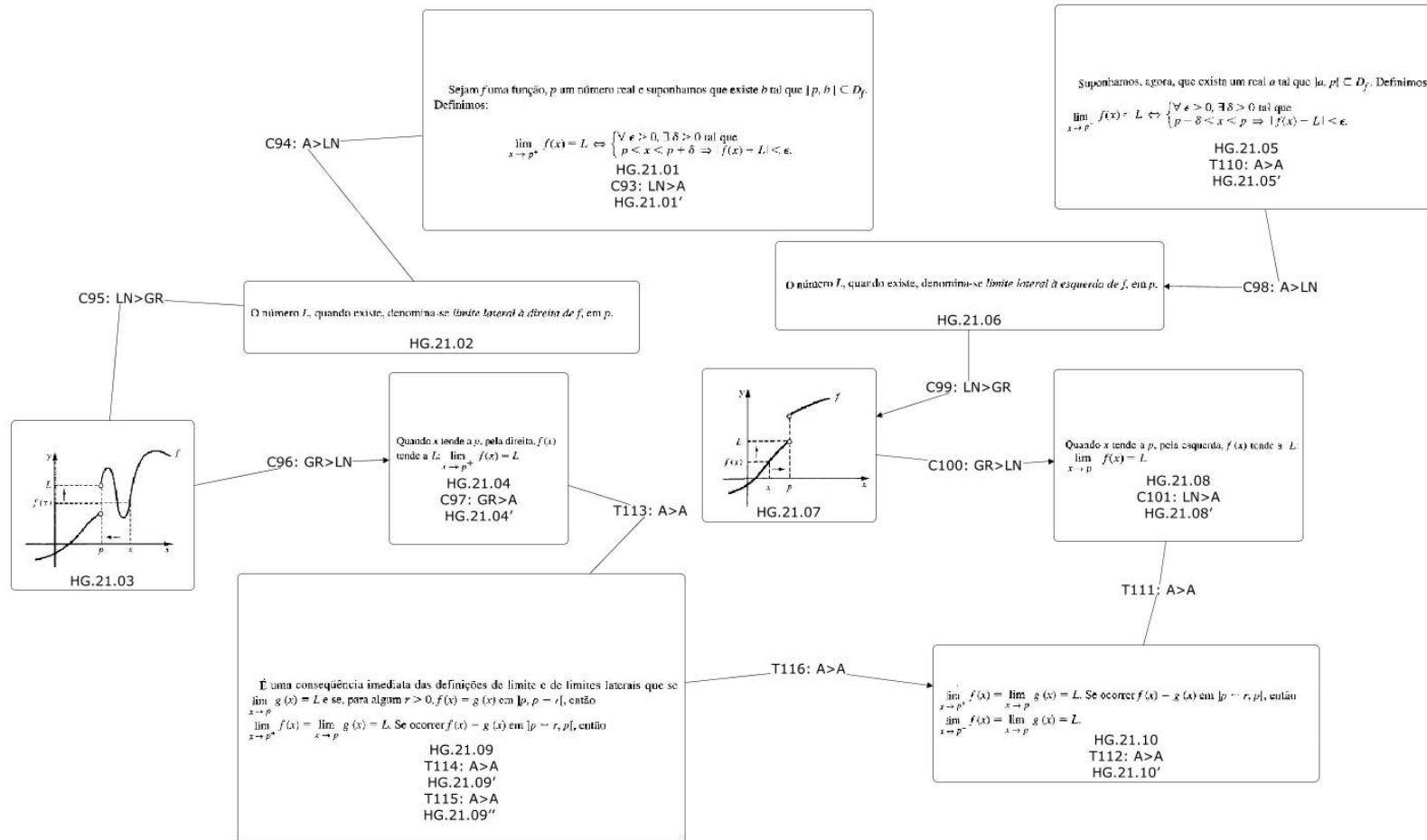
Fonte: Elaborado pelo autor.

Figura 133 - Esquema de conversões do exemplo 5 da Seção 3.3 do livro do Guidorizzi.



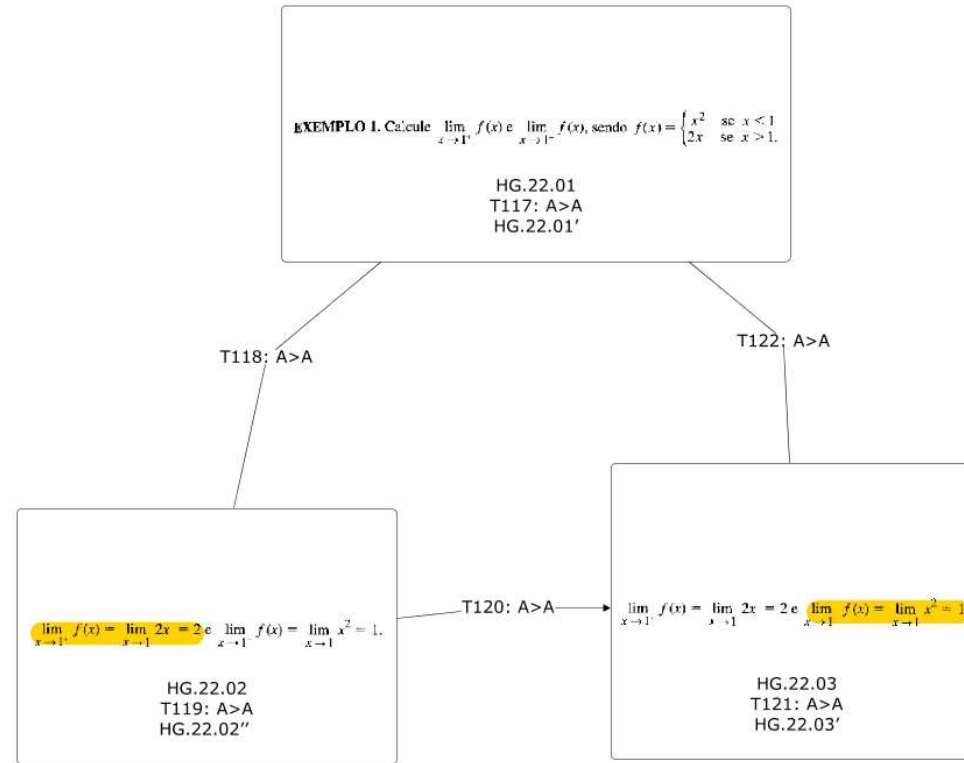
Fonte: Elaborado pelo autor.

Figura 134 - Esquema de conversões na introdução da Seção 3.4 do livro do Guidorizzi.



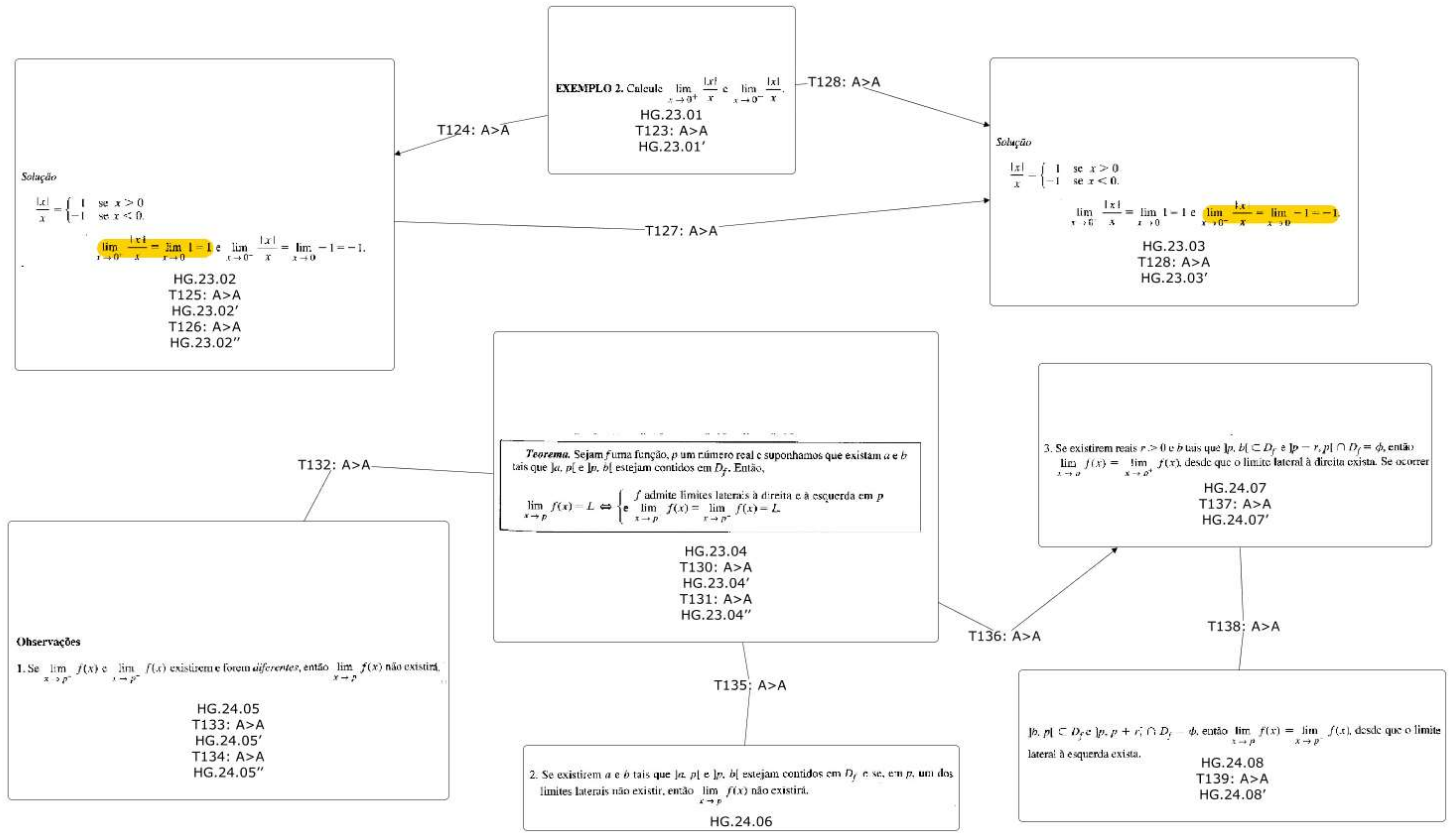
Fonte: Elaborado pelo autor.

Figura 135 - Esquema de conversões do exemplo 1 da Seção 3.4 do livro do Guidorizzi.



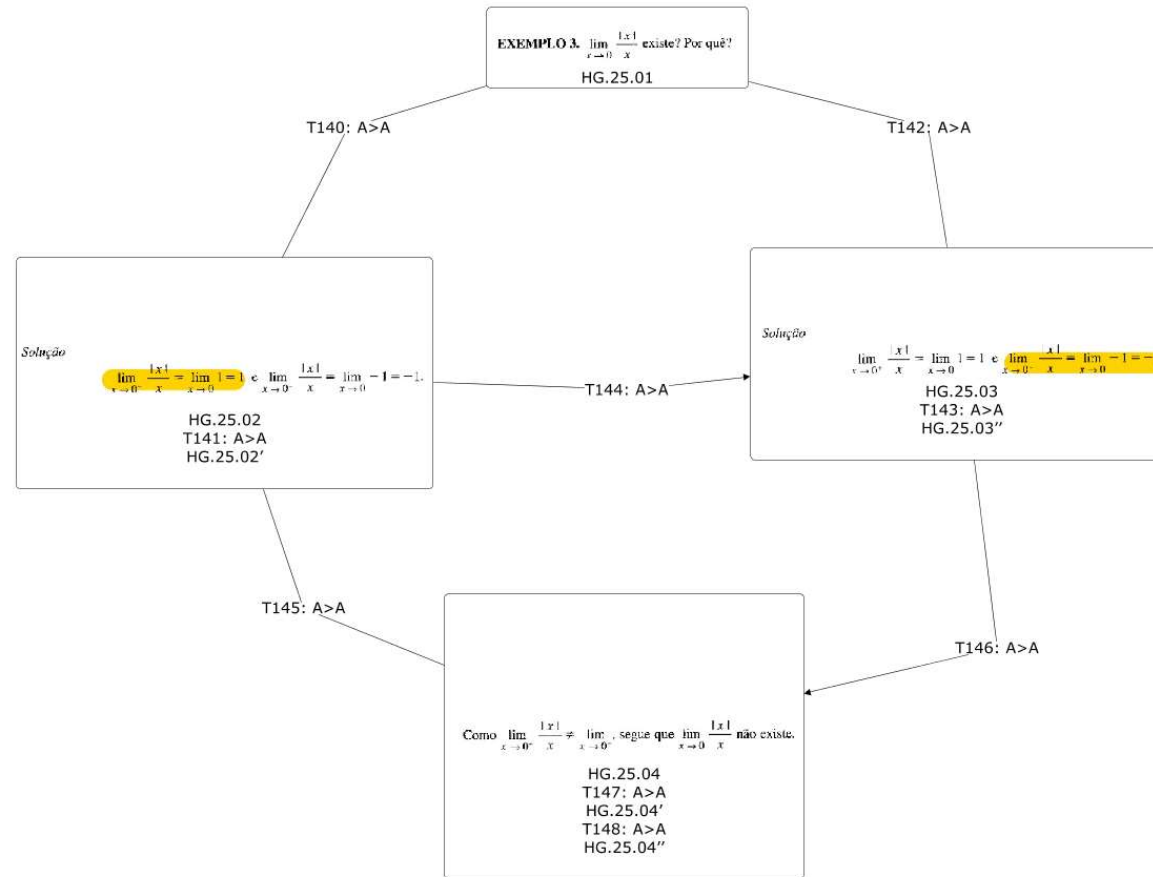
Fonte: Elaborado pelo autor.

Figura 136 - Esquema de conversões do exemplo 2 da Seção 3.4 do livro do Guidorizzi.



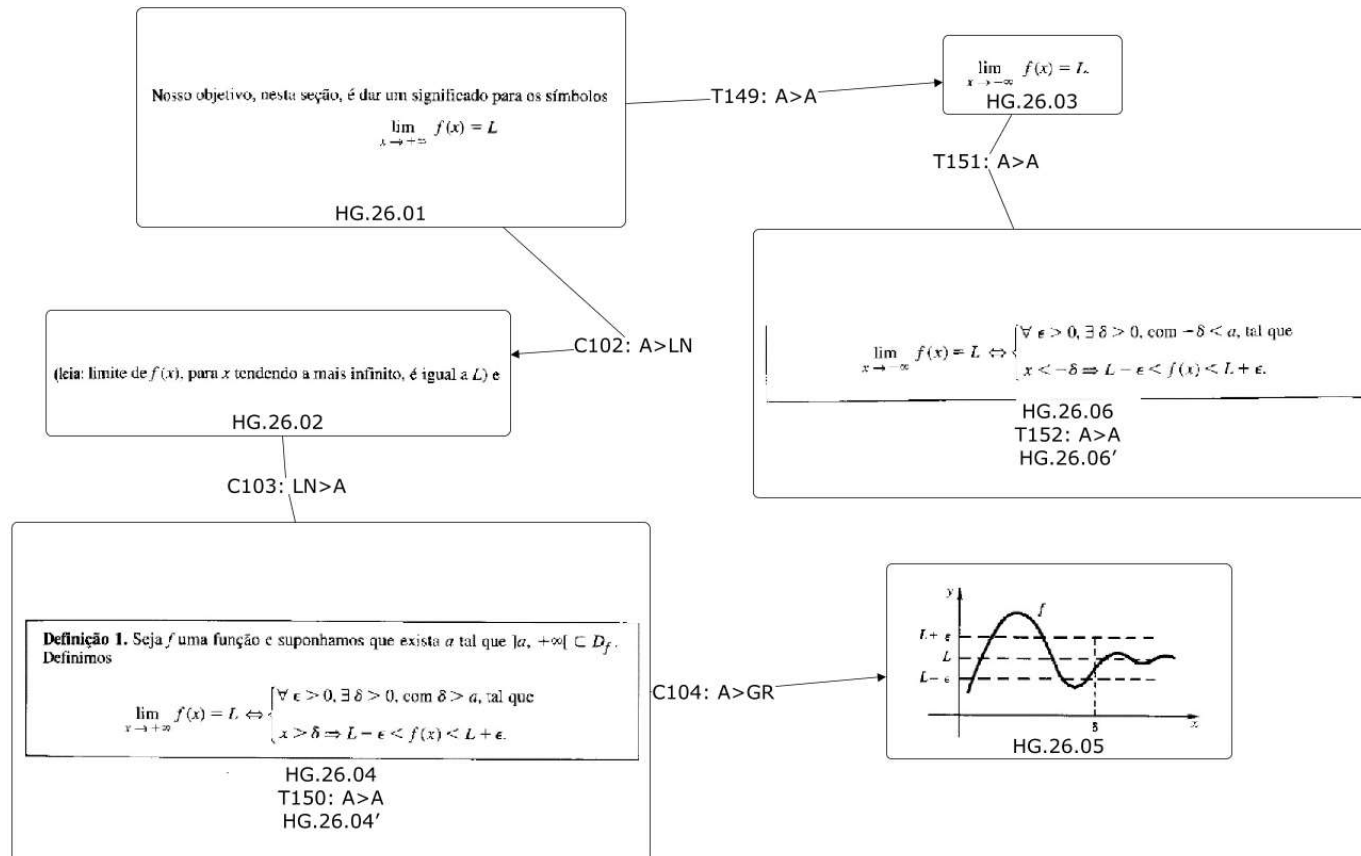
Fonte: Elaborado pelo autor.

Figura 137 - Esquema de conversões do exemplo 2 da Seção 3.4 do livro do Guidorizzi.



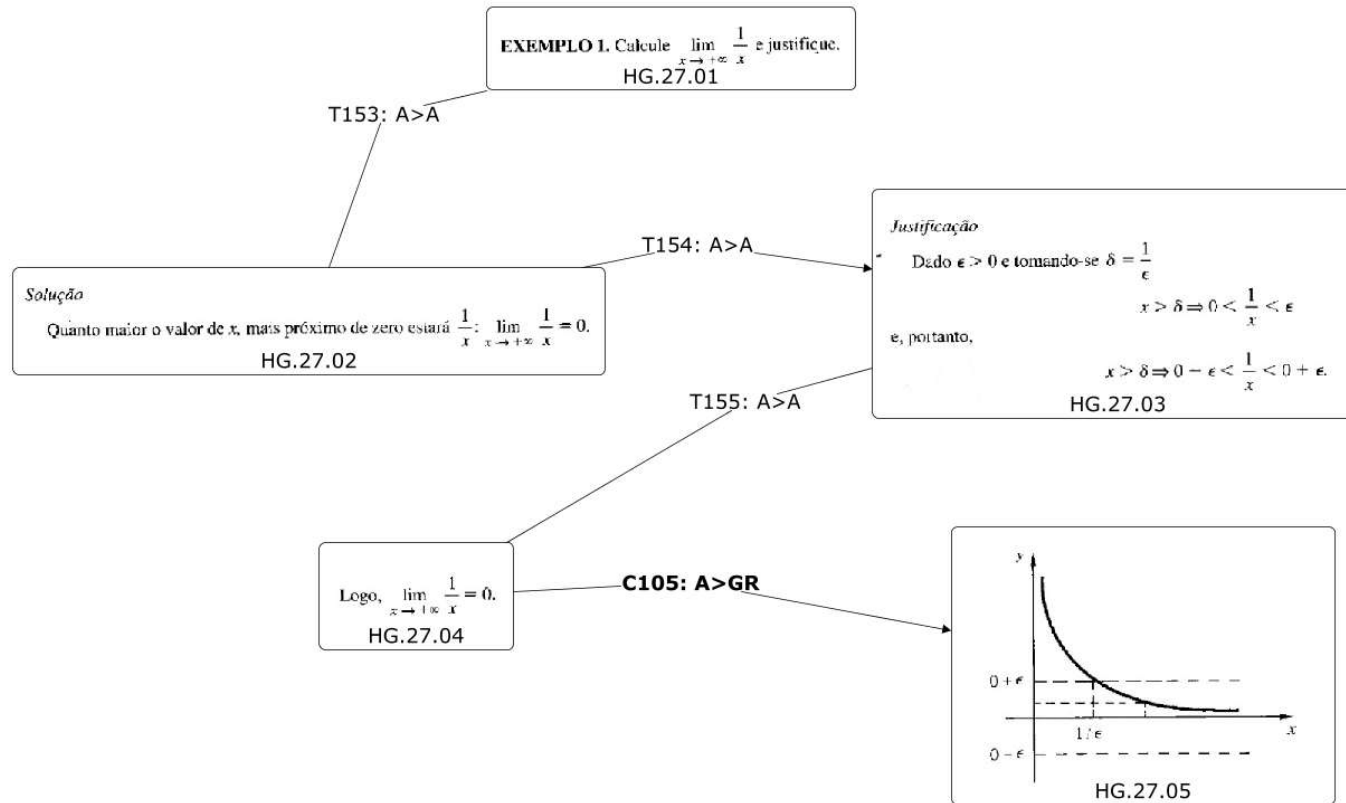
Fonte: Elaborado pelo autor.

Figura 138 - Esquema de conversões da introdução da Seção 4.1 do livro do Guidorizzi.



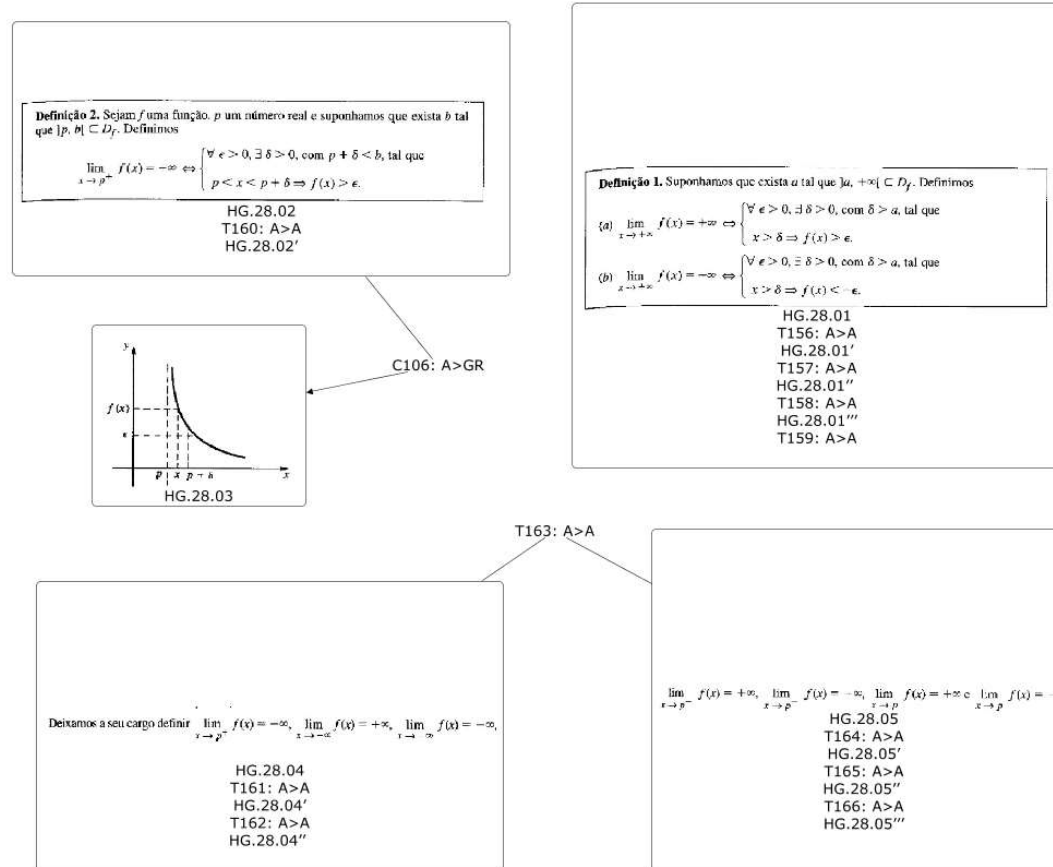
Fonte: Elaborado pelo autor.

Figura 139 - Esquema de conversões do exemplo 1 da Seção 4.1 do livro do Guidorizzi.



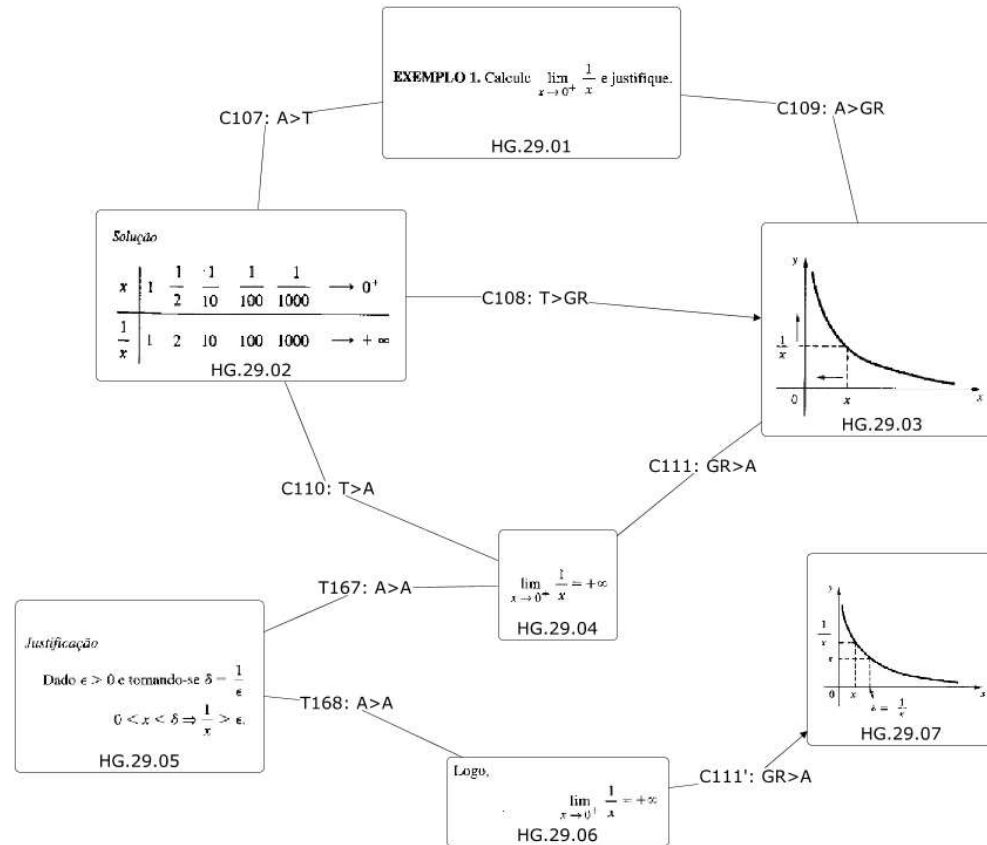
Fonte: Elaborado pelo autor.

Figura 140 - Esquema de conversões da introdução da Seção 4.2 do livro do Guidorizzi.



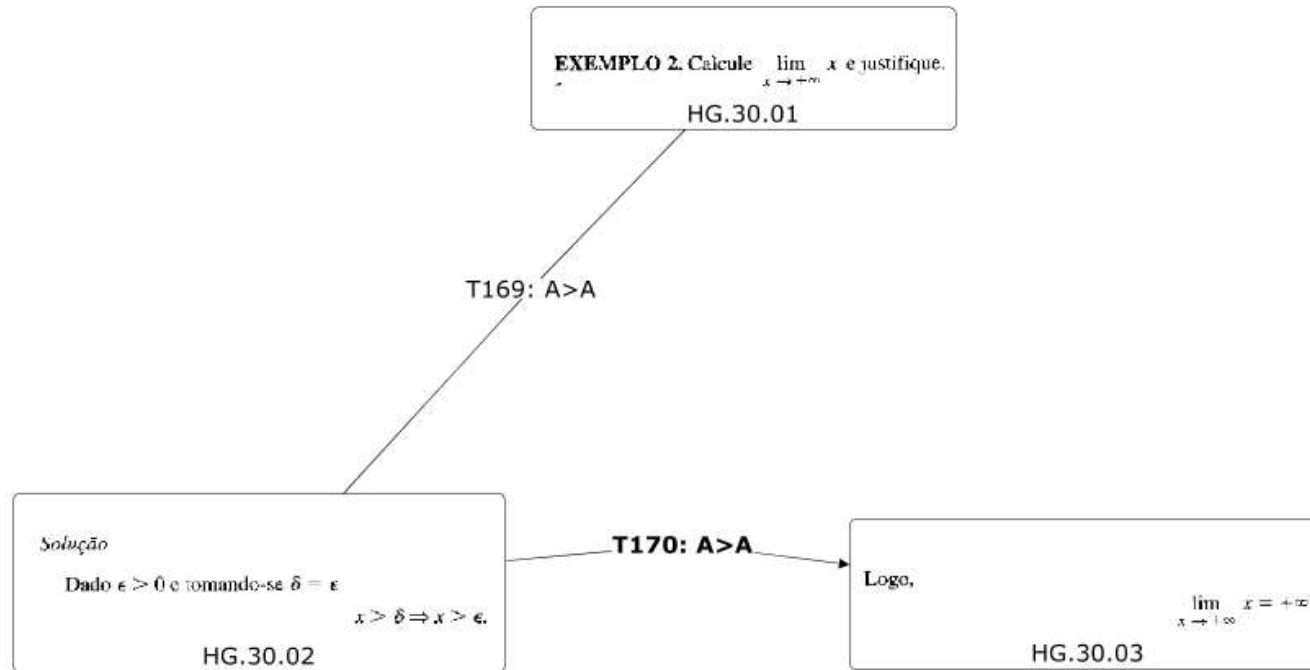
Fonte: Elaborado pelo autor.

Figura 141 - Esquema de conversões do exemplo 1 da Seção 4.2 do livro do Guidorizzi.



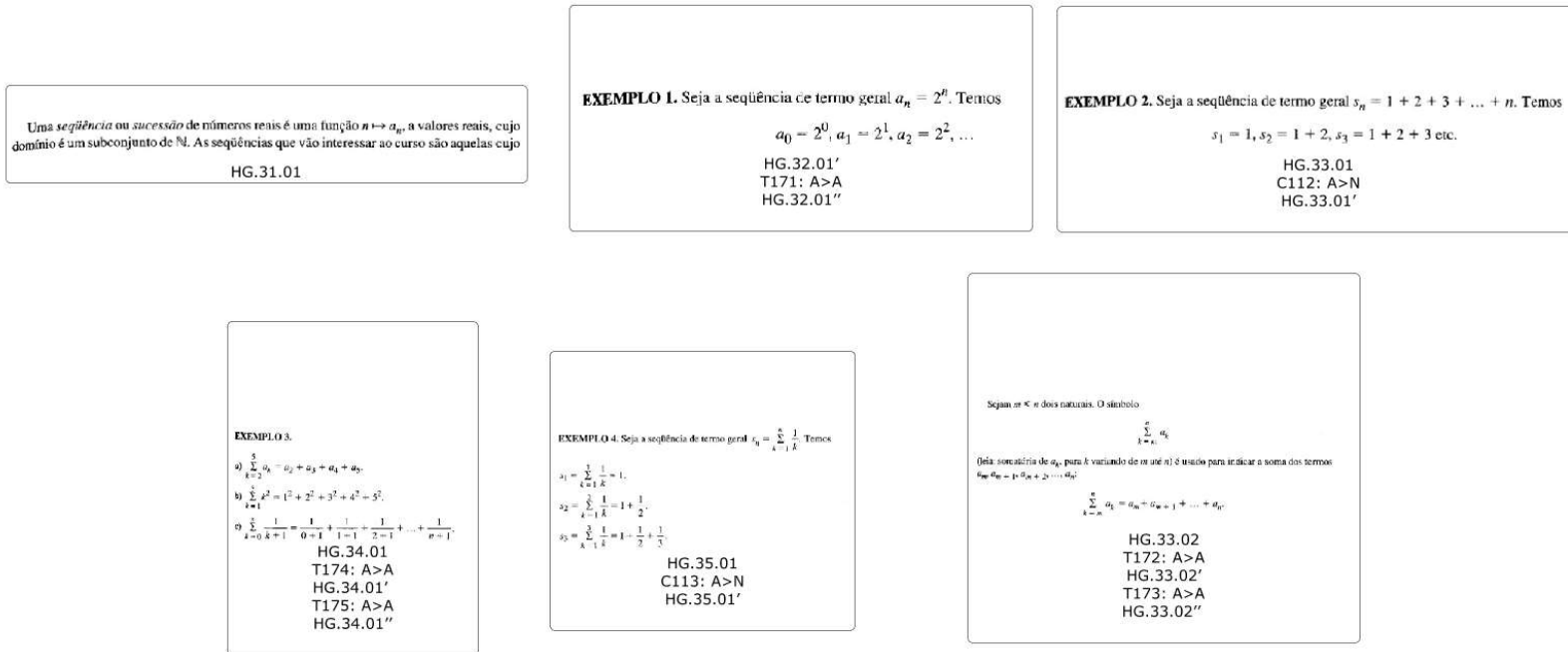
Fonte: Elaborado pelo autor.

Figura 142 - Esquema de conversões do exemplo 2 da Seção 4.2 do livro do Guidorizzi.



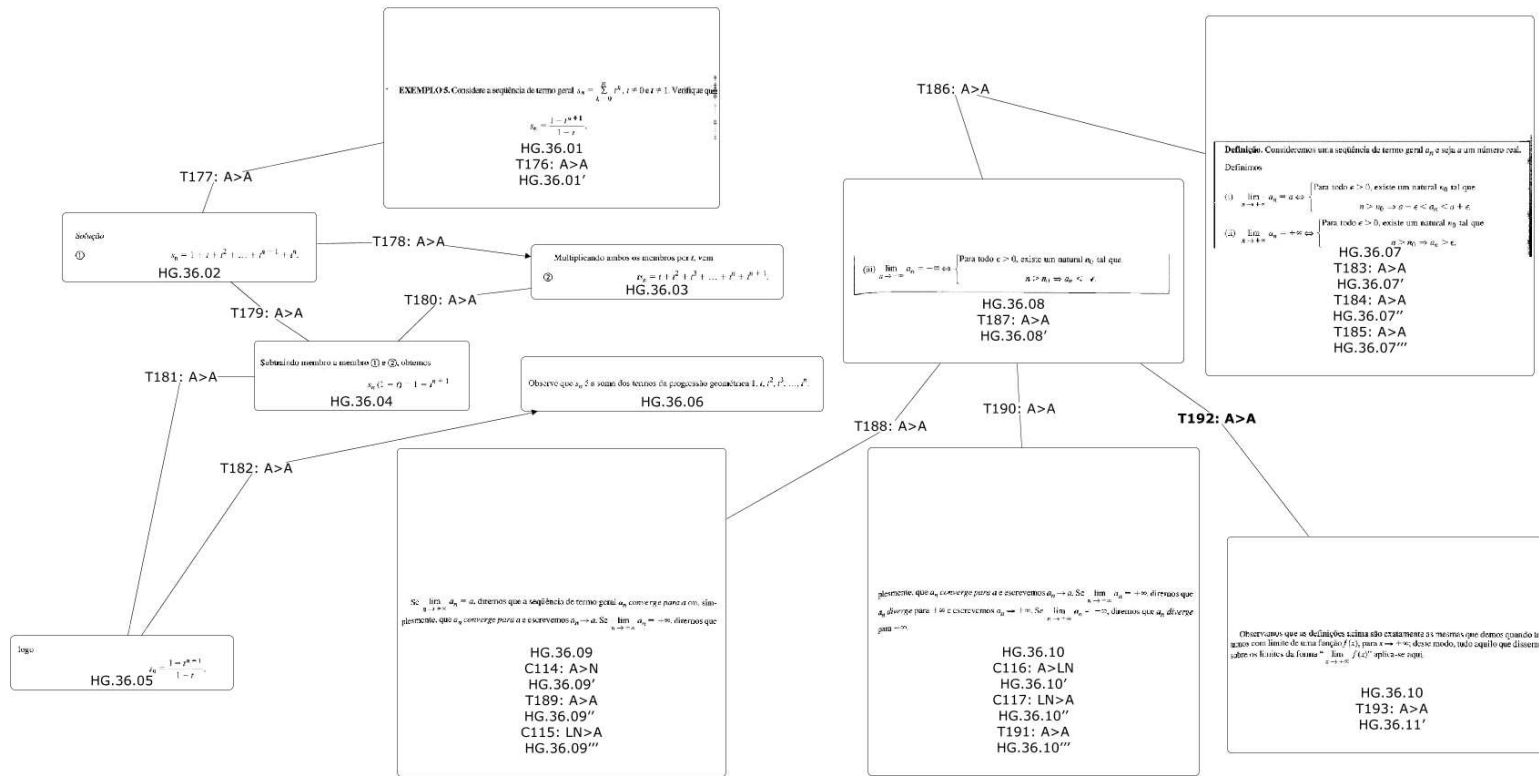
Fonte: Elaborado pelo autor.

Figura 143 - Esquema de conversões dos exemplos 1, 2, 3 e 4 da Seção 4.3 do livro do Guidorizzi.



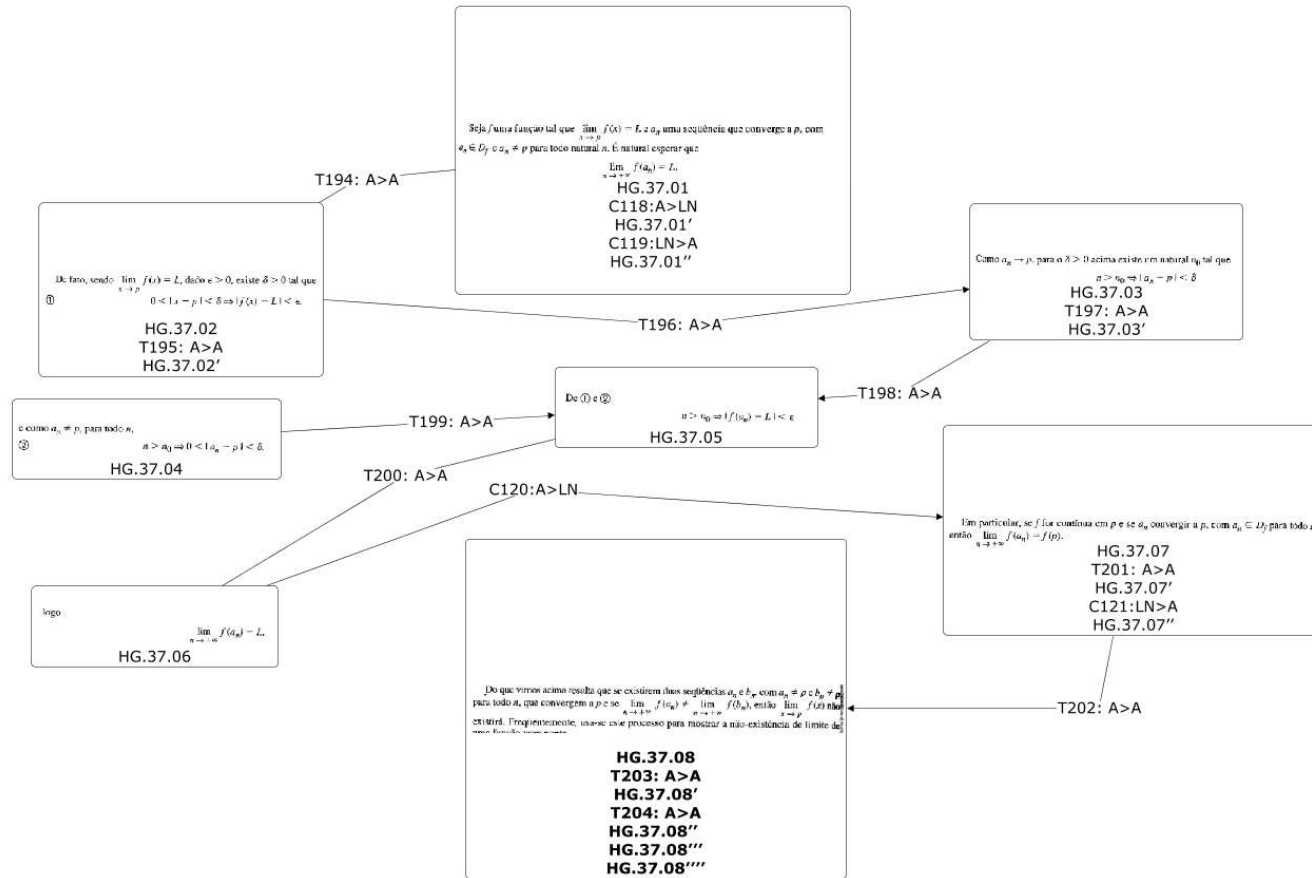
Fonte: Elaborado pelo autor.

Figura 144 - Esquema de conversões do exemplo 5 da Seção 4.3 do livro do Guidorizzi.



Fonte: Elaborado pelo autor.

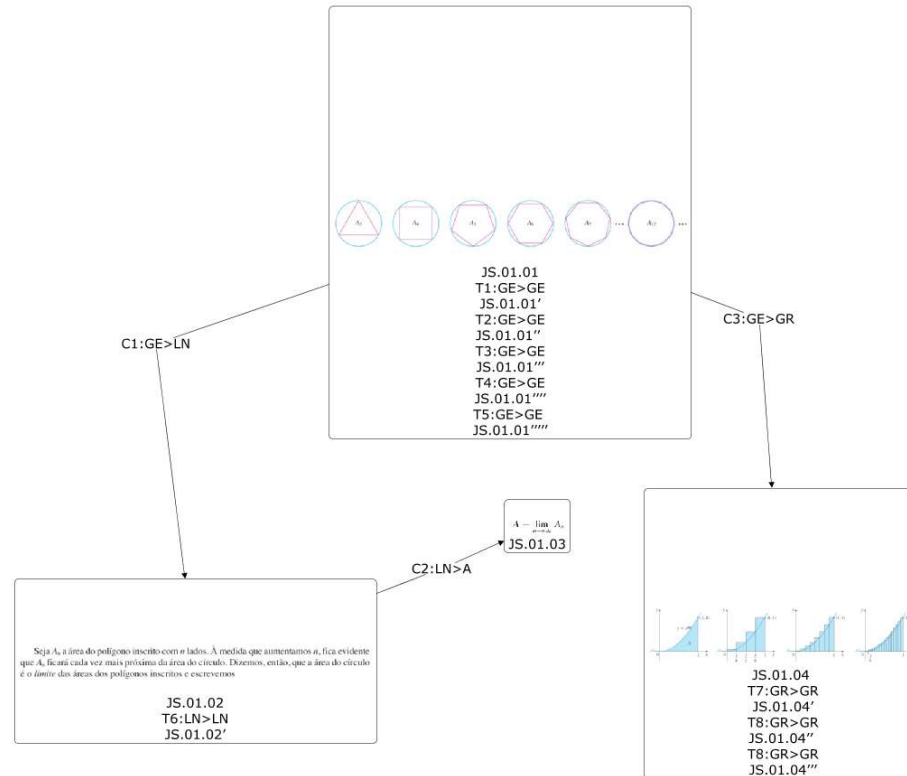
Figura 145 - Esquema de conversões da Seção 4.4 do livro do Guidorizzi.



Fonte: Elaborado pelo autor.

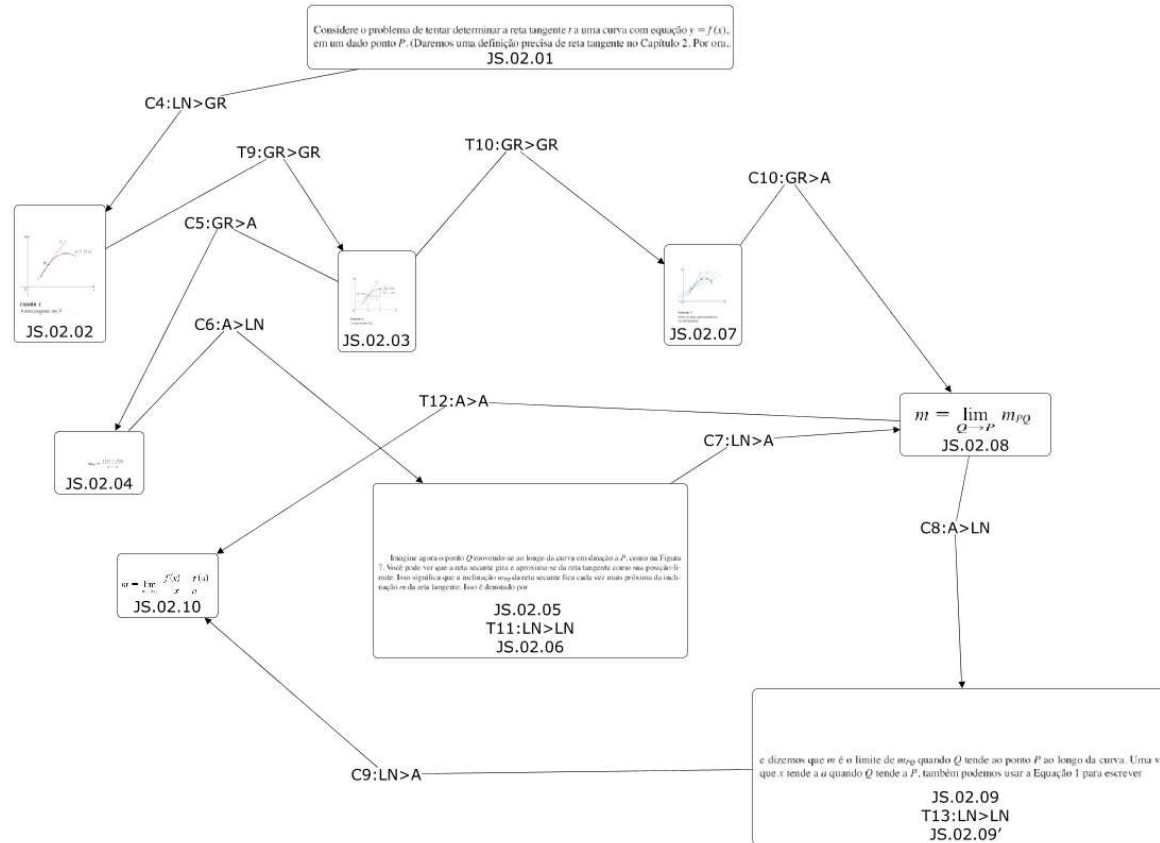
ESQUEMAS DO LIVRO DO STEWART:

Figura 146 - Esquema de conversões da seção O problema da área do capítulo Uma Apresentação do Cálculo do livro do Stewart.



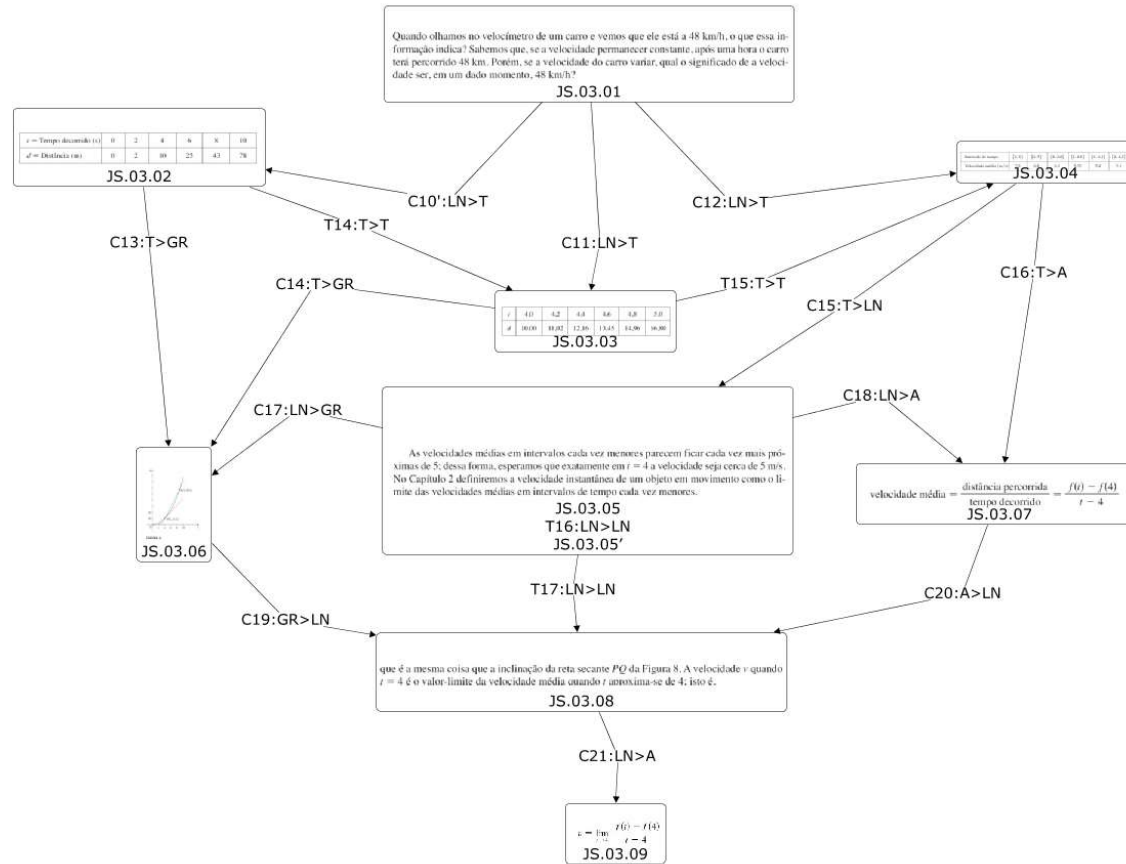
Fonte: Elaborado pelo autor.

Figura 147 - Esquema de conversões da Seção O problema da tangente do capítulo Uma Apresentação do Cálculo do livro do Stewart.



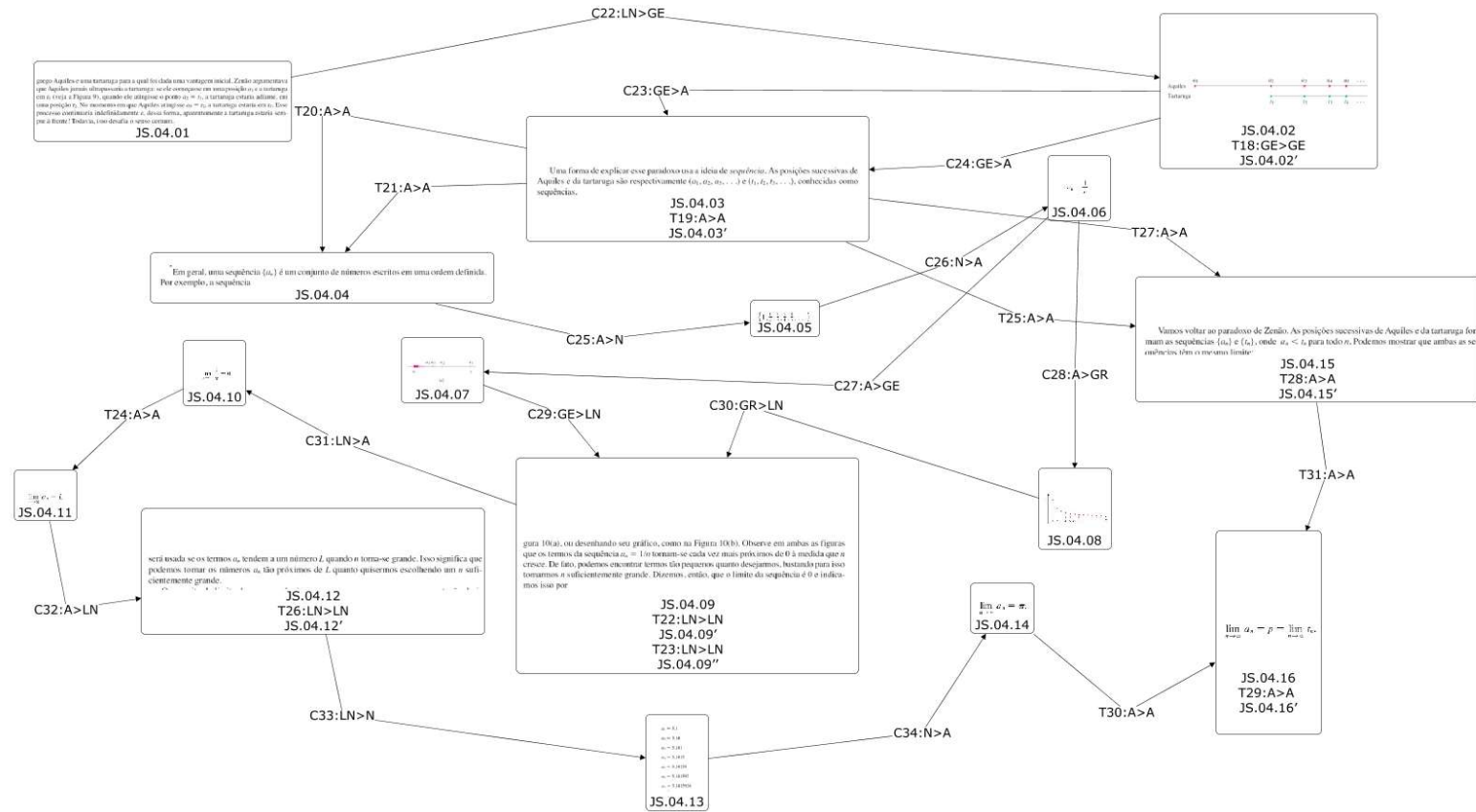
Fonte: Elaborado pelo autor.

Figura 148 - Esquema de conversões da Seção Velocidade do capítulo Uma Apresentação do Cálculo do livro do Stewart.



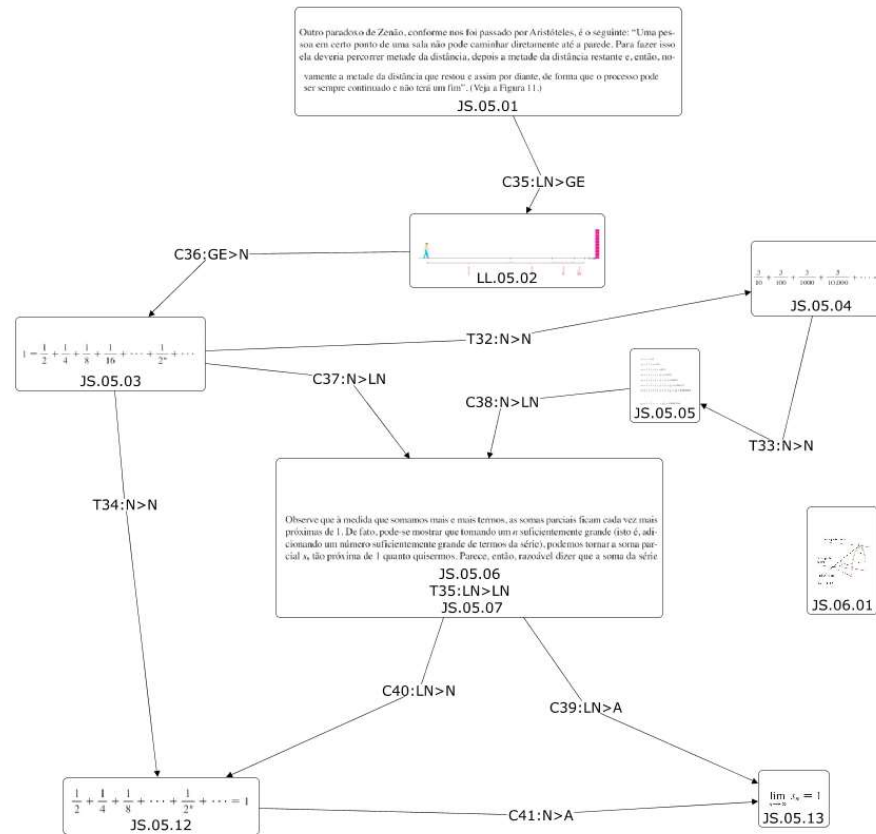
Fonte: Elaborado pelo autor.

Figura 149 - Esquema de conversões da Seção O limite de uma Sequência do capítulo Uma Apresentação do Cálculo do livro do Stewart.



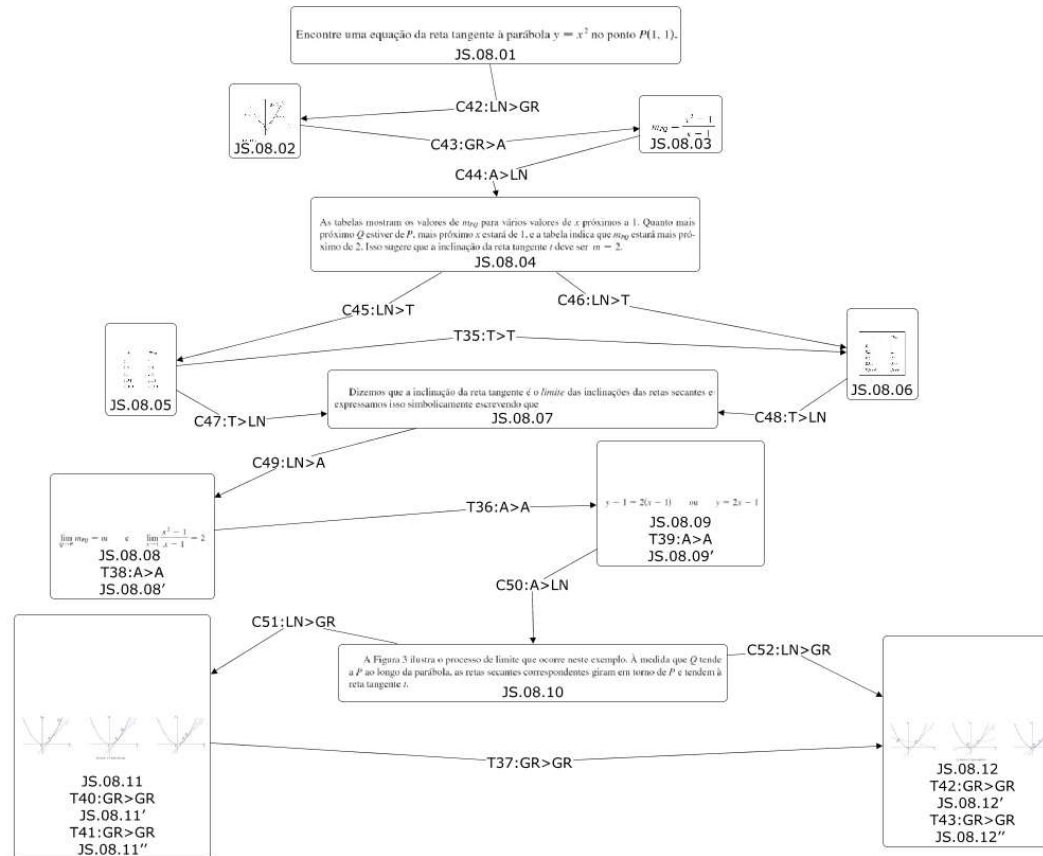
Fonte: Elaborado pelo autor.

Figura 150 - Esquema de conversões da Seção A soma de uma Série do capítulo Uma Apresentação do Cálculo do livro do Stewart.



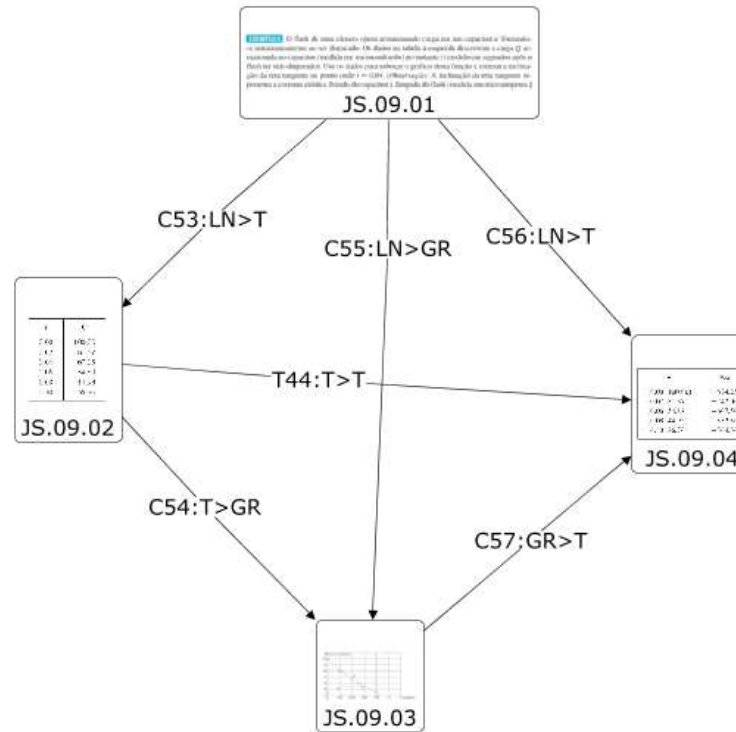
Fonte: Elaborado pelo autor.

Figura 151 - Esquema de conversões do exemplo 1 da seção 2.1 do livro do Stewart.



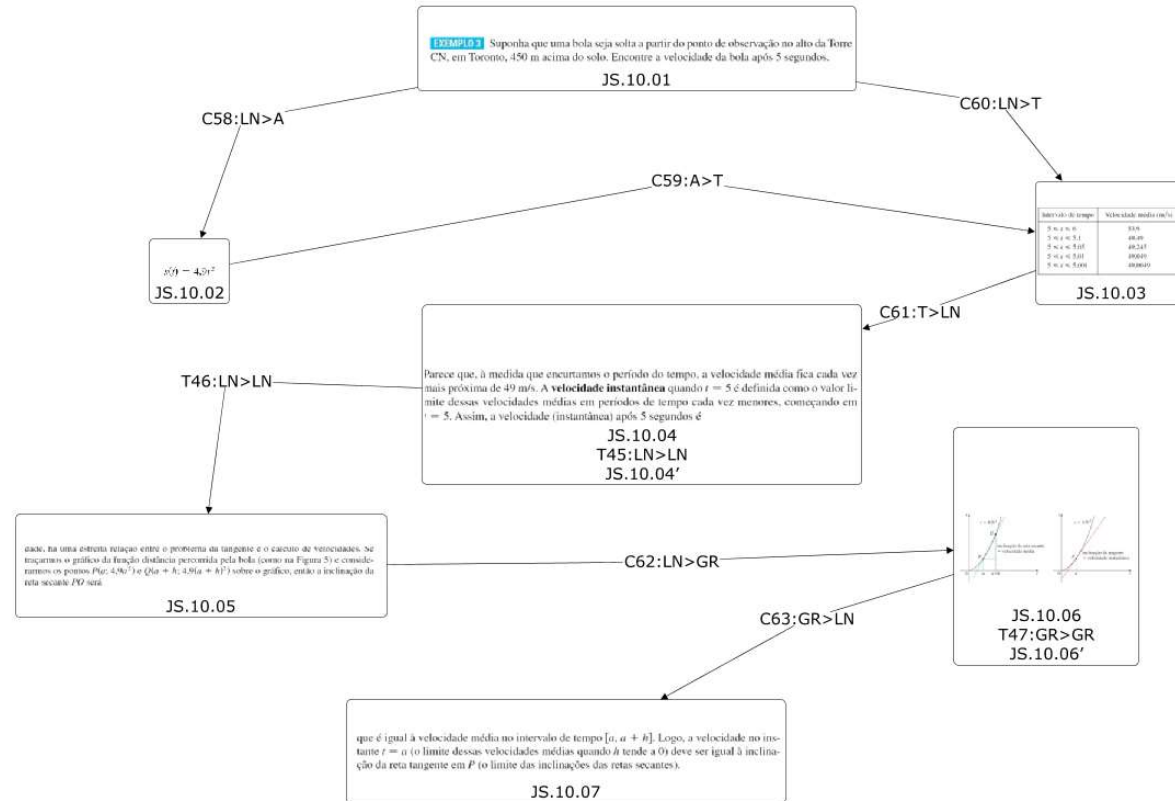
Fonte: Elaborado pelo autor.

Figura 152 - Esquema de conversões do exemplo 2 da seção 2.1 do livro do Stewart.



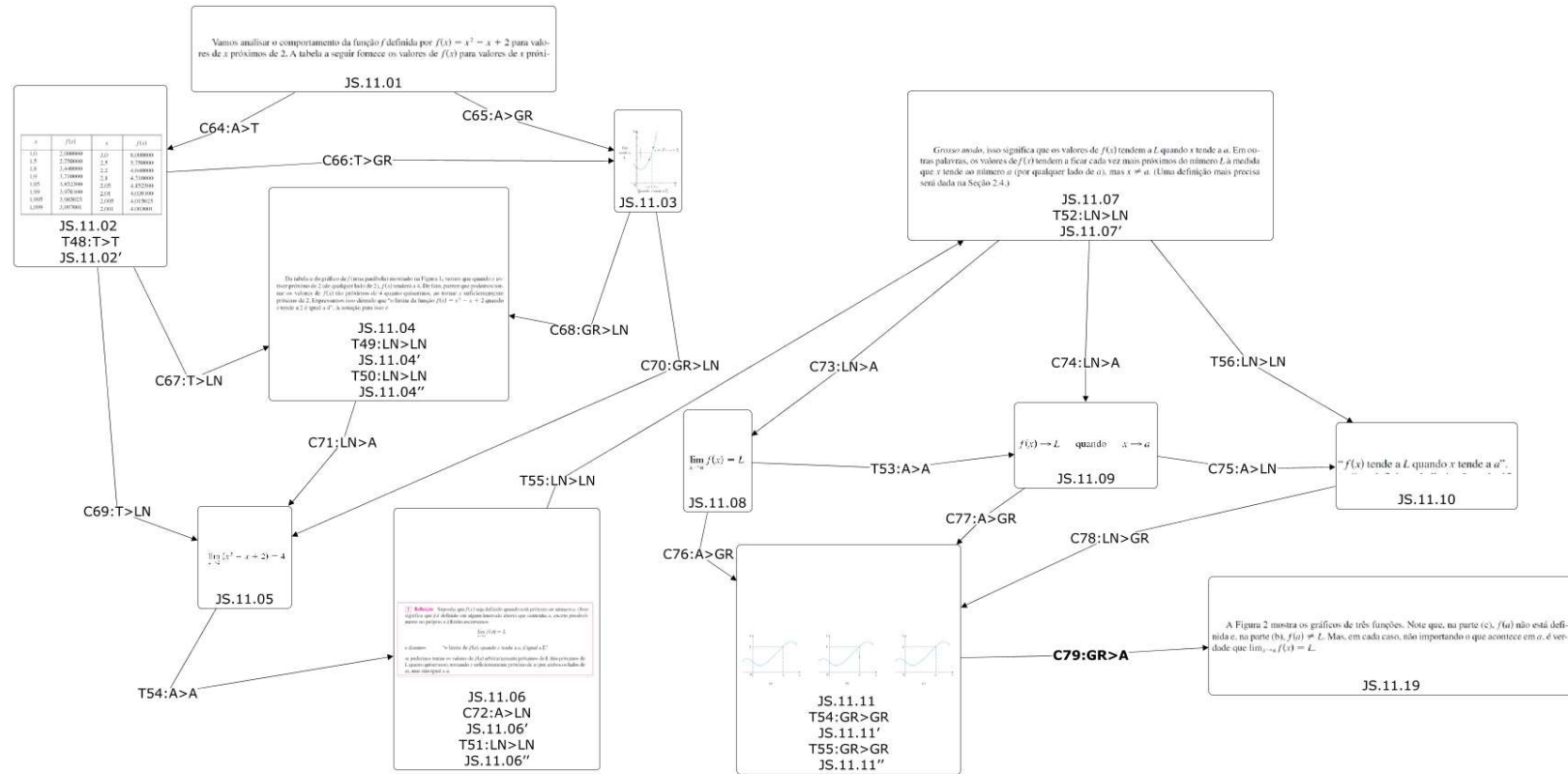
Fonte: Elaborado pelo autor.

Figura 153 - Esquema de conversões do exemplo 3 da seção 2.1 do livro do Stewart.



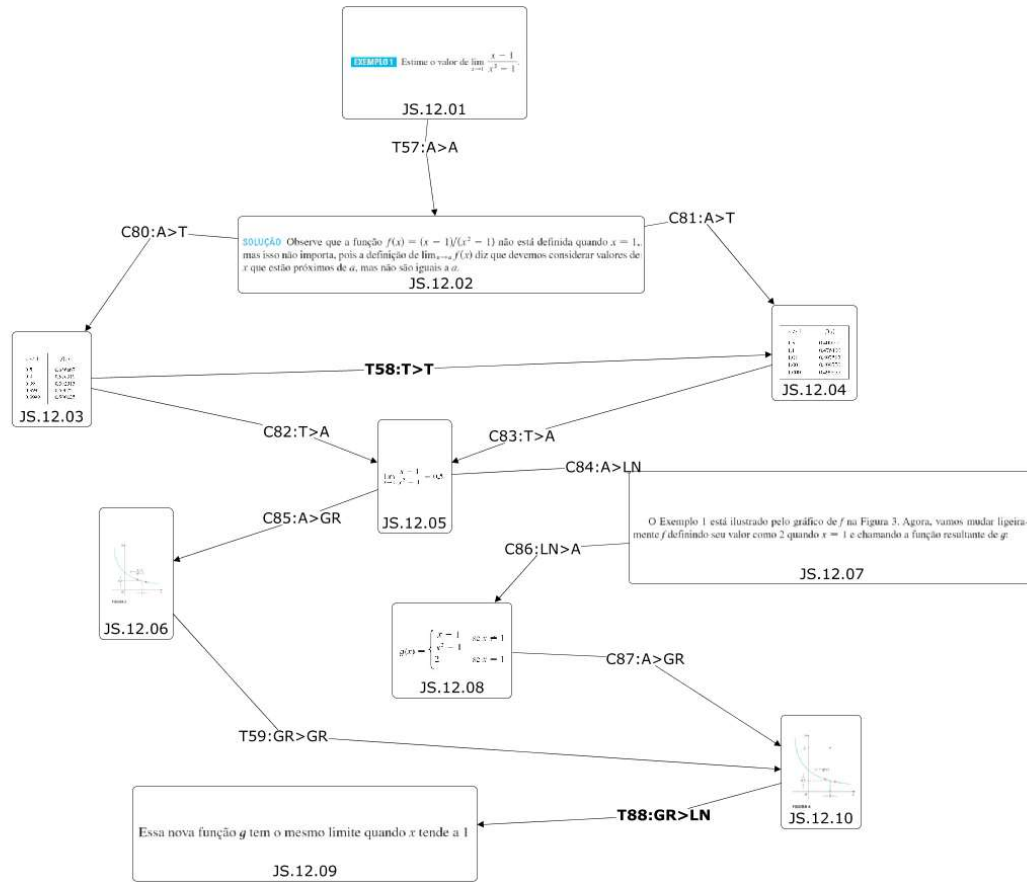
Fonte: Elaborado pelo autor.

Figura 154 - Esquema de conversões da introdução da seção 2.2 do livro do Stewart.



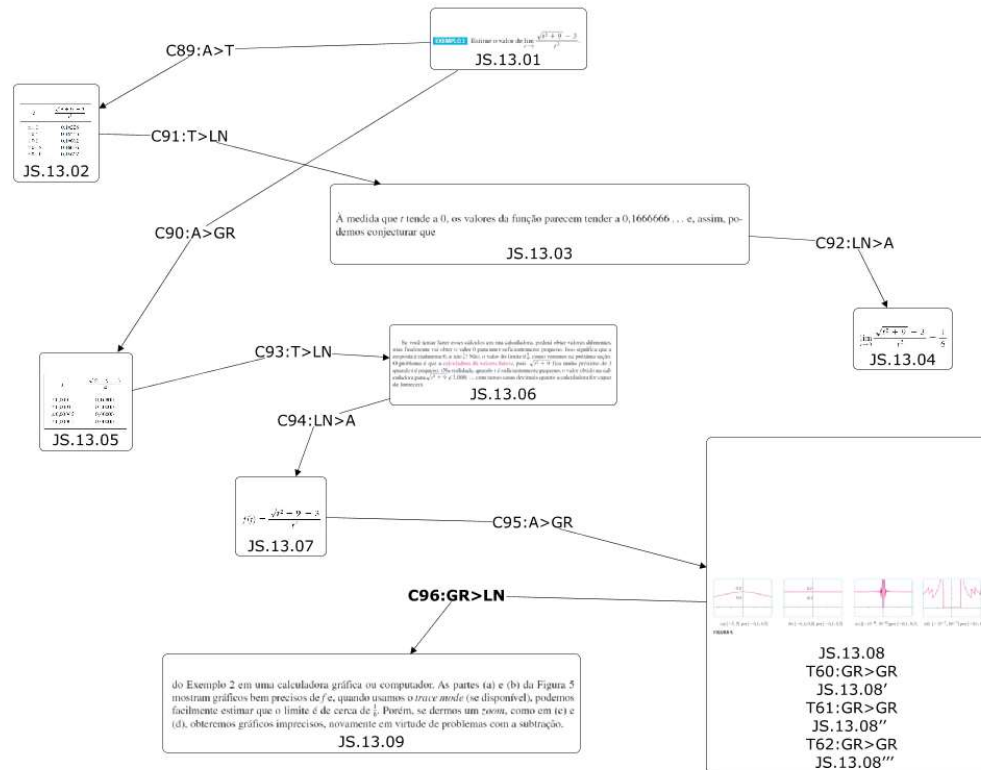
Fonte: Elaborado pelo autor.

Figura 155 - Esquema de conversões do exemplo 1 da seção 2.2 do livro do Stewart.



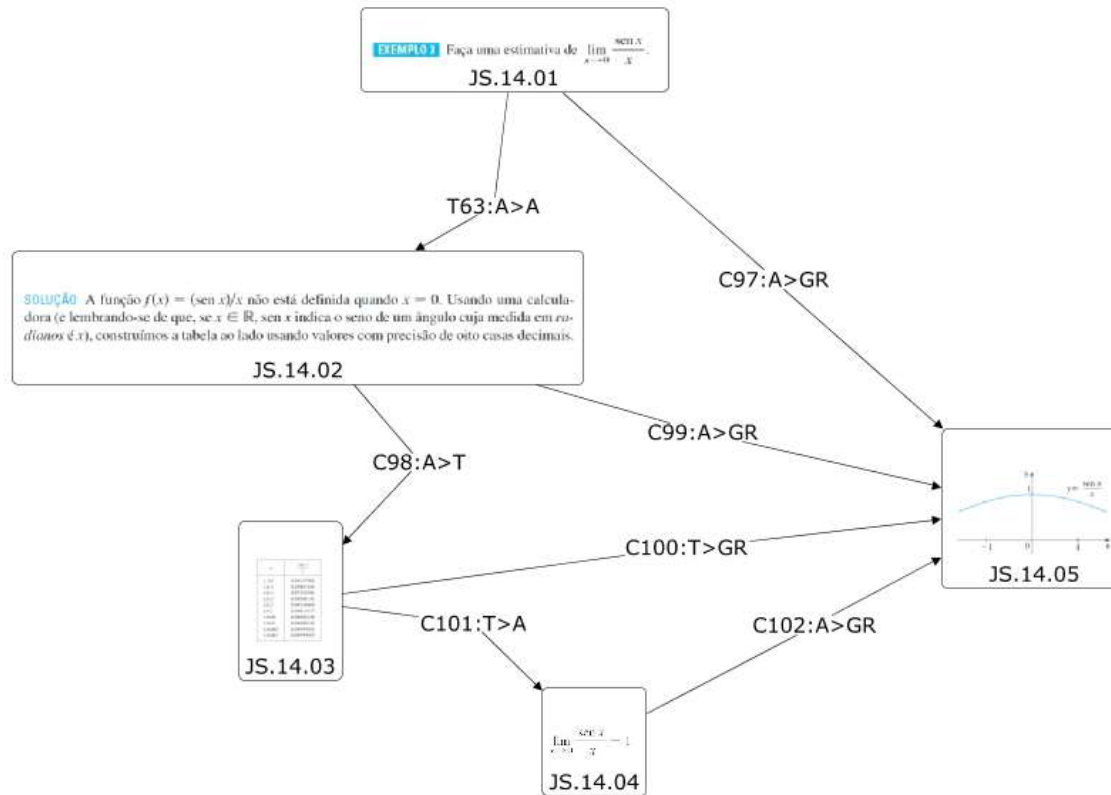
Fonte: Elaborado pelo autor.

Figura 156 - Esquema de conversões do exemplo 2 da seção 2.2 do livro do Stewart.



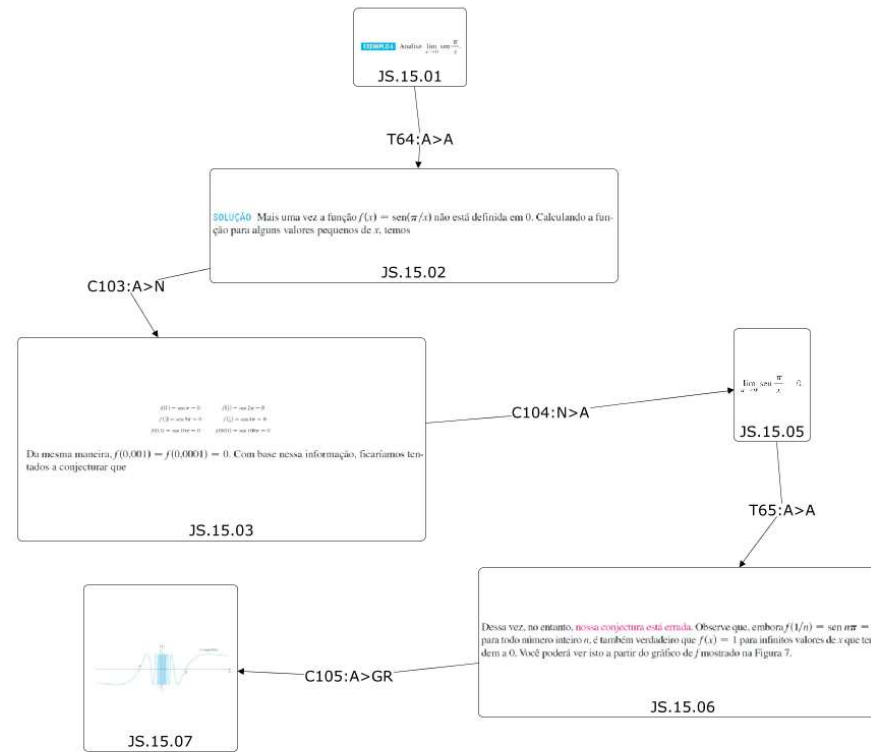
Fonte: Elaborado pelo autor.

Figura 157 - Esquema de conversões do exemplo 3 da seção 2.2 do livro do Stewart.



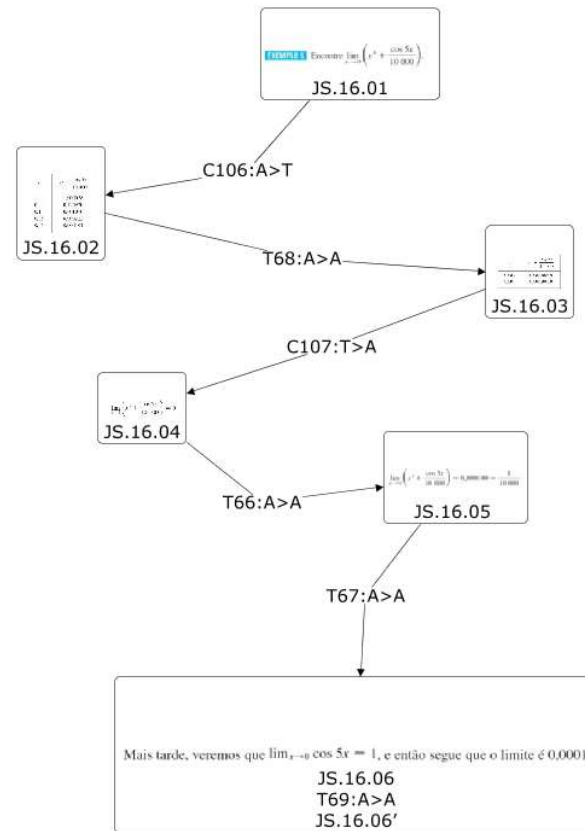
Fonte: Elaborado pelo autor.

Figura 158 - Esquema de conversões do exemplo 4 da seção 2.2 do livro do Stewart.



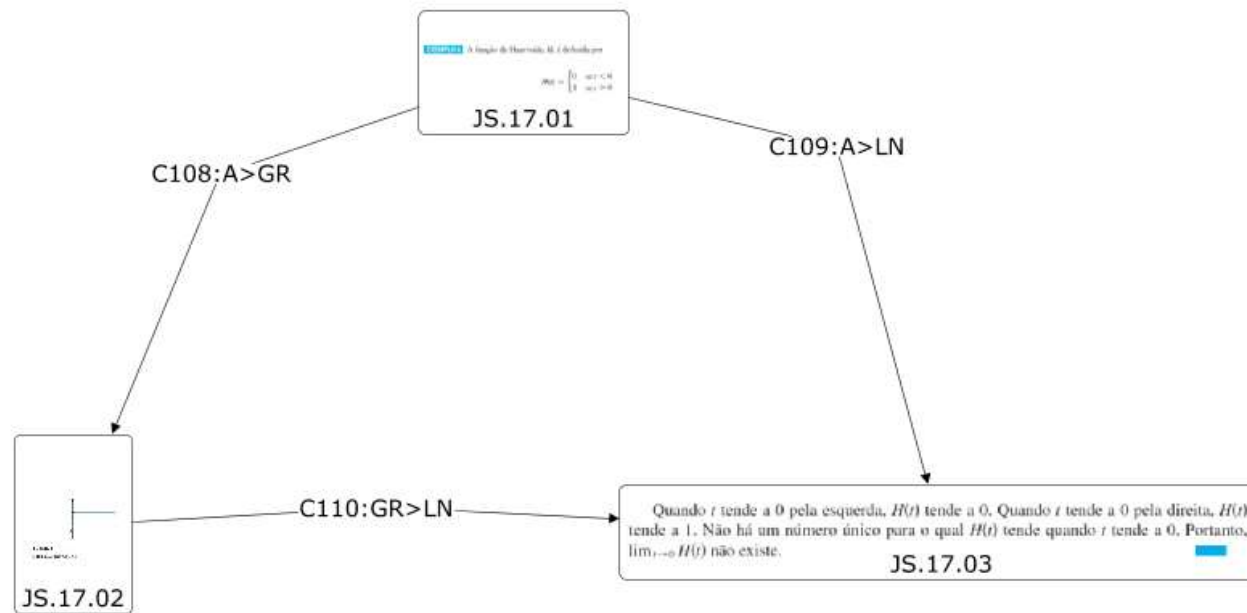
Fonte: Elaborado pelo autor.

Figura 159 - Esquema de conversões do exemplo 5 da seção 2.2 do livro do Stewart.



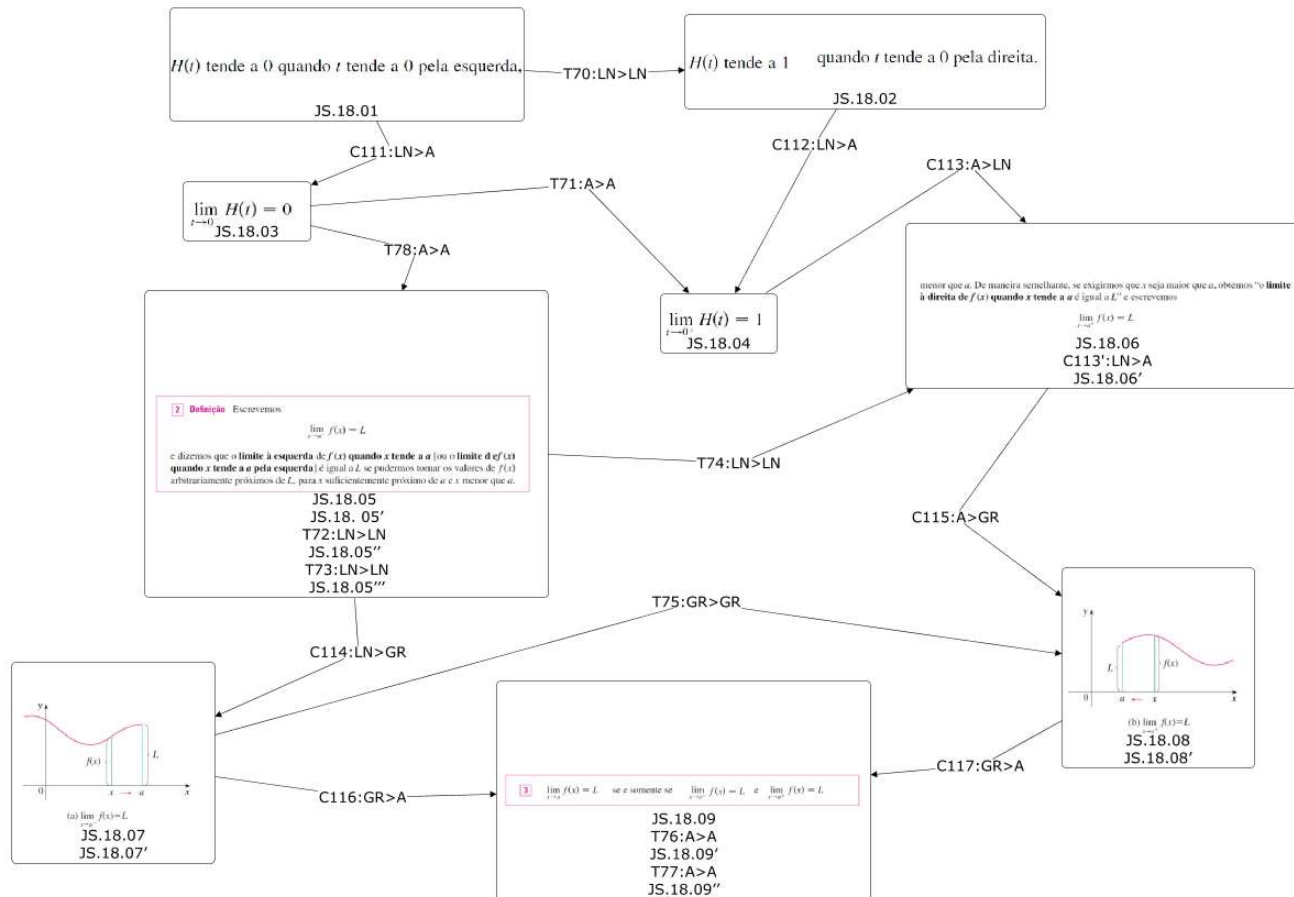
Fonte: Elaborado pelo autor.

Figura 160 - Esquema de conversões do exemplo 6 da seção 2.2 do livro do Stewart.



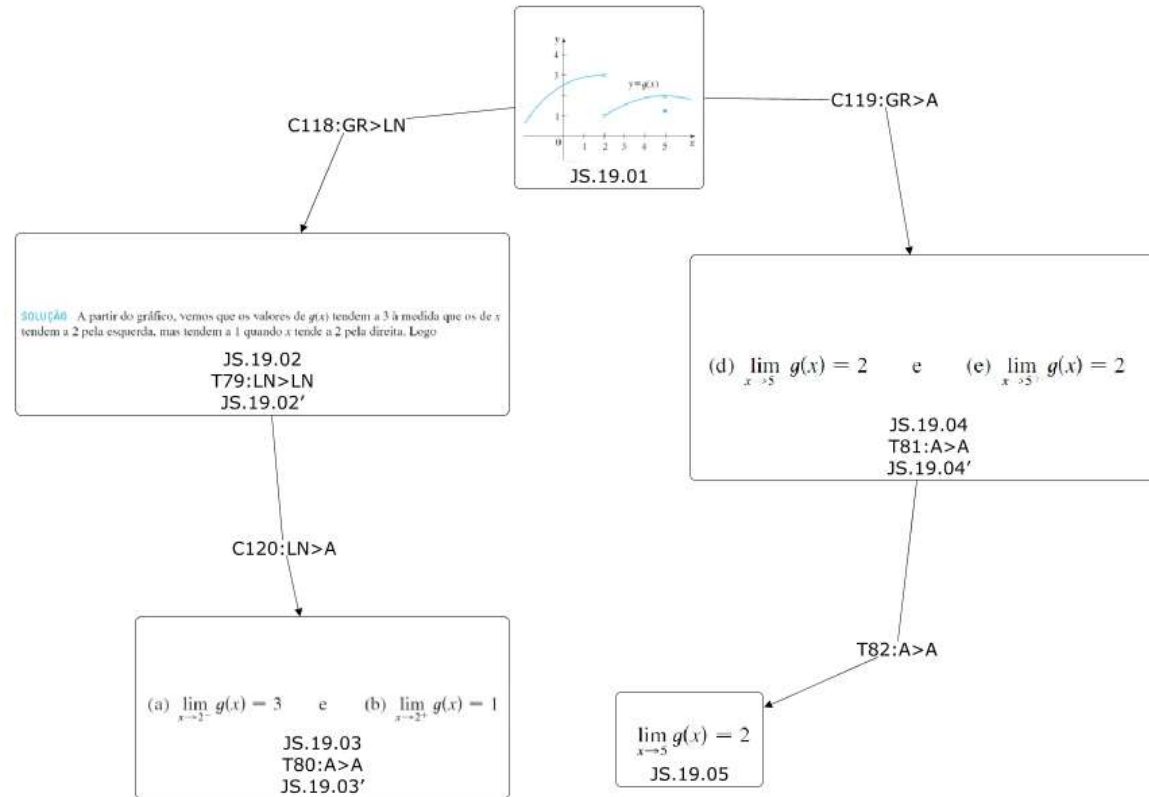
Fonte: Elaborado pelo autor.

Figura 161 - Esquema de conversões da subseção Limites laterais da seção 2.2 do livro do Stewart.



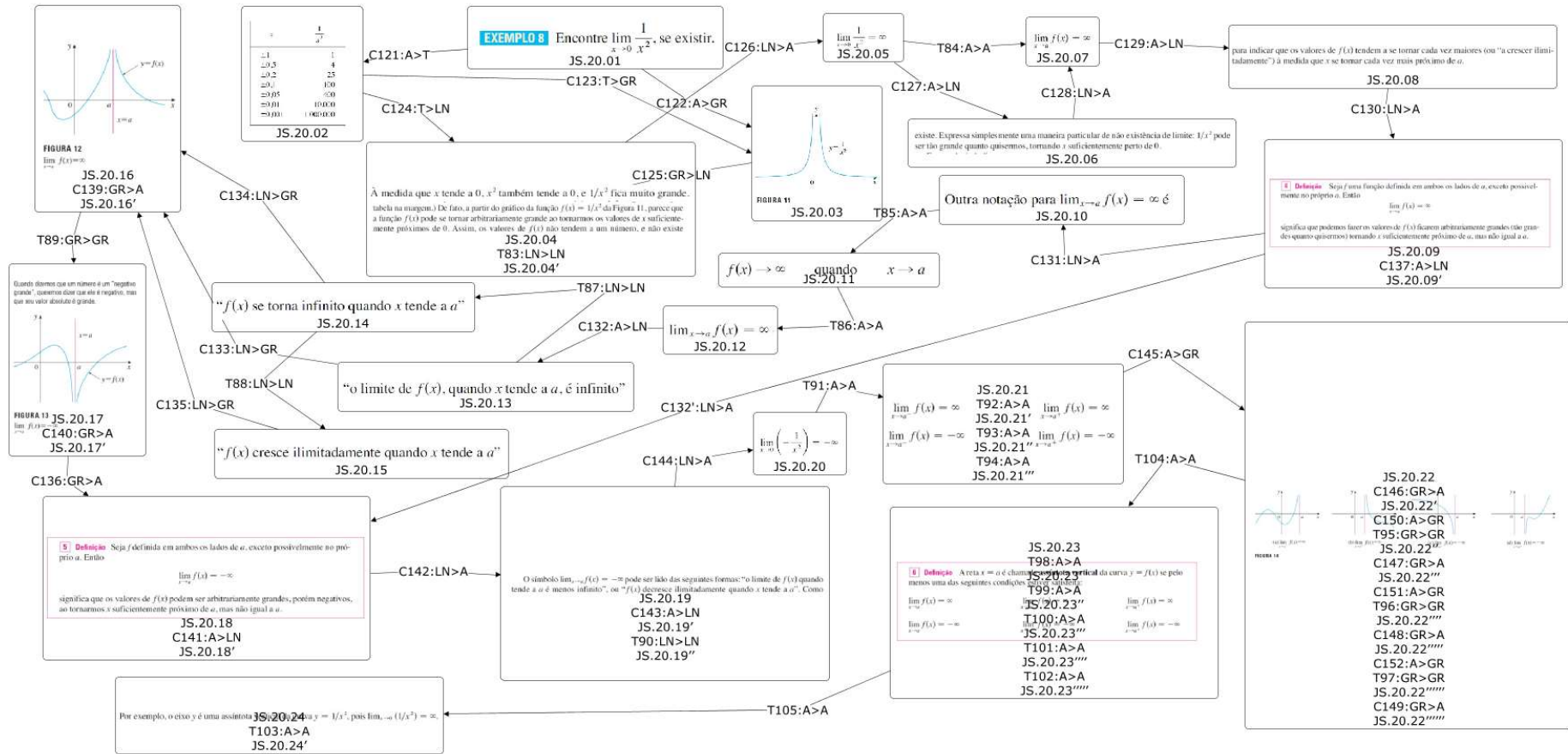
Fonte: Elaborado pelo autor.

Figura 162 - Esquema de conversões do exemplo 7 da seção 2.2 do livro do Stewart.



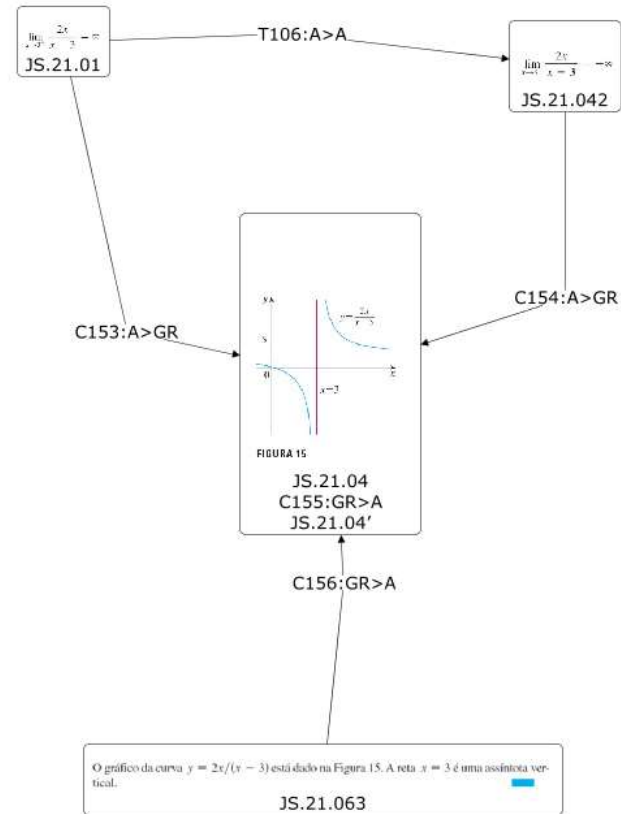
Fonte: Elaborado pelo autor.

Figura 163 - Esquema de conversões do exemplo 8 da seção 2.2 do livro do Stewart.



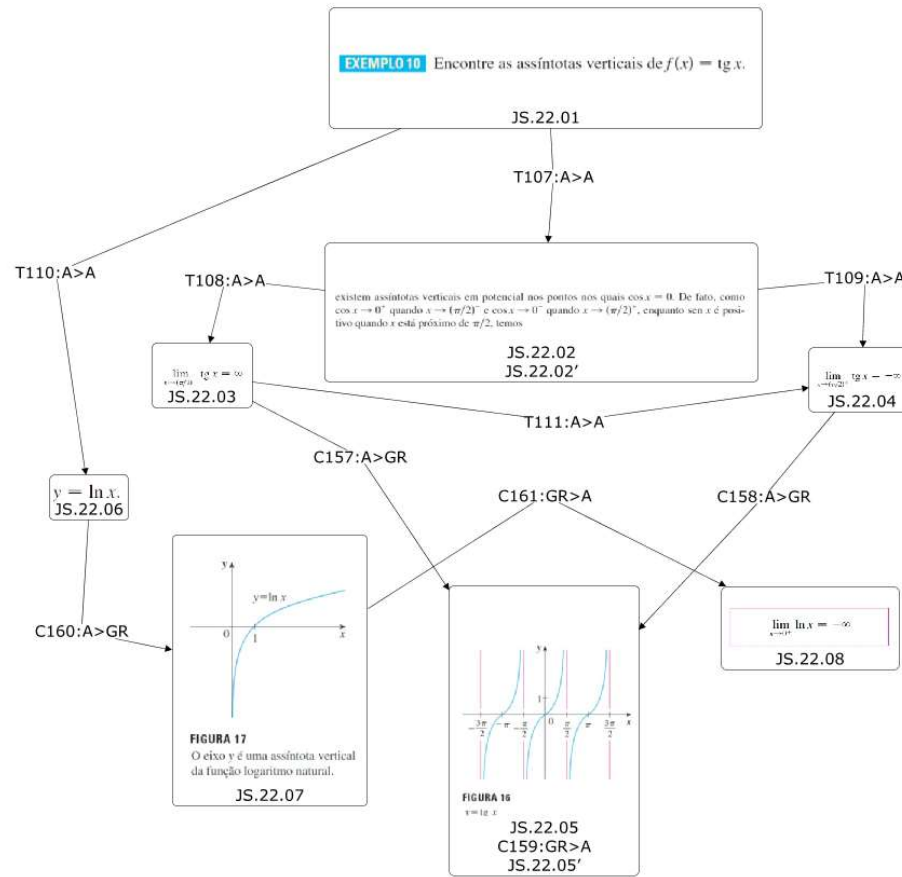
Fonte: Elaborado pelo autor.

Figura 164 - Esquema de conversões do exemplo 9 da seção 2.2 do livro do Stewart.



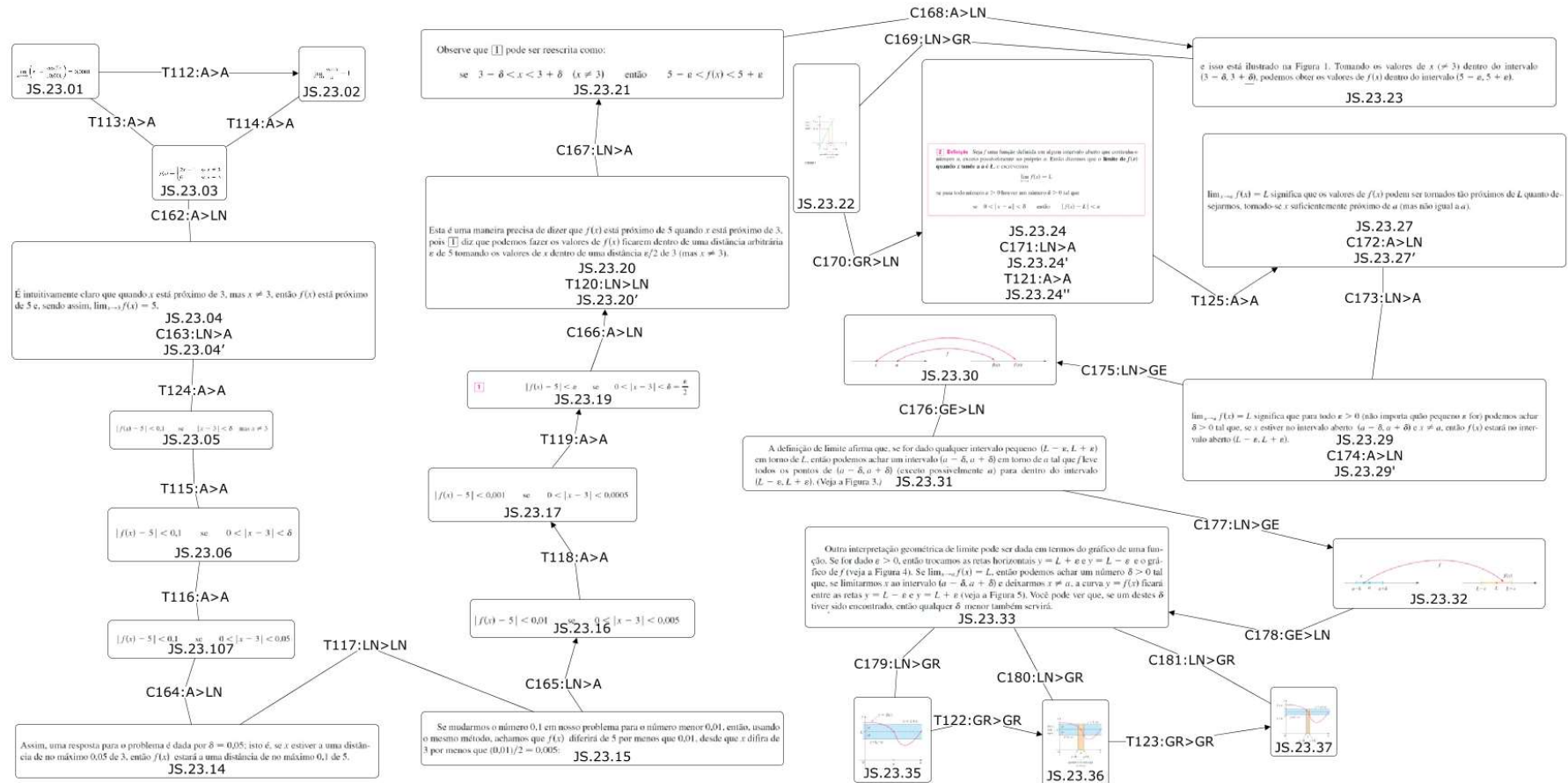
Fonte: Elaborado pelo autor.

Figura 165 - Esquema de conversões do exemplo 10 da seção 2.2 do livro do Stewart.



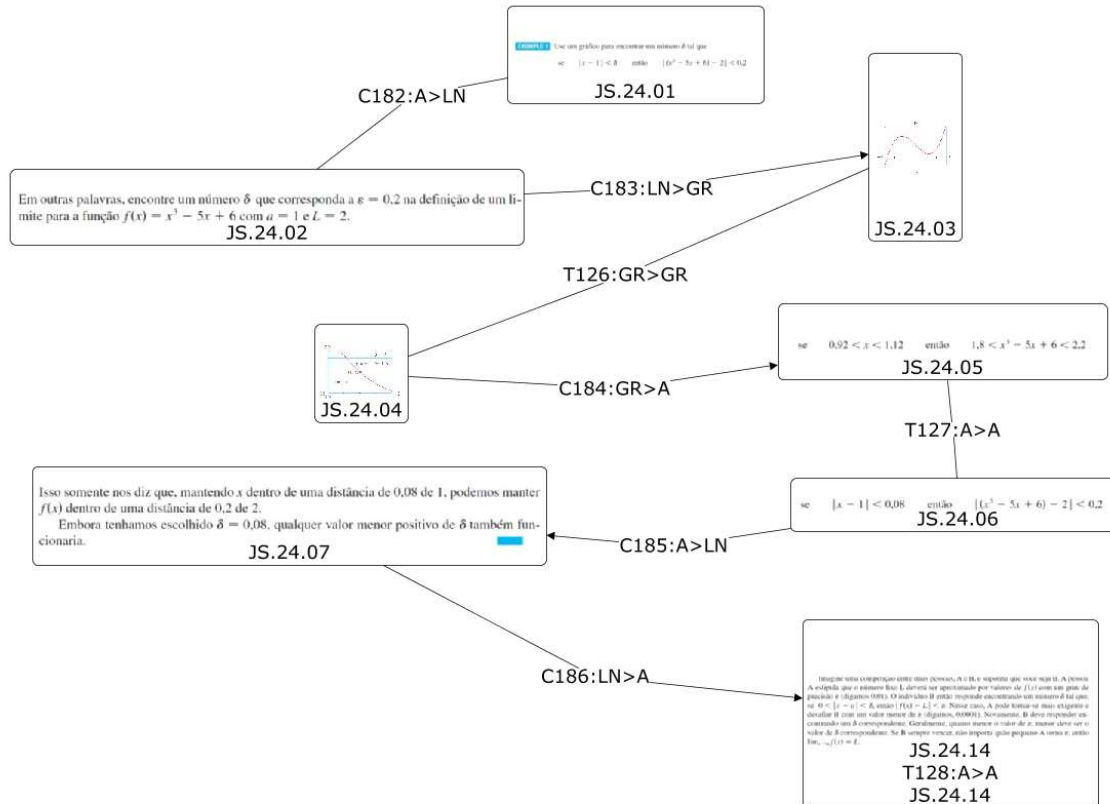
Fonte: Elaborado pelo autor.

Figura 166 - Esquema de conversões da introdução da seção 2.4 do livro do Stewart.



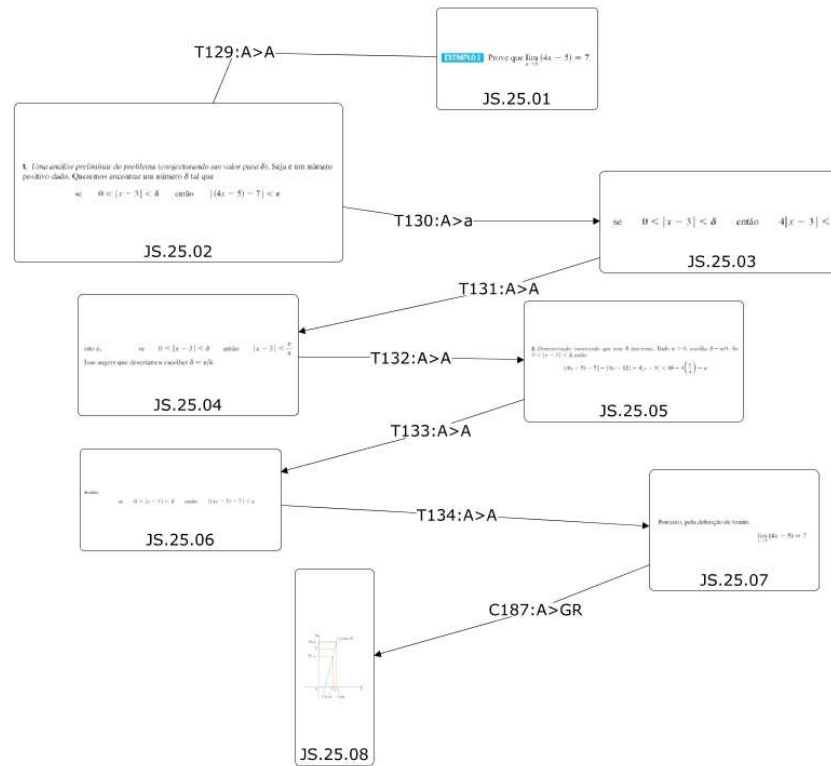
Fonte: Elaborado pelo autor.

Figura 167 - Esquema de conversões do exemplo 1 da seção 2.4 do livro do Stewart.



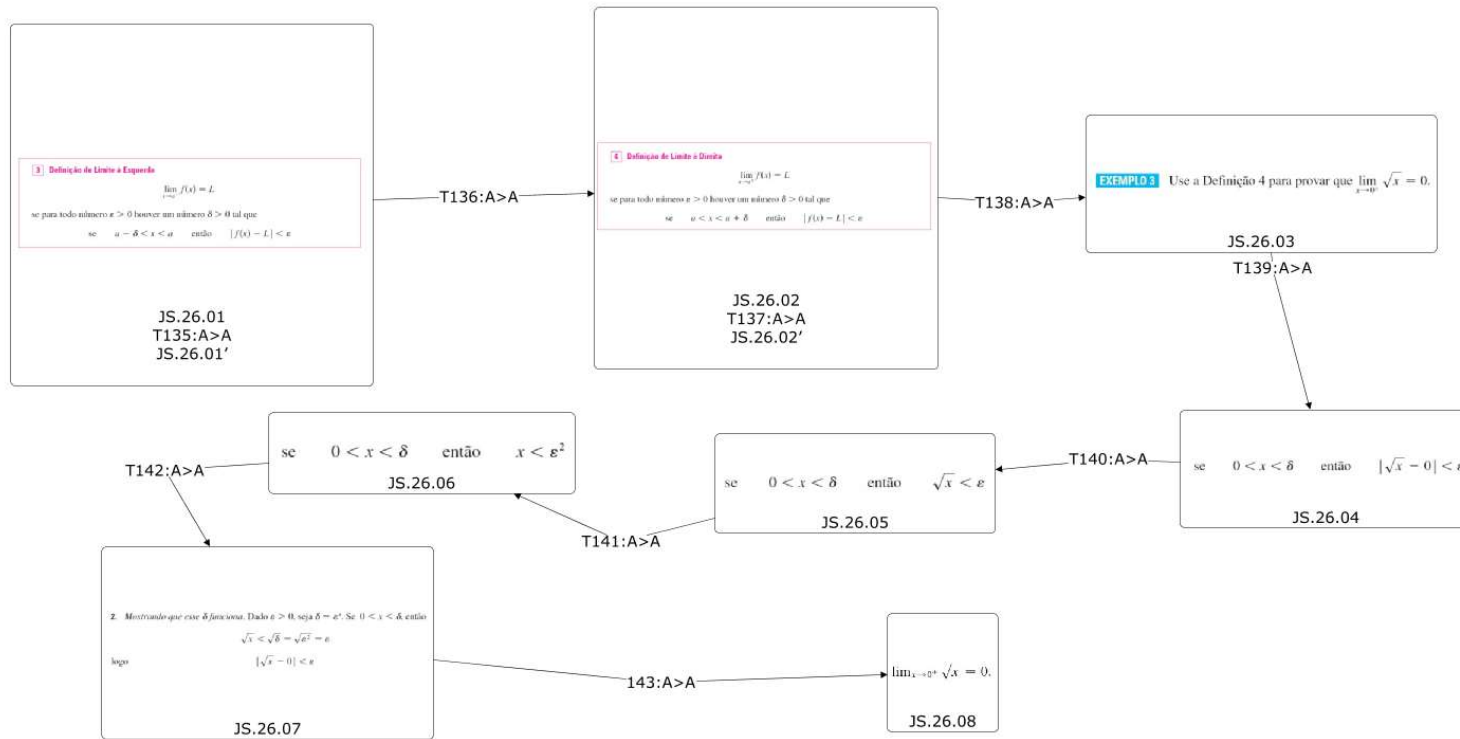
Fonte: Elaborado pelo autor.

Figura 168 - Esquema de conversões do exemplo 2 da seção 2.4 do livro do Stewart.



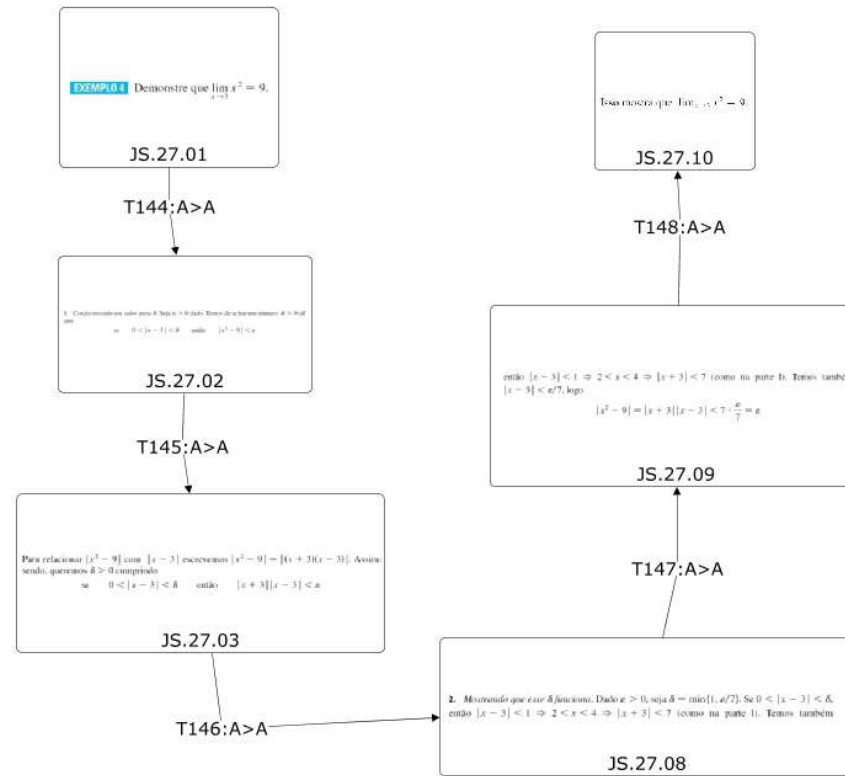
Fonte: Elaborado pelo autor.

Figura 169 - Esquema de conversões do exemplo 3 da seção 2.4 do livro do Stewart.



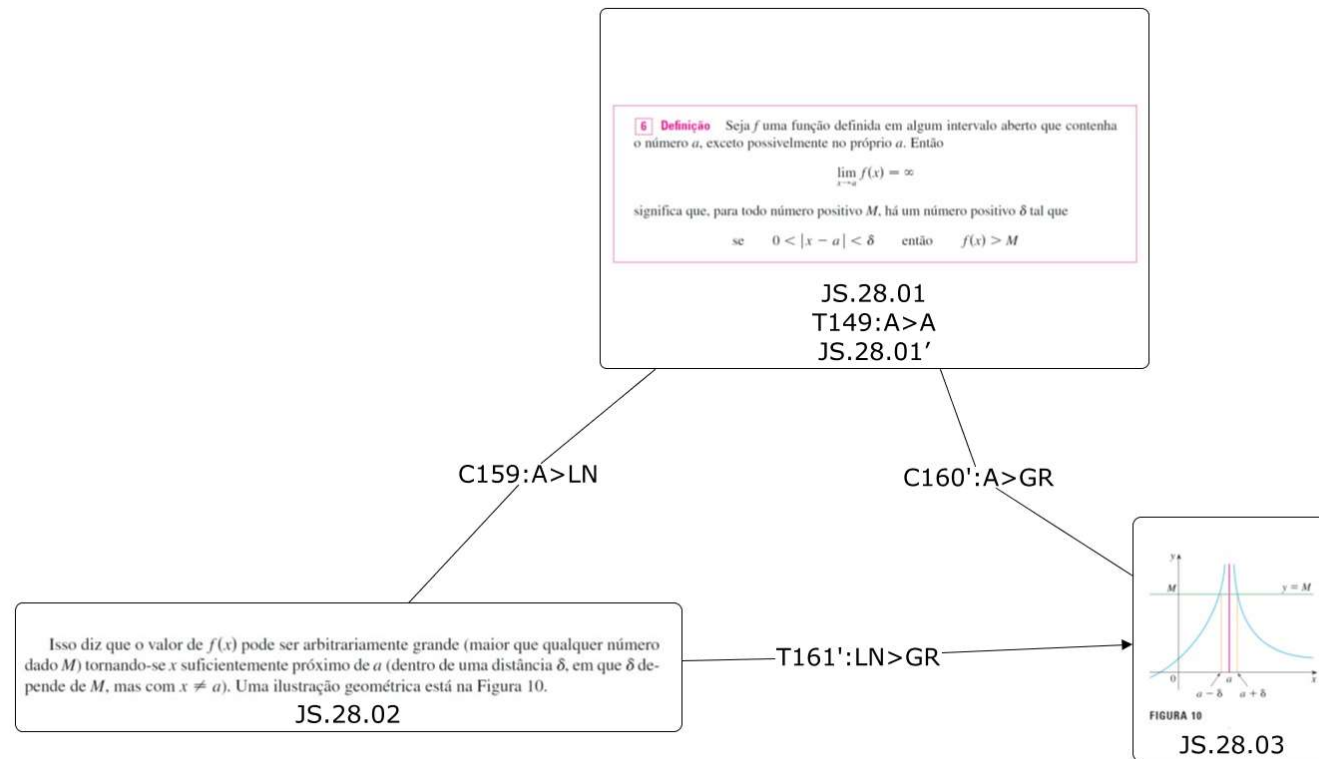
Fonte: Elaborado pelo autor.

Figura 170 - Esquema de conversões do exemplo 4 da seção 2.4 do livro do Stewart.



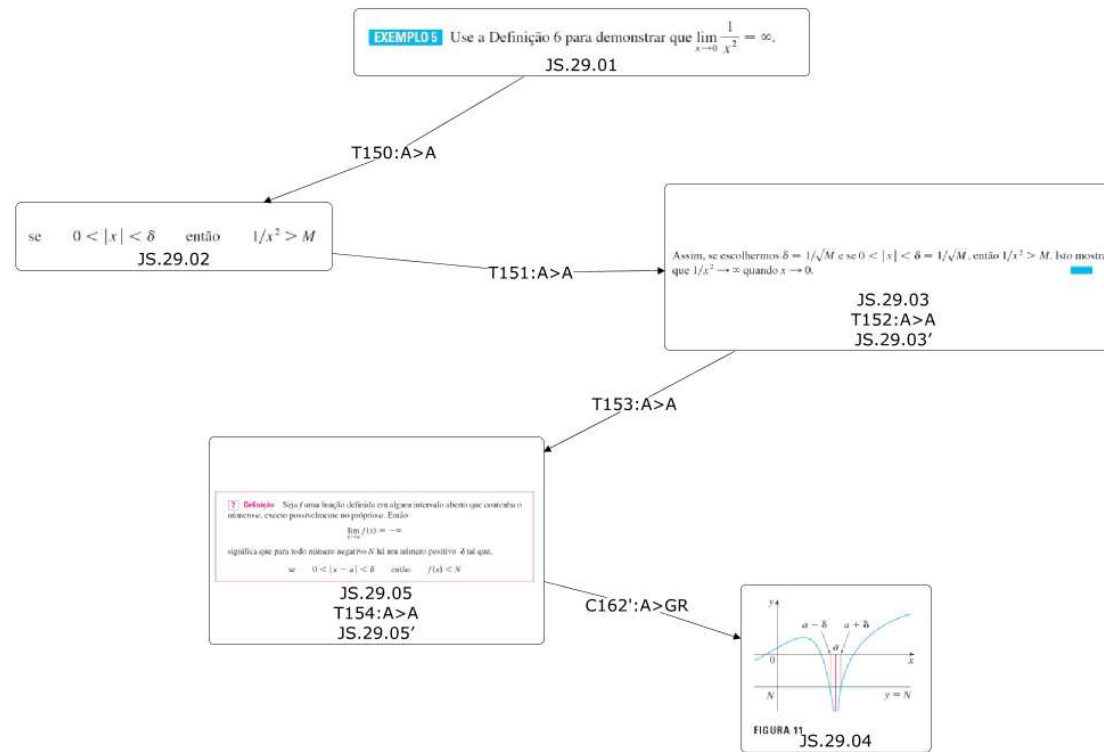
Fonte: Elaborado pelo autor.

Figura 171 - Esquema de conversões da subseção Limites infinitos da seção 2.4 do livro do Stewart.



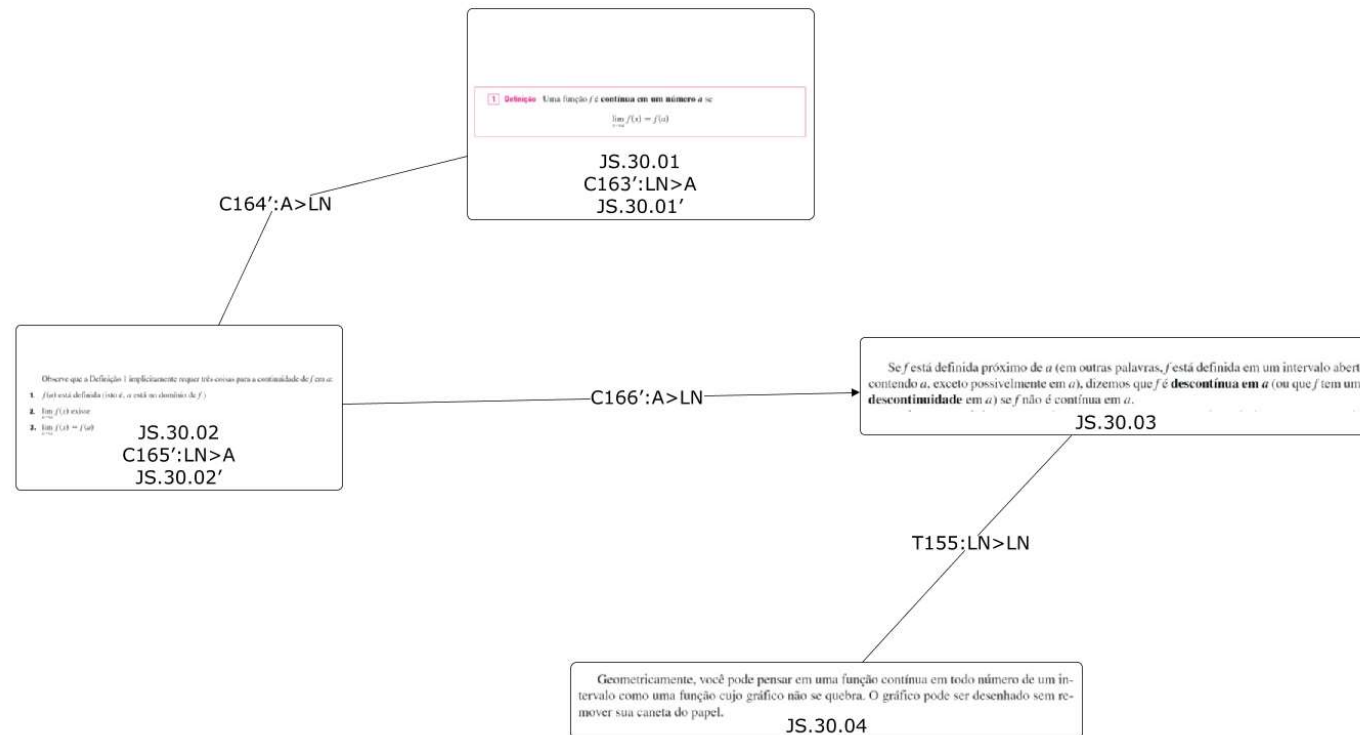
Fonte: Elaborado pelo autor.

Figura 172 - Esquema de conversões do exemplo 5 da seção 2.4 do livro do Stewart.



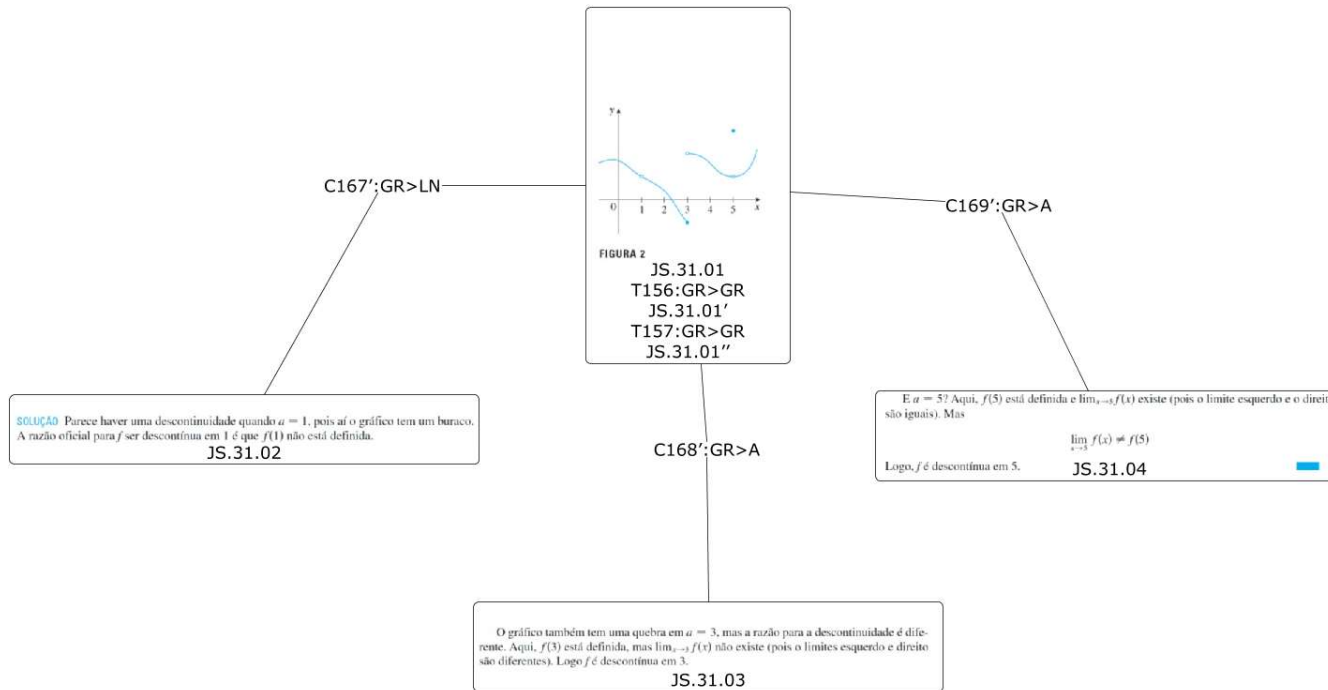
Fonte: Elaborado pelo autor.

Figura 173 - Esquema de conversões da introdução da seção 2.5 do livro do Stewart.



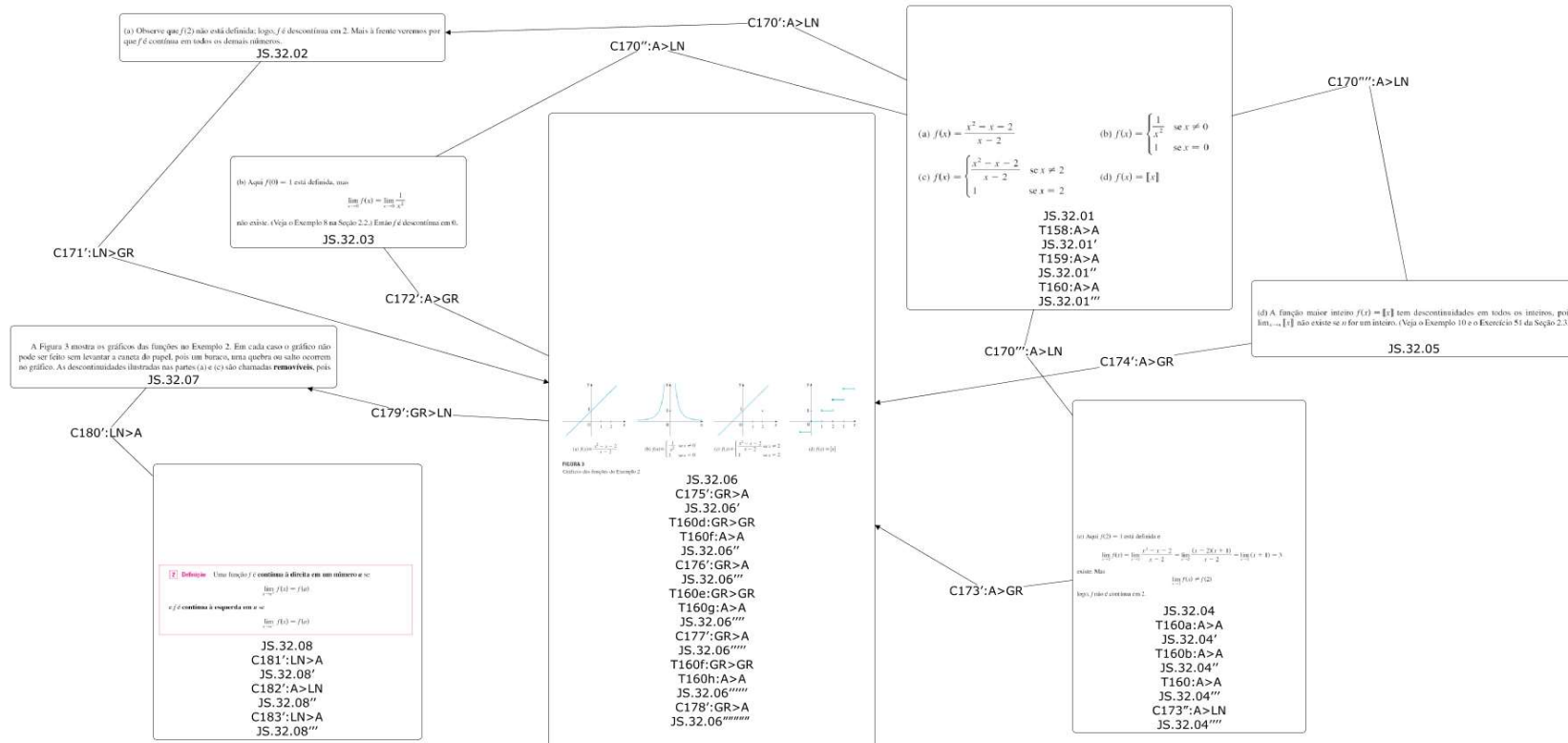
Fonte: Elaborado pelo autor.

Figura 174 - Esquema de conversões do exemplo 1 da seção 2.5 do livro do Stewart.



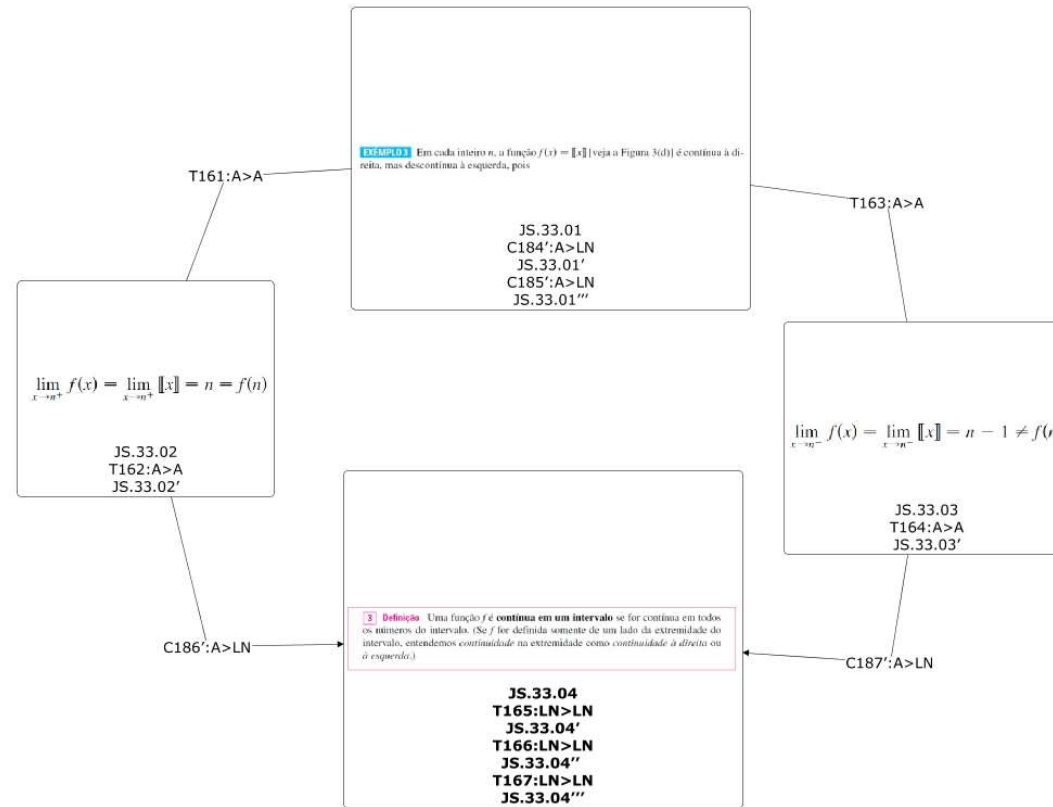
Fonte: Elaborado pelo autor.

Figura 175 - Esquema de conversões do exemplo 2 da seção 2.5 do livro do Stewart.



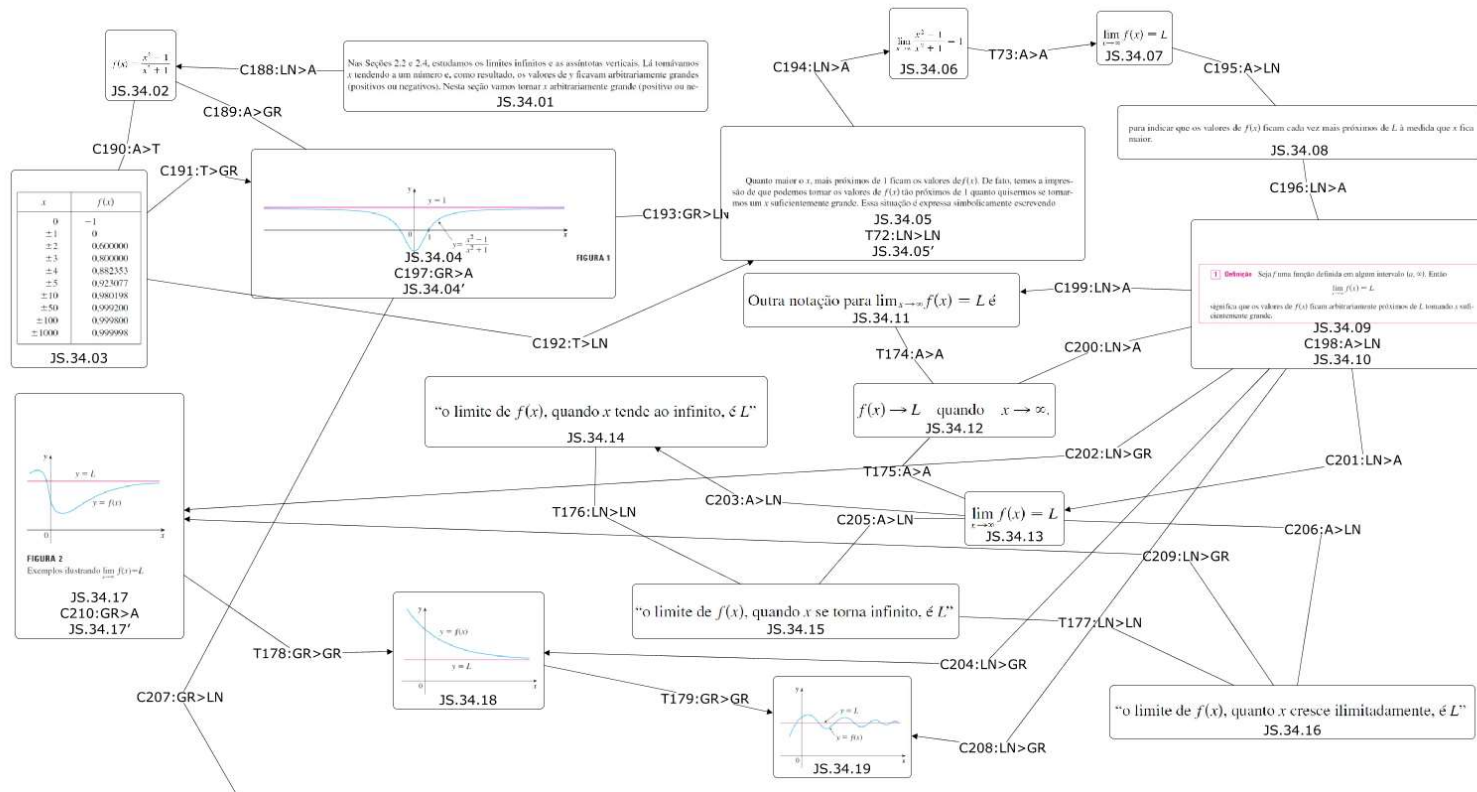
Fonte: Elaborado pelo autor.

Figura 176 - Esquema de conversões do exemplo 3 da seção 2.5 do livro do Stewart.



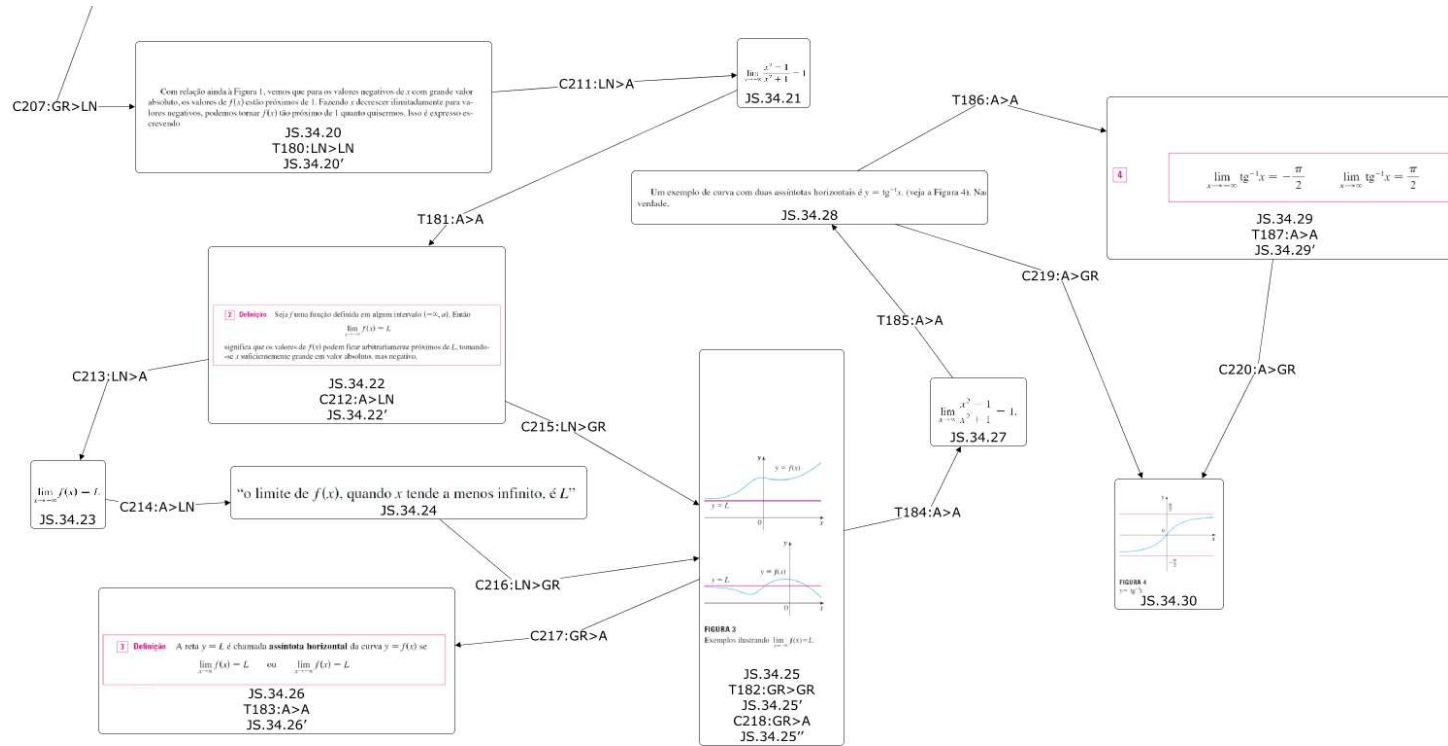
Fonte: Elaborado pelo autor.

Figura 177 - Esquema de conversões da primeira parte da introdução da seção 2.6 do livro do Stewart.



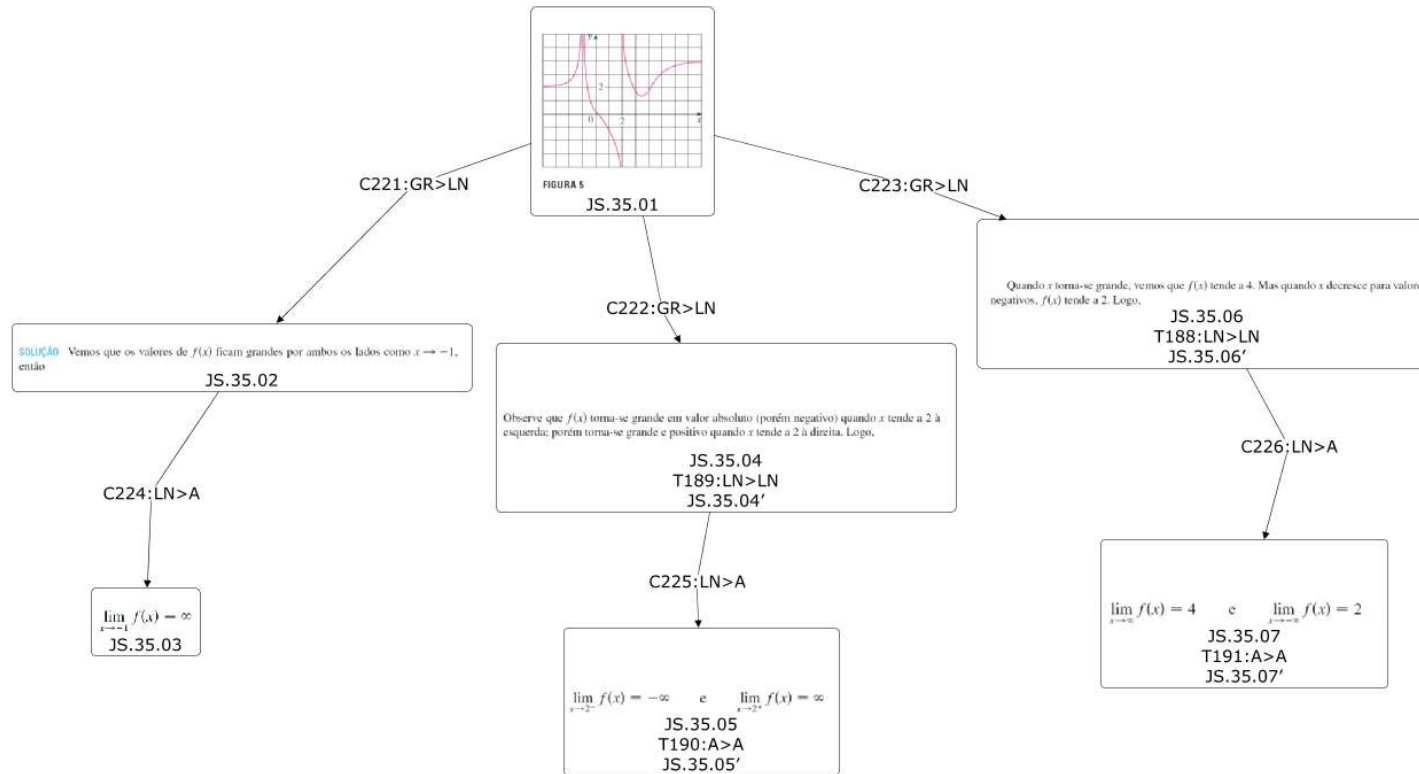
Fonte: Elaborado pelo autor.

Figura 178 - Esquema de conversões da segunda parte da introdução da seção 2.6 do livro do Stewart.



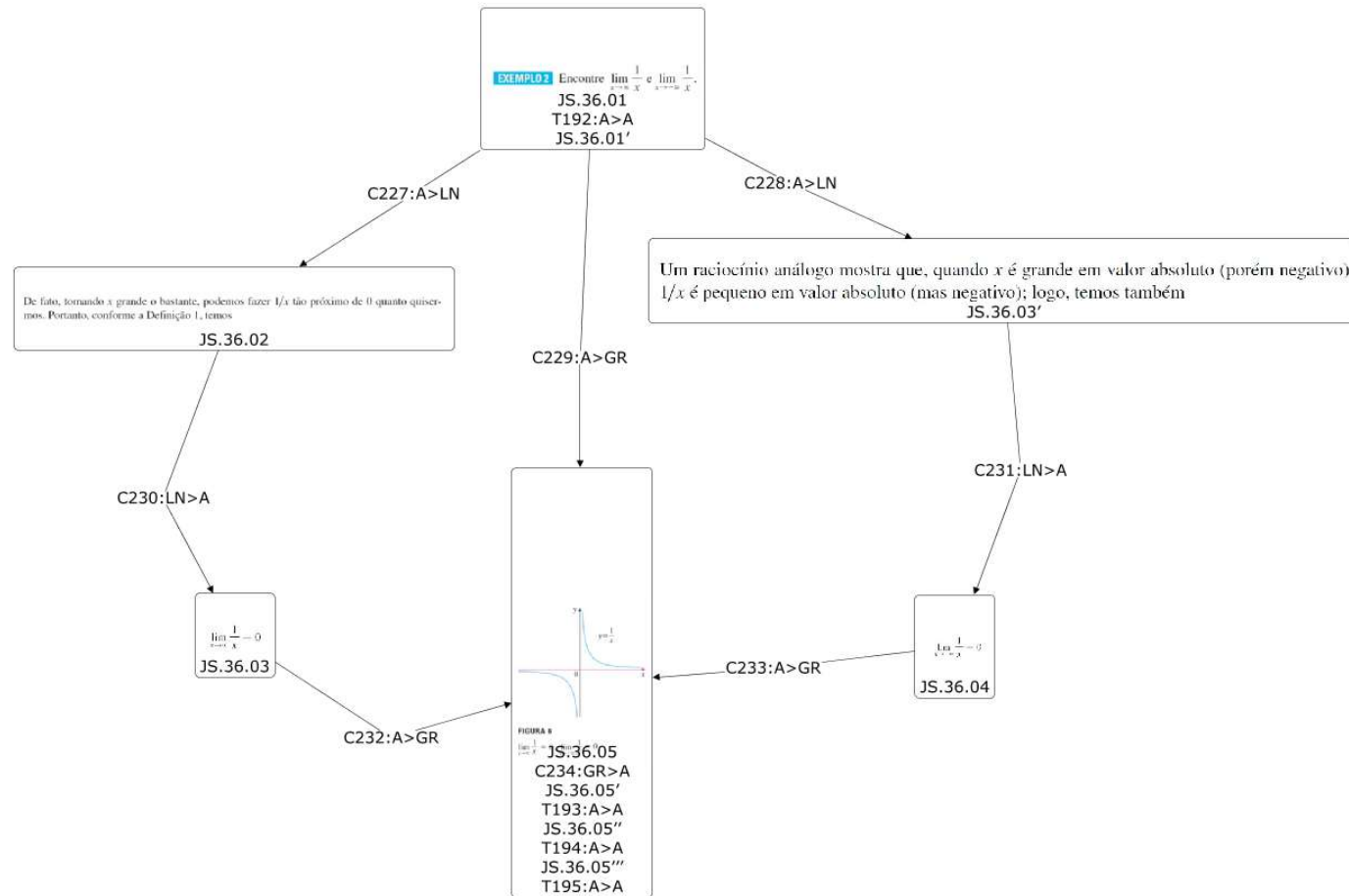
Fonte: Elaborado pelo autor.

Figura 179 - Esquema de conversões do exemplo 1 da seção 2.6 do livro do Stewart.



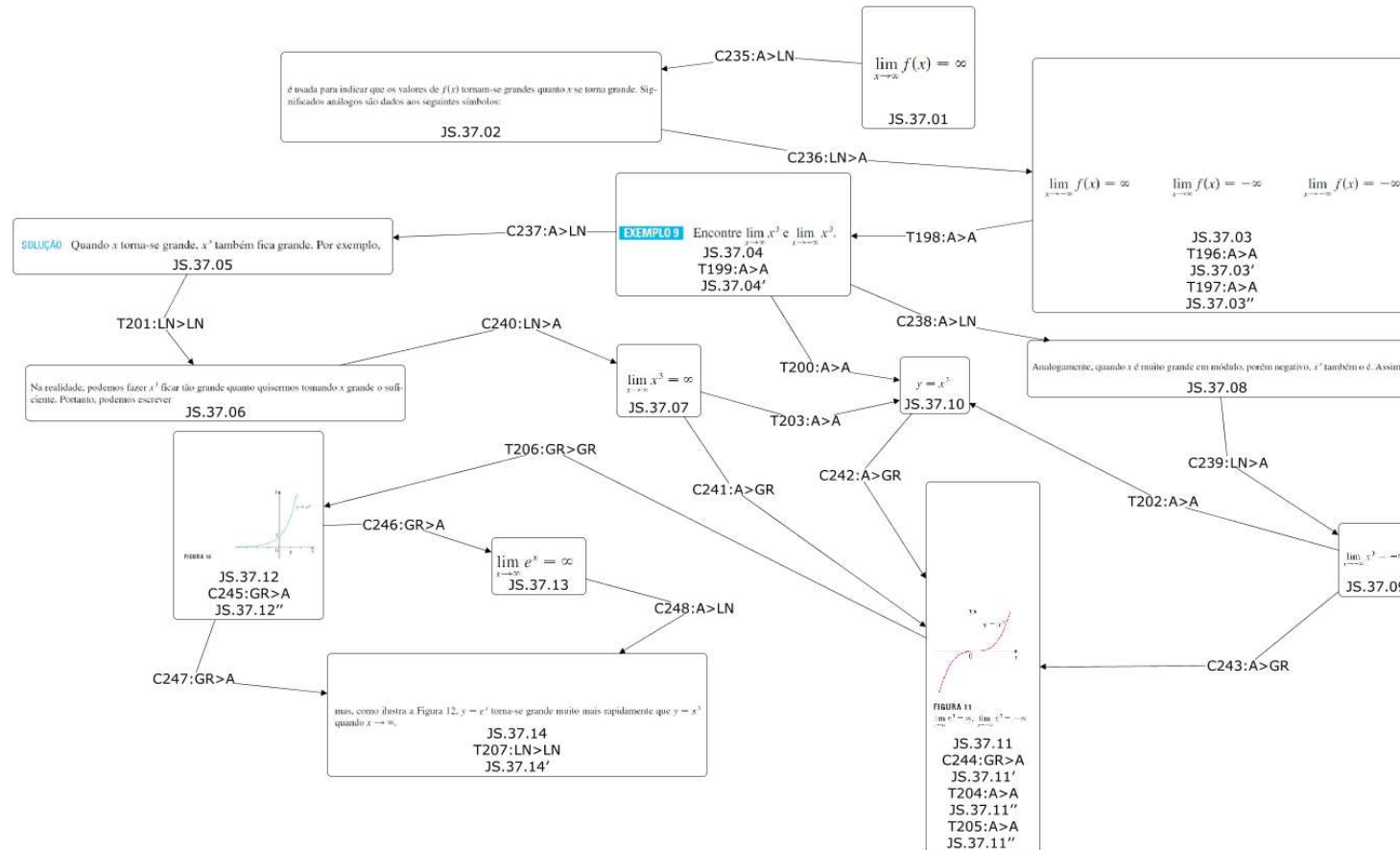
Fonte: Elaborado pelo autor.

Figura 180 - Esquema de conversões do exemplo 2 da seção 2.6 do livro do Stewart.



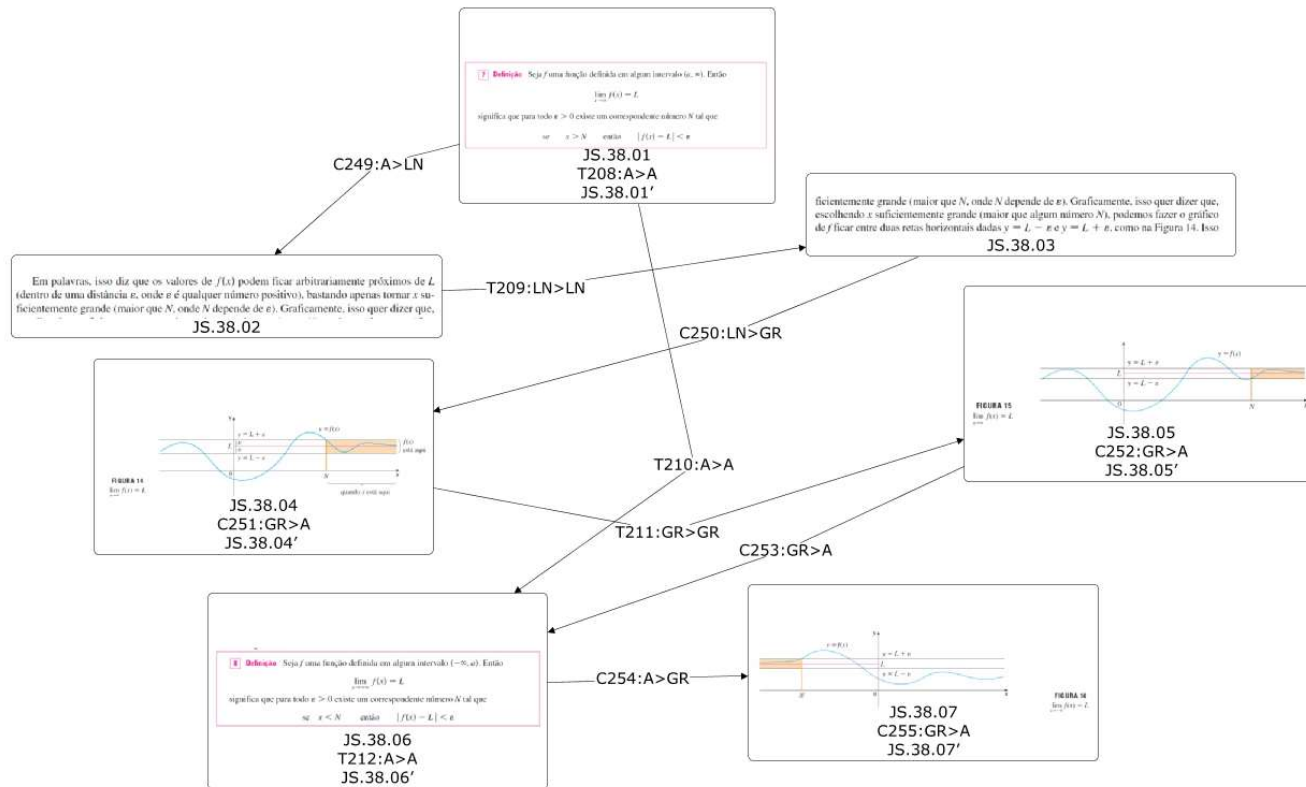
Fonte: Elaborado pelo autor.

Figura 181 - Esquema de conversões do exemplo 9 da seção 2.6 do livro do Stewart.



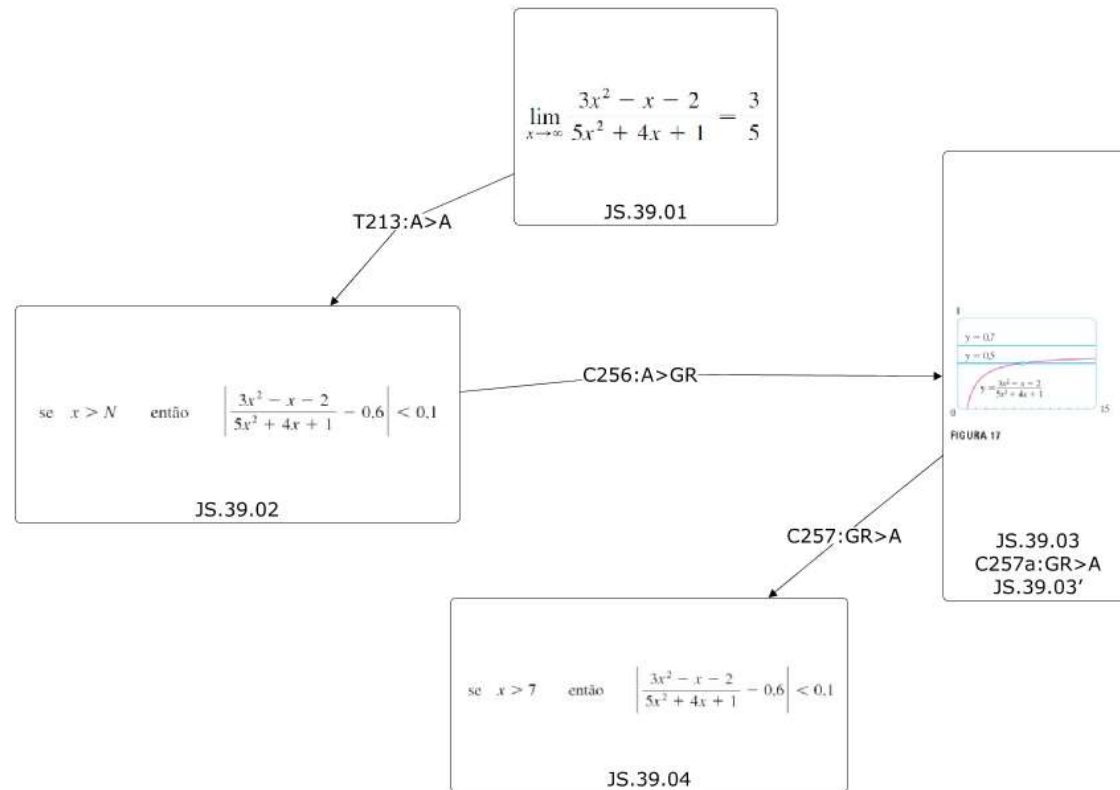
Fonte: Elaborado pelo autor.

Figura 182 - Esquema de conversões da subseção Definições precisas da seção 2.6 do livro do Stewart.



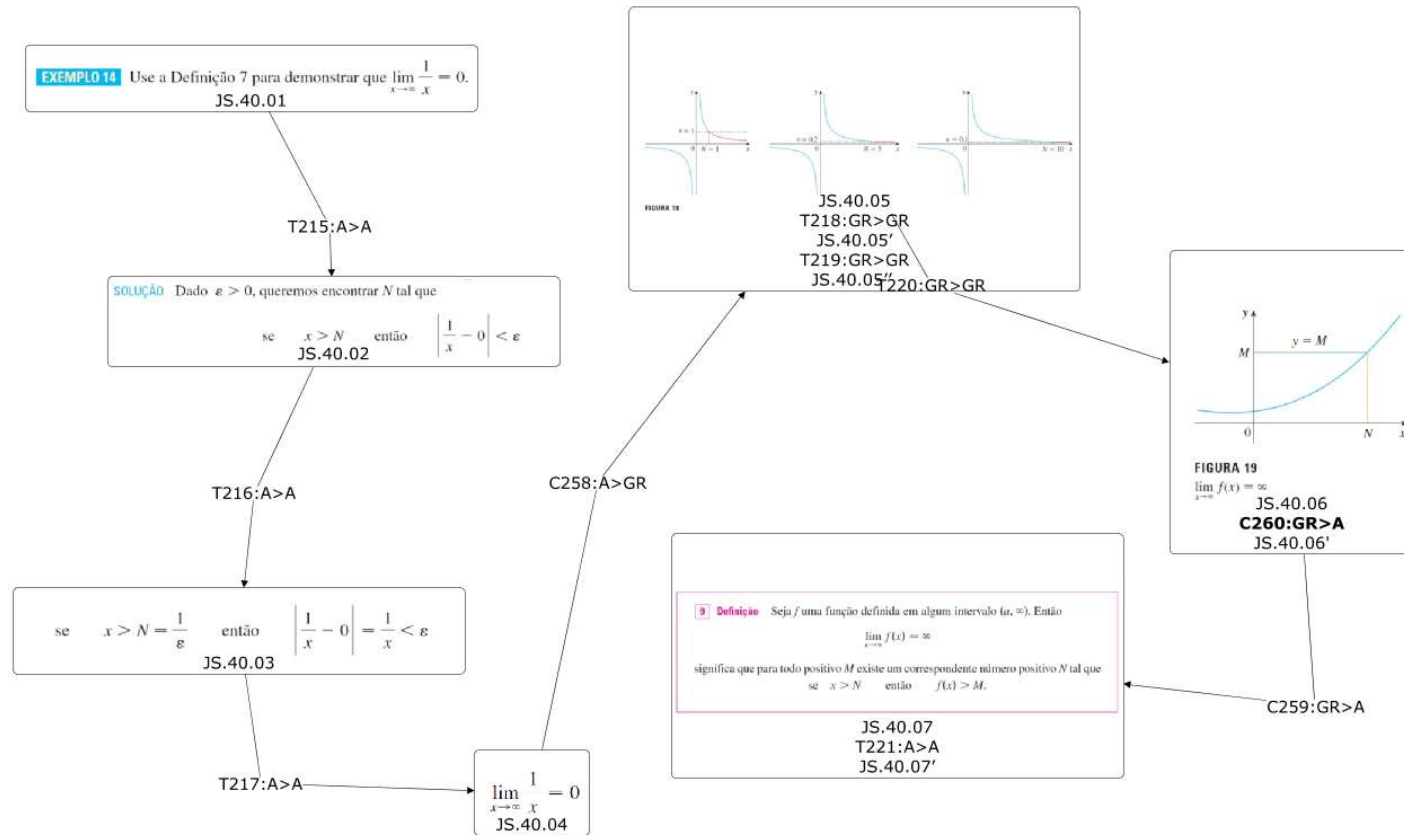
Fonte: Elaborado pelo autor.

Figura 183 - Esquema de conversões do exemplo 13 da seção 2.6 do livro do Stewart.



Fonte: Elaborado pelo autor.

Figura 184 - Esquema de conversões do exemplo 14 da seção 2.6 do livro do Stewart.



Fonte: Elaborado pelo autor.

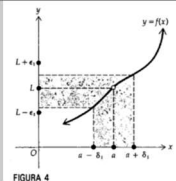
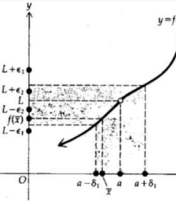
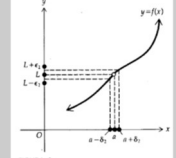
APÊNDICE 4: INVENTÁRIOS

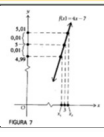
INVENTÁRIO DO TEXTO DO LEITHOLD

Quadro 18 - Inventário do texto do Leithold.

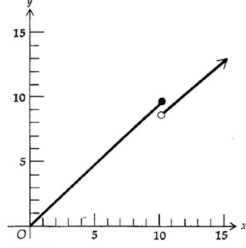
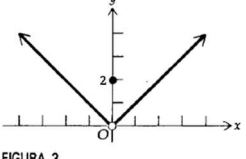
Conversões	Tratamento	Registros	Código	Representações																				
C11:A>T C12:A>T C30:A>GR	T1A T4A T12A T28A	A	LL.01.01	$f(x) = \frac{2x^2 + x - 3}{x - 1}$																				
C1:A>GR C2:A>GR	T1A	A	LL.01.02	$y = 2x^2 + x - 1$																				
C1:A>GR C3:GR>A C5:GR>LN	T2GR	GR	LL.01.03																					
C2:A>GR C4:GR>A C6:GR>LN	T2GR	GR	LL.01.04																					
C3:GR>A C4:GR>A	T3A	A	LL.01.05	$f(x) = \frac{(2x^2 + x - 1) - 2}{x - 1}$																				
	T3A T4A	A	LL.01.06	$f(x) = \frac{2x^2 + x - 3}{x - 1}$																				
C5:GR>LN C6:GR>LN		LN	LL.01.07	que é a Igualdade (1). Além disso, $x \neq 1$, pois P e Q são pontos distintos, medida que x fica cada vez mais próximo de 1, os valores de $f(x)$ tornam-se cada vez mais próximos do valor que iremos definir na Seção 3.1 como a inclinação da reta tangente à curva no ponto P .																				
C11:A>T C13:T>LN C15:T>N C23:T>N	T5T	T	LL.01.08	<table border="1"> <caption>Tabela 1</caption> <thead> <tr> <th>x</th> <th>$f(x) = \frac{2x^2 + x - 3}{x - 1}$</th> </tr> </thead> <tbody> <tr><td>0</td><td>3</td></tr> <tr><td>0,25</td><td>3,5</td></tr> <tr><td>0,5</td><td>4</td></tr> <tr><td>0,75</td><td>4,5</td></tr> <tr><td>0,9</td><td>4,8</td></tr> <tr><td>0,99</td><td>4,98</td></tr> <tr><td>0,999</td><td>4,998</td></tr> <tr><td>0,9999</td><td>4,9998</td></tr> <tr><td>0,99999</td><td>4,99998</td></tr> </tbody> </table>	x	$f(x) = \frac{2x^2 + x - 3}{x - 1}$	0	3	0,25	3,5	0,5	4	0,75	4,5	0,9	4,8	0,99	4,98	0,999	4,998	0,9999	4,9998	0,99999	4,99998
x	$f(x) = \frac{2x^2 + x - 3}{x - 1}$																							
0	3																							
0,25	3,5																							
0,5	4																							
0,75	4,5																							
0,9	4,8																							
0,99	4,98																							
0,999	4,998																							
0,9999	4,9998																							
0,99999	4,99998																							
C12:A>T C14:T>LN C16:T>N C22:T>N	T5T	T	LL.01.09	<table border="1"> <caption>Tabela 2</caption> <thead> <tr> <th>x</th> <th>$f(x) = \frac{2x^2 + x - 3}{x - 1}$</th> </tr> </thead> <tbody> <tr><td>2</td><td>7</td></tr> <tr><td>1,75</td><td>6,5</td></tr> <tr><td>1,5</td><td>6,0</td></tr> <tr><td>1,25</td><td>5,5</td></tr> <tr><td>1,1</td><td>5,2</td></tr> <tr><td>1,01</td><td>5,02</td></tr> <tr><td>1,001</td><td>5,002</td></tr> <tr><td>1,0001</td><td>5,0002</td></tr> <tr><td>1,00001</td><td>5,00002</td></tr> </tbody> </table>	x	$f(x) = \frac{2x^2 + x - 3}{x - 1}$	2	7	1,75	6,5	1,5	6,0	1,25	5,5	1,1	5,2	1,01	5,02	1,001	5,002	1,0001	5,0002	1,00001	5,00002
x	$f(x) = \frac{2x^2 + x - 3}{x - 1}$																							
2	7																							
1,75	6,5																							
1,5	6,0																							
1,25	5,5																							
1,1	5,2																							
1,01	5,02																							
1,001	5,002																							
1,0001	5,0002																							
1,00001	5,00002																							
C13:T>LN C14:T>LN C17:LN>N C18:LN>N		LN	LL.01.10	Observe, de ambas as tabelas, que à medida que x fica cada vez mais próximo de 1, $f(x)$ torna-se cada vez mais próximo de 5 e quanto mais próximo estiver de 1, mais próximo de 5 estará $f(x)$. Por exemplo, na Tabela 1,																				
C15:T>N C17:LN>N	T6N	N	LL.01.11	$x = 0,9$, $f(x) = 4,8$, isto é, quando x for 0,1 inferior a 1, $f(x)$ será 0,2 inferior a 5. Quando $x = 0,999$, $f(x) = 4,998$, isto é, quando x for 0,001 inferior a 1, $f(x)$ será 0,002 inferior a 5. Mais ainda, quando $x = 0,9999$, $f(x) = 4,9998$, isto é, quando x for 0,0001 inferior a 1, $f(x)$ será 0,0002 inferior a 5.																				
C16:T>N C18:LN>N	T7N	N	LL.01.12	A Tabela 2 mostra que quando $x = 1,1$, $f(x) = 5,2$, isto é, quando x for 0,1 superior a 1, $f(x)$ será 0,2 superior a 5. Quando $x = 1,001$, $f(x) = 5,002$, isto é, quando x for 0,001 superior a 1, $f(x)$ será 0,002 superior a 5. Quando $x = 1,0001$, $f(x) = 5,0002$, isto é, quando x for 0,0001 superior a 1, $f(x)$ será 0,0002 superior a 5.																				
C19:N>LN	T6N T7N	N	LL.01.13	Logo, vemos que quando x difere de 1 de $\pm 0,001$ (isto é, $x = 0,999$ ou $x = 1,001$), $f(x)$ difere de 5 de $\pm 0,002$, isto é, $f(x) = 4,998$ ou $f(x) = 5,002$. E quando x difere de 1 de $\pm 0,0001$, $f(x)$ difere de 5 de $\pm 0,0002$.																				
C19:N>LN	T8LN	LN	LL.01.14	Agora, analisando a situação de outra maneira, consideraremos os valores de $f(x)$ primeiro. Vemos que podemos tornar os valores de $f(x)$ tão próximos de 5 quanto desejarmos, tomando x suficientemente próximo de 1. Out																				

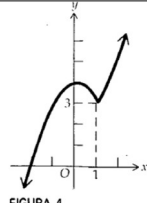
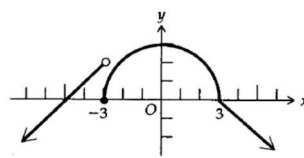
	T8LN T9LN	LN	LL.01.15	neira de dizer isto é que podemos tornar o valor absoluto da diferença $f(x)$ e 5 tão pequeno quanto desejarmos, tomando o valor absoluto da diferença entre x e 1 suficientemente pequeno. Isto é, $ f(x) - 5 $ pode se tornar tão pequeno quanto desejarmos, tomando $ x - 1 $ suficientemente pequeno.
	T9LN T10LN	LN	LL.01.16	Isto é, $ f(x) - 5 $ pode se tornar tão pequeno quanto desejarmos, tomando $ x - 1 $ suficientemente pequeno. tenha em mente que $f(x)$ nunca assume o valor 5.
	T10LN T11LN	LN	LL.01.17	grégas ϵ (epsilon) e δ (delta). Assim, enunciamos que para todo número positivo existe um número δ escolhido apropriadamente, tal que se $ x - 1 $ for menor do que δ e $ x - 1 \neq 0$ (isto é, $x \neq 1$), então $ f(x) - 5 $ será menor do que ϵ . É importante observar que o tamanho de δ depende do de ϵ .
C20:LN>A	T11LN	LN	LL.01.18	outra maneira de expressar isso é: dado um número ϵ positivo qualquer podemos tornar $ f(x) - 5 < \epsilon$ tomando $ x - 1 $ suficientemente pequeno.
C20:LN>A C8:A>N		A	LL.01.19	é, existe um número δ positivo suficientemente pequeno, tal que se $0 < x - 1 < \delta$ então $ f(x) - 5 < \epsilon$
	T12A T13A	A	LL.01.20	Observe que o numerador da fração em (1) pode ser fatorado de forma que $f(x) = \frac{(2x + 3)(x - 1)}{x - 1}$
C21:A>N C28:A>LN C7:A>GR	T13A	A	LL.01.21	Se $x \neq 1$, podemos dividir o numerador e o denominador por $x - 1$ para obter a fórmula (2), com a simplificação de $x - 1$ no denominador: $f(x) = 2x + 3 \quad x \neq 1$
C21:A>N C22:T>N C23:T>N C24:N>LN C8:A>N		N	LL.01.22	uma definição de $f(x)$. De (3) e das duas tabelas, note que se $ x - 1 < 0,2$ então $ f(x) - 5 < 0,2$. Assim, dado $\epsilon = 0,2$, tomamos $\delta = 0,1$ e afirmamos que se $0 < x - 1 < 0,1$ então $ f(x) - 5 < 0,2$. Essa é a afirmativa (2), com $\epsilon = 0,2$ e $\delta = 0,1$. Também, se $ x - 1 < 0,001$, então $ f(x) - 5 < 0,002$. Logo, se $\epsilon = 0,002$, tomamos $\delta = 0,001$ e afirmamos que se $0 < x - 1 < 0,001$ então $ f(x) - 5 < 0,002$. Essa é a afirmativa (2), com $\epsilon = 0,002$ e $\delta = 0,001$. Da mesma forma, se $\epsilon = 0,0002$, tomamos $\delta = 0,0001$ e afirmamos que se $0 < x - 1 < 0,0001$ então $ f(x) - 5 < 0,0002$. Essa é a afirmativa (2), com $\epsilon = 0,0002$ e $\delta = 0,0001$.
C24:N>LN C25:LN>A		LN	LL.01.23	trair um valor adequado para δ , de tal forma que se $ x - 1 $ for menor do que δ e $x \neq 1$ (ou $ x - 1 > 0$), então $ f(x) - 5 $ será menor do que ϵ .
C25:LN>A C26:A>LN		A	LL.01.24	como para todo $\epsilon > 0$ podemos encontrar um $\delta > 0$, tal que se $0 < x - 1 < \delta$ então $ f(x) - 5 < \epsilon$, afirmamos que o limite de $f(x)$ quando x tende para 1 é 5.
C26:A>LN C27:LN>A		LN	LL.01.25	então $ f(x) - 5 < \epsilon$, afirmamos que o limite de $f(x)$ quando x tende para 1 é 5, ou, em símbolos $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 5$
C27:LN>A		A	LL.01.26	$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 5$
C28:A>LN C29:LN>A		LN	LL.01.27	De (3) é evidente que $f(x)$ pode se tornar tão próximo de 5 quanto desejarmos, tomando x suficientemente próximo de 1 e essa propriedade da função $f(x)$ é o que chamamos de limite de $f(x)$ quando x tende para 1.
C29:LN>A		A	LL.01.28	isto é, $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 5$, mas $f(1)$ não está definido.
C30:A>GR C31:GR>LN C34:GR>LN C7:A>GR C9:A>T		GR	LL.01.29	
C31:GR>LN C32:LN>A		LN	LL.01.30	em (1) ou (3). A Figura 3 ilustra o significado geométrico de ϵ e δ . Observe que se x (no eixo horizontal) estiver entre $1 - \delta$ e $1 + \delta$, então $f(x)$ (no eixo vertical) estará entre $5 - \epsilon$ e $5 + \epsilon$, ou

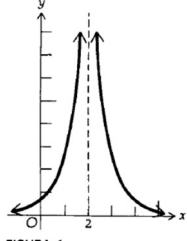
C32:LN>A C33:A>LN		A	LL.01.31	se $0 < x - 1 < \delta$ então $ f(x) - 5 < \epsilon$
C33:A>LN C34:GR>LN C35:LN>A		LN	LL.01.32	Outra maneira de estabelecer isso é que $f(x)$ (no eixo vertical) pode se ta a ficar entre $5 - \epsilon$ e $5 + \epsilon$, se restringirmos x (no eixo horizontal) entre $1 - \delta$ e $1 + \delta$.
C35:LN>A	T14A	A	LL.01.33	afirmamos que $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 5$, p
	T14A T15A	A	LL.01.34	Resumindo esse exemplo, afirmamos que $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 5$, pois para q $\epsilon > 0$, não importa o quão pequeno ele seja, existe um $\delta > 0$, tal q se $0 < x - 1 < \delta$ então $ f(x) - 5 < \epsilon$
C36:A>LN C37:A>GR	T15A T29A T31A T30A T36A T38A T38A T39A T65A T75A' T118A T119A	A A	LL.01.35 LL.01.35'	<p>2.1.1 DEFINIÇÃO Seja f uma função definida para todo número em algum intervalo aberto tendo a, exceto possivelmente no próprio número a. O limite de $f(x)$ q x tende a a será L, escrito como</p> $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$ <p>se a seguinte afirmativa for verdadeira: Dado $\epsilon > 0$ qualquer, existe um $\delta > 0$, tal que se $0 < x - a < \delta$ então $f(x) - L < \epsilon$</p>
C36:A>LN		LN	LL.01.36	Em palavras, a Definição 2.1.1 afirma que os valores da função $f(x)$ t a um limite L quando x tende a um número a , se o valor absoluto da di entre $f(x)$ e L puder se tornar tão pequeno quanto desejarmos, tomando cientemente próximo de a , mas não igual a a .
C37:A>GR C38:GR>LN	T17GR	GR	LL.01.37	 <p>FIGURA 4</p>
C38:GR>LN	T16LN	LN	LL.01.38	ponto com abscissa a . Observe que se x (no eixo horizontal) estive $a - \delta_1$ e $a + \delta_1$, então $f(x)$ (no eixo vertical) estará entre $L - \epsilon_1$ e $L + \epsilon_1$.
C39:LN>A	T16LN	LN	LL.01.39	Expressando de outra maneira: se x (no eixo horizontal) for restringida entre $a - \delta_1$ e $a + \delta_1$, então $f(x)$ (no eixo vertical) poderá ser restringi car entre $L - \epsilon_1$ e $L + \epsilon_1$. Assim,
C39:LN>A		A	LL.01.40	se $0 < x - a < \delta_1$ então $ f(x) - L < \epsilon_1$
C40:GR>A	T17GR T18GR	GR	LL.01.41	 <p>FIGURA 5</p>
C40:GR>A C41:GR>A	T19A	A	LL.01.42	Assim, precisamos escolher um valor menor δ_2 , mostrado na Figura 6, se $0 < x - a < \delta_2$ então $ f(x) - L < \epsilon_2$
C41:GR>A	T18GR	GR	LL.01.43	 <p>FIGURA 6</p>
	T19A T29A	A	LL.01.44	Logo, $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$.
C44:A>GR	T20A T21A T23A	A	LL.02.01	$f(x) = 4x - 7$

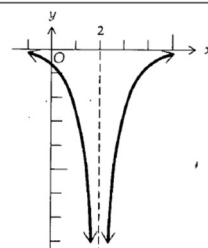
C43:A>GR	T20A T22A	A	LL.02.02	$\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = 5$
C45:A>GR C47:A>N C9:A>T	T21A T22A T24A	A	LL.02.03	(a) Usando uma figura similar à Figura 3, para $\epsilon = 0,01$, determine um tal que se $0 < x - 3 < \delta$ então $ f(x) - 5 < 0,01$
C43:A>GR C44:A>GR C45:A>GR C46:GR>N		GR	LL.02.04	
C46:GR>N C47:A>N		N	LL.02.05	se $0 < x - 3 < 0,0025$ então $ f(x) - 5 < 0,01$
	T23A T25A	A	LL.02.06	(b) Como $f(x) = 4x - 7$,
	T24A T25A T26A	A	LL.02.07	se $0 < x - 3 < \delta$ então $ f(x) - 5 < \epsilon$
	T26A T27A	A	LL.02.08	se $0 < x - 3 < \delta$ então $4 x - 3 < \epsilon$
C48:A>N	T27A	A	LL.02.09	se $0 < x - 3 < \delta$ então $ x - 3 < 0,0025$
C48:A>N C49:N>A		A	LL.02.10	se $0 < x - 3 < 0,0025$ então $ f(x) - 5 < 0,01$
C49:N>A		A	LL.02.11	se $0 < x - 3 < \gamma$ então $ f(x) - 5 < 0,01$
	T28A	A	LL.02.12	A solução do Exemplo 1 consistiu em encontrar um δ para um ϵ fixo para todo $\epsilon > 0$ pudermos encontrar um $\delta > 0$, tal que se $0 < x - 3 < \delta$ então $ f(x) - 5 < \epsilon$ teremos estabelecido que o limite é 5. Isso será feito no exemplo a seguir
	T30A	A	LL.03.01	$\lim_{x \rightarrow 3} (4x - 7) = 5$
	T31A T32A	A	LL.03.02	ra que para todo $\epsilon > 0$ existe um $\delta > 0$, tal que se $0 < x - 3 < \delta$ então $ (4x - 7) - 5 < \epsilon$
	T32A T33A	A	LL.03.03	se $0 < x - 3 < \delta$ então $4 x - 3 < \epsilon$
	T33A T34A	A	LL.03.04	se $0 < x - 3 < \delta$ então $ x - 3 < \frac{1}{4}\epsilon$
	T34A	A	LL.03.05	que $\lim_{x \rightarrow 3} (4x - 7) = 5$.
C51:A>GR	T35A	A	LL.04.01	$f(x) = x^2$
C50:A>GR	T35A T37A	A	LL.04.02	$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 4$
C52:A>GR C53:A>N	T37A T65A	A	LL.04.03	Usando uma figura para $\epsilon = 0,001$, determine $\delta > 0$, tal que se $0 < x - 2 < \delta$ então $ f(x) - 4 < 0,001$

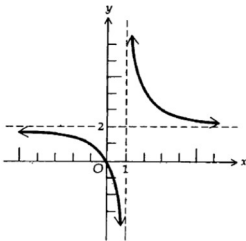
C50:A>GR C51:A>GR C52:A>GR C54:GR>N		Gr	LL.04.04	
C53:A>N C54:GR>N		A	LL.04.05	se $0 < x - 2 < 0,0002$ então $ f(x) - 4 < 0,001$
	T36A	A	LL.05.01	$\lim_{x \rightarrow 2} x^2 = 4$
	T39A T40A	A	LL.05.02	precisamos mostrar que para todo $\epsilon > 0$, existe um $\delta > 0$, tal que se $0 < x - 2 < \delta$ então $ x^2 - 4 < \epsilon$
	T40A T41A	A	LL.05.03	\Leftrightarrow se $0 < x - 2 < \delta$ então $ x - 2 x + 2 < \epsilon$
	T41A T42A	A	LL.05.04	afirmativa é verdadeira: se $0 < x - 2 < \delta$ então $ x^2 - 4 < \epsilon$
	T42A	A	LL.05.05	Isso prova que $\lim_{x \rightarrow 2} x^2 = 4$.
C55:A>LN		A	LL.06.01	$f(x) = \sqrt{x - 4}$.
C55:A>LN C57:LN>A C58:LN>A		LN	LL.06.03	4, o valor de $\sqrt{x - 4}$ poderá se tornar tão próximo de zero quanto desejarmos, tomando x suficientemente próximo de 4, mas maior do que 4. Em termos
C57:LN>A	T43A T43A T44A T46A T47A T50A T67A T68A T61A T64A	A A	LL.06.02 LL.06.04	2.3.1 DEFINIÇÃO Seja f uma função que está definida em todos os números de algum intervalo aberto (a, c) . Então, o limite de $f(x)$ quando x tende a a pela direita é L , e escrevemos $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = L$ se, para todo $\epsilon > 0$, existir um $\delta > 0$ tal que se $0 < x - a < \delta$ então $ f(x) - L < \epsilon$
C58:LN>A	T44A T45A	A	LL.06.05	$\lim_{x \rightarrow 4^+} \sqrt{x - 4} = 0$
	T45A T45A' T46A T66A T51A T52A T69A T62A T63A	A A	LL.06.06 LL.06.06'	2.3.2 DEFINIÇÃO Seja f uma função definida em todos os números de algum intervalo aberto (d, a) . Então, o limite de $f(x)$ quando x tende a a pela esquerda é L , e escrevemos $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = L$ se, para todo $\epsilon > 0$, existir um $\delta > 0$ tal que se $0 < a - x < \delta$ então $ f(x) - L < \epsilon$
C59:A>GR		A	LL.07.01	$\text{sgn } x = \begin{cases} -1 & \text{se } x < 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \\ 1 & \text{se } 0 < x \end{cases}$
C59:A>GR C60:GR>A C61:GR>A		GR	LL.07.02	
C60:GR>A C61:GR>A	T66A T66A' T66A'	A A	LL.07.03 LL.07.03'	$\lim_{x \rightarrow 0^-} \text{sgn } x = \lim_{x \rightarrow 0^-} (-1) = -1$
	T47A T47A' T47A'	A A	LL.07.04 LL.07.04'	$\lim_{x \rightarrow 0^+} \text{sgn } x = \lim_{x \rightarrow 0^+} 1 = 1$

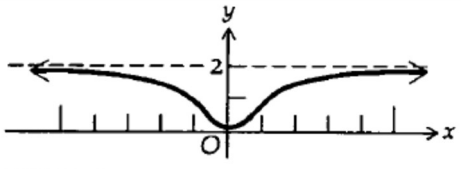
C62:LN>A		LN	LL.08.01	<p>► ILUSTRAÇÃO 1 Um atacadista vende um produto por quilo (ou fração de quilo); se forem pedidos não mais de 10 quilos, o atacadista cobrará o preço de \$1 por quilo. No entanto, para incentivar pedidos maiores, ele cobra \$ 0,90 por quilo se mais do que 10 quilos forem comprados. Assim, se x quilos do produto forem comprados, $C(x)$ é a função custo total do pedido, dada por</p>
C62:LN>A C63:A>GR		A	LL.08.02	$C(x) = \begin{cases} x & \text{se } 0 \leq x \leq 10 \\ 0,9x & \text{se } 10 < x \end{cases}$
C64:GR>LN C65:LN>A C66:LN>A		A	LL.08.03	<p>Um esboço do gráfico de C está na Figura 2. Observe que $C(x)$ foi obtida pela igualdade $C(x) = x$ quando $0 \leq x \leq 10$ e da igualdade $C(x) = 0,9x$ quando $10 < x$. Devido a essa situação, ao considerar o limite de $C(x)$ para x tendendo a 10, temos</p>
C63:A>GR C64:GR>LN C67:GR>A C68:GR>A		GR	LL.08.04	 <p style="text-align: center;">FIGURA 2</p>
C65:LN>A C67:GR>A	T48A T51A T51A' T51A'	A A	LL.08.05 LL.08.05'	$\lim_{x \rightarrow 10^-} C(x) = \lim_{x \rightarrow 10^-} x = 10$
C66:LN>A C68:GR>A	T49A T50A T50A' T50A'	A A	LL.08.06 LL.08.06'	$\lim_{x \rightarrow 10^+} C(x) = \lim_{x \rightarrow 10^+} 0,9x = 9$
	T48A T49A	LN	LL.08.07	<p>Como $\lim_{x \rightarrow 10^-} C(x) \neq \lim_{x \rightarrow 10^+} C(x)$, concluímos pelo Teorema 2.3.3 que $\lim_{x \rightarrow 10} C(x)$ não existe. Observe na Figura 2 que em $x = 10$ há uma quebra no gráfico.</p>
C69:A>GR	T61A' T62A'	A	LL.09.01	$g(x) = \begin{cases} x & \text{se } x \neq 0 \\ 2 & \text{se } x = 0 \end{cases}$
C69:A>GR C70:GR>A C71:GR>A		GR	LL.09.02	 <p style="text-align: center;">FIGURA 3</p>
C70:GR>A	T53A T53A' T53A' T52A T61A'	A A	LL.09.03 LL.09.03'	<p>(b) $\lim_{x \rightarrow 0^-} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} (-x) = 0$</p>
C71:GR>A	T54A T54A' T54A' T62A' T67A	A A	LL.09.04 LL.09.04'	$\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} x = 0$
	T53A T54A	LN	LL.09.05	<p>Como $\lim_{x \rightarrow 0^-} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} g(x)$, segue do Teorema 2.3.3 que $\lim_{x \rightarrow 0} g(x)$ existe e é igual a zero.</p>
C72:A>GR	T68A' T69A'	A	LL.10.01	$h(x) = \begin{cases} 4 - x^2 & \text{se } x \leq 1 \\ 2 + x^2 & \text{se } 1 < x \end{cases}$

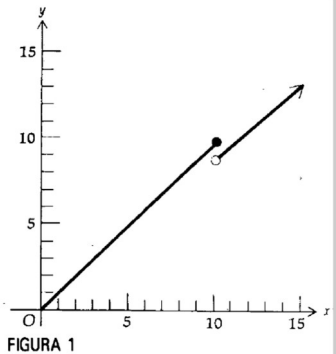
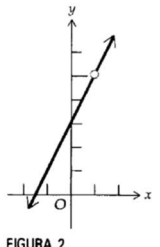
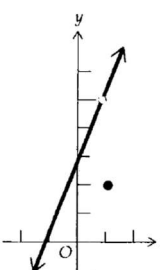
C72:A>GR C73:GR>A C74:GR>A		GR	LL.10.02	 <p>FIGURA 4</p>
C73:GR>A C74:GR>A	T55A T55A' T55A' T68A' T69A	A A	LL.10.03 LL.10.03'	$(b) \lim_{x \rightarrow 1^-} h(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} (4 - x^2)$ $= 3$
	T56A T56A' T56A' T68A' T69A	A A	LL.10.04 LL.10.04'	$\lim_{x \rightarrow 1^+} h(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} (2 + x^2)$ $= 3$
	T55A T56A	A	LL.10.05	$\text{que } \lim_{x \rightarrow 1} h(x) = 3.$
C75:A>GR	T57A' T58A' T59A' T60A'	A	LL.11.01	$f(x) = \begin{cases} x + 5 & \text{se } x < -3 \\ \sqrt{9 - x^2} & \text{se } -3 \leq x \leq 3 \\ 3 - x & \text{se } 3 < x \end{cases}$
C75:A>GR C76:GR>A C77:GR>A C78:GR>A C79:GR>A		GR	LL.11.02	 <p>FIGURA 5</p>
C76:GR>A	T59A T59A' T62A T63A' T63A'	A A	LL.11.03 LL.11.03'	$(b) \lim_{x \rightarrow -3^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -3^-} (x + 5)$ $= 2$
C77:GR>A	T60A T60A' T61A T64A' T64A'	A A	LL.11.04 LL.11.04'	$\lim_{x \rightarrow -3^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -3^+} \sqrt{9 - x^2}$ $= 0$
	T59A T60A	LN	LL.11.05	$\lim_{x \rightarrow -3} f(x) \text{ não existe.}$
C78:GR>A	T49A' T49A' T58A T58A' T63A	A A	LL.11.06 LL.11.06'	$\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3^-} \sqrt{9 - x^2}$ $= 0$
C79:GR>A	T48A' T48A' T57A T57A' T64A	A A	LL.11.07 LL.11.07'	$\lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3^+} (3 - x)$ $= 0$
	T57A T58A	LN	LL.11.08	$\lim_{x \rightarrow 3} f(x) \text{ não existe.}$
C80:LN>A C96:LN>A		LN	LL.12.01	<p>Nesta secção discutiremos funções cujos valores aumentam ou diminuem limitação, quando a variável independente aproxima-se cada vez mais número fixo. Primeiro consideraremos a função definida por</p>
C80:LN>A C81:A>T C84:A>T	T77A	A	LL.12.02	$f(x) = \frac{3}{(x - 2)^2}$

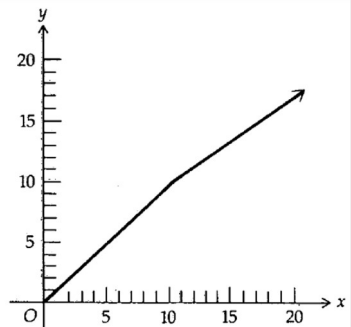
C81:A>T C82:T>LN C90:T>GR	T73T	T	LL.12.03	<p>Tabela 1</p> <table border="1"> <thead> <tr> <th>x</th> <th>$f(x) = \frac{3}{(x-2)^2}$</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>3</td> <td>3</td> </tr> <tr> <td>2,5</td> <td>12</td> </tr> <tr> <td>2,25</td> <td>48</td> </tr> <tr> <td>2,1</td> <td>300</td> </tr> <tr> <td>2,01</td> <td>30.000</td> </tr> <tr> <td>2,001</td> <td>3.000.000</td> </tr> </tbody> </table>	x	$f(x) = \frac{3}{(x-2)^2}$	3	3	2,5	12	2,25	48	2,1	300	2,01	30.000	2,001	3.000.000
x	$f(x) = \frac{3}{(x-2)^2}$																	
3	3																	
2,5	12																	
2,25	48																	
2,1	300																	
2,01	30.000																	
2,001	3.000.000																	
C82:T>LN	T70LN	LN	LL.12.04	la você vê intuitivamente que à medida que x se aproxima de 2 por valores do que 2, $f(x)$ cresce indefinidamente. Em outras palavras, podemos tornar														
	T70LN T71LN	LN	LL.12.05	do que 2, $f(x)$ cresce indefinidamente. Em outras palavras, podemos tornar maior do que qualquer número positivo prefixado (isto é, $f(x)$ pode ser tão grande quanto desejarmos) para todos os valores de x suficientemente próximos de 2 e x maior do que 2.														
C83:LN>A	T71LN	LN	LL.12.06	Para indicar que $f(x)$ cresce indefinidamente quando x tende a 2 por valores maiores do que 2, escrevemos														
C83:LN>A C88:A>LN		A	LL.12.07	$\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{3}{(x-2)^2} = +\infty$														
C84:A>T C85:T>LN C91:T>GR	T73T	T	LL.12.08	<p>Tabela 2</p> <table border="1"> <thead> <tr> <th>x</th> <th>$f(x) = \frac{3}{(x-2)^2}$</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>1</td> <td>3</td> </tr> <tr> <td>1,5</td> <td>12</td> </tr> <tr> <td>1,75</td> <td>48</td> </tr> <tr> <td>1,9</td> <td>300</td> </tr> <tr> <td>1,99</td> <td>30.000</td> </tr> <tr> <td>1,999</td> <td>3.000.000</td> </tr> </tbody> </table>	x	$f(x) = \frac{3}{(x-2)^2}$	1	3	1,5	12	1,75	48	1,9	300	1,99	30.000	1,999	3.000.000
x	$f(x) = \frac{3}{(x-2)^2}$																	
1	3																	
1,5	12																	
1,75	48																	
1,9	300																	
1,99	30.000																	
1,999	3.000.000																	
C85:T>LN C86:LN>A		LN	LL.12.09	intuitivamente, dessa tabela, que à medida que x aproxima-se de 2 por valores menores do que 2, $f(x)$ cresce sem limites e escrevemos														
C86:LN>A C87:A>LN		A	LL.12.10	$\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{3}{(x-2)^2} = +\infty$														
C87:A>LN C88:A>LN C89:LN>A		LN	LL.12.11	Assim sendo, quando x tende a 2 pela direita ou pela esquerda, $f(x)$ cresce indefinidamente e escrevemos														
C89:LN>A C106:A>GR	T75A	A	LL.12.12	$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{3}{(x-2)^2} = +\infty$														
C90:T>GR C91:T>GR C92:GR>LN C106:A>GR	T84GR	GR	LL.12.13	 <p>FIGURA 1</p>														
C92:GR>LN C93:LN>A		LN	LL.12.14	f mostrado na Figura 1. Observe que ambos os “ramos” da curva aproximam-se da reta pontilhada $x = 2$, quando x cresce indefinidamente. Essa reta														
C93:LN>A C92:LN>A' C92:LN>A' C94:A>LN	T74A T74A' T74A' T75A T79A'	A A	LL.12.15 LL.12.15'	<p>2.4.1 DEFINIÇÃO Seja f uma função definida em todo número de um intervalo aberto I contendo a, exceto possivelmente no próprio a. Quando x tende a a, $f(x)$ cresce indefinidamente e escrevemos</p> $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty$ <p>se para qualquer número $N > 0$, existir um $\delta > 0$ tal que</p> $\text{se } 0 < x - a < \delta \text{ então } f(x) > N$														
C94:A>LN		LN	LL.12.16	Outra maneira de dar a Definição 2.4.1 é a seguinte: “Os valores de $f(x)$ crescem indefinidamente quando x tende a um número a , se $f(x)$ se tornar tão grande quanto desejarmos (isto é, maior do que qualquer número positivo N) para todos os valores de x suficientemente próximos de a , não iguais a a .”														

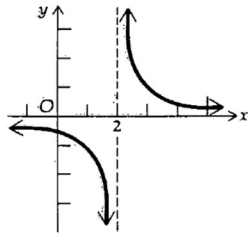
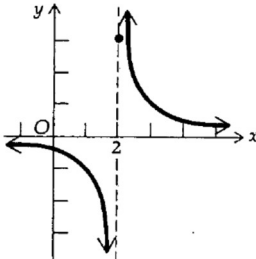
C95:A>LN	T74A T74A'	A	LL.12.17	Devemos enfatizar novamente que $+\infty$ não é o símbolo de um número logo, ao escrevermos $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty$, isto não tem o mesmo significado de $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$, onde L é um número real. A igualdade (1) pode ser lida
	T74A' T75A'	A	LL.12.18	Devemos enfatizar novamente que $+\infty$ não é o símbolo de um número logo, ao escrevermos $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty$, isto não tem o mesmo significado de $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$, onde L é um número real. A igualdade (1) pode ser lida
C95:A>LN	T79A'	LN	LL.12.19	“o limite de $f(x)$ quando x tende a a é infinito positivo”
C96:LN>A C97:A>GR	T75A	A	LL.12.20	$g(x) = \frac{-3}{(x-2)^2}$
C97:A>GR C98:GR>LN	T83GR	GR	LL.12.21	 FIGURA 2
C56:A>LN	T75A T76A	A	LL.12.22	Os valores funcionais dados por $g(x) = -3/(x-2)^2$ são os negativos dos valores dados por $f(x) = 3/(x-2)^2$. Assim, para a função g , quando x
	T76A T77A	A	LL.12.23	Os valores funcionais dados por $g(x) = -3/(x-2)^2$ são os negativos dos valores dados por $f(x) = 3/(x-2)^2$. Assim, para a função g , quando x se aproxima de 2, pela direita ou pela esquerda, $g(x)$ decresce indefinidamente e escre-
C56:A>LN C98:GR>LN C99:LN>A		LN	LL.12.24	valores dados por $f(x) = 3/(x-2)^2$. Assim, para a função g , quando x se aproxima de 2, pela direita ou pela esquerda, $g(x)$ decresce indefinidamente e escre-
C99:LN>A	T78A	A	LL.12.25	$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{-3}{(x-2)^2} = -\infty$
C100:A>LN	T78A T78A' T79A	A A	LL.12.26 LL.12.26'	2.4.2 DEFINIÇÃO Seja f uma função definida em todo número de algum intervalo I contendo a , exceto possivelmente no próprio a . Quando x tende a a , $f(x)$ decresce indefinidamente e escrevemos $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = -\infty$ se para todo número $N < 0$, existir um $\delta > 0$ tal que se $0 < x - a < \delta$ então $f(x) < N$
C100:A>LN		LN	LL.12.27	Nota: A igualdade (2) pode ser lida como “o limite de $f(x)$ quando x tende a a é infinito negativo”, observando novamente que o limite não existe
	T79A T79A' T80A T81A T82A	A A	LL.12.28 LL.12.28'	Podemos considerar limites laterais “infinitos”. Especificando, $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$ se f estiver definida em todo número de algum intervalo aberto (a, c) e todo número $N > 0$ existir em $\delta > 0$ tal que se $0 < x - a < \delta$ então $f(x) > N$
	T80A	A	LL.12.29	Definições análogas podem ser dadas para $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = -\infty$ e $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = -\infty$.
	T81A	A	LL.12.30	Definições análogas podem ser dadas para $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = -\infty$ e $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = -\infty$.
	T82A	A	LL.12.31	Definições análogas podem ser dadas para $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = -\infty$ e $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = -\infty$.

C101:A>GR C107:A>LN		A	LL.12.32	$h(x) = \frac{2x}{x-1}$																				
C101:A>GR C102:GR>A C103:GR>A	T83GR T83GR' T84GR	GR	LL.12.33																					
C102:GR>A C104:A>LN		A	LL.12.34	$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{2x}{x-1} = -\infty$																				
C103:GR>A C105:A>LN		A	LL.12.35	$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{2x}{x-1} = +\infty$																				
C104:A>LN		LN	LL.12.36	Isto é, para a função definida por (3), à medida que x se aproxima de valores menores do que 1, a função decresce indefinidamente e, à medida que x se aproxima de 1 por valores maiores do que 1, os valores funcionais crescem indefinidamente.																				
C105:A>LN C107:A>LN		LN	LL.12.37	valores menores do que 1, a função decresce indefinidamente e, à medida que x se aproxima de 1 por valores maiores do que 1, os valores funcionais crescem indefinidamente.																				
	T85LN	LN	LL.13.01	A secção anterior foi dedicada a limites infinitos onde os valores funcionais aumentavam ou diminuía indefinidamente, enquanto a variável independente se aproximava de um número real. Agora vamos considerar limites de funções quando a variável independente cresce ou diminui indefinidamente. Começamos com a seguinte função definida por																				
C108:LN>A	T85LN	LN	LL.13.02	aproximava-se de um número real. Agora vamos considerar limites de funções quando a variável independente cresce ou diminui indefinidamente. Começamos com a seguinte função definida por																				
C108:LN>A C109:A>T C115:A>T		A	LL.13.03	$f(x) = \frac{2x^2}{x^2 + 1}$																				
C109:A>T C110:T>LN C112:T>N C113:N>LN		T	LL.13.04	<p>Tabela 1</p> <table border="1" data-bbox="865 1144 1086 1368"> <thead> <tr> <th>x</th> <th>$f(x) = \frac{2x^2}{x^2 + 1}$</th> </tr> </thead> <tbody> <tr><td>0</td><td>0</td></tr> <tr><td>1</td><td>1</td></tr> <tr><td>2</td><td>1,6</td></tr> <tr><td>3</td><td>1,8</td></tr> <tr><td>4</td><td>1,882353</td></tr> <tr><td>5</td><td>1,923077</td></tr> <tr><td>10</td><td>1,980198</td></tr> <tr><td>100</td><td>1,999800</td></tr> <tr><td>1000</td><td>1,999998</td></tr> </tbody> </table>	x	$f(x) = \frac{2x^2}{x^2 + 1}$	0	0	1	1	2	1,6	3	1,8	4	1,882353	5	1,923077	10	1,980198	100	1,999800	1000	1,999998
x	$f(x) = \frac{2x^2}{x^2 + 1}$																							
0	0																							
1	1																							
2	1,6																							
3	1,8																							
4	1,882353																							
5	1,923077																							
10	1,980198																							
100	1,999800																							
1000	1,999998																							
C110:T>LN C111:LN>N	T86LN	LN	LL.13.05	casas, são dados na Tabela 1. Observe na tabela que quando x cresce, os valores positivos, os valores funcionais aproximam-se de 2.																				
C111:LN>N C112:T>N C113:N>LN		N	LL.13.06	<p>Em particular, quando $x = 4$,</p> $2 - \frac{2x^2}{x^2 + 1} = 2 - 1,882353$ $= 0,117647$ <p>Logo, a diferença entre 2 e $f(x)$ é 0,117647, quando $x = 4$. Para $x = 100$,</p> $2 - \frac{2x^2}{x^2 + 1} = 2 - 1,999800$ $= 0,000200$ <p>Assim, a diferença entre 2 e $f(x)$ é 0,000200, quando $x = 100$.</p>																				
C113:N>LN	T86LN T87LN	LN	LL.13.07	Continuando, vemos intuitivamente que o valor de $f(x)$ pode ser obtido tão próximo de 2 quanto desejarmos, escolhendo x suficientemente grande.																				
C114:LN>A	T87LN	LN	LL.13.08	Em outras palavras, podemos obter uma diferença entre 2 e $f(x)$ tão pequena quanto desejarmos escolhendo x como qualquer número maior do que algum número positivo suficientemente grande. Ou, avançando um pouco, para todo número																				
C114:LN>A	T88A	A	LL.13.09	positivo suficientemente grande. Ou, avançando um pouco, para todo número $\epsilon > 0$, não importa quão pequeno, podemos encontrar um número $N > 0$, tal que, para todo $x > N$, então $ f(x) - 2 < \epsilon$.																				

	T88A T89A	A	LL.13.10	$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^2}{x^2 + 1} = 2$																		
	T89A T89A' T89A''	A A	LL.13.11 LL.13.11'	<p>2.5.1 DEFINIÇÃO Seja f uma função definida em um intervalo $(a, +\infty)$ o limite de $f(x)$ quando x cresce indefinidamente, é L, escrito</p> $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = L$ <p>se para todo $\epsilon > 0$, não importa quão pequeno, existir um número $N > 0$ tal que</p> $\text{se } x > N \text{ então } f(x) - L < \epsilon$																		
C115:A>T C116:T>LN		T	LL.13.12	<p>Tabela 2</p> <table border="1"> <thead> <tr> <th>x</th> <th>$f(x) = \frac{2x^2}{x^2 + 1}$</th> </tr> </thead> <tbody> <tr><td>-1</td><td>1</td></tr> <tr><td>-2</td><td>1,6</td></tr> <tr><td>-3</td><td>1,8</td></tr> <tr><td>-4</td><td>1,882353</td></tr> <tr><td>-5</td><td>1,923077</td></tr> <tr><td>-10</td><td>1,980198</td></tr> <tr><td>-100</td><td>1,999800</td></tr> <tr><td>-1000</td><td>1,999998</td></tr> </tbody> </table>	x	$f(x) = \frac{2x^2}{x^2 + 1}$	-1	1	-2	1,6	-3	1,8	-4	1,882353	-5	1,923077	-10	1,980198	-100	1,999800	-1000	1,999998
x	$f(x) = \frac{2x^2}{x^2 + 1}$																					
-1	1																					
-2	1,6																					
-3	1,8																					
-4	1,882353																					
-5	1,923077																					
-10	1,980198																					
-100	1,999800																					
-1000	1,999998																					
C116:T>LN	T90A	LN	LL.13.13	mente que quando x decresce indefinidamente, $f(x)$ tende a 2; isto é, $ f(x) - 2 $ pode ser obtido tão pequeno quanto desejarmos, escolhendo x como																		
	T90A T91A	LN	LL.13.14	mente que quando x decresce indefinidamente, $f(x)$ tende a 2; isto é, $ f(x) - 2 $ pode ser obtido tão pequeno quanto desejarmos, escolhendo x como número menor do que algum número negativo tendo um valor absolutamente grande. Formalmente, dizemos que para todo $\epsilon > 0$, não importa quão pequeno, podemos encontrar um número $N < 0$ tal que se $x < N$, $ f(x) - 2 < \epsilon$. Usando o símbolo $x \rightarrow -\infty$ para mostrar que a variável																		
C117:LN>A	T91A	A	LL.13.15	mente que quando x decresce indefinidamente, $f(x)$ tende a 2; isto é, $ f(x) - 2 $ pode ser obtido tão pequeno quanto desejarmos, escolhendo x como número menor do que algum número negativo tendo um valor absolutamente grande. Formalmente, dizemos que para todo $\epsilon > 0$, não importa quão pequeno, podemos encontrar um número $N < 0$ tal que se $x < N$, $ f(x) - 2 < \epsilon$. Usando o símbolo $x \rightarrow -\infty$ para mostrar que a variável																		
C117:LN>A C118:A>GR	T92A	A	LL.13.16	$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x^2}{x^2 + 1} = 2$																		
C118:A>GR C119:GR>A		GR	LL.13.17	 <p>FIGURA 1</p>																		
C119:GR>A	T92A T92A' T92A''	A A	LL.13.18 LL.13.18'	<p>2.5.2 DEFINIÇÃO Seja f uma função que está definida em um intervalo $(-\infty, a)$. O limite quando x decresce indefinidamente é L, notado por</p> $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = L$ <p>se para todo $\epsilon > 0$, não importa quão pequeno, existir um número $N < 0$ tal que</p> $\text{se } x < N \text{ então } f(x) - L < \epsilon$																		
C120:A>GR	T93A	A	LL.14.01	$C(x) = \begin{cases} x & \text{se } 0 \leq x \leq 10 \\ 0,9x & \text{se } 10 < x \end{cases}$																		
	T93A	A	LL.14.02	onde $C(x)$ é o custo total de x quilos de um produto. $\lim_{x \rightarrow 10} C(x)$ não existe pois $\lim_{x \rightarrow 10^-} C(x) \neq \lim_{x \rightarrow 10^+} C(x)$.																		

C120:A>GR C121:GR>LN C130:GR>LN		GR	LL.14.03	
C121:GR>LN	T94LN	LN	LL.14.04	Observe que há uma quebra no gráfico de C em $x = 10$
C133:LN>A	T94LN	LN	LL.14.05	Afirmamos que C é <i>descontínua</i> em 10.
	T95A T97A T98A	A	LL.14.06	$f(x) = \frac{(2x + 3)(x - 1)}{x - 1}$
C122:A>GR	T95A	A	LL.14.07	Observamos que f está definida para todos os valores de x , exceto 1. Um esboço do gráfico que consiste em todos os pontos da reta $y = 2x + 3$, exceto (1,5
C122:A>GR C123:GR>LN		GR	LL.14.19	
C123:GR>LN	T96LN	LN	LL.14.08	está na Figura 2. Há uma quebra no gráfico, no ponto (1,
C124:LN>A	T96LN	LN	LL.14.09	essa função f é <i>descontínua</i> no número 1.
C125:A>LN	T97A	A	LL.14.10	Se f for a função definida por (2) quando $x \neq 1$ e se
C125:A>LN C126:LN>GR	T97A' T97A'	LN LN	LL.14.11 LL.14.11'	por exemplo, a função estará definida para todos os valores de x , mas ainda existirá uma quebra no gráfico (veja a Figura 3), sendo a função <i>descontínua</i> em 1. Se, contudo, definirmos $f(1) = 5$, não haverá quebra no gráfico e a fun
C126:LN>GR C127:GR>A C141:A>GR C142:GR>LN C143:LN>A'		GR	LL.14.12	
C128:A>LN	T98A	A	LL.14.13	em 1. Se, contudo, definirmos $f(1) = 5$,
C128:A>LN C129:LN>A		LN	LL.14.14	em 1. Se, contudo, definirmos $f(1) = 5$, não haverá quebra no gráfico e a função será <i>contínua</i> para todos os valores de x . Temos a

C124:LN>A C127:GR>A C129:LN>A C132:A>LN C133:LN>A C134:LN>A C140:A>LN' C143:LN>A' C148:LN>GR' C149:A>LN' C152:GR>A' C153:LN>A C156:LN>A C157:A>LN C160:GR>A' C162:A>LN'	T99A T99A' T99A' T103A' T106A' T107A' T110A T111A T112A' T116A' T117A'	A A	LL.14.15 LL.14.15'	DEFINIÇÃO Dizemos que a função f é contínua no número a se e somente se as seguintes condições forem satisfeitas: (i) $f(a)$ existe; (ii) $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ existe; (iii) $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$. Se uma ou mais de uma dessas condições não forem verificadas em a , a função f será descontínua em a .
C130:GR>LN C131:LN>A C134:LN>A		LN	LL.14.16	► ILUSTRAÇÃO 1 A função C , definida por (1), tem seu gráfico mostrado na Figura 1 como existe uma quebra no gráfico, no ponto onde $x = 10$, vamos verificar as condições da Definição 2.6.1 em $x = 10$.
C131:LN>A	T99A	A	LL.14.17	Como $\lim_{x \rightarrow a} C(x)$ não existe , a condição (ii) não está verificada em 10. C
C132:A>LN		LN	LL.14.18	Como $\lim_{x \rightarrow a} C(x)$ não existe, a condição (ii) não está verificada em 10. Concluimos que C é descontínua em 10.
C135:LN>A		LN	LL.15.01	► ILUSTRAÇÃO 2 Um atacadista que vende um produto por quilo (ou fração de quilo), cobra \$ 1 por quilo se o pedido for de até 10 kg. Mas se o pedido ultrapassar esse peso, ele cobrará \$ 10 mais \$ 0,7 por quilo excedente. Assim,
C135:LN>A	T100A	A	LL.15.02	se x quilos do produto forem pedidos e $C(x)$ for o custo total, então $C(x) = x$, se $0 \leq x \leq 10$ e $C(x) = 10 + 0,7(x - 10)$, se $10 < x$. Logo,
C136:A>GR	T100A T100A' T101A'	A	LL.15.03	$C(x) = \begin{cases} x & \text{se } 0 \leq x \leq 10 \\ 0,7x + 3 & \text{se } 10 < x \end{cases}$
C136:A>GR C137:GR>A C138:GR>A		GR	LL.15.04	
C137:GR>A C139:A>LN	T100A' T95A' T95A'	A A	LL.15.05 LL.15.05'	$\lim_{x \rightarrow 10^-} C(x) = \lim_{x \rightarrow 10^-} x = 10$
C138:GR>A C140:A>LN	T101A' T96A' T96A'	A A	LL.15.06 LL.15.06'	$\lim_{x \rightarrow 10^+} C(x) = \lim_{x \rightarrow 10^+} (0,7x + 3) = 10$
C139:A>LN C140:A>LN C140:A>LN'		LN	LL.15.07	Logo, $\lim_{x \rightarrow 10} C(x)$ existe e é igual a $C(10)$. Assim, C é contínua em 10.
C141:A>GR	T102A	A	LL.16.01	$f(x) = \begin{cases} 2x + 3 & \text{se } x \neq 1 \\ 2 & \text{se } x = 1 \end{cases}$
C142:GR>LN C143:LN>A		LN	LL.16.02	Um esboço do gráfico dessa função está na Figura 3. Observe que há uma quebra no gráfico, no ponto onde $x = 1$. Assim, vamos verificar a
C143:LN>A	T101A T103A'	A	LL.16.03	$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 5$; logo, a condição (ii) está satisfeita.
C145:A>LN	T101A	A	LL.16.04	$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 5$; mas $f(1) = 2$;

C145:A>LN		LN	LL.16.05	Assim, f é descontínua em 1.
C146:A>LN	T102A	A	LL.16.06	Note que se na Ilustração 3 $f(1)$ for definida como sendo 5, então $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 5 = f(1)$ e f seria contínua em 1.
C146:A>LN		LN	LL.16.07	Note que se na Ilustração 3 $f(1)$ for definida como sendo 5, então $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 5 = f(1)$ e f seria contínua em 1.
C147:A>GR		A	LL.17.01	► ILUSTRAÇÃO 4 Seja f definida por
				$f(x) = \frac{1}{x - 2}$
C147:A>GR C148:GR>LN		GR	LL.17.02	
				FIGURA 5
C148:GR>LN C148:LN>GR	T103LN	LN	LL.17.03	Um esboço do gráfico f é dado na Figura 5. Há uma quebra no gráfico no ponto onde $x = 2$, e assim sendo vamos examinar aí as condições da Definição 1. Como $f(2)$ não está definida, a condição (i) não é satisfeita. Logo, f é descontínua em 2.
C149:A>LN'	T103LN	LN	LL.17.04	Como $f(2)$ não está definida, a condição (i) não é satisfeita. Logo, f é descontínua em 2.
C149:A>GR	T106A T107A	A	LL.18.01	► ILUSTRAÇÃO 5 Seja g definida por
				$g(x) = \begin{cases} \frac{1}{x - 2} & \text{se } x \neq 2 \\ 3 & \text{se } x = 2 \end{cases}$
C149:A>GR C150:GR>A C151:GR>A C152:GR>A'		GR	LL.18.02	
				FIGURA 6
C150:GR>A	T104A T104A' T104A' T106A T106A'	A A	LL.18.03 LL.18.03'	$\lim_{x \rightarrow 2^-} g(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{1}{x - 2} = -\infty$
C151:GR>A	T105A T105A' T105A' T107A T107A'	A A	LL.18.04 LL.18.04'	$\lim_{x \rightarrow 2^+} g(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{1}{x - 2} = +\infty$
C152:A>LN	T104A T105A	A	LL.18.05	Como $\lim_{x \rightarrow 2} g(x)$ não existe, a condição (ii) não é satisfeita. Logo, g é descontínua em 2.
C152:A>LN C153:LN>A		LN	LL.18.06	Como $\lim_{x \rightarrow 2} g(x)$ não existe, a condição (ii) não é satisfeita. Logo, g é descontínua em 2.

C154:A>GR	T108A T109A	A	LL.19.01	<p>► ILUSTRAÇÃO 6 Seja h definida por</p> $h(x) = \begin{cases} 3 + x & \text{se } x \leq 1 \\ 3 - x & \text{se } 1 < x \end{cases}$
C154:A>GR C155:GR>LN		GR	LL.19.02	<p>FIGURA 7</p>
C155:GR>LN C156:LN>A		LN	LL.19.03	Um esboço do gráfico de h está na Figura 7. Como há uma quebra no ponto onde $x = 1$, investigaremos as condições da Definição 2.6
	T108A T110A T110A' T110A'' T112A	A A	LL.19.04 LL.19.04'	$\lim_{x \rightarrow 1^-} h(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} (3 + x)$ $= 4$
	T109A T109A' T109A'' T111A T113A	A A	LL.19.05 LL.19.05'	$\lim_{x \rightarrow 1^+} h(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} (3 - x)$ $= 2$
	T112A T112A' T113A	A	LL.19.06	Como $\lim_{x \rightarrow 1^-} h(x) \neq \lim_{x \rightarrow 1^+} h(x)$, então $\lim_{x \rightarrow 1} h(x)$ não existe, assim sendo,
C157:A>LN		LN	LL.19.07	Logo, h é descontinua em 1.
C158:A>GR	T114A T115A	A	LL.20.01	<p>► ILUSTRAÇÃO 7 Seja F definida por</p> $F(x) = \begin{cases} x - 3 & \text{se } x \neq 3 \\ 2 & \text{se } x = 3 \end{cases}$
C158:A>GR C159:GR>A C160:GR>A C160:GR>A'		GR	LL.20.02	<p>FIGURA 8</p>
C159:GR>A	T114A T114A' T114A'' T116A T116A'	A A	LL.20.09 LL.20.09'	$\lim_{x \rightarrow 3^-} F(x) = \lim_{x \rightarrow 3^-} (3 - x)$ $= 0$
C160:GR>A	T115A T115A' T115A'' T117A T117A'	A A	LL.20.03 LL.20.03'	$\lim_{x \rightarrow 3^+} F(x) = \lim_{x \rightarrow 3^+} (x - 3)$ $= 0$
C161:A>LN	T116A T117A	A	LL.20.04	Logo, $\lim_{x \rightarrow 3} F(x) = 0$ e assim a condição (ii) é verificada. O $\lim_{x \rightarrow 3} F(x) =$
C161:A>LN		LN	LL.20.05	porém, $F(3) = 2$, assim sendo, a condição (iii) não é verificada. Portanto, F é descontinua em 3.
C162:LN>A C162:A>LN'		LN	LL.20.06	estabelece que a função f é contínua em um número a . Se $f(a)$ existir, se $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ existir e se

C162:LN>A	T118A	A	LL.20.10	<p>estabelece que a função f é contínua em um número a. Se $f(a)$ existir, se $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ existir e se</p> $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a) \quad (4)$
	T119A T120A	A	LL.20.07	<p>Aplicando a Definição 2.1.1 onde L é $f(a)$, segue que (4) será verdadeira se para todo $\epsilon > 0$ existir um $\delta > 0$ tal que</p> <p>„ se $0 < x - a < \delta$ então $f(x) - f(a) < \epsilon$ (5)</p>
	T120A	A	LL.20.08	<p>2.6.6 TEOREMA A função f será contínua no número a se f estiver definida em algum aberto contendo a e se para todo $\epsilon > 0$ existir um $\delta > 0$ tal que se $x - a < \delta$ então $f(x) - f(a) < \epsilon$</p>

Fonte: Elaborado pelo autor.

INVENTÁRIO DOS EXERCÍCIOS DO LIVRO DO LEITHOLD

Quadro 19 - Inventário dos exercícios do livro do Leithold.

Verbos	Conversões	Representações	Questão
			<p>Nos Exercícios de 1 a 22 são dados $f(x)$, a e L, bem como $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$. (a) Usando argumentos similares àqueles dos Exemplos 1 e 3, determine um $\delta > 0$ para o ϵ dado, tal que se $0 < x - a < \delta$ então $f(x) - L < \epsilon$ (11)</p> <p>(b) Usando as propriedades das desigualdades, determine um $\delta > 0$, tal que a afirmativa (11) seja verdadeira para o valor dado de ϵ.</p>
D	A>GR	A	1. $\lim_{x \rightarrow 4} (x - 1) = 3; \epsilon = 0,2$
D	GR>A		
D	A>GR	A	2. $\lim_{x \rightarrow 3} (x + 2) = 5; \epsilon = 0,02$
D	GR>A		
D	A>GR	A	3. $\lim_{x \rightarrow 3} (2x + 4) = 10; \epsilon = 0,01$
D	GR>A		
D	A>GR	A	4. $\lim_{x \rightarrow 2} (3x - 1) = 5; \epsilon = 0,1$
D	GR>A		
D	A>GR	A	5. $\lim_{x \rightarrow 1} (5x - 3) = 2; \epsilon = 0,05$
D	GR>A		
D	A>GR	A	6. $\lim_{x \rightarrow 2} (4x - 5) = 3; \epsilon = 0,001$
D	GR>A		
D	A>GR	A	7. $\lim_{x \rightarrow -1} (3 - 4x) = 7; \epsilon = 0,02$
D	GR>A		
D	A>GR	A	8. $\lim_{x \rightarrow -2} (2 + 5x) = -8; \epsilon = 0,002$
D	GR>A		
D	A>GR	A	9. $\lim_{x \rightarrow 3} x^2 = 9; \epsilon = 0,005$
D	GR>A		

D	A>GR	A	10. $\lim_{x \rightarrow -4} x^2 = 16; \epsilon = 0,03$
D	GR>A		
D	A>GR	A	11. $\lim_{x \rightarrow -2} x^2 = 4; \epsilon = 0,003$
D	GR>A		
D	A>GR	A	12. $\lim_{x \rightarrow 1} (x^2 - 5) = -4; \epsilon = 0,01$
D	GR>A		
D	A>GR	A	13. $\lim_{x \rightarrow 2} (x^2 - 2x + 1) = 1; \epsilon = 0,001$
D	GR>A		
D	A>GR	A	14. $\lim_{x \rightarrow -1} (x^2 + 4x + 4) = 1; \epsilon = 0,002$
D	GR>A		
D	A>GR	A	15. $\lim_{x \rightarrow 0} (x^2 + 3x - 4) = -4; \epsilon = 0,03$
D	GR>A		
D	A>GR	A	16. $\lim_{x \rightarrow 3} (x^2 - x - 6) = 0; \epsilon = 0,005$
D	GR>A		
D	A>GR	A	17. $\lim_{x \rightarrow -2} (2x^2 + 5x + 3) = 1; \epsilon = 0,004$
D	GR>A		
D	A>GR	A	18. $\lim_{x \rightarrow 1} (3x^2 - 7x + 2) = -2; \epsilon = 0,02$
D	GR>A		
D	A>GR	A	19. $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2 - 4}{x + 2} = -4; \epsilon = 0,01$
D	GR>A		
D	A>GR	A	20. $\lim_{x \rightarrow 1/3} \frac{9x^2 - 1}{3x - 1} = 2; \epsilon = 0,01$
D	GR>A		
D	A>GR	A	21. $\lim_{x \rightarrow 1/2} \frac{3x^2 - 8x - 3}{x - 3} = \frac{5}{2}; \epsilon = 0,001$
D	GR>A		
D	A>GR	A	22. $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{4x^2 - 4x - 3}{2x + 1} = 5; \epsilon = 0,003$
D	GR>A		
			<i>Nos Exercícios de 23 a 42, prove que o limite é o número indicado, aplicando a Definição 2.1.1.</i>

P		A	23. $\lim_{x \rightarrow 2} 7 = 7$
P		A	24. $\lim_{x \rightarrow 5} (-4) = -4$
P		A	25. $\lim_{x \rightarrow 4} (2x + 1) = 9$
P		A	26. $\lim_{x \rightarrow 1} (4x + 3) = 7$
P		A	27. $\lim_{x \rightarrow -1} (5x + 8) = 3$
P		A	28. $\lim_{x \rightarrow 3} (3x - 5) = 4$
P		A	29. $\lim_{x \rightarrow 3} (7 - 3x) = -2$
P		A	30. $\lim_{x \rightarrow -4} (2x + 7) = -1$
P		A	31. $\lim_{x \rightarrow -2} (1 + 3x) = -5$
P		A	32. $\lim_{x \rightarrow -2} (7 - 2x) = 11$
P		A	33. $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 - 1}{x + 1} = -2$
P		A	34. $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 9}{x - 3} = 6$
P		A	35. $\lim_{x \rightarrow 1} x^2 = 1$
P		A	36. $\lim_{x \rightarrow -3} x^2 = 9$
P		A	37. $\lim_{x \rightarrow 5} (x^2 - 3x) = 10$
P		A	38. $\lim_{x \rightarrow 2} (x^2 + 2x - 1) = 7$
P		A	39. $\lim_{x \rightarrow -3} (5 - x - x^2) = -1$
P		A	40. $\lim_{x \rightarrow -1} (3 + 2x - x^2) = 0$

P		A	41. $\lim_{x \rightarrow 2} (6x^2 - 13x + 5) = 3$
P		A	42. $\lim_{x \rightarrow 1} (4x^2 - 13x + 12) = 3$
P		A	43. Prove que $\lim_{x \rightarrow a} x^2 = a^2$, se a for qualquer número positivo.
P		A	44. Prove que $\lim_{x \rightarrow a} x^2 = a^2$, se a for qualquer número negativo.
			Nos Exercícios de 1 a 22, faça um esboço do gráfico e e ache o limite indicado, se existir; se não existir, indique a razão disto.
C D D D E	A>GR GR>LN	A	1. $f(x) = \begin{cases} 2 & \text{se } x < 1 \\ -1 & \text{se } x = 1 \\ -3 & \text{se } 1 < x \end{cases}$ (a) $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)$; (b) $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$; (c) $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$
C D D D E	A>GR GR>LN	A	2. $f(x) = \begin{cases} -2 & \text{se } x < 0 \\ 2 & \text{se } 0 \leq x \end{cases}$ (a) $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$; (b) $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x)$; (c) $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$

C D D D E	A>GR GR>LN	A	<p>3. $f(t) = \begin{cases} t + 4 & \text{se } t \leq -4 \\ 4 - t & \text{se } -4 < t \end{cases}$</p> <p>(a) $\lim_{t \rightarrow -4^+} f(t)$; (b) $\lim_{t \rightarrow -4^-} f(t)$; (c) $\lim_{t \rightarrow -4} f(t)$</p>
C D D D E	A>GR GR>LN	A	<p>4. $g(s) = \begin{cases} s + 3 & \text{se } s \leq -2 \\ 3 - s & \text{se } -2 < s \end{cases}$</p> <p>(a) $\lim_{s \rightarrow -2^+} g(s)$; (b) $\lim_{s \rightarrow -2^-} g(s)$; (c) $\lim_{s \rightarrow -2} g(s)$</p>
C D D D E	A>GR GR>LN	A	<p>5. $F(x) = \begin{cases} x^2 & \text{se } x \leq 2 \\ 8 - 2x & \text{se } 2 < x \end{cases}$</p> <p>(a) $\lim_{x \rightarrow 2^+} F(x)$; (b) $\lim_{x \rightarrow 2^-} F(x)$; (c) $\lim_{x \rightarrow 2} F(x)$</p>
C D D D E	A>GR GR>LN	A	<p>6. $h(x) = \begin{cases} 2x + 1 & \text{se } x < 3 \\ 10 - x & \text{se } 3 \leq x \end{cases}$</p> <p>(a) $\lim_{x \rightarrow 3^+} h(x)$; (b) $\lim_{x \rightarrow 3^-} h(x)$; (c) $\lim_{x \rightarrow 3} h(x)$</p>

C D D D E	A>GR GR>LN	A	$7. g(r) = \begin{cases} 2r + 3 & \text{se } r < 1 \\ 2 & \text{se } r = 1 \\ 7 - 2r & \text{se } 1 < r \end{cases}$ <p>(a) $\lim_{r \rightarrow 1^+} g(r)$; (b) $\lim_{r \rightarrow 1^-} g(r)$; (c) $\lim_{r \rightarrow 1} g(r)$</p>
C D D D E	A>GR GR>LN	A	$8. g(t) = \begin{cases} 3 + t^2 & \text{se } t < -2 \\ 0 & \text{se } t = -2 \\ 11 - t^2 & \text{se } -2 < t \end{cases}$ <p>(a) $\lim_{t \rightarrow -2^+} g(t)$; (b) $\lim_{t \rightarrow -2^-} g(t)$; (c) $\lim_{t \rightarrow -2} g(t)$</p>
C D D D E	A>GR GR>LN	A	$9. f(x) = \begin{cases} x^2 - 4 & \text{se } x < 2 \\ 4 & \text{se } x = 2 \\ 4 - x^2 & \text{se } 2 < x \end{cases}$ <p>(a) $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x)$; (b) $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x)$; (c) $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$</p>
C D D D E	A>GR GR>LN	A	$10. f(x) = \begin{cases} 2x + 3 & \text{se } x < 1 \\ 4 & \text{se } x = 1 \\ x^2 + 2 & \text{se } 1 < x \end{cases}$ <p>(a) $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)$; (b) $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x)$; (c) $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$</p>
C D D D E	A>GR GR>LN	A	$11. F(x) = x - 5 $ <p>(a) $\lim_{x \rightarrow 5^+} F(x)$; (b) $\lim_{x \rightarrow 5^-} F(x)$; (c) $\lim_{x \rightarrow 5} F(x)$</p>

C D D D E	A>GR GR>LN	A	12. $f(x) = 3 + 2x - 4 $ (a) $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x)$; (b) $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x)$; (c) $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$
C D D D E	A>GR GR>LN	A	13. $G(x) = 2x - 3 - 4$ (a) $\lim_{x \rightarrow 3/2^+} G(x)$; (b) $\lim_{x \rightarrow 3/2^-} G(x)$; (c) $\lim_{x \rightarrow 3/2} G(x)$
C D D D E	A>GR GR>LN	A	14. $F(x) = \begin{cases} x - 1 & \text{se } x < -1 \\ 0 & \text{se } x = -1 \\ 1 - x & \text{se } -1 < x \end{cases}$ (a) $\lim_{x \rightarrow -1^+} F(x)$; (b) $\lim_{x \rightarrow -1^-} F(x)$; (c) $\lim_{x \rightarrow -1} F(x)$
C D D D E	A>GR GR>LN	A	15. $f(x) = \frac{ x }{x}$ (a) $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$; (b) $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x)$; (c) $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$
C D D D E	A>GR GR>LN	A	16. $S(x) = \operatorname{sgn} x $ ($\operatorname{sgn} x$ é definido no Exemplo 1) (a) $\lim_{x \rightarrow 0^+} S(x)$; (b) $\lim_{x \rightarrow 0^-} S(x)$; (c) $\lim_{x \rightarrow 0} S(x)$ $\operatorname{sgn} x = \begin{cases} -1 & \text{se } x < 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \\ 1 & \text{se } 0 < x \end{cases}$
C D	A>GR GR>LN	A	

D D D D D D E			$17. f(x) = \begin{cases} 2 & \text{se } x < -2 \\ \sqrt{4-x^2} & \text{se } -2 \leq x \leq 2 \\ -2 & \text{se } 2 < x \end{cases}$ <p>(a) $\lim_{x \rightarrow -2^-} f(x)$; (b) $\lim_{x \rightarrow -2^+} f(x)$; (c) $\lim_{x \rightarrow -2} f(x)$; (d) $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x)$; (e) $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x)$; (f) $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$</p>
C D D D D D D E	A>GR GR>LN	A	$18. f(x) = \begin{cases} x+1 & \text{se } x < -1 \\ x^2 & \text{se } -1 \leq x \leq 1 \\ 2-x & \text{se } 1 < x \end{cases}$ <p>(a) $\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x)$; (b) $\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x)$; (c) $\lim_{x \rightarrow -1} f(x)$; (d) $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x)$; (e) $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)$; (f) $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$</p>
C D D D E	A>GR GR>LN	A	$19. f(t) = \begin{cases} \sqrt[3]{t} & \text{se } t < 0 \\ \sqrt{t} & \text{se } 0 \leq t \end{cases}$ <p>(a) $\lim_{t \rightarrow 0^+} f(t)$; (b) $\lim_{t \rightarrow 0^-} f(t)$; (c) $\lim_{t \rightarrow 0} f(t)$</p>
C D D D E	A>GR GR>LN	A	$20. g(x) = \begin{cases} \sqrt[3]{-x} & \text{se } x \leq 0 \\ \sqrt[3]{x} & \text{se } 0 < x \end{cases}$ <p>(a) $\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x)$; (b) $\lim_{x \rightarrow 0^-} g(x)$; (c) $\lim_{x \rightarrow 0} g(x)$</p>

C	A>GR	A	$21. F(x) = \begin{cases} \sqrt{x^2 - 9} & \text{se } x \leq -3 \\ \sqrt{9 - x^2} & \text{se } -3 < x < 3 \\ \sqrt{x^2 - 9} & \text{se } 3 \leq x \end{cases}$ <p>(a) $\lim_{x \rightarrow -3^-} F(x)$; (b) $\lim_{x \rightarrow -3^+} F(x)$; (c) $\lim_{x \rightarrow -3} F(x)$; (d) $\lim_{x \rightarrow 3^-} F(x)$; (e) $\lim_{x \rightarrow 3^+} F(x)$; (f) $\lim_{x \rightarrow 3} F(x)$</p>
D	GR>LN		
D			
D			
D			
D			
D			
E			
C	A>GR	A	$22. G(t) = \begin{cases} \sqrt[3]{t+1} & \text{se } t \leq -1 \\ \sqrt{1-t^2} & \text{se } -1 < t < 1 \\ \sqrt[3]{t-1} & \text{se } 1 \leq t \end{cases}$ <p>(a) $\lim_{t \rightarrow -1^-} G(t)$; (b) $\lim_{t \rightarrow -1^+} G(t)$; (c) $\lim_{t \rightarrow -1} G(t)$; (d) $\lim_{t \rightarrow 1^-} G(t)$; (e) $\lim_{t \rightarrow 1^+} G(t)$; (f) $\lim_{t \rightarrow 1} G(t)$</p>
D	GR>LN		
D			
D			
D			
D			
D			
E			
D		A	$23. F(x) = x - 2 \operatorname{sgn} x, \text{ onde } \operatorname{sgn} x \text{ está definido no Exemplo 1.}$ <p>Ache, se existirem: (a) $\lim_{x \rightarrow 0^+} F(x)$; (b) $\lim_{x \rightarrow 0^-} F(x)$; (c) $\lim_{x \rightarrow 0} F(x)$.</p> $\operatorname{sgn} x = \begin{cases} -1 & \text{se } x < 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \\ 1 & \text{se } 0 < x \end{cases}$
D			
D			
D		A	$24. h(x) = \operatorname{sgn} x - U(x), \text{ onde } \operatorname{sgn} x \text{ está definido no Exemplo 1}$ <p>e U é uma função escada definida por</p> $U(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x < 0 \\ 1 & \text{se } 0 \leq x \end{cases}$ <p>Ache, se existirem: (a) $\lim_{x \rightarrow 0^+} h(x)$; (b) $\lim_{x \rightarrow 0^-} h(x)$; (c) $\lim_{x \rightarrow 0} h(x)$.</p> $\operatorname{sgn} x = \begin{cases} -1 & \text{se } x < 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \\ 1 & \text{se } 0 < x \end{cases}$
D			
D			

D D D		A	<p>25. Ache, se existirem: (a) $\lim_{x \rightarrow 2^+} \llbracket x \rrbracket$; (b) $\lim_{x \rightarrow 2^-} \llbracket x \rrbracket$; (c) $\lim_{x \rightarrow 2} \llbracket x \rrbracket$.</p>
D D D		A	<p>26. Ache, se existirem: (a) $\lim_{x \rightarrow 4^+} \llbracket x - 3 \rrbracket$; (b) $\lim_{x \rightarrow 4^-} \llbracket x - 3 \rrbracket$; (c) $\lim_{x \rightarrow 4} \llbracket x - 3 \rrbracket$.</p>
D D D	A > GR	A	<p>27. Seja $h(x) = (x - 1) \operatorname{sgn} x$. Faça um esboço do gráfico de h. Ache, se existirem: (a) $\lim_{x \rightarrow 0^+} h(x)$; (b) $\lim_{x \rightarrow 0^-} h(x)$; (c) $\lim_{x \rightarrow 0} h(x)$.</p> $\operatorname{sgn} x = \begin{cases} -1 & \text{se } x < 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \\ 1 & \text{se } 0 < x \end{cases}$
D AD D	A > GR GR > A	A	<p>28. Seja $G(x) = \llbracket x \rrbracket + \llbracket 4 - x \rrbracket$. Faça um esboço do gráfico de G. Ache, se existirem: (a) $\lim_{x \rightarrow 3^+} G(x)$; (b) $\lim_{x \rightarrow 3^-} G(x)$; (c) $\lim_{x \rightarrow 3} G(x)$.</p>
D		A	<p>29. Dada $f(x) = \begin{cases} 3x + 2 & \text{se } x < 4 \\ 5x + k & \text{se } 4 \leq x \end{cases}$. Ache o valor de k para o qual $\lim_{x \rightarrow 4} f(x)$ existe.</p>
D		A	<p>30. Dada $f(x) = \begin{cases} kx - 3 & \text{se } x \leq -1 \\ x^2 + k & \text{se } -1 < x \end{cases}$. Ache o valor de k para o qual $\lim_{x \rightarrow -1} f(x)$ existe.</p>

D		A	<p>31. Dada $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{se } x \leq -2 \\ ax + b & \text{se } -2 < x < 2 \\ 2x - 6 & \text{se } 2 \leq x \end{cases}$. Ache os valores de a e b, tais que $\lim_{x \rightarrow -2} f(x)$ e $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$ ambos existam.</p>
D		A	<p>32. Dada $f(x) = \begin{cases} 2x - a & \text{se } x < -3 \\ ax + 2b & \text{se } -3 \leq x \leq 3 \\ b - 5x & \text{se } 3 < x \end{cases}$. Ache os valores de a e b, tais que existam os limites: $\lim_{x \rightarrow -3} f(x)$ e $\lim_{x \rightarrow 3} f(x)$.</p>
P		A	<p>33. Seja $f(x) = \begin{cases} -1 & \text{se } x < 0 \\ 1 & \text{se } 0 < x \end{cases}$. Mostre que $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ existe, porém $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ não existe.</p>
P		A	<p>34. Prove o Teorema 2.3.3.</p> <p>2.3.3 TEOREMA $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ existe e será igual a L se e somente se $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x)$ e $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$ existirem e forem iguais a L.</p>
C	A > GR	LN	<p>35. As taxas para despachar cargas por navio são frequentemente baseadas em fórmulas que oferecem um preço menor por quilo quando o tamanho da carga é maior. Suponha que x quilos sejam o peso de uma carga, $C(x)$ seja o seu custo total e</p> $C(x) = \begin{cases} 0,80x & \text{se } 0 < x \leq 50 \\ 0,70x & \text{se } 50 < x \leq 200 \\ 0,65x & \text{se } 200 < x \end{cases}$ <p>(a) Faça um esboço do gráfico de C. Ache cada um dos seguintes limites: (b) $\lim_{x \rightarrow 50^-} C(x)$; (c) $\lim_{x \rightarrow 50^+} C(x)$; (d) $\lim_{x \rightarrow 200^-} C(x)$; (e) $\lim_{x \rightarrow 200^+} C(x)$.</p>
D	GR > A	A	
D			
D			
D			

			<p><i>Nos Exercícios de 1 a 12, faça o seguinte: (a) use uma calculadora para tabular valores de $f(x)$ para valores fixados de x e, a partir deles, faça uma afirmação a respeito do comportamento evidente de $f(x)$.</i></p> <p><i>(b) Ache o limite indicado.</i></p>
C I D	T>LN LN>A	A	<p>1. (a) $f(x) = \frac{1}{x-5}$; x é 6, 5,5, 5,1, 5,01, 5,001, 5,0001; (b) $\lim_{x \rightarrow 5^+} \frac{1}{x-5}$</p>
C I D	T>LN LN>A	A	<p>2. (a) $f(x) = \frac{1}{x-5}$; x é 4, 4,5, 4,9, 4,99, 4,999, 4,9999; (b) $\lim_{x \rightarrow 5^-} \frac{1}{x-5}$</p>
C I D	T>LN LN>A	A	<p>3. (a) $f(x) = \frac{1}{(x-5)^2}$; x é 6, 5,5, 5,1, 5,01, 5,001, 5,0001 e x é 4, 4,5, 4,9, 4,99, 4,999, 4,9999; (b) $\lim_{x \rightarrow 5} \frac{1}{(x-5)^2}$</p>

C	T>LN	A	4. (a) $f(x) = \frac{x+2}{1-x}$; $x \in 0, 0,5, 0,9, 0,99, 0,999, 0,9999$; (b) $\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x+2}{1-x}$
I	LN>A	N	
D			
C	T>LN	A	5. (a) $f(x) = \frac{x+2}{1-x}$; $x \in 2, 1,5, 1,1, 1,01, 1,001, 1,0001$; (b) $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x+2}{1-x}$
I	LN>A	N	
D			
C	T>LN	A	6. (a) $f(x) = \frac{x+2}{(x-1)^2}$; $x \in 0, 0,5, 0,9, 0,99, 0,999, 0,9999$ e $x \in 2, 1,5, 1,1, 1,01, 1,001, 1,0001$; (b) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x+2}{(x-1)^2}$
I	LN>A	N	
D			
C	T>LN	A	7. (a) $f(x) = \frac{x-2}{x+1}$; $x \in 0, -0,5 , -0,9 , -0,99 , -0,999 , -0,9999 $; (b) $\lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{x-2}{x+1}$
I	LN>A	N	
D			
C	T>LN	A	8. (a) $f(x) = \frac{x-2}{x+1}$; $x \in -2, -1,5, -1,1, -1,01, -1,001, -1,0001$; (b) $\lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{x-2}{x+1}$
I	LN>A	N	
D			
C	T>LN	A	9. (a) $f(x) = \frac{x}{x+4}$; $x \in -5, -4,5, -4,1, -4,01, -4,001, -4,0001$; (b) $\lim_{x \rightarrow -4^-} \frac{x}{x+4}$
I	LN>A	N	
D	T>A		
C	T>LN	A	10. (a) $f(x) = \frac{x}{x-4}$; $x \in 5, 4,5, 4,1, 4,01, 4,001, 4,0001$; (b) $\lim_{x \rightarrow 4^+} \frac{x}{x-4}$
I	LN>A	N	
D			

C	T>LN	A	11. (a) $f(x) = \frac{4x}{9-x^2}$; x é $-4, -3,5, -3,1, -3,01, -3,001, -3,0001$; (b) $\lim_{x \rightarrow -3^-} \frac{4x}{9-x^2}$
I	LN>A	N	
D			
C	T>LN	A	12. (a) $f(x) = \frac{4x^2}{9-x^2}$; x é $4, 3,5, 3,1, 3,01, 3,001, 3,0001$; (b) $\lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{4x^2}{9-x^2}$
I	LN>A	N	
D			
P		A	43. Prove que $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{3}{(x-2)^2} = +\infty$, usando a Definição 2.4.1.
P		A	44. Prove que $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{-2}{(x-4)^2} = -\infty$, usando a Definição 2.4.2.
P		A	45. Prove o Teorema 2.4.3 (ii).
P		A	46. Prove o Teorema 2.4.4 (ii).
P		A	47. Prove o Teorema 2.4.4 (iii).
P		A	48. Prove o Teorema 2.4.4 (iv).
P		A	49. Prove o Teorema 2.4.5.
P		A	50. Prove o Teorema 2.4.6.
P		A	51. Prove o Teorema 2.4.7.
P		A	52. Use a Definição 2.4.1 para provar que $\lim_{x \rightarrow -3} \left \frac{5-x}{3+x} \right = +\infty$.
C			<i>Nos Exercícios de 1 a 10, faça o seguinte: Use uma calculadora para tabular os valores de $f(x)$ para valores fixados de x. (a) Do</i>
I			
I			
D			

			<p>para tabular os valores de $f(x)$ para valores fixados de x. (a) Do que $f(x)$ parece estar se aproximando, enquanto x cresce indefinidamente? (b) Do que $f(x)$ parece estar se aproximando enquanto x decresce indefinidamente? (c) Ache $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ (d) Ache $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$.</p> <p>(c) Ache $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ (d) Ache $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$.</p>
C I I D D	T>A	A N	<p>1. $f(x) = \frac{4}{x^2}$; x é 1, 2, 4, 6, 8, 10, 100, 1.000 e x é -1, -2, -4, -6, -8, -10, -100, -1.000.</p>
C I I D D	T>A	N A	<p>2. $f(x) = \frac{3}{x^4}$; x é 1, 2, 4, 6, 8, 10, 100, 1.000 e x é -1, -2, -4, -6, -8, -10, -100, -1.000.</p>
C I I D D	T>A	A N	<p>3. $f(x) = \frac{1}{x^3}$; x é 1, 2, 4, 6, 8, 10, 100, 1.000 e x é -1, -2, -4, -6, -8, -10, -100, -1.000.</p>
C I I D D	T>A	A N	<p>4. $f(x) = -\frac{2}{x^3}$; x é 1, 2, 4, 6, 8, 10, 100, 1.000 e x é -1, -2, -4, -6, -8, -10, -100, -1.000.</p>

C I I D D	T>A	A N	5. $f(x) = -\frac{3x^2}{x^2 + 1}$; $x \in 0, 1, 2, 4, 6, 8, 10, 100, 1.000$ e $x \in -1, -2, -4, -6, -8, -10, -100, -1.000$.
C I I D D	T>A	A N	6. $f(x) = \frac{x^3}{x^3 + 2}$; $x \in 2, 4, 6, 8, 10, 100, 1.000$ e $x \in -2, -4, -6, -8, -10, -100, -1000$.
C I I D D	T>A	A N	7. $f(x) = \frac{4x + 1}{2x - 1}$; $x \in 2, 6, 10, 100, 1.000, 10.000, 100.000$ e $x \in -2, -6, -10, -100, -1.000, -10.000, -100.000$.
C I I D D	T>A	A N	8. $f(x) = \frac{5x - 3}{10x + 1}$; $x \in 2, 6, 10, 100, 1.000, 10.000, 100.000$ e $x \in -2, -6, -10, -100, -1.000, -10.000, -100.000$.
C I I D D	T>A	A N	9. $f(x) = \frac{x + 1}{x^2}$; $x \in 2, 6, 10, 100, 1.000, 10.000, 100.000$ e $x \in -2, -6, -10, -100, -1000, -10.000, -100.000$.

C I I D D	T>A	A N	10. $f(x) = \frac{x^2}{x+1}$; x é 2, 6, 10, 100, 1.000, 10.000, 100.000 e x é -2, -6, -10, -100, -1000, -10.000, -100.000.
			Nos Exercícios de 57 a 60, prove que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1$, aplicando a Definição 2.5.1; isto é, dado $\epsilon > 0$, mostre que existe um número $N > 0$ tal que se $x > N$, então $ f(x) - 1 < \epsilon$.
P		A	57. $f(x) = \frac{x}{x-1}$
P		A	58. $f(x) = \frac{2x}{2x+3}$
P		A	59. $f(x) = \frac{x^2-1}{x^2+1}$
P		A	60. $f(x) = \frac{x^2+2x}{x^2-1}$
P			61. Prove que $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{8x+3}{2x-1} = 4$, mostrando que para todo $\epsilon > 0$ existe um número $N < 0$, tal que se $x < N$ então $\left \frac{8x+3}{2x-1} - 4 \right < \epsilon$.
			63. Dê uma definição para cada um dos seguintes:
I		A	(a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$;
I		A	(b) $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$;
I		A	(c) $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$.
P		A	64. Prove que $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x^2 - 4) = +\infty$, mostrando que para todo $N > 0$ existe um $M > 0$ tal que se $x > M$ tal que se $x > M$ então $x^2 - 4 < N$.

P		A	65. Prove que $\lim_{x \rightarrow +\infty} (6 - x - x^2) = -\infty$ aplicando a definição do Exercício 63(a).
			Nos Exercícios de 1 a 22, faça um esboço do gráfico da função; então, observando onde há quebras no gráfico, determine os va-
			Nos Exercícios de 1 a 22, faça um esboço do gráfico da função; então, observando onde há quebras no gráfico, determine os valores da variável independente nos quais a função é descontínua e mostre por que a Definição 2.6.1 não é satisfeita em cada des-
			e mostre por que a Definição 2.6.1 não é satisfeita em cada descontinuidade.
C D P	A>GR GR>LN	A	1. $f(x) = \frac{x^2 + x - 6}{x + 3}$
C D P	A>GR GR>LN	A	2. $F(x) = \frac{x^2 - 3x - 4}{x - 4}$
C D P	GR>LN A>GR	A	3. $g(x) = \begin{cases} \frac{x^2 + x - 6}{x + 3} & \text{se } x \neq -3 \\ 1 & \text{se } x = -3 \end{cases}$
C D P	A>GR GR>LN	A	4. $G(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 3x - 4}{x - 4} & \text{se } x \neq 4 \\ 2 & \text{se } x = 4 \end{cases}$
C D P	A>GR GR>LN	A	5. $h(x) = \frac{5}{x - 4}$
C D P	A>GR GR>LN	A	6. $H(x) = \frac{1}{x + 2}$

C	A>GR	A	7. $f(x) = \begin{cases} \frac{5}{x-4} & \text{se } x \neq 4 \\ 2 & \text{se } x = 4 \end{cases}$
D	GR>LN		
P			
C	A>GR	A	8. $g(x) = \begin{cases} \frac{1}{x+2} & \text{se } x \neq -2 \\ 0 & \text{se } x = -2 \end{cases}$
D	GR>LN		
P			
C	A>GR	A	9. $F(x) = \frac{x^4 - 16}{x^2 - 4}$
D	GR>LN		
P			
C	A>GR	A	10. $h(x) = \frac{(x-1)(x^2 - x - 12)}{x^2 - 5x + 4}$
D	GR>LN		
P			
C	A>GR	A	11. $G(x) = \frac{x^2 - 4}{x^4 - 16}$
D	GR>LN		
P			
C	A>GR	A	12. $H(x) = \frac{x^2 - 5x + 4}{(x-1)(x^2 - x - 12)}$
D	GR>LN		
P			
C	A>GR	A	13. $f(x) = \begin{cases} -1 & \text{se } x < 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \\ \sqrt{x} & \text{se } 0 < x \end{cases}$
D	GR>LN		
P			
C	A>GR	A	14. $f(x) = \begin{cases} x-1 & \text{se } x < 1 \\ 1 & \text{se } x = 1 \\ 1-x & \text{se } 1 < x \end{cases}$
D	GR>LN		
P			
C	A>GR	A	15. $g(t) = \begin{cases} t^2 - 4 & \text{se } t < 2 \\ 4 & \text{se } t = 2 \\ 4 - t^2 & \text{se } 2 < t \end{cases}$
D	GR>LN		
P			

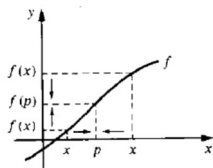
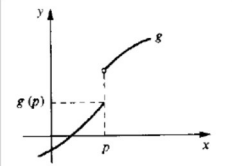
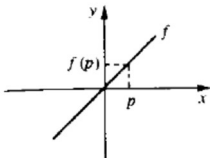
P			
C	A>GR	A	$16. H(x) = \begin{cases} 1+x & \text{se } x \leq -2 \\ 2-x & \text{se } -2 < x \leq 2 \\ 2x-1 & \text{se } 2 < x \end{cases}$
D	GR>LN		
P			
C	A>GR	A	$17. g(x) = \begin{cases} \sqrt{-x} & \text{se } x < 0 \\ \sqrt[3]{x+1} & \text{se } 0 \leq x \end{cases}$
D	GR>LN		
P			
C	A>GR	A	$18. f(t) = \begin{cases} t+2 & \text{se } t \neq -2 \\ 3 & \text{se } t = -2 \end{cases}$
D	GR>LN		
P			
C	A>GR	A	$19. f(x) = \frac{ x }{x}$
D	GR>LN		
P			
C	A>GR	A	$20. g(x) = \begin{cases} \frac{ x }{x} & \text{se } x \neq 0 \\ 1 & \text{se } x = 0 \end{cases}$
D	GR>LN		
P			
C	LN>GR	LN	21. A função maior inteiro.
D	GR>LN		
P			
C	LN>GR	LN	22. A função sinal (veja o Exemplo 1 na Secção 2.3).
D	GR>LN		
P			
			<i>Nos Exercícios de 33 a 42, determine os números nos quais a função dada é contínua.</i>
D		A	33. $f(x) = x^2(x+3)^2$
D		A	34. $f(x) = (x-5)^3(x^2+4)^5$

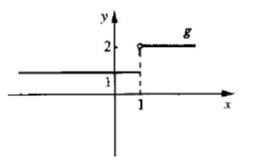
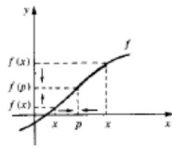
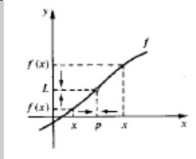
D		A	35. $g(x) = \frac{x}{x-3}$
D		A	36. $h(x) = \frac{x+1}{2x+5}$
D		A	37. $F(x) = \frac{x^3+7}{x^2-4}$
D		A	38. $G(x) = \frac{x-2}{x^2+2x-8}$
D		A	39. $f(x) = \begin{cases} 3x-1 & \text{se } x < 2 \\ 4-x^2 & \text{se } 2 \leq x \end{cases}$
D		A	40. $f(x) = \begin{cases} (x+2)^2 & \text{se } x \leq 0 \\ x^2+2 & \text{se } 0 < x \end{cases}$
D		A	41. $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x-2} & \text{se } x \leq 1 \\ \frac{1}{x} & \text{se } 1 < x \end{cases}$
D		A	42. $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x+1} & \text{se } x < 4 \\ \sqrt{x-4} & \text{se } 4 \leq x \end{cases}$
C D P	A>GR GR>LN	A	43. A função C do Exercício 35, nos Exercícios 2.3, está definida por $C(x) = \begin{cases} 0,80x & \text{se } 0 < x \leq 50 \\ 0,70x & \text{se } 50 < x \leq 200 \\ 0,65x & \text{se } 200 < x \end{cases}$ <p>(a) Faça um esboço do gráfico de C. (b) Em quais números C é descontínua? (c) Mostre por que a Definição 2.6.1 não é satisfeita em cada descontinuidade da parte (b).</p>
C D P	LN>A A>GR GR>LN	A	44. Suponha que a taxa postal de uma carta seja calculada da seguinte forma; \$ 0,22 por qualquer peso até os 30 primeiros gramas e então \$ 0,17 a cada 30 gramas, ou fração adicional, até 330 gramas adicionais. Se x gramas for o peso da carta e $0 < x \leq 360$, expresse a taxa postal como função de x . (a) faça um esboço do gráfico dessa função. (b) Em quais números do intervalo aberto $(0, 360)$ a função é descontínua? (c) Mostre por que a Definição 2.6.1 não é satisfeita em cada descontinuidade da parte (b).

C D	A>GR GR>LN	A	<p>45. Seja f a função definida por</p> $f(x) = \begin{cases} x - \llbracket x \rrbracket & \text{se } \llbracket x \rrbracket \text{ for par} \\ x - \llbracket x + 1 \rrbracket & \text{se } \llbracket x \rrbracket \text{ for ímpar} \end{cases}$ <p>Faça um esboço do gráfico de f. Em quais números f é descontínua?</p>
C D	A>GR GR>LN	A	<p>48. A função f é definida por</p> <p>Fonte: Elaborado pelo autor.</p> $f(x) = \lim_{n \rightarrow 0} \frac{1}{n^2 - nx}$ <p>Faça um esboço do gráfico de f. Em que valores de x f é descontínua?</p>

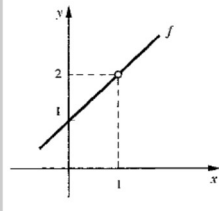
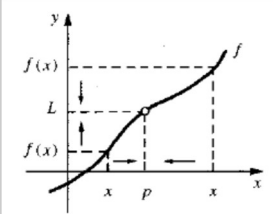
INVENTÁRIO DO TEXTO DO GUIDORIZZI

Quadro 20 - Inventário do texto do Guidorizzi.

Conversões	Tratamentos	Registros	Código	Representações
C1:LN>GR	T1: LN>LN	LN	HG.01.01	Intuitivamente, uma <i>função contínua em um ponto p de seu domínio</i> é uma função cujo gráfico não apresenta “salto” em p .
C2:LN>GR	T1: LN>LN	LN	HG.01.01'	
C1:LN>GR C3:GR>LN C4:GR>LN	T2: GR>GR	GR	HG.01.02	
C2:LN>GR C5:GR>LN	T2: GR>GR	GR	HG.01.03	
C3:GR>LN	T3: LN>LN	LN	HG.01.04	O gráfico de f não apresenta “salto” em p : f é <i>contínua</i> em p .
C4:GR>LN	T3: LN>LN T4: LN>LN	LN	HG.01.05	O gráfico de f não apresenta “salto” em p : f é <i>contínua</i> em p . Observe que à medida que x se aproxima de p , quer pela direita ou pela esquerda, os valores $f(x)$ se aproximam de $f(p)$; e quanto mais próximo x estiver de p , mais próximo estará $f(x)$ de $f(p)$. O mesmo
	T4: LN>LN T5: LN>LN	LN	HG.01.06	de $f(p)$; e quanto mais próximo x estiver de p , mais próximo estará $f(x)$ de $f(p)$. O mesmo
C5:GR>LN	T5: LN>LN T6: LN>LN T6: LN>LN	LN	HG.01.07 HG.01.07'	que x se aproxima de p , quer pela direita ou pela esquerda, os valores $f(x)$ se aproximam de $f(p)$; e quanto mais próximo x estiver de p , mais próximo estará $f(x)$ de $f(p)$. O mesmo não acontece com a função g em p : em p o gráfico de g apresenta “salto”, g não é <i>contínua</i> em p .
C6:A>GR	T7: A>A	A	HG.01.08	EXEMPLO 1. Consideremos as funções f e g dadas por $f(x) = x \text{ e } g(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \leq 1 \\ 2 & \text{se } x > 1 \end{cases}$
C7:A>GR	T7: A>A	A	HG.01.09	EXEMPLO 1. Consideremos as funções f e g dadas por $f(x) = x \text{ e } g(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \leq 1 \\ 2 & \text{se } x > 1 \end{cases}$
C6:A>GR C8:GR>LN	T8: GR>GR	GR	HG.01.10	

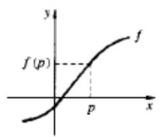
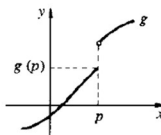
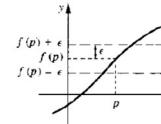
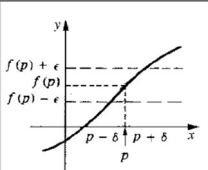
C7:A>GR C9:GR>LN	T8: GR>GR	GR	HG.01.11	
C8:GR>LN	T9: LN>LN	LN	HG.01.12	Vemos, intuitivamente, que f é contínua em todo p de seu domínio. Por sua vez, g não
C9:GR>LN	T9: LN>LN T10: LN>LN T10: LN>LN	LN LN	HG.01.13 HG.01.13'	Vemos, intuitivamente, que f é contínua em todo p de seu domínio. Por sua vez, g não contínua em $p = 1$, mas é contínua em todo $p \neq 1$.
C10:LN>A C10:LN>A C11:A>LN C11:A>LN C12:LN>GR C15:LN>GR		LN A LN	HG.01.14 HG.01.14' HG.01.14''	Intuitivamente, dizer que o limite de $f(x)$, quando x tende a p , é igual a L , que, simbolicamente, se escreve $\lim_{x \rightarrow p} f(x) = L$ significa que quando x tende a p , $f(x)$ tende a L .
C12:LN>GR C13:GR>LN	T11: GR>GR	GR	HG.01.16	
C13:GR>LN C14:LN>A		LN	HG.01.17	Quando x tende a p , $f(x)$ tende a $f(p)$: $\lim_{x \rightarrow p} f(x) = f(p)$
C14:LN>A		A	HG.01.18	Quando x tende a p , $f(x)$ tende a $f(p)$: $\lim_{x \rightarrow p} f(x) = f(p)$
C15:LN>GR C1A:GR>L N	T11: GR>GR	GR	HG.01.19	
C1A:GR>L N C16:LN>A		LN	HG.01.20	Quando x tende a p , $f(x)$ tende a L : $\lim_{x \rightarrow p} f(x) = L$
C16:LN>A		A	HG.01.21	Quando x tende a p , $f(x)$ tende a L : $\lim_{x \rightarrow p} f(x) = L$
C17:A>T C18:A>T C19:A>GR		A	HG.02.01	EXEMPLO 2. Utilizando a idéia intuitiva de limite, calcule $\lim_{x \rightarrow 1} (x + 1)$.

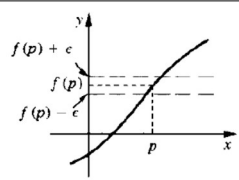
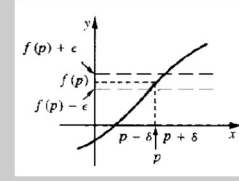
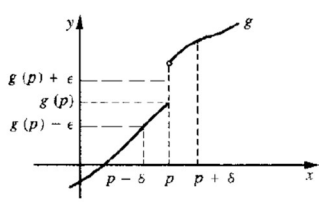
C17:A>T C20:T>GR C22:T>A	T12: T>T	T	HG.02.02	<table border="1"> <thead> <tr> <th>x</th> <th>x + 1</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>2</td> <td>3</td> </tr> <tr> <td>1,5</td> <td>2,5</td> </tr> <tr> <td>1,1</td> <td>2,1</td> </tr> <tr> <td>1,01</td> <td>2,01</td> </tr> <tr> <td>1,001</td> <td>2,001</td> </tr> <tr> <td>↓</td> <td>↓</td> </tr> <tr> <td>1</td> <td>2</td> </tr> </tbody> </table>	x	x + 1	2	3	1,5	2,5	1,1	2,1	1,01	2,01	1,001	2,001	↓	↓	1	2
x	x + 1																			
2	3																			
1,5	2,5																			
1,1	2,1																			
1,01	2,01																			
1,001	2,001																			
↓	↓																			
1	2																			
C18:A>T C21:T>GR C23:T>A	T12: T>T	T	HG.02.03	<table border="1"> <thead> <tr> <th>x</th> <th>x + 1</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>0,5</td> <td>1,5</td> </tr> <tr> <td>0,9</td> <td>1,9</td> </tr> <tr> <td>0,99</td> <td>1,99</td> </tr> <tr> <td>0,999</td> <td>1,999</td> </tr> <tr> <td>↓</td> <td>↓</td> </tr> <tr> <td>1</td> <td>2</td> </tr> </tbody> </table>	x	x + 1	0,5	1,5	0,9	1,9	0,99	1,99	0,999	1,999	↓	↓	1	2		
x	x + 1																			
0,5	1,5																			
0,9	1,9																			
0,99	1,99																			
0,999	1,999																			
↓	↓																			
1	2																			
C19:A>GR C20:T>GR C21:T>GR C24:GR>A		GR	HG.02.04																	
C22:T>A C23:T>A C24:GR>A		A	HG.02.05	$\lim_{x \rightarrow 1} (x + 1) = 2$																
	T13: A>A T15: A>A	A	HG.03.01	<p>EXEMPLO 3. Utilizando a idéia intuitiva de limite, calcule $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1}$</p>																
	T13: A>A T14: A>A	A	HG.03.02	$f(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 1}, x \neq 1;$																
C26:A>GR	T14: A>A T16: A>A T16: A>A T18: A>A	A A	HG.03.03 HG.03.03'	<p>Para $x \neq 1$</p> $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 1} = x + 1.$																
C25:A>GR	T15: A>A T17: A>A T17: A>A T18: A>A	A A	HG.03.04 HG.03.04'	$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} (x + 1) = 2.$																

C25:A>GR C26:A>GR		GR	HG.03.05	
C27:LN>A C27:LN>A C28:A>LN		LN A	HG.03.06 HG.03.06'	Intuitivamente, é razoável esperar que se f estiver definida em p e for contínua em p , então $\lim_{x \rightarrow p} f(x) = f(p)$, e reciprocamente. Veremos que isto realmente acontece, isto é, se f estiver definida em p
C28:A>LN C29:LN>A C29:LN>A		LN A	HG.03.07 HG.03.07'	f contínua em $p \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow p} f(x) = f(p)$.
C30:A>LN C30:A>LN C30:LN>GR C33:LN>GR	T19: LN>LN T19: LN>LN	A LN LN	HG.03.08 HG.03.08' HG.03.08''	Veremos, ainda, que se $\lim_{x \rightarrow p} f(x) = L$ e se f não for contínua em p , então L será aquele valor que f deveria ter em p para ser contínua neste ponto.
C30:LN>GR C31:GR>A		GR	HG.03.09	
C31:GR>A C32:A>LN C32:A>LN		A LN	HG.03.10 HG.03.10'	f não está definida em p . $\lim_{x \rightarrow p} f(x) = L$. L é o valor que f deveria ter em p para ser contínua em p .

C33:LN>GR C35:GR>A		GR	HG.03.11	
C35:GR>A C34:A>LN C34:A>LN		A LN	HG.03.12 HG.03.12'	$\lim_{x \rightarrow p} f(x) = L$, f está definida em p , mas $L \neq f(p)$. L é o valor que f deveria ter em p , para ser contínua em p .
	T20: A>A	A	HG.03.13	Com toda certeza $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(p+h) - f(p)}{h}$ é o limite mais importante que ocorre na matemática, e seu valor, quando existe, é indicado por $f'(p)$ (leia: f linha de p) e é denominado <i>derivada de f em p</i> :
	T20: A>A T21: A>A	A	HG.03.14	$f'(p) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(p+h) - f(p)}{h}$
C35:A>GR	T21: A>A	A	HG.03.15	Este limite aparece de forma <i>natural</i> quando se procura definir reta tangente ao gráfico de f no ponto $(p, f(p))$. O quociente $\frac{f(p+h) - f(p)}{h}$, chamado às vezes de <i>razão incremental</i> , nada mais é do que o coeficiente angular da reta s que passa pelos pontos $M = (p, f(p))$ e $N = (p+h, f(p+h))$ do gráfico de $y = f(x)$
C35:A>GR C36:GR>A	T22: GR>GR	GR	HG.03.16	
C37:GR>A C39:GR>LN	T22: GR>GR	GR	HG.03.17	
C36:GR>A C37:GR>A	T23: A>A	A	HG.03.18	$y - f(p) = m_s(x - p)$
C38:GR>LN	T23: A>A	A	HG.03.19	$m_s = \frac{f(p+h) - f(p)}{h}$

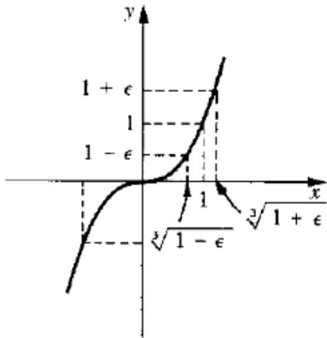
C38:GR>LN C39:GR>LN C40:LN>A		LN	HG.03.20	<p>onde $m_t = \frac{f(p+h) - f(p)}{h}$. Quando h tende a zero, o ponto N vai se aproximando cada vez mais de M, e a reta s vai tendendo para a posição da reta T de equação</p>
C40:LN>A		A	HG.03.21	$y - f(p) = f'(p)(x - p).$
	T24: A>A	A	HG.04.01	EXEMPLO 4. Seja $f(x) = x^2$. Utilizando a idéia intuitiva de limite, calcule
	T24: A>A T25: A>A T32: A>A	A	HG.04.02	$f'(1) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+h) - f(1)}{h}$
	T25: A>A T30: A>A T30: A>A T31: A>A	A A	HG.04.03 HG.04.03'	$\frac{f(1+h) - f(1)}{h} = \frac{(1+h)^2 - 1^2}{h} = 2 + h \quad (h \neq 0)$
	T31: A>A T32: A>A	A	HG.04.04	$f'(1) = \lim_{h \rightarrow 0} (2 + h) = 2.$
	T33: A>A	A	HG.05.01	EXEMPLO 5. Seja $f(x) = x^2$. Utilizando a idéia intuitiva de limite, calcule
	T33: A>A T34: A>A T38: A>A T40: A>A	A	HG.05.02	$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$
	T34: A>A T35: A>A T35: A>A T36: A>A T36: A>A T37: A>A	A A A	HG.05.03 HG.05.03' HG.05.03''	$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \frac{(x+h)^2 - x^2}{h} = 2x + h \quad (h \neq 0)$
	T37: A>A T38: A>A T39: A>A	A	HG.05.04	$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} (2x + h) = 2x.$

	T39: A>A	A	HG.05.05	Ou seja, a derivada, em x , de $f(x) = x^2$ é $f'(x) = 2x$.
	T40: A>A	A	HG.05.06	$f'(p) = \lim_{x \rightarrow p} \frac{f(x) - f(p)}{x - p}$
	T41: A>A	A	HG.06.01	EXEMPLO 6. Seja $f(x) = x^3$. Utilizando a idéia intuitiva de limite, calcule
	T41: A>A T42: A>A T46: A>A	A	HG.06.02	$f'(2) = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2}$
	T42: A>A T43: A>A T43: A>A T44: A>A T44: A>A T45: A>A	A A A	HG.06.03 HG.06.03' HG.06.03''	$\frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = \frac{x^3 - 2^3}{x - 2} = x^2 + 2x + 4, x \neq 2.$
	T45: A>A T46: A>A	A	HG.06.04	$f'(2) = \lim_{x \rightarrow 2} (x^2 + 2x + 4) = 12.$
C41:GR>LN	T47: GR>GR	GR	HG.07.01	
C42:GR>LN	T47: GR>GR	GR	HG.07.02	
C41:GR>LN C43:LN>GR		LN	HG.07.03	Observe que f e g se comportam de modo diferente em p ; o gráfico “salto” em p , ao passo que o de g , sim. Queremos destacar uma propriedade
C42:GR>LN C4T:LN>GR		LN	HG.07.04	Observe que f e g se comportam de modo diferente em p ; o gráfico “salto” em p , ao passo que o de g , sim. Queremos destacar uma propriedade
C43:LN>GR	T48: GR>GR T49: GR>GR	GR	HG.07.05	
C44:GR>A	T48: GR>GR	GR	HG.07.06	

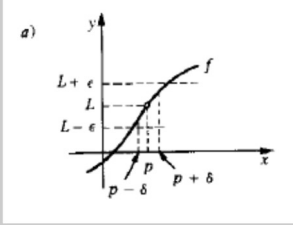
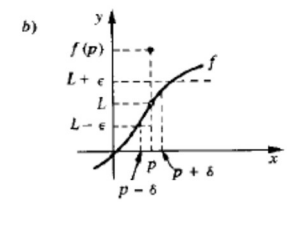
	T49: GR>GR T50: GR>GR	GR	HG.07.07	
C45:GR>A	T50: GR>GR	GR	HG.07.08	
C44:GR>A C45:GR>A	T51: A>A	A	HG.07.09	para todo $\epsilon > 0$ dado, existe $\delta > 0$ (δ dependendo de ϵ), tal que $f(x)$ permanece entre $f(p) - \epsilon$ e $f(p) + \epsilon$ quando x percorre o intervalo $]p - \delta, p + \delta[$, com x no domínio de f .
	T51: A>A T52: A>A	A	HG.07.10	para todo $\epsilon > 0$ dado, existe $\delta > 0$ (δ dependendo de ϵ), tal que, para todo $x \in D_f$, $p - \delta < x < p + \delta \Rightarrow f(p) - \epsilon < f(x) < f(p) + \epsilon.$
C4T:LN>GR C4Y:GR>A		GR	HG.07.11	
C4Y:GR>A	T5Q: A>A	A	HG.07.12	para o $\epsilon > 0$ acima, não existe $\delta > 0$ que torne verdadeira a afirmação $\forall x \in D_f, p - \delta < x < p + \delta \Rightarrow g(p) - \epsilon < g(x) < g(p) + \epsilon.$
	T5Q: A>A	A	HG.07.13	Qualquer que seja o $\delta > 0$ que se tome, quando x percorre o intervalo $]p - \delta, p + \delta[$, não permanece entre $g(p) - \epsilon$ e $g(p) + \epsilon$.
C4Q:LN>A C4Q:LN>A	T52: A>A T53: A>A	LN A	HG.07.14 HG.07.14'	Definição. Sejam f uma função e p um ponto de seu domínio. Definimos: $f \text{ contínua em } p \Leftrightarrow \begin{cases} \text{Para todo } \epsilon > 0 \text{ dado, existe } \delta > 0 \text{ (} \delta \text{ dependendo de } \epsilon \text{), tal} \\ \text{que, para todo } x \in D_f, \\ p - \delta < x < p + \delta \Rightarrow f(p) - \epsilon < f(x) < f(p) + \epsilon. \end{cases}$
C46:A>LN C4W:LN>A	T53: A>A	LN A	HG.07.15 HG.07.15'	$f \text{ contínua em } p \Leftrightarrow \begin{cases} \text{Para todo } \epsilon > 0 \text{ dado, existe } \delta > 0 \text{ tal que,} \\ x - p < \delta \Rightarrow f(x) - f(p) < \epsilon. \end{cases}$
C46:A>LN	T54: LN>LN T5E: LN>LN	LN LN	HG.07.16 HG.07.16'	Dizemos que f é contínua em $A \subset D_f$ se f for contínua em todo $p \in A$. Dizemos que f é uma função contínua se f for contínua em todo p de seu domínio.

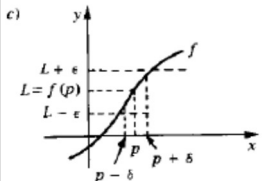
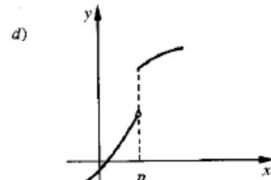
	T5E: LN>LN			
	T54: LN>LN T5R: LN>LN T5R: LN>LN	LN LN	HG.07.17 HG.07.17'	Dizemos que f é contínua em $A \subset D_f$ se f for contínua em todo $p \in A$. mente, que f é uma função contínua se f for contínua em todo p de seu domínio.
C47:LN>A C48:LN>A		LN	HG.08.01	EXEMPLO 1. Prove que $f(x) = 2x + 1$ é contínua em $p = 1$.
C47:LN>A	T55: A>A	A	HG.08.02	Precisamos provar que, para cada $\epsilon > 0$ dado, conseguiremos um $\delta > 0$ tal que $1 - \delta < x < 1 + \delta \Rightarrow f(1) - \epsilon < f(x) < f(1) + \epsilon$
C4U:A>LN C4U:A>LN	T55: A>A	A LN	HG.08.02 HG.08.02'	Então, dado $\epsilon > 0$ e tomando-se $\delta = \frac{\epsilon}{2}$ (qualquer $\delta > 0$ com $\delta < \frac{\epsilon}{2}$) resulta $1 - \delta < x < 1 + \delta \Rightarrow f(1) - \epsilon < f(x) < f(1) + \epsilon$ Logo, f é contínua em $p = 1$.
C48:LN>A	T56: A>A	A	HG.08.03	O exemplo acima pode também ser resolvido em notação de módulo. Precisamos provar que dado $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que $ x - 1 < \delta \Rightarrow f(x) - f(1) < \epsilon.$
C4:A>LN C4:A>LN	T56: A>A	A LN	HG.08.04 HG.08.04'	Assim, dado $\epsilon > 0$ e tomando-se $\delta = \frac{\epsilon}{2}$ $ x - 1 < \delta \Rightarrow f(x) - f(1) < \epsilon.$ Logo, f é contínua em $p = 1$.
C49:LN>A		LN	HG.09.01	EXEMPLO 2. A função constante $f(x) = k$ é contínua em todo p real.
C49:LN>A C50:A>LN		A	HG.09.02	$ f(x) - f(p) = k - k = 0$ para todo x e todo p ; assim, dado $\epsilon > 0$ e tomando-se um $\delta > 0$ qualquer $ x - p < \delta \Rightarrow f(x) - f(p) = k - k < \epsilon.$
C50:A>LN	T57: LN>LN	LN	HG.09.03	Logo, f é contínua em p , qualquer que seja p . Como f é contínua em todo p de seu domínio, resulta que $f(x) = k$ é uma função contínua. ■
	T57: LN>LN	LN	HG.09.04	Logo, f é contínua em p , qualquer que seja p . Como f é contínua em todo p de seu domínio, resulta que $f(x) = k$ é uma função contínua. ■

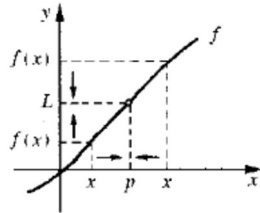
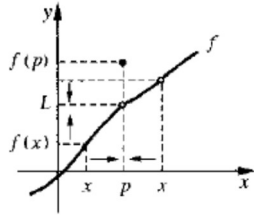
C51:LN>A		LN	HG.10.01	EXEMPLO 3. A função afim $f(x) = ax + b$ (a e b constantes) é contínua.
C51:LN>A C52:A>LN		A	HG.10.02	$ f(x) - f(p) = ax + b - ap - b = a x - p .$ <p>Assim, para todo $\epsilon > 0$ dado</p> $ f(x) - f(p) < \epsilon \Leftrightarrow x - p < \frac{\epsilon}{ a }.$ <p>Tomando-se, então, $\delta = \frac{\epsilon}{ a }$</p> $ x - p < \delta \Rightarrow f(x) - f(p) < \epsilon$
C52:A>LN	T58: LN>LN	LN	HG.10.03	logo, f é contínua em p . Como p foi tomado de modo arbitrário, resulta que f é contínua em todo p real, isto é, f é contínua.
	T58: LN>LN	LN	HG.10.04	logo, f é contínua em p . Como p foi tomado de modo arbitrário, resulta que f é contínua em todo p real, isto é, f é contínua.
C40:A>LN C40:A>LN	T59: A>A	A LN	HG.11.01 HG.11.01'	EXEMPLO 4. Prove que, se para todo $\epsilon > 0$ dado existir um intervalo com $p \in I$, tal que para todo $x \in D_f$ $x \in I \Rightarrow f(p) - \epsilon < f(x) < f(p) + \epsilon$ então f será contínua em p .
	T59: A>A T60: A>A	A	HG.11.02	Pela hipótese, para todo $\epsilon > 0$ dado existe um intervalo aberto $I =]a, b[$ $\textcircled{1} \quad x \in]a, b[\Rightarrow f(p) - \epsilon < f(x) < f(p) + \epsilon$
C53:A>LN	T60: A>A	A	HG.11.03	Segue de $\textcircled{1}$ que $x \in]p - \delta, p + \delta[\Rightarrow f(p) - \epsilon < f(x) < f(p) + \epsilon.$
C53:A>LN		A	HG.11.04	Logo, f é contínua em p .
C54:A>LN		LN	HG.12.01	EXEMPLO 5. Seja $r > 0$ um real dado. Suponha que, para todo $\epsilon < r$ intervalo aberto I , com $p \in I$, tal que para todo $x \in D_f$ $x \in I \Rightarrow f(p) - \epsilon < f(x) < f(p) + \epsilon.$ Prove que f é contínua em p .
C54:A>LN C55:LN>A		LN	HG.12.02	EXEMPLO 5. Seja $r > 0$ um real dado. Suponha que, para todo $\epsilon < r$ intervalo aberto I , com $p \in I$, tal que para todo $x \in D_f$ $x \in I \Rightarrow f(p) - \epsilon < f(x) < f(p) + \epsilon.$ Prove que f é contínua em p .

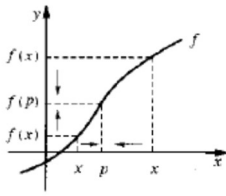
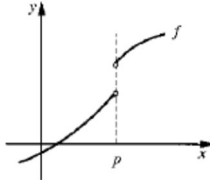
C55:LN>A	T61: A>A	LN	HG.12.03	<p>Precisamos provar (tendo em vista o exemplo anterior) que, para todo intervalo aberto I, com $p \in I$, tal que para todo x em D_f</p> $x \in I \Rightarrow f(p) - \epsilon < f(x) < f(p) + \epsilon.$
	T61: A>A T62: A>A	A	HG.12.04	<p>Pela hipótese, se $\epsilon < r$, existe tal intervalo. Suponhamos, então, $\epsilon \geq r$. Seja $0 < \epsilon_1 < r$. Pela hipótese, para o ϵ_1 dado, existe I tal que</p> $x \in I \Rightarrow f(p) - \epsilon_1 < f(x) < f(p) + \epsilon_1.$
	T62: A>A T63: A>A	A	HG.12.05	<p>Para este mesmo I teremos, também,</p> $x \in I \Rightarrow f(p) - \epsilon < f(x) < f(p) + \epsilon$ <p>pois, $f(p) - \epsilon < f(p) - \epsilon_1$ e $f(p) + \epsilon_1 < f(p) + \epsilon$. (Interprete graficamente)</p>
C4P:LN>A C4P:LN>A	T63: A>A	LN A	HG.12.06 HG.12.05'	<p>para f ser <i>contínua</i> em p, basta que, para cada $\epsilon < r$, $\epsilon > 0$ (onde $r > priori$), exista um intervalo aberto I, com $p \in I$, tal que, para todo x em</p> $x \in I \Rightarrow f(p) - \epsilon < f(x) < f(p) + \epsilon.$
C56:LN>GR		A	HG.13.01	EXEMPLO 6. Mostre que $f(x) = x^3$ é contínua em 1.
C56:LN>GR C57:GR>A		GR	HG.13.02	
C57:GR>A	T64: A>A	A	HG.13.03	<p>Precisamos mostrar que dado $\epsilon > 0$, existe um intervalo aberto I, com</p> $x \in I \Rightarrow f(1) - \epsilon < f(x) < f(1) + \epsilon.$
C58:A>LN	T64: A>A	A	HG.13.04	<p>Vamos resolver a inequação $f(1) - \epsilon < f(x) < f(1) + \epsilon$. Temos</p> $f(1) - \epsilon < f(x) < f(1) + \epsilon \Leftrightarrow 1 - \epsilon < x^3 < 1 + \epsilon \Leftrightarrow \sqrt[3]{1 - \epsilon} < x < \sqrt[3]{1 + \epsilon}$ <p>Tomando-se $I =]\sqrt[3]{1 - \epsilon}, \sqrt[3]{1 + \epsilon}[$, $1 \in I$,</p> $x \in I \Rightarrow f(1) - \epsilon < f(x) < f(1) + \epsilon.$
C58:A>LN		LN	HG.13.05	Logo, $f(x) = x^3$ é contínua em 1.

	T65: LN>LN	LN	HG.14.01	EXEMPLO 7. Prove que $f(x) = x^2$ é contínua. - -
C59:LN>A C61:LN>A C63:LN>A	T65: LN>LN	LN	HG.14.02	Precisamos provar que f é contínua em todo p real ($D_f = \mathbb{R}$).
C59:LN>A C4X:LN>A C4X:LN>A	T66: A>A	LN A	HG.14.03 HG.14.04	Primeiro vamos provar que f é contínua em 0. Convém, aqui, usar a propriedade de módulo. Vamos provar, então, que dado $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal $ x - 0 < \delta \Rightarrow x^2 - 0^2 < \epsilon.$
C60:A>LN	T66: A>A	A	HG.15.05	Para se ter $ x^2 < \epsilon$, basta que se tenha $ x < \sqrt{\epsilon}$. Tomando-se $\delta = \sqrt{\epsilon}$, temos $ x - 0 < \delta \Rightarrow x^2 - 0^2 < \epsilon.$
C60:A>LN	T67: A>A	LN	HG.15.06	Logo, $f(x) = x^2$ é contínua em 0.
C61:LN>A C62:A>LN		LN	HG.15.07	Vamos provar, agora, a continuidade de f em todo $p \neq 0$. Temos $f(p) - \epsilon < f(x) < f(p) + \epsilon \Leftrightarrow p^2 - \epsilon < x^2 < p^2 + \epsilon$ Para $\epsilon < p^2$, $\epsilon > 0$, $p^2 - \epsilon < x^2 < p^2 + \epsilon \Leftrightarrow \sqrt{p^2 - \epsilon} < x < \sqrt{p^2 + \epsilon}.$ Se $p > 0$, tomamos $I =]\sqrt{p^2 - \epsilon}, \sqrt{p^2 + \epsilon}[$, assim $x \in I \Rightarrow p^2 - \epsilon < x^2 < p^2 + \epsilon.$
C63:LN>A C64:A>LN		A	HG.15.08	Se $p < 0$, tomamos $I =]-\sqrt{p^2 + \epsilon}, -\sqrt{p^2 - \epsilon}[$, assim $x \in I \Rightarrow p^2 - \epsilon < x^2 < p^2 + \epsilon.$
C62:A>LN C64:A>LN	T67: A>A	LN	HG.15.09	Logo, $f(x) = x^2$ é contínua em todo p real. (Interprete graficamente.)
	T68: LN>LN	LN	HG.16.01	EXEMPLO 8. $f(x) = \begin{cases} 2 & \text{se } x \geq 1 \\ 1 & \text{se } x < 1 \end{cases}$ é contínua em $p = 1$? Justifique.
C65:LN>A	T68: LN>LN T65: LN>LN T65: LN>LN	LN LN	HG.16.02 HG.16.02'	Intuitivamente, vemos que f não é contínua em $p = 1$, pois o gráfico não é contínuo neste ponto. Para provar que f não é contínua em $p = 1$, precisamos achar

C65:LN>A C67:A>LN C65:LN>A C65:LN>A	T69: A>A	LN A	HG.16.03 HG.16.03'	<p>neste ponto. Para provar que f não é contínua em $p = 1$, precisamos achar qual não exista $\delta > 0$ que torne verdadeira a afirmação</p> <p>$\forall x \in D_f, 1 - \delta < x < 1 + \delta \Rightarrow f(1) - \epsilon < f(x) < f(1) + \epsilon$</p>
	T69: A>A T70: A>A	A	HG.16.04	<p>Como $f(x) = 1$ para $x < 1$ e $f(1) = 2$, tomando-se $\epsilon = \frac{1}{2}$ (ou $0 < \epsilon < 1$), para</p> <p>$1 - \delta < x < 1 \Rightarrow f(x) = 1$</p> <p>e 1 não está entre $f(1) - \frac{1}{2}$ e $f(1) + \frac{1}{2}$.</p>
C66:A>LN	T70: A>A	A	HG.16.05	<p>e 1 não está entre $f(1) - \frac{1}{2}$ e $f(1) + \frac{1}{2}$. Logo, não existe $\delta > 0$ que torne verdadeira a afirmação</p> <p>$\forall x \in D_f, 1 - \delta < x < 1 + \delta \Rightarrow f(1) - \frac{1}{2} < f(x) < f(1) + \frac{1}{2}$</p>
C66:A>LN		LN	HG.16.06	<p>Portanto, a função dada não é contínua em $p = 1$. Observe que f é contínua em $p = 1$.</p>
C67:A>LN		LN	HG.16.07	<p>Portanto, a função dada não é contínua em $p = 1$. Observe que f é contínua em $p = 1$.</p>
C68:GR>LN	T71: GR>GR	GR	HG.15.01	
C69:GR>LN	T71: GR>GR T72: GR>GR	GR	HG.15.02	

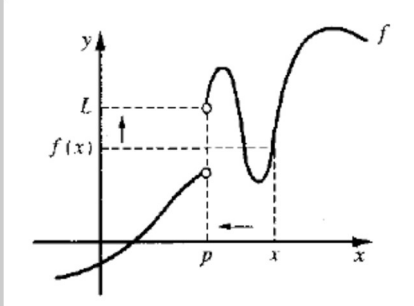
C70:GR>LN	T72: GR>GR T73: GR>GR	GR	HG.15.03	
C71:GR>LN	T73: GR>GR	GR	HG.15.04	
C68:GR>LN C72:LN>A		LN	HG.15.05	Na situação (a), f não está definida em p , mas existe L que satisfaz a propriedade:
C72:LN>A	T7Q: A>A	A	HG.15.06	<p>para todo $\epsilon > 0$ dado, existe $\delta > 0$ tal que, para todo $x \in D_f$,</p> <p>① $p - \delta < x < p + \delta, x \neq p \Rightarrow L - \epsilon < f(x) < L + \epsilon.$</p>
C69:GR>LN C73:LN>A	T74: LN>LN T74: LN>LN	LN LN	HG.15.07 HG.15.07'	Na situação (b), f está definida em p , mas não é contínua em p , entretanto existe L satisfazendo ①; observe que neste caso a restrição $x \neq p$ é essencial. Na situação (c), f é contínua em p , assim $L = f(p)$ satisfaz ①. Finalmente, na situação (d), não existe L satisfazendo ① em p .
C70:GR>LN C88:LN>A		LN	HG.15.08	Na situação (b), f está definida em p , mas não é contínua em p , entretanto existe L satisfazendo ①; observe que neste caso a restrição $x \neq p$ é essencial. Na situação (c), f é contínua em p , assim $L = f(p)$ satisfaz ①. Finalmente, na situação (d), não existe L satisfazendo ① em p .
C71:GR>LN C89:LN>A		LN	HG.15.09	Na situação (b), f está definida em p , mas não é contínua em p , entretanto existe L satisfazendo ①; observe que neste caso a restrição $x \neq p$ é essencial. Na situação (c), f é contínua em p , assim $L = f(p)$ satisfaz ①. Finalmente, na situação (d), não existe L satisfazendo ① em p .
C73:LN>A C88:LN>A C89:LN>A	T7Q: A>A T7Z: A>A	A	HG.15.10	<p>para todo $\epsilon > 0$ dado, existe $\delta > 0$ tal que, para todo $x \in D_f$,</p> <p>$0 < x - p < \delta \Rightarrow f(x) - L < \epsilon.$</p>

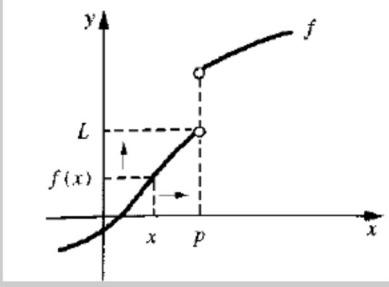
C76:LN>A	T80: A>A	LN	HG.15.18	<p>Definição. Sejam f uma função e p um ponto do domínio de f ou extremidade de um dos intervalos que compõem o domínio de f. Dizemos que f tem limite L, em p, se, para todo $\epsilon > 0$ dado, existir um $\delta > 0$ tal que, para todo $x \in D_f$,</p> $0 < x - p < \delta \Rightarrow f(x) - L < \epsilon.$ <p>Tal número L, que quando existe é único, será indicado por $\lim_{x \rightarrow p} f(x)$.</p> <p>Assim</p> $\lim_{x \rightarrow p} f(x) = L \Leftrightarrow \begin{cases} \forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0 \text{ tal que, para todo } x \in D_f \\ 0 < x - p < \delta \Rightarrow f(x) - L < \epsilon. \end{cases}$
C76:LN>A	T81: A>A	A	HG.15.18'	
	T81: A>A	A	HG.15.18''	
	T82: A>A			
C77:LN>A	T82: A>A	A	HG.15.19	<p>Definição. Sejam f uma função e p um ponto do domínio de f ou extremidade de um dos intervalos que compõem o domínio de f. Dizemos que f tem limite L, em p, se, para todo $\epsilon > 0$ dado, existir um $\delta > 0$ tal que, para todo $x \in D_f$,</p> $0 < x - p < \delta \Rightarrow f(x) - L < \epsilon.$ <p>Tal número L, que quando existe é único, será indicado por $\lim_{x \rightarrow p} f(x)$.</p> <p>Assim</p> $\lim_{x \rightarrow p} f(x) = L \Leftrightarrow \begin{cases} \forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0 \text{ tal que, para todo } x \in D_f \\ 0 < x - p < \delta \Rightarrow f(x) - L < \epsilon. \end{cases}$
C77:LN>A		A	HG.15.19'	
C78:A>GR				
C79:A>GR				
C80:A>GR				
C81:A>GR				
C82:A>LN				
C78:A>GR		GR	HG.15.20	
C83:GR>A				
C83:GR>A		A	HG.15.21	$\lim_{x \rightarrow p} f(x) = L$
C79:A>GR		GR	HG.15.22	
C84:GR>A				
C84:GR>A		A	HG.15.23	$\lim_{x \rightarrow p} f(x) = L \quad (L \neq f(p))$

C80:A>GR C85:GR>A		GR	HG.15.24	
C85:GR>A		A	HG.15.25	$\lim_{x \rightarrow p} f(x) = f(p)$
C81:A>GR C86:GR>A		GR	HG.15.26	
C86:GR>A		LN	HG.15.27	$f \text{ não tem limite em } p$
C82:A>LN C87:LN>A C87:LN>A	T83: A>A C87:LN>A C87:LN>A	LN A	HG.15.28 HG.15.28'	$f \text{ contínua em } p \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow p} f(x) = f(p).$
	T83: A>A T84: A>A	A	HG.15.29	<p>3. Sejam f e g duas funções. Se existir $r > 0$ tal que $f(x) = g(x)$ para $p - r < x < p + r$ e se $\lim_{x \rightarrow p} g(x)$ existir, então $\lim_{x \rightarrow p} f(x)$ também existirá e</p> $\lim_{x \rightarrow p} f(x) = \lim_{x \rightarrow p} g(x). \text{ (Por quê?)}$
	T84: A>A T85: A>A	A	HG.15.30	<p>3. Sejam f e g duas funções. Se existir $r > 0$ tal que $f(x) = g(x)$ para $p - r < x < p + r$ e se $\lim_{x \rightarrow p} g(x)$ existir, então $\lim_{x \rightarrow p} f(x)$ também existirá e</p> $\lim_{x \rightarrow p} f(x) = \lim_{x \rightarrow p} g(x). \text{ (Por quê?)}$
	T85: A>A T86: A>A	A	HG.15.31	<p>3. Sejam f e g duas funções. Se existir $r > 0$ tal que $f(x) = g(x)$ para $p - r < x < p + r$ e se $\lim_{x \rightarrow p} g(x)$ existir, então $\lim_{x \rightarrow p} f(x)$ também existirá e</p> $\lim_{x \rightarrow p} f(x) = \lim_{x \rightarrow p} g(x). \text{ (Por quê?)}$

	T86: A>A	A	HG.15.32	<p>3. Sejam f e g duas funções. Se existir $r > 0$ tal que $f(x) = g(x)$ para $p - r < x < p + r$ e se $\lim_{x \rightarrow p} g(x)$ existir, então $\lim_{x \rightarrow p} f(x)$ também existirá e</p> $\lim_{x \rightarrow p} f(x) = \lim_{x \rightarrow p} g(x). \text{ (Por quê?)}$
	T90: A>A	A	HG.16.01	<p>EXEMPLO 1. Calcule $\lim_{x \rightarrow p} k$ (k constante).</p>
	T90: A>A T91: A>A	A	HG.16.02	<p>O que queremos aqui é $\lim_{x \rightarrow p} f(x)$, onde f é a função constante $f(x) = k$ contínua em todo p real</p> $\lim_{x \rightarrow p} k = \lim_{x \rightarrow p} f(x) = f(p) = k$
	T91: A>A T92: A>A	A	HG.16.03	<p>O que queremos aqui é $\lim_{x \rightarrow p} f(x)$, onde f é a função constante $f(x) = k$ contínua em todo p real</p> $\lim_{x \rightarrow p} k = \lim_{x \rightarrow p} f(x) = f(p) = k$
	T92: A>A T92': A>A	A	HG.16.04	<p>O que queremos aqui é $\lim_{x \rightarrow p} f(x)$, onde f é a função constante $f(x) = k$ contínua em todo p real</p> $\lim_{x \rightarrow p} k = \lim_{x \rightarrow p} f(x) = f(p) = k$
C90: A>LN	T92: A>A	A	HG.16.05	<div style="border: 1px solid black; padding: 5px; width: fit-content; margin: auto;"> $\lim_{x \rightarrow p} k = k$ </div>
C90: A>LN		LN	HG.16.06	(O limite de uma constante é a própria constante.)
	T93: A>A	A	HG.17.01	<p>EXEMPLO 2. Calcule $\lim_{x \rightarrow 2} (3x - 2)$.</p>
	T93: A>A	A	HG.17.02	$\lim_{x \rightarrow 2} (3x - 2) = f(2) = 4.$
	T94: A>A	A	HG.18.01	<p>EXEMPLO 3. Calcule $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1}$.</p>
C91: A>LN	T94: A>A	A	HG.18.02	$\frac{x^2 - 1}{x - 1} = x + 1 \text{ para } x \neq 1; g(x) = x + 1 \text{ é contínua em } 1, \text{ logo } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = 2.$ <p>Como</p>
C91: A>LN	T95: A>A	A	HG.18.02'	
	T95: A>A	A	HG.18.02''	

	T96: A>A T96: A>A T97: A>A	A	HG.18.02''	
	T97: A>A T98: A>A T98: A>A T99: A>A T99: A>A T100: A>A	A A A	HG.18.03 HG.18.03' HG.18.03''	<p>Como</p> $\frac{x^2 - 1}{x - 1} = g(x) \text{ para } x \neq 1$ <p>segue da observação 3, que</p> $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} (x + 1) = 2.$
C92: A>LN C92: A>LN	T100: A>A	A	HG.18.04 HG.18.04'	(2 é o valor que $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 1}$ deveria ter em 1 para ser contínua neste ponto.)
	T101: A>A	A	HG.19.01	<p>EXEMPLO 4. Calcule $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ onde $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 1}{x - 1} \\ 3 \end{cases}$</p> <p><i>Solução</i></p>
	T101: A>A T102: A>A T102: A>A T103: A>A T103: A>A T104: A>A	A A A	HG.19.02 HG.19.02' HG.19.02''	<p>Para $x \neq 1$, $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 1} = x + 1$; assim</p> $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} (x + 1) = 2 \neq f$
	T104: A>A T105: A>A	A	HG.19.03	<p>Para $x \neq 1$, $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 1} = x + 1$; assim</p> $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} (x + 1) = 2 \neq f$
	T105: A>A	A	HG.19.04	<p>Para $x \neq 1$, $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 1} = x + 1$; assim</p> $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} (x + 1) = 2 \neq f$

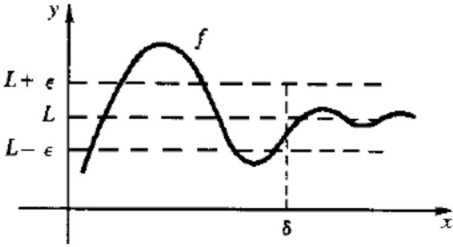
T106: A>A T106: A>A T107: A>A T107: A>A T108: A>A	A A A A A	HG.20.01 HG.20.01' HG.20.01''	<p>EXEMPLO 5. As funções dadas por $f(x) = x^n$ e $g(x) = \sqrt[n]{x}$ ($n \geq 1$ n (Verifique.) Assim</p> $\lim_{x \rightarrow p} x^n = p^n, \text{ para todo } p \text{ real,}$
T108: A>A T109: A>A T109: A>A	A A A	HG.20.02 HG.20.02'	$\lim_{x \rightarrow p} \sqrt[n]{x} = \sqrt[n]{p}, \text{ para todo } p \text{ no domínio de } g(x) = \sqrt[n]{x}$
C93: LN>A C93: LN>A C94: A>LN	A A A	HG.21.01 HG.21.01'	<p>Sejam f uma função, p um número real e suponhamos que existe b ta Definimos:</p> $\lim_{x \rightarrow p^+} f(x) = L \Leftrightarrow \begin{cases} \forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0 \text{ tal que} \\ p < x < p + \delta \Rightarrow f(x) - L < \epsilon \end{cases}$
C94: A>LN C95: LN>GR	LN	HG.21.02	O número L , quando existe, denomina-se <i>limite lateral à direita de f</i> , em
C95: LN>GR C96: GR>LN	GR	HG.21.03	
C96: GR>LN C97: GR>A C97: GR>A	LN A	HG.21.04 HG.21.04'	<p>Quando x tende a p, pela direita, $f(x)$ tende a L: $\lim_{x \rightarrow p^+} f(x) = L$</p>
C98: A>LN T110: A>A T110: A>A	A A A	HG.21.05 HG.21.05'	<p>Suponhamos, agora, que exista um real a tal que $]a, p[\subset D_f$. Definir</p> $\lim_{x \rightarrow p^-} f(x) = L \Leftrightarrow \begin{cases} \forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0 \text{ tal que} \\ p - \delta < x < p \Rightarrow f(x) - L < \epsilon. \end{cases}$
C98: A>LN C99: LN>GR	LN	HG.21.06	O número L , quando existe, denomina-se <i>limite lateral à esquerda de f</i> ,

<p>C99: LN>GR</p> <p>C100: GR>LN</p>		GR	HG.21.07	
<p>C100: GR>LN</p> <p>C101: LN>A</p> <p>C101: LN>A</p>	T111: A>A	LN A	HG.21.08 HG.21.08'	<p>Quando x tende a p, pela esquerda, $f(x)$ tende a L:</p> $\lim_{x \rightarrow p^-} f(x) = L$
	<p>T113: A>A</p> <p>T114: A>A</p> <p>T114: A>A</p> <p>T115: A>A</p> <p>T115: A>A</p> <p>T116: A>A</p>	A A A	HG.21.09 HG.21.09' HG.21.09''	<p>É uma consequência imediata das definições de limite e de limite</p> <p>$\lim_{x \rightarrow p} g(x) = L$ e se, para algum $r > 0$, $f(x) = g(x)$ em $]p, p + r[$, então</p> <p>$\lim_{x \rightarrow p^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow p} g(x) = L$. Se ocorrer $f(x) = g(x)$ em $]p - r, p[$, então</p>
	<p>T111: A>A</p> <p>T112: A>A</p> <p>T112: A>A</p> <p>T116: A>A</p>	A A	HG.21.10 HG.21.10'	<p>$\lim_{x \rightarrow p^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow p} g(x) = L$. Se ocorrer $f(x) = g(x)$ em $]p - r, p[$, então</p> <p>$\lim_{x \rightarrow p^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow p} g(x) = L$.</p>
	<p>T117: A>A</p> <p>T117: A>A</p> <p>T118: A>A</p> <p>T122: A>A</p>	A A	HG.22.01 HG.22.01'	<p>EXEMPLO 1. Calcule $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)$ e $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x)$, sendo $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{se } x > 1 \\ 2x & \text{se } x < 1 \end{cases}$</p>

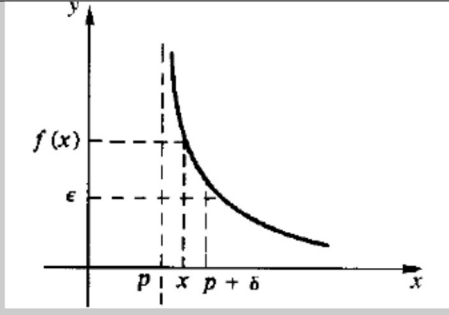
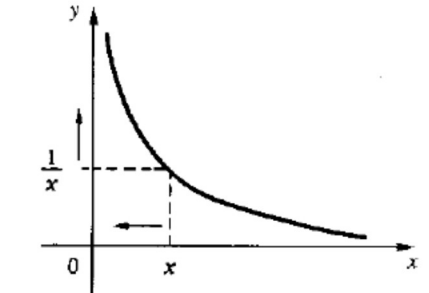
T118: A>A T119: A>A T119: A>A T120: A>A	A A	HG.22.02 HG.22.02'	$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} 2x = 2 \text{ e } \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} x^2 = 1.$
T120: A>A T121: A>A T121: A>A T122: A>A	A A	HG.22.03 HG.22.03'	$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} 2x = 2 \text{ e } \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} x^2 = 1.$
T123: A>A T123: A>A T124: A>A T129: A>A	A A	HG.23.01 HG.23.01'	<p>EXEMPLO 2. Calcule $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{ x }{x}$ e $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{ x }{x}$.</p>
T124: A>A T125: A>A T125: A>A T126: A>A T126: A>A T127: A>A	A A A	HG.23.02 HG.23.02' HG.23.02''	<p><i>Solução</i></p> $\frac{ x }{x} = \begin{cases} 1 & \text{se } x > 0 \\ -1 & \text{se } x < 0. \end{cases}$ $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{ x }{x} = \lim_{x \rightarrow 0} 1 = 1 \text{ e } \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{ x }{x} = \lim_{x \rightarrow 0} -1 = -1$
T127: A>A T128: A>A T128: A>A T129: A>A	A A	HG.23.03 HG.23.03'	<p><i>Solução</i></p> $\frac{ x }{x} = \begin{cases} 1 & \text{se } x > 0 \\ -1 & \text{se } x < 0. \end{cases}$ $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{ x }{x} = \lim_{x \rightarrow 0} 1 = 1 \text{ e } \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{ x }{x} = \lim_{x \rightarrow 0} -1 = -1$

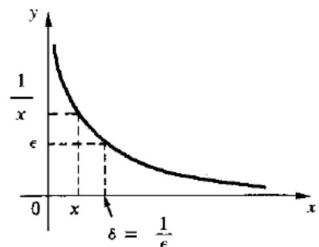
T130: A>A	A	HG.23.04	<p>Teorema. Sejam f uma função, p um número real e suponhamos que tais que $]a, p[$ e $]p, b[$ estejam contidos em D_f. Então,</p> $\lim_{x \rightarrow p} f(x) = L \Leftrightarrow \begin{cases} f \text{ admite limites laterais à direita e à esquerda} \\ \lim_{x \rightarrow p^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow p^-} f(x) = L \end{cases}$
T130: A>A	A	HG.23.04'	
T131: A>A	A	HG.23.04''	
T131: A>A			
T132: A>A			
T135: A>A			
T136: A>A			
T132: A>A	A	HG.24.05	<p>Observações</p> <p>1. Se $\lim_{x \rightarrow p^+} f(x)$ e $\lim_{x \rightarrow p^-} f(x)$ existirem e forem <i>diferentes</i>, então $\lim_{x \rightarrow p} f(x)$ não existirá.</p>
T133: A>A	A	HG.24.05'	
T133: A>A	A	HG.24.05''	
T134: A>A			
T134: A>A			
T135: A>A	A	HG.24.06	<p>2. Se existirem a e b tais que $]a, p[$ e $]p, b[$ estejam contidos em D_f e limites laterais não existir, então $\lim_{x \rightarrow p} f(x)$ não existirá.</p>
T136: A>A	A	HG.24.07	<p>3. Se existirem reais $r > 0$ e b tais que $]p, b[\subset D_f$ e $]p - r, p[\cap D_f = \emptyset$, $\lim_{x \rightarrow p} f(x) = \lim_{x \rightarrow p^+} f(x)$, desde que o limite lateral à direita exista. Se</p>
T137: A>A	A	HG.24.07'	
T137: A>A			
T138: A>A			
T138: A>A	A	HG.24.08	<p>$]b, p[\subset D_f$ e $]p, p + r[\cap D_f = \emptyset$, então $\lim_{x \rightarrow p} f(x) = \lim_{x \rightarrow p^-} f(x)$, desde que o limite lateral à esquerda exista.</p>
T139: A>A	A	HG.24.08'	
T139: A>A			

	T140: A>A T142: A>A	A	HG.25.01	EXEMPLO 3. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{ x }{x}$ existe? Por quê?
	T140: A>A T141: A>A T141: A>A T144: A>A T145: A>A	A A	HG.25.02 HG.25.02'	<i>Solução</i> $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{ x }{x} = \lim_{x \rightarrow 0} 1 = 1$ e $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{ x }{x} = \lim_{x \rightarrow 0} -1 = -1$
	T142: A>A T143: A>A T143: A>A T144: A>A T146: A>A	A A	HG.25.03 HG.25.03''	<i>Solução</i> $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{ x }{x} = \lim_{x \rightarrow 0} 1 = 1$ e $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{ x }{x} = \lim_{x \rightarrow 0} -1 = -1$
	T145: A>A T146: A>A T147: A>A T147: A>A T148: A>A T148: A>A	A A A	HG.25.04 HG.25.04' HG.25.04''	Como $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{ x }{x} \neq \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{ x }{x}$, segue que $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{ x }{x}$ não existe.
C102: A>LN	T149: A>A	A	HG.26.01	Nosso objetivo, nesta seção, é dar um significado para os símbolos $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = L$

C102: A>LN C103: LN>A		LN	HG.26.02	(leia: limite de $f(x)$, para x tendendo a mais infinito, é igual a L) e
	T149: A>A T151: A>A	A	HG.26.03	$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = L.$
C103: LN>A C104: A>GR	T150: A>A T150: A>A	A A	HG.26.04 HG.26.04'	<p>Definição 1. Seja f uma função e suponhamos que exista a tal que] Definimos</p> $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = L \Leftrightarrow \begin{cases} \forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0, \text{ com } \delta > a, \text{ tal que} \\ x > \delta \Rightarrow L - \epsilon < f(x) < L + \epsilon. \end{cases}$
C104: A>GR		GR	HG.26.05	
	T151: A>A T152: A>A T152: A>A	A A	HG.26.06 HG.26.06'	<p>Definição 2. Seja f uma função e suponhamos que exista a tal que]- Definimos</p> $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = L \Leftrightarrow \begin{cases} \forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0, \text{ com } -\delta < a, \text{ tal que} \\ x < -\delta \Rightarrow L - \epsilon < f(x) < L + \epsilon \end{cases}$
	T153: A>A	A	HG.27.01	EXEMPLO 1. Calcule $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x}$ e justifique.
	T153: A>A T154: A>A	A	HG.27.02	<p><i>Solução</i></p> <p>Quanto maior o valor de x, mais próximo de zero estará $\frac{1}{x}$: $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0$</p>

	T154: A>A T155: A>A	A	HG.27.03	<p><i>Justificação</i></p> <p>Dado $\epsilon > 0$ e tomando-se $\delta = \frac{1}{\epsilon}$</p> $x > \delta \Rightarrow 0 < \frac{1}{x} < \epsilon$ <p>e, portanto,</p> $x > \delta \Rightarrow 0 - \epsilon < \frac{1}{x} < 0 + \epsilon.$
C105: A>GR	T155: A>A	A	HG.27.04	Logo, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0.$
C105: A>GR		GR	HG.27.05	
	T156: A>A T156: A>A T157: A>A T157: A>A T158: A>A T158: A>A T159: A>A T159: A>A	A A A A	HG.28.01 HG.28.01' HG.28.01'' HG.28.01'''	<p>Definição 1. Suponhamos que exista a tal que $]a, +\infty[\subset D_f$. Definimos</p> <p>(a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty \Leftrightarrow \begin{cases} \forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0, \text{ com } \delta > a, \text{ tal que} \\ x > \delta \Rightarrow f(x) > \epsilon. \end{cases}$</p> <p>(b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty \Leftrightarrow \begin{cases} \forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0, \text{ com } \delta > a, \text{ tal que} \\ x > \delta \Rightarrow f(x) < -\epsilon. \end{cases}$</p>
C106: A>GR	T160: A>A T160: A>A	A A	HG.28.02 HG.28.02'	<p>Definição 2. Sejam f uma função, p um número real e suponhamos que $]p, b[\subset D_f$. Definimos</p> $\lim_{x \rightarrow p^+} f(x) = +\infty \Leftrightarrow \begin{cases} \forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0, \text{ com } p + \delta < b, \text{ tal que} \\ p < x < p + \delta \Rightarrow f(x) > \epsilon. \end{cases}$

C106: A>GR		GR	HG.28.03															
	T161: A>A T161: A>A T162: A>A T162: A>A T163: A>A	A	HG.28.04 HG.28.04' HG.28.04''	Deixamos a seu cargo definir $\lim_{x \rightarrow p^+} f(x) = -\infty$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow p^-} f(x) = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$ e $\lim_{x \rightarrow p} f(x) = L$														
	T163: A>A T164: A>A T164: A>A T165: A>A T165: A>A T166: A>A T166: A>A	A	HG.28.05 HG.28.05' HG.28.05'' HG.28.05'''	$\lim_{x \rightarrow p^-} f(x) = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow p^-} f(x) = -\infty$, $\lim_{x \rightarrow p} f(x) = +\infty$ e $\lim_{x \rightarrow p} f(x) = -\infty$														
C107: A>T C109: A>GR		A	HG.29.01	EXEMPLO 1. Calcule $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x}$ e justifique.														
C107: A>T C108: T>GR C110: T>A		T	HG.29.02	Solução <table border="1" data-bbox="726 1366 1284 1556"> <tbody> <tr> <td>x</td> <td>1</td> <td>$\frac{1}{2}$</td> <td>$\frac{1}{10}$</td> <td>$\frac{1}{100}$</td> <td>$\frac{1}{1000}$</td> <td>$\rightarrow 0^+$</td> </tr> <tr> <td>$\frac{1}{x}$</td> <td>1</td> <td>2</td> <td>10</td> <td>100</td> <td>1000</td> <td>$\rightarrow +\infty$</td> </tr> </tbody> </table>	x	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{100}$	$\frac{1}{1000}$	$\rightarrow 0^+$	$\frac{1}{x}$	1	2	10	100	1000	$\rightarrow +\infty$
x	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{100}$	$\frac{1}{1000}$	$\rightarrow 0^+$												
$\frac{1}{x}$	1	2	10	100	1000	$\rightarrow +\infty$												
C108: T>GR C109: A>GR C111: GR>A		GR	HG.29.03															

C110: T>A C111: GR>A	T167: A>A	A	HG.29.04	$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$
	T167: A>A T168: A>A	A	HG.29.05	<i>Justificação</i> Dado $\epsilon > 0$ e tomando-se $\delta = \frac{1}{\epsilon}$ $0 < x < \delta \Rightarrow \frac{1}{x} > \epsilon.$
C111: A>GR	T168: A>A	A	HG.29.06	Logo, $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$
C111: A>GR		GR	HG.29.07	
	T169: A>A	A	HG.30.01	EXEMPLO 2. Calcule $\lim_{x \rightarrow +\infty} x$ e justifique.
	T169: A>A T170: A>A	A	HG.30.02	<i>Solução</i> Dado $\epsilon > 0$ e tomando-se $\delta = \epsilon$ $x > \delta \Rightarrow x > \epsilon.$
	T170: A>A	A	HG.30.03	Logo, $\lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty.$
		LN	HG.31.01	Uma <i>seqüência</i> ou <i>sucessão</i> de números reais é uma função $n \mapsto a_n$ cujo domínio é um subconjunto de \mathbb{N} . As seqüências que vão interessar ao
	T171: A>A T171: A>A	A N	HG.32.01' HG.32.01''	EXEMPLO 1. Seja a seqüência de termo geral $a_n = 2^n$. $a_0 = 2^0, a_1 = 2^1, a_2 = 2^2,$
C112: A>N		A N	HG.33.01 HG.33.01'	EXEMPLO 2. Seja a seqüência de termo geral $s_n = 1 + 2 + 3 + \dots + n$. $s_1 = 1, s_2 = 1 + 2, s_3 = 1 + 2 + 3 \text{ etc}$

C112: A>N	T172: A>A T172: A>A T173: A>A T173: A>A	A A A	HG.33.02 HG.33.02' HG.33.02''	<p>Sejam $m \leq n$ dois naturais. O símbolo</p> $\sum_{k=m}^n a_k$ <p>(leia: somatória de a_k, para k variando de m até n) é usado para indicar a soma dos termos $a_m, a_{m+1}, a_{m+2}, \dots, a_n$:</p> $\sum_{k=m}^n a_k = a_m + a_{m+1} + \dots + a_n.$
	T174: A>A T174: A>A T175: A>A T175: A>A	A A A	HG.34.01 HG.34.01' HG.34.01''	<p>EXEMPLO 3.</p> <p>a) $\sum_{k=2}^5 a_k = a_2 + a_3 + a_4 + a_5.$</p> <p>b) $\sum_{k=1}^5 k^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2.$</p> <p>c) $\sum_{k=0}^n \frac{1}{k+1} = \frac{1}{0+1} + \frac{1}{1+1} + \frac{1}{2+1} + \dots + \frac{1}{n+1}.$</p>
C113: A>N C113: A>N		A N	HG.35.01 HG.35.01'	<p>EXEMPLO 4. Seja a seqüência de termo geral $s_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$. Temos</p> $s_1 = \sum_{k=1}^1 \frac{1}{k} = 1.$ $s_2 = \sum_{k=1}^2 \frac{1}{k} = 1 + \frac{1}{2}.$ $s_3 = \sum_{k=1}^3 \frac{1}{k} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3}.$
	T176: A>A T176: A>A T177: A>A	A A	HG.36.01 HG.36.01'	<p>EXEMPLO 5. Considere a seqüência de termo geral $s_n = \sum_{k=0}^n t^k, t \neq 0$ e $t \neq 1$. Verifique que</p> $s_n = \frac{1-t^{n+1}}{1-t}.$
	T177: A>A T178: A>A T179: A>A	A	HG.36.02	<p><i>Solução</i></p> <p>① $s_n = 1 + t + t^2 + \dots + t^{n-1} + t^n.$</p>
	T178: A>A T180: A>A	A	HG.36.03	<p>Multiplicando ambos os membros por t, vem</p> <p>② $ts_n = t + t^2 + t^3 + \dots + t^n + t^{n+1}.$</p>
	T179: A>A T180: A>A T181: A>A	A	HG.36.04	<p>Subtraindo membro a membro ① e ②, obtemos</p> $s_n(1-t) = 1 - t^{n+1}$
	T181: A>A T182: A>A	A	HG.36.05	<p>logo</p> $s_n = \frac{1-t^{n+1}}{1-t}.$

	T182: A>A	A	HG.36.06	Observe que s_n é a soma dos termos da progressão geométrica $1, t, t^2, t^3, \dots, t^n$.
	T183: A>A T183: A>A T184: A>A T184: A>A T185: A>A T185: A>A T186: A>A	A A A A	HG.36.07 HG.36.07' HG.36.07'' HG.36.07'''	<p>Definição. Consideremos uma seqüência de termo geral a_n e seja a um número real.</p> <p>Definimos</p> <p>(i) $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = a \Leftrightarrow \begin{cases} \text{Para todo } \epsilon > 0, \text{ existe um natural } n_0 \text{ tal que} \\ n > n_0 \Rightarrow a - \epsilon < a_n < a + \epsilon. \end{cases}$</p> <p>(ii) $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = +\infty \Leftrightarrow \begin{cases} \text{Para todo } \epsilon > 0, \text{ existe um natural } n_0 \text{ tal que} \\ n > n_0 \Rightarrow a_n > \epsilon. \end{cases}$</p>
	T186: A>A T187: A>A T187: A>A T188: A>A T190: A>A T192: A>A	A A	HG.36.08 HG.36.08'	<p>(iii) $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = -\infty \Leftrightarrow \begin{cases} \text{Para todo } \epsilon > 0, \text{ existe um natural } n_0 \text{ tal que} \\ n > n_0 \Rightarrow a_n < -\epsilon. \end{cases}$</p>
C114: A>LN C114: A>LN C115: LN>A C115: LN>A	T188: A>A T189: A>A T189: A>A	A LN LN	HG.36.09 HG.36.09' HG.36.09''	<p>Se $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = a$, diremos que a seqüência de termo geral a_n converge para a ou, simplesmente, que a_n converge para a e escrevemos $a_n \rightarrow a$. Se $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = +\infty$, diremos que</p>
C116: A>LN C116: A>LN C117: LN>A C117: LN>A	T190: A>A T191: A>A T191: A>A	A LN A	HG.36.10 HG.36.10' HG.36.10''	<p>Se $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = +\infty$, diremos que a_n diverge para $+\infty$ e escrevemos $a_n \rightarrow +\infty$. Se $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = -\infty$, diremos que a_n diverge para $-\infty$.</p>

	T192: A>A T193: A>A T193: A>A	A A	HG.36.10 HG.36.11'	Observamos que as definições acima são exatamente as mesmas que demos quando tratamos com limite de uma função $f(x)$, para $x \rightarrow +\infty$; deste modo, tudo aquilo que dissemos sobre os limites da forma " $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ " aplica-se aqui.
C118:A>LN C118:A>LN C119:LN>A C119:LN>A	T194: A>A	A LN A	HG.37.01 HG.37.01' HG.37.01''	Seja f uma função tal que $\lim_{x \rightarrow p} f(x) = L$ e a_n uma seqüência que converge a p , com $a_n \in D_f$ e $a_n \neq p$ para todo natural n . É natural esperar que $\lim_{n \rightarrow +\infty} f(a_n) = L.$
	T194: A>A T195: A>A T195: A>A T196: A>A	A A	HG.37.02 HG.37.02'	De fato, sendo $\lim_{x \rightarrow p} f(x) = L$, dado $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que $\textcircled{1} \quad 0 < x - p < \delta \Rightarrow f(x) - L < \epsilon.$
	T196: A>A T197: A>A T197: A>A T198: A>A	A A	HG.37.03 HG.37.03'	Como $a_n \rightarrow p$, para o $\delta > 0$ acima existe um natural n_0 tal que $n > n_0 \Rightarrow a_n - p < \delta$
	T198: A>A T199: A>A	A	HG.37.04	e como $a_n \neq p$, para todo n , $\textcircled{2} \quad n > n_0 \Rightarrow 0 < a_n - p < \delta.$
	T199: A>A T200: A>A	A	HG.37.05	De $\textcircled{1}$ e $\textcircled{2}$ $n > n_0 \Rightarrow f(a_n) - L < \epsilon$

C120:A>LN	T200: A>A	A	HG.37.06	<p>logo</p> $\lim_{n \rightarrow +\infty} f(a_n) = L.$
C120:A>LN	T201: A>A	LN	HG.37.07	<p>Em particular, se f for contínua em p e se a_n convergir a p, com $a_n \in D_f$ para todo n, então $\lim_{n \rightarrow +\infty} f(a_n) = f(p)$.</p>
C121:LN>A	T201: A>A	LN	HG.37.07'	
C121:LN>A	T202: A>A	A	HG.37.07''	
	T202: A>A	A	HG.37.08	<p>Do que vimos acima resulta que se existirem duas seqüências a_n e b_n, com $a_n \neq p$ e $b_n \neq p$ para todo n, que convergem a p e se $\lim_{n \rightarrow +\infty} f(a_n) \neq \lim_{n \rightarrow +\infty} f(b_n)$, então $\lim_{x \rightarrow p} f(x)$ não existirá. Frequentemente, usa-se este processo para mostrar a não-existência de limite de uma função num ponto.</p>
	T203: A>A	A	HG.37.08'	
	T203: A>A	A	HG.37.08''	
	T204: A>A	A	HG.37.08'''	
	T204: A>A	A	HG.37.08''''	
	T205: A>A			
	T205: A>A			
	T206: A>A			

Fonte: Elaborado pelo autor.

INVENTÁRIO DOS EXERCÍCIOS DO LIVRO DO GUIDORIZZI

Quadro 21 - Inventário dos exercícios do livro do Guidorizzi.

Verbos	Conversões	Representações	Questão
			1. Esboce o gráfico da função dada e, utilizando a idéia intuitiva de função contínua, determine os pontos em que a função deverá ser contínua.
C	A>GR	A	a) $f(x) = 2$
D	GR>LN		
C	A>GR	A	b) $f(x) = x + 1$
D	GR>LN		
C	A>GR	A	c) $f(x) = x^2$
D	GR>LN		
C	A>GR	A	d) $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{se } x \leq 1 \\ 2 & \text{se } x > 1 \end{cases}$
D	GR>LN		
C	A>GR	A	e) $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x^2} & \text{se } x \geq 1 \\ 2 & \text{se } x < 1 \end{cases}$
D	GR>LN		
C	A>GR	A	f) $f(x) = x^2 + 2$
D	GR>LN		
			2. Utilizando a idéia intuitiva de limite, calcule
D		A	a) $\lim_{x \rightarrow 1} (x + 2)$
D		A	b) $\lim_{x \rightarrow 1} (2x + 1)$
D		A	c) $\lim_{x \rightarrow 0} (3x + 1)$
D		A	d) $\lim_{x \rightarrow 2} (x^2 + 1)$
D		A	e) $\lim_{x \rightarrow 1} \sqrt{x}$
D		A	f) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + x}{x + 3}$

D		A	$g) \lim_{x \rightarrow 2} \sqrt[3]{x}$
D		A	$h) \lim_{x \rightarrow 0} (\sqrt{x} + x)$ *
C	A > GR	A	3. Esboce o gráfico de $f(x) = \frac{4x^2 - 1}{2x - 1}$. Utilizando a idéia intuitiva de limite, calcule $\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} \frac{4x^2 - 1}{2x - 1}$
D	GR > A		
			4. Utilizando a idéia intuitiva de limite, calcule
D		A	$a) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{x - 2}$
D		A	$b) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 + x}{x}$
D		A	$c) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x} - 1}{x - 1}$
D		A	$d) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4x + 4}{x - 2}$
D		A	$e) \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 - 1}{x + 1}$
D		A	$f) \lim_{x \rightarrow 0} \sin x$
			1. Prove, pela definição, que a função dada é contínua no ponto dado.
P		A	$a) f(x) = 4x - 3$ em $p = 2$
P		A	$b) f(x) = x + 1$ em $p = 2$
P		A	$c) f(x) = -3x$ em $p = 1$
P		A	$d) f(x) = x^3$ em $p = 2$
P		A	$e) f(x) = x^4$ em $p = -1$
P		A	$f) f(x) = \sqrt{x}$ em $p = 4$
P		A	$g) f(x) = \sqrt{x}$ em $p = 0$
P		A	$h) f(x) = \sqrt[3]{x}$ em $p = 1$
P		A	2. Prove que $f(x) = \frac{1}{x}$ é contínua em todo $p \neq 0$.

P		A	3. Seja $n > 0$ um natural. Prove que $f(x) = x^n$ é cont
P		A	4. Prove que $f(x) = \sqrt[n]{x}$ é contínua.
I E	A>GR GR>LN LN>A	A	5. $f(x) = \begin{cases} 2x & \text{se } x \leq 1 \\ 1 & \text{se } x > 1 \end{cases}$ é contínua em 1? Justifique
C			6. Dê exemplo de uma função definida em \mathbb{R} e que seja contínua em t $-1, 0, 1$.
C			7. Dê exemplo de uma função definida em \mathbb{R} e que seja contínua em t inteiros.
			9. Determine o conjunto dos pontos em que a função c
D		A	a) $f(x) = \llbracket x \rrbracket$ onde $\llbracket x \rrbracket = \text{máx} \{n \in \mathbb{Z} \mid n \leq x\}$ (Função
D		A	b) $f(x) = x - \llbracket x \rrbracket$
D		A	c) $f(x) = \begin{cases} x & \text{se } x \in \mathbb{Q} \\ -x & \text{se } x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$
D		A	d) $f(x) = \begin{cases} x^2 - 1 & \text{se } x \in \mathbb{Q} \\ -x^2 + 1 & \text{se } x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$
C			10. Dê exemplo de uma função definida em \mathbb{R} e que seja contínua
			11. Determine L para que a função dada seja contínua no po
D		A	a) $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 4}{x - 2} & \text{se } x \neq 2 \\ L & \text{se } x = 2 \end{cases}$ em $p = 2$

D		A	$b) f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - x}{x} & \text{se } x \neq 0 \\ L & \text{se } x = 0 \end{cases} \text{ em } p = 0$
S			12. Dê o valor (caso exista) que a função dada deveria ter no ponto dado p ponto. Justifique.
D		A	$a) g(x) = \frac{x^2 - 4}{x - 2} \text{ em } p = 2$
D		A	$b) f(x) = \frac{x^2 - x}{x} \text{ em } p = 0$
D		A	$c) f(x) = \frac{ x }{x} \text{ em } p = 0$
D		A	$d) f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 9}{x - 3} & \text{se } x \neq 3 \\ 4 & \text{se } x = 3 \end{cases} \text{ em } p = 3$
D		A	$e) g(x) = \begin{cases} x & \text{se } x < 1 \\ \frac{1}{x} & \text{se } x > 1 \end{cases} \text{ em } p = 1$
D		A	$f) f(x) = \frac{ x - 2 }{x - 2} \text{ em } p = 2$
P		A	13. Sabe-se que f é contínua em 2 e que $f(2) = 8$. Mostre que existe $\delta > 0$ $2 - \delta < x < 2 + \delta \Rightarrow f(x) > 7.$
P		A	14. Sabe-se que f é contínua em 1 e que $f(1) = 2$. Prove que existe $r > 0$ $1 - r < x < 1 + r \Rightarrow \frac{3}{2} < f(x) < \frac{5}{2}.$
P		A	15. Seja f uma função definida em \mathbb{R} e suponha que existe $M > 0$ tal que $ f(x) < M$ para todo x . Prove que f é contínua em p .

P		A	16. Suponha que $ f(x) - f(1) \leq (x - 1)^2$ para todo x . Prove que
P		A	17. Suponha que $ f(x) \leq x^2$ para todo x . Prove que
P		A	18. Prove que a função $f(x) = \begin{cases} x & \text{se } x \in \mathbb{Q} \\ -x & \text{se } x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$ é c
			2. Determine L para que a função dada seja contínua no ponto dado. Justifique.
D E		A	a) $f(x) = \begin{cases} \frac{x^3 - 8}{x - 2} & \text{se } x \neq 2 \\ L & \text{se } x = 2 \end{cases}$ em $p = 2$
D E		A	b) $f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{x} - \sqrt{3}}{x - 3} & \text{se } x \neq 3 \\ L & \text{se } x = 3 \end{cases}$ em $p = 3$
D E		A	c) $f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{x} - \sqrt{5}}{\sqrt{x+5} - \sqrt{10}} & \text{se } x \neq 5 \\ L & \text{se } x = 5 \end{cases}$ em $p = 5$
D E		A	3. $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 + x}{x + 1} & \text{se } x \neq -1 \\ 2 & \text{se } x = -1 \end{cases}$ é contínua em -1 ? E em 0 ? Por quê?
P		A	6. Prove que existe $\delta > 0$ tal que $1 - \delta < x < 1 + \delta \Rightarrow 2 - \frac{1}{3} < x^2 + x < 2 + \frac{1}{3}.$
P		A	7. Prove que existe $\delta > 0$ tal que $1 - \delta < x < 1 + \delta \Rightarrow 2 - \frac{1}{2} < \frac{x^5 + 3x}{x^2 + 1} < 2 + \frac{1}{2}$
P		A	8. Sejam f e g definidas em \mathbb{R} com $g(x) \neq 0$ para todo x . Suponha que $\lim_{x \rightarrow p} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$. Prove que existe $\delta > 0$ tal que $0 < x - p < \delta \Rightarrow f(x) < g(x) .$
P	A > GR GR > LN	A	9. Suponha que $\lim_{x \rightarrow p} f(x) = L$. Prove que existem $r > 0$, α e β tais que, para todo $x \in D_f$, $0 < x - p < r \Rightarrow \alpha < f(x) < \beta.$ Interprete graficamente.
P		A	10. Suponha que $\lim_{x \rightarrow p} f(x) = L$. Prove que existem $r > 0$ e $M > 0$ tais que, para todo $x \in D_f$, $0 < x - p < r \Rightarrow f(x) \leq M.$

P		A	11. Prove: $\lim_{x \rightarrow p} f(x) = L \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow p} [f(x) - L] = 0$.
P		A	12. Prove: $\lim_{x \rightarrow p} f(x) = L \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow p} f(x) - L = 0$.
P		A	13. Prove: $\lim_{x \rightarrow p} \frac{f(x)}{x - p} = 0 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow p} \frac{f(x)}{ x - p } = 0$.
P		A	14. Suponha que existe $r > 0$ tal que $f(x) \geq 0$ para $0 < x - p < r$ e que $\lim_{x \rightarrow p} f(x) = L$. Prove: que $L \geq 0$. (Sugestão: Suponha $L < 0$ e use a conservação do sinal.)
P		A	15. Suponha f contínua em \mathbb{R} e $f(x) \geq 0$ para todo x racional. Prove que $f(x) \geq 0$ para todo x .
			1. Calcule, caso exista. Se não existir, justifique.
D E		A	a) $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{ x - 1 }{x - 1}$
D E		A	b) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{ x - 1 }{x - 1}$
D E		A	c) $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1}$ onde $f(x) = \begin{cases} x + 1 & \text{se } x \geq 1 \\ 2x & \text{se } x < 1 \end{cases}$
D E		A	d) $\lim_{x \rightarrow 0} \sqrt{x}$
D E		A	e) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{ x - 1 }{x - 1}$
D E		A	f) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1}$ onde $f(x) = \begin{cases} x + 1 & \text{se } x \geq 1 \\ 2x & \text{se } x < 1 \end{cases}$
D E		A	g) $\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x^2 - 2x + 1}{x - 1}$
D E		A	h) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{ x - 1 }{x - 1}$
D E		A	i) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1}$ onde $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{se } x \leq 1 \\ 2x - 1 & \text{se } x > 1 \end{cases}$

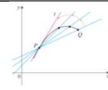
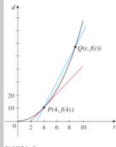
D E		A	$j) \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{g(x) - g(2)}{x - 2} \text{ onde } g(x) = \begin{cases} x & \text{se } x \geq 2 \\ \frac{x^2}{2} & \text{se } x < 2 \end{cases}$
D E		A	$l) \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{g(x) - g(2)}{x - 2} \text{ sendo } g \text{ a função do item (j)}$
D E		A	$m) \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{g(x) - g(2)}{x - 2} \text{ onde } g \text{ é a função do item (j)}$
I E		A	<p>2. A afirmação</p> $\text{“ } \lim_{x \rightarrow p^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow p^-} f(x) \Rightarrow f \text{ contínua em } p \text{”}$ <p>é falsa ou verdadeira? Justifique.</p>
D E		A	<p>3. Dada a função $f(x) = \frac{x^2 - 3x + 2}{x - 1}$, verifique que $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = f$ é contínua em 1? Por quê?</p>
C		A	<p>4. Dê exemplo de uma função definida em \mathbb{R}, que não seja cont</p> $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x).$
P		A	<p>2. Prove que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{x} = +\infty$, onde $n > 0$ é um natural.</p>

Fonte: Elaborado pelo autor.


INVENTÁRIO DO TEXTO DO STEWART

Quadro 22 - Inventário do texto do Stewart.

Conversões	Tratamentos	Registros	Código	Representações
Uma apresentação do Cálculo: o problema da área				
C1:GE>LN C3:GE>GR	T1:GE>GE T2:GE>GE T3:GE>GE T4:GE>GE T5:GE>GE	GE GE GE GE GE GE	JS.01.01 JS.01.01' JS.01.01'' JS.01.01''' JS.01.01'''' JS.01.01''''''	
C1:GE>LN C2:LN>A	T6:LN>LN	LN LN	JS.01.02 JS.01.02'	Seja A_n a área do polígono inscrito com n lados. À medida que aumentamos n , fica evidente que A_n ficará cada vez mais próxima da área do círculo. Dizemos, então, que a área do círculo é o <i>limite</i> das áreas dos polígonos inscritos e escrevemos
C2:LN>A		A	JS.01.03	$A = \lim_{n \rightarrow \infty} A_n$
C3:GE>GR	T7:GR>GR T8:GR>GR T8:GR>GR	GR GR GR GR	JS.01.04 JS.01.04' JS.01.04'' JS.01.04'''	
Uma apresentação do Cálculo: o problema da tangente				
C4:LN>GR		LN	JS.02.01	Considere o problema de tentar determinar a reta tangente t a uma curva com equação $y = f(x)$ em um dado ponto P . (Daremos uma definição precisa de reta tangente no Capítulo 2. F
C4:LN>GR	T9:GR>GR	GR	JS.02.02	
C5:GR>A	T9:GR>GR T10:GR>GR	GR	JS.02.03	
C5:GR>A C6:A>LN C10:GR>A		A	JS.02.04	$m_{PQ} = \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$
C6:A>LN C7:LN>A	T11:LN>LN	LN LN	JS.02.05 JS.02.06	Imagine agora o ponto Q movendo-se ao longo da curva em direção a P , como na Figura 7. Você pode ver que a reta secante gira e aproxima-se da reta tangente como sua posição-limite. Isso significa que a inclinação m_{PQ} da reta secante fica cada vez mais próxima da inclinação m da reta tangente. Isso é denotado por

C10:GR>A	T10:GR>GR	GR	JS.02.07															
C7:LN>A C8:A>LN	T12:A>A	A	JS.02.08	$m = \lim_{Q \rightarrow P} m_{PQ}$														
C8:A>LN C9:LN>A	T13:LN>LN	LN LN	JS.02.09 JS.02.09'	e dizemos que m é o limite de m_{PQ} quando Q tende ao ponto P ao longo da curva. Um que x tende a a quando Q tende a P , também podemos usar a Equação 1 para escrever														
C9:LN>A	T12:A>A	A	JS.02.10	$m = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$														
Uma apresentação do Cálculo: Velocidade																		
C10':LN>T C11:LN>T C12:LN>T		LN	JS.03.01	Quando olhamos no velocímetro de um carro e vemos que ele está a 48 km/h, o que a formação indica? Sabemos que, se a velocidade permanecer constante, após uma hora terá percorrido 48 km. Porém, se a velocidade do carro variar, qual o significado de a dade ser, em um dado momento, 48 km/h?														
C10':LN>T C13:T>GR	T14:T>T	T	JS.03.02	<table border="1" data-bbox="810 862 1308 929"> <tbody> <tr> <td>t = Tempo decorrido (s)</td> <td>0</td> <td>2</td> <td>4</td> <td>6</td> <td>8</td> <td>10</td> </tr> <tr> <td>d = Distância (m)</td> <td>0</td> <td>2</td> <td>10</td> <td>25</td> <td>43</td> <td>78</td> </tr> </tbody> </table>	t = Tempo decorrido (s)	0	2	4	6	8	10	d = Distância (m)	0	2	10	25	43	78
t = Tempo decorrido (s)	0	2	4	6	8	10												
d = Distância (m)	0	2	10	25	43	78												
C11:LN>TC14:T>GR	T14:T>T T15:T>T	T	JS.03.03	<table border="1" data-bbox="885 967 1244 1034"> <tbody> <tr> <td>t</td> <td>4,0</td> <td>4,2</td> <td>4,4</td> <td>4,6</td> <td>4,8</td> <td>5,0</td> </tr> <tr> <td>d</td> <td>10,00</td> <td>11,02</td> <td>12,16</td> <td>13,45</td> <td>14,96</td> <td>16,80</td> </tr> </tbody> </table>	t	4,0	4,2	4,4	4,6	4,8	5,0	d	10,00	11,02	12,16	13,45	14,96	16,80
t	4,0	4,2	4,4	4,6	4,8	5,0												
d	10,00	11,02	12,16	13,45	14,96	16,80												
C12:LN>T C15:T>LN C16:T>A	T15:T>T	T	JS.03.04	<table border="1" data-bbox="885 1124 1241 1169"> <tbody> <tr> <td>Intervalo de tempo</td> <td>[4,6]</td> <td>[4,5]</td> <td>[4,48]</td> <td>[4,46]</td> <td>[4,44]</td> <td>[4,42]</td> </tr> <tr> <td>Velocidade média (m/s)</td> <td>7,5</td> <td>6,8</td> <td>6,2</td> <td>5,75</td> <td>5,4</td> <td>5,1</td> </tr> </tbody> </table>	Intervalo de tempo	[4,6]	[4,5]	[4,48]	[4,46]	[4,44]	[4,42]	Velocidade média (m/s)	7,5	6,8	6,2	5,75	5,4	5,1
Intervalo de tempo	[4,6]	[4,5]	[4,48]	[4,46]	[4,44]	[4,42]												
Velocidade média (m/s)	7,5	6,8	6,2	5,75	5,4	5,1												
C15:T>LN C17:LN>GR C18:LN>A	T16:LN>LN T17:LN>LN	LN LN	JS.03.05 JS.03.05'	As velocidades médias em intervalos cada vez menores parecem ficar cada vez mais próximas de 5; dessa forma, esperamos que exatamente em $t = 4$ a velocidade seja cerca de 5. No Capítulo 2 definiremos a velocidade instantânea de um objeto em movimento como o limite das velocidades médias em intervalos de tempo cada vez menores.														
C13:T>GR C14:T>GR C17:LN>GR C19:GR>LN		GR	JS.03.06															
C16:T>A C18:LN>A C20:A>LN		A	JS.03.07	velocidade média = $\frac{\text{distância percorrida}}{\text{tempo decorrido}} = \frac{f(t) - f(4)}{t - 4}$														
C19:GR>LN C20:A>LN C21:LN>A	T17:LN>LN	LN	JS.03.08	que é a mesma coisa que a inclinação da reta secante PQ da Figura 8. A velocidade v em $t = 4$ é o valor-limite da velocidade média quando t aproxima-se de 4; isto é,														

C21:LN>A		A	JS.03.09	$v = \lim_{t \rightarrow 4} \frac{f(t) - f(4)}{t - 4}$
Uma apresentação do Cálculo: limite de seqüência				
C22:LN>GE		LN	JS.04.01	grego Aquiles e uma tartaruga para a qual foi dada uma vantagem inicial. Zenão argumentava que Aquiles jamais ultrapassaria a tartaruga: se ele começasse em uma posição a_1 e a tartaruga em t_1 (veja a Figura 9), quando ele atingisse o ponto $a_2 = t_1$, a tartaruga estaria adiante, em uma posição t_2 . No momento em que Aquiles atingisse $a_3 = t_2$, a tartaruga estaria em t_3 . Esse processo continuaria indefinidamente e, dessa forma, aparentemente a tartaruga estaria sempre à frente! Todavia, isso desafia o senso comum.
C22:LN>GE	T18:GE>GE	GE	JS.04.02	
C23:GE>A		GE	JS.04.02'	
C24:GE>A				
C23:GE>A	T19:A>A	A	JS.04.03	<p>Uma forma de explicar esse paradoxo usa a ideia de <i>seqüência</i>. As posições sucessivas de Aquiles e da tartaruga são respectivamente (a_1, a_2, a_3, \dots) e (t_1, t_2, t_3, \dots), conhecidas como seqüências.</p>
C24:GE>A	T20:A>A	A	JS.04.03'	
	T21:A>A			
	T25:A>A			
	T27:A>A			
C25:A>N	T20:A>A	LN	JS.04.04	Em geral, uma seqüência $\{a_n\}$ é um conjunto de números escritos em uma ordem de Por exemplo, a seqüência
	T21:A>A			
C25:A>N		N	JS.04.05	$\left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \dots\right\}$
C26:N>A				
C26:N>A C27:A>GE		A	JS.04.06	$a_n = \frac{1}{n}$
C28:A>GR				
C27:A>GE		GE	JS.04.07	
C29:GE>LN				
C28:A>GR		GR	JS.04.08	
C30:GR>LN				
C29:GE>LN	T22:LN>LN	LN	JS.04.09	<p>gura 10(a), ou desenhando seu gráfico, como na Figura 10(b). Observe em ambas as figuras que os termos da seqüência $a_n = 1/n$ tornam-se cada vez mais próximos de 0 à medida que n cresce. De fato, podemos encontrar termos tão pequenos quanto desejarmos, bastando para tomarmos n suficientemente grande. Dizemos, então, que o limite da seqüência é 0 e indicamos isso por</p>
C30:GR>LN	T23:LN>LN	LN	JS.04.09'	
C31:LN>A		LN	JS.04.09''	
C31:LN>A	T24:A>A	A	JS.04.10	$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$
C32:A>LN	T24:A>A	A	JS.04.11	$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = L$
C32:A>LN	T26:LN>LN	LN	JS.04.12	<p>será usada se os termos a_n tendem a um número L quando n torna-se grande. Isso significa que podemos tornar os números a_n tão próximos de L quanto quisermos escolhendo n suficientemente grande.</p>
C33:LN>N		LN	JS.04.12'	

C33:LN>N C34:N>A		N	JS.04.13	$a_1 = 3,1$ $a_2 = 3,14$ $a_3 = 3,141$ $a_4 = 3,1415$ $a_5 = 3,14159$ $a_6 = 3,141592$ $a_7 = 3,1415926$ \vdots
C34:N>A	T30:A>A	A	JS.04.14	$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \pi.$
	T25:A>A T27:A>A T28:A>A T31:A>A	A A	JS.04.15 JS.04.15'	Vamos voltar ao paradoxo de Zenão. As posições sucessivas de Aquiles e da tartaruga são as seqüências $\{a_n\}$ e $\{t_n\}$, onde $a_n < t_n$ para todo n . Podemos mostrar que ambas as seqüências têm o mesmo limite:
	T29:A>A T30:A>A T31:A>A	A A	JS.04.16 JS.04.16'	$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = p = \lim_{n \rightarrow \infty} t_n.$
Uma apresentação do Cálculo: a soma de uma série				
C35:LN>GE		LN	JS.05.01	Outro paradoxo de Zenão, conforme nos foi passado por Aristóteles, é o seguinte: “Uma pessoa em certo ponto de uma sala não pode caminhar diretamente até a parede. Para fazer isso ela deveria percorrer metade da distância, depois a metade da distância restante e, então sucessivamente a metade da distância que restou e assim por diante, de forma que o processo poderia ser sempre continuado e não terá um fim”. (Veja a Figura 11.)
C35:LN>GE C36:GE>N		GE	LL.05.02	
C36:GE>N C37:N>LN	T32:N>N T34:N>N	A	JS.05.03	$1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \dots + \frac{1}{2^n} + \dots$
	T32:N>N T33:N>N	N	JS.05.04	$\frac{3}{10} + \frac{3}{100} + \frac{3}{1000} + \frac{3}{10.000} + \dots = \frac{1}{3}$
C38:N>LN	T33:N>N	N	JS.05.05	$s_1 = 1$ $s_2 = 1 + \frac{1}{2} = 1,5$ $s_3 = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = 1,75$ $s_4 = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} = 1,875$ $s_5 = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} = 1,9375$ $s_6 = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} = 1,96875$ $s_7 = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \frac{1}{64} = 1,984375$ \vdots $s_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \frac{1}{64} + \dots + \frac{1}{2^{n-1}} = 1,9999999999999999$ \vdots
C37:N>LN C38:N>LN C39:LN>A C40:LN>N	T35:LN>LN	LN LN	JS.05.06 JS.05.06'	Observe que à medida que somamos mais e mais termos, as somas parciais ficam cada vez mais próximas de 1. De fato, pode-se mostrar que tomando um n suficientemente grande (isto é, escolhendo um número suficientemente grande de termos da série), podemos tornar a soma parcial s_n tão próxima de 1 quanto quisermos. Parece, então, razoável dizer que a soma da
C40:LN>N C41:N>A	T34:N>N	A	JS.05.07	$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots + \frac{1}{2^n} + \dots = 1$

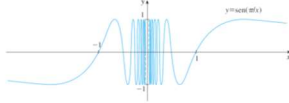
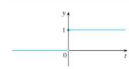
C39:LN>A C41:N>A		A	JS.05.08	$\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = 1$												
		GE	JS.06.01	<p>FIGURA 12</p>												
Limites e Derivadas: O problema da tangente e da velocidade: O problema da tangente: Exemplo 1																
C42:LN>GR C43:GR>A		LN GR	JS.08.01 JS.08.02	<p>Encontre uma equação da reta tangente à parábola $y = x^2$ no ponto P</p> <p>FIGURA 2</p>												
C43:GR>A C44:A>LN		A	JS.08.03	$m_{PQ} = \frac{x^2 - 1}{x - 1}$												
C44:A>LN C45:LN>T C46:LN>T		LN	JS.08.04	<p>As tabelas mostram os valores de m_{PQ} para vários valores de x próximos a 1. Quanto próximo Q estiver de P, mais próximo x estará de 1, e a tabela indica que m_{PQ} estará mais próximo de 2. Isso sugere que a inclinação da reta tangente t deve ser $m = 2$.</p>												
C45:LN>T C47:T>LN	T35:T>T	T	JS.08.05	<table border="1"> <thead> <tr> <th>x</th> <th>m_{PQ}</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>2</td> <td>3</td> </tr> <tr> <td>1,5</td> <td>2,5</td> </tr> <tr> <td>1,1</td> <td>2,1</td> </tr> <tr> <td>1,01</td> <td>2,01</td> </tr> <tr> <td>1,001</td> <td>2,001</td> </tr> </tbody> </table>	x	m_{PQ}	2	3	1,5	2,5	1,1	2,1	1,01	2,01	1,001	2,001
x	m_{PQ}															
2	3															
1,5	2,5															
1,1	2,1															
1,01	2,01															
1,001	2,001															
C46:LN>T C48:T>LN	T35:T>T	T	JS.08.06	<table border="1"> <thead> <tr> <th>x</th> <th>m_{PQ}</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>0</td> <td>1</td> </tr> <tr> <td>0,5</td> <td>1,5</td> </tr> <tr> <td>0,9</td> <td>1,9</td> </tr> <tr> <td>0,99</td> <td>1,99</td> </tr> <tr> <td>0,999</td> <td>1,999</td> </tr> </tbody> </table>	x	m_{PQ}	0	1	0,5	1,5	0,9	1,9	0,99	1,99	0,999	1,999
x	m_{PQ}															
0	1															
0,5	1,5															
0,9	1,9															
0,99	1,99															
0,999	1,999															
C47:T>LN C48:T>LN C49:LN>A		LN	JS.08.07	<p>Dizemos que a inclinação da reta tangente é o <i>limite</i> das inclinações das retas secantes expressamos isso simbolicamente escrevendo que</p>												
C49:LN>A	T36:A>A T38:A>A	A A	JS.08.08 JS.08.08'	$\lim_{Q \rightarrow P} m_{PQ} = m \quad \text{e} \quad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = 2$												
C50:A>LN	T36:A>A T39:A>A	A A	JS.08.09 JS.08.09'	$y - 1 = 2(x - 1) \quad \text{ou} \quad y = 2x - 1$												
C50:A>LN C51:LN>GR C52:LN>GR		LN	JS.08.10	<p>A Figura 3 ilustra o processo de limite que ocorre neste exemplo. À medida que Q se move ao longo da parábola, as retas secantes correspondentes giram em torno de P e tendem à reta tangente t.</p>												
C51:LN>GR	T37:GR>GR T40:GR>GR T41:GR>GR	GR GR GR	JS.08.11 JS.08.11' JS.08.11''	<p>Q tende a P pelo exterior</p>												
C52:LN>GR	T37:GR>GR T42:GR>GR	GR GR	JS.08.12 JS.08.12'	<p>Q tende a P pelo interior</p>												

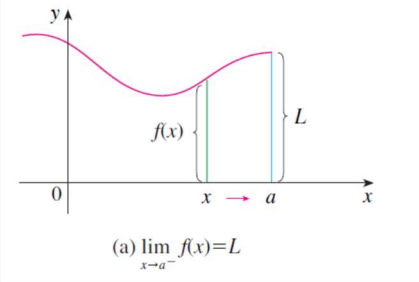
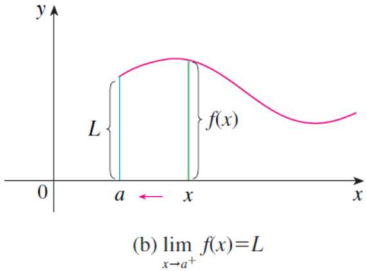
	T43:GR>GR	GR	JS.08.12''															
Limites e Derivadas: O problema da tangente e da velocidade: O problema da tangente: Exemplo 2																		
C53:LN>T C55:T>GR C56:LN>T		LN	JS.09.01	<p>EXEMPLO 2 O flash de uma câmera opera armazenando carga em um capacitor e liberando-a instantaneamente ao ser disparado. Os dados na tabela à esquerda descrevem a carga Q armazenada no capacitor (medida em microcoulombs) no instante t (medido em segundos após o flash ter sido disparado). Use os dados para esboçar o gráfico desta função e estimar a inclinação da reta tangente no ponto onde $t = 0,04$. [Observação: A inclinação da reta tangente representa a corrente elétrica fluindo do capacitor à lâmpada do flash (medida em microamperes).]</p> <table border="1"> <thead> <tr> <th>t</th> <th>Q</th> </tr> </thead> <tbody> <tr><td>0,00</td><td>100,00</td></tr> <tr><td>0,02</td><td>81,87</td></tr> <tr><td>0,04</td><td>67,03</td></tr> <tr><td>0,06</td><td>54,88</td></tr> <tr><td>0,08</td><td>44,93</td></tr> <tr><td>0,10</td><td>36,76</td></tr> </tbody> </table>	t	Q	0,00	100,00	0,02	81,87	0,04	67,03	0,06	54,88	0,08	44,93	0,10	36,76
t	Q																	
0,00	100,00																	
0,02	81,87																	
0,04	67,03																	
0,06	54,88																	
0,08	44,93																	
0,10	36,76																	
C53:LN>T C55:T>GR	T44:T>T	T	JS.09.02	<table border="1"> <thead> <tr> <th>t</th> <th>Q</th> </tr> </thead> <tbody> <tr><td>0,00</td><td>100,00</td></tr> <tr><td>0,02</td><td>81,87</td></tr> <tr><td>0,04</td><td>67,03</td></tr> <tr><td>0,06</td><td>54,88</td></tr> <tr><td>0,08</td><td>44,93</td></tr> <tr><td>0,10</td><td>36,76</td></tr> </tbody> </table>	t	Q	0,00	100,00	0,02	81,87	0,04	67,03	0,06	54,88	0,08	44,93	0,10	36,76
t	Q																	
0,00	100,00																	
0,02	81,87																	
0,04	67,03																	
0,06	54,88																	
0,08	44,93																	
0,10	36,76																	
C54:T>GR C54:T>GR C57:GR>T		GR	JS.09.03															
C56:LN>T C57:GR>T	T44:T>T	T	JS.09.04	<table border="1"> <thead> <tr> <th>R</th> <th>m_{Tg}</th> </tr> </thead> <tbody> <tr><td>(0,00; 100,00)</td><td>-824,25</td></tr> <tr><td>(0,02; 81,87)</td><td>-742,00</td></tr> <tr><td>(0,06; 54,88)</td><td>-607,50</td></tr> <tr><td>(0,08; 44,93)</td><td>-552,50</td></tr> <tr><td>(0,10; 36,76)</td><td>-504,50</td></tr> </tbody> </table>	R	m_{Tg}	(0,00; 100,00)	-824,25	(0,02; 81,87)	-742,00	(0,06; 54,88)	-607,50	(0,08; 44,93)	-552,50	(0,10; 36,76)	-504,50		
R	m_{Tg}																	
(0,00; 100,00)	-824,25																	
(0,02; 81,87)	-742,00																	
(0,06; 54,88)	-607,50																	
(0,08; 44,93)	-552,50																	
(0,10; 36,76)	-504,50																	
Limites e Derivadas: O problema da tangente e da velocidade: O problema da velocidade: Exemplo 3																		
C58:LN>A C60:LN>T		LN	JS.10.01	<p>EXEMPLO 3 Suponha que uma bola seja solta a partir do ponto de observação no alto do CN, em Toronto, 450 m acima do solo. Encontre a velocidade da bola após 5 segundos</p>														
C58:LN>A C59:A>T		A	JS.10.02	$s(t) = 4,9t^2$														
C59:A>T C60:LN>T C61:T>LN		T	JS.10.03	<table border="1"> <thead> <tr> <th>Intervalo de tempo</th> <th>Velocidade média (m/s)</th> </tr> </thead> <tbody> <tr><td>$5 \leq t \leq 6$</td><td>53,9</td></tr> <tr><td>$5 \leq t \leq 5,1$</td><td>49,49</td></tr> <tr><td>$5 \leq t \leq 5,05$</td><td>49,245</td></tr> <tr><td>$5 \leq t \leq 5,01$</td><td>49,049</td></tr> <tr><td>$5 \leq t \leq 5,001$</td><td>49,0049</td></tr> </tbody> </table>	Intervalo de tempo	Velocidade média (m/s)	$5 \leq t \leq 6$	53,9	$5 \leq t \leq 5,1$	49,49	$5 \leq t \leq 5,05$	49,245	$5 \leq t \leq 5,01$	49,049	$5 \leq t \leq 5,001$	49,0049		
Intervalo de tempo	Velocidade média (m/s)																	
$5 \leq t \leq 6$	53,9																	
$5 \leq t \leq 5,1$	49,49																	
$5 \leq t \leq 5,05$	49,245																	
$5 \leq t \leq 5,01$	49,049																	
$5 \leq t \leq 5,001$	49,0049																	
C61:T>LN	T45:LN>LN T46:LN>LN	LN LN	JS.10.04 JS.10.04'	<p>Parece que, à medida que encurtamos o período do tempo, a velocidade média fica cada vez mais próxima de 49 m/s. A velocidade instantânea quando $t = 5$ é definida como o limite dessas velocidades médias em períodos de tempo cada vez menores, começando em $t = 5$. Assim, a velocidade (instantânea) após 5 segundos é</p>														
C62:LN>GR	T46:LN>LN	LN	JS.10.05	<p>idade, há uma estreita relação entre o problema da tangente e o cálculo de velocidades. Se traçarmos o gráfico da função distância percorrida pela bola (como na Figura 5) e considerarmos os pontos $P(a; 4,9a^2)$ e $Q(a + h; 4,9(a + h)^2)$ sobre o gráfico, então a inclinação da reta secante PQ será</p>														
C62:LN>GR C63:GR>LN	T47:GR>GR	GR GR	JS.10.06 JS.10.06'															
C63:GR>LN		LN	JS.10.07	<p>que é igual à velocidade média no intervalo de tempo $[a, a + h]$. Logo, a velocidade instantânea $t = a$ (o limite dessas velocidades médias quando h tende a 0) deve ser igual à inclinação da reta tangente em P (o limite das inclinações das retas secantes).</p>														
Limites e Derivadas: O Limite de uma função																		
C64:A>T C65:A>GR		LN	JS.11.01	<p>Vamos analisar o comportamento da função f definida por $f(x) = x^2 - x + 2$ para valores de x próximos de 2. A tabela a seguir fornece os valores de $f(x)$ para valores de x</p>														

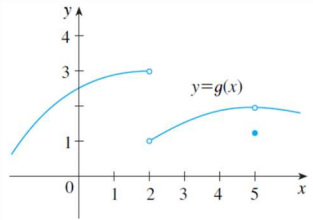
C64:A>T	T48:T>T	T	JS.11.02		<table border="1"> <thead> <tr> <th>x</th> <th>f(x)</th> <th>x</th> <th>f(x)</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>1,0</td> <td>2,000000</td> <td>3,0</td> <td>8,000000</td> </tr> <tr> <td>1,5</td> <td>2,750000</td> <td>2,5</td> <td>5,750000</td> </tr> <tr> <td>1,8</td> <td>3,440000</td> <td>2,2</td> <td>4,640000</td> </tr> <tr> <td>1,9</td> <td>3,710000</td> <td>2,1</td> <td>4,310000</td> </tr> <tr> <td>1,95</td> <td>3,852500</td> <td>2,05</td> <td>4,152500</td> </tr> <tr> <td>1,99</td> <td>3,970100</td> <td>2,01</td> <td>4,030100</td> </tr> <tr> <td>1,995</td> <td>3,985025</td> <td>2,005</td> <td>4,015025</td> </tr> <tr> <td>1,999</td> <td>3,997001</td> <td>2,001</td> <td>4,003001</td> </tr> </tbody> </table>	x	f(x)	x	f(x)	1,0	2,000000	3,0	8,000000	1,5	2,750000	2,5	5,750000	1,8	3,440000	2,2	4,640000	1,9	3,710000	2,1	4,310000	1,95	3,852500	2,05	4,152500	1,99	3,970100	2,01	4,030100	1,995	3,985025	2,005	4,015025	1,999	3,997001	2,001	4,003001
x	f(x)	x	f(x)																																						
1,0	2,000000	3,0	8,000000																																						
1,5	2,750000	2,5	5,750000																																						
1,8	3,440000	2,2	4,640000																																						
1,9	3,710000	2,1	4,310000																																						
1,95	3,852500	2,05	4,152500																																						
1,99	3,970100	2,01	4,030100																																						
1,995	3,985025	2,005	4,015025																																						
1,999	3,997001	2,001	4,003001																																						
C65:A>GR		GR	JS.11.03																																						
C66:T>GR		T	JS.11.02'																																						
C67:T>LN																																									
C69:T>LN																																									
C67:T>LN	T49:LN>LN	LN	JS.11.04		Da tabela e do gráfico de f (uma parábola) mostrado na Figura 1, vemos que quando x estiver próximo de 2 (de qualquer lado de 2), $f(x)$ tenderá a 4. De fato, parece que podemos tornar os valores de $f(x)$ tão próximos de 4 quanto quisermos, ao tornar x suficientemente próximo de 2. Expressamos isso dizendo que “o limite da função $f(x) = x^2 - x + 2$ quando x tende a 2 é igual a 4”. A notação para isso é																																				
C68:GR>LN	T50:LN>LN	LN	JS.11.04'																																						
C70:GR>LN																																									
C71:LN>A																																									
C69:T>LN	T54:A>A	A	JS.11.05		$\lim_{x \rightarrow 2} (x^2 - x + 2) = 4$																																				
C72:A>LN	T51:LN>LN	LN	JS.11.06																																						
C72:A>LN	T54:A>A	LN	JS.11.06'																																						
	T55:LN>LN	LN	JS.11.06''																																						
C73:LN>A	T52:LN>LN	LN	JS.11.07																																						
C74:LN>A	T55:LN>LN	LN	JS.11.07'																																						
	T56:LN>LN																																								
C73:LN>A	T53:A>A	A	JS.11.08		$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$																																				
C76:A>GR																																									
C74:LN>A	T53:A>A	A	JS.11.09		$f(x) \rightarrow L \quad \text{quando} \quad x \rightarrow a$																																				
C75:A>LN																																									
C77:A>GR																																									
C75:A>LN	T56:LN>LN	LN	JS.11.10		<p>“$f(x)$ tende a L quando x tende a a”.</p>																																				
C78:LN>GR																																									
C76:A>GR	T54:GR>GR	GR	JS.11.11																																						
C77:A>GR	T55:GR>GR	GR	JS.11.11'																																						
C78:LN>GR		GR	JS.11.11''																																						
C79:GR>A																																									

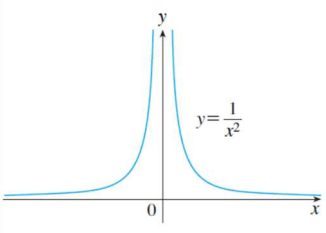
C79:GR>A		LN	JS.11.19	A Figura 2 mostra os gráficos de três funções. Note que, na parte (c), $f(a)$ não está definida e, na parte (b), $f(a) \neq L$. Mas, em cada caso, não importando o que acontece em a , sabe-se que $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$.												
	T57:A>A	A	JS.12.01	EXEMPLO 1 Estime o valor de $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{x^2-1}$.												
C80:A>T C81:A>T	T57:A>A	LN	JS.12.02	SOLUÇÃO Observe que a função $f(x) = (x-1)/(x^2-1)$ não está definida quando $x=1$, mas isso não importa, pois a definição de $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ diz que devemos considerar valores de x que estão próximos de a , mas não são iguais a a .												
C80:A>T C82:T>A	T58:T>T	T	JS.12.03	<table border="1"> <thead> <tr> <th>$x < 1$</th> <th>$f(x)$</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>0,5</td> <td>0,666667</td> </tr> <tr> <td>0,9</td> <td>0,526316</td> </tr> <tr> <td>0,99</td> <td>0,502513</td> </tr> <tr> <td>0,999</td> <td>0,500250</td> </tr> <tr> <td>0,9999</td> <td>0,500025</td> </tr> </tbody> </table>	$x < 1$	$f(x)$	0,5	0,666667	0,9	0,526316	0,99	0,502513	0,999	0,500250	0,9999	0,500025
$x < 1$	$f(x)$															
0,5	0,666667															
0,9	0,526316															
0,99	0,502513															
0,999	0,500250															
0,9999	0,500025															
C81:A>T C83:T>A	T58:T>T	T	JS.12.04	<table border="1"> <thead> <tr> <th>$x > 1$</th> <th>$f(x)$</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>1,5</td> <td>0,400000</td> </tr> <tr> <td>1,1</td> <td>0,476190</td> </tr> <tr> <td>1,01</td> <td>0,497512</td> </tr> <tr> <td>1,001</td> <td>0,499750</td> </tr> <tr> <td>1,0001</td> <td>0,499975</td> </tr> </tbody> </table>	$x > 1$	$f(x)$	1,5	0,400000	1,1	0,476190	1,01	0,497512	1,001	0,499750	1,0001	0,499975
$x > 1$	$f(x)$															
1,5	0,400000															
1,1	0,476190															
1,01	0,497512															
1,001	0,499750															
1,0001	0,499975															
C82:T>A C83:T>A C84:A>LN C85:A>GR		A	JS.12.05	$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{x^2-1} = 0,5$												
C85:A>GR	T59:GR>GR	GR	JS.12.06	<p>FIGURA 3</p>												
C84:A>LN C86:LN>A		LN	JS.12.07	O Exemplo 1 está ilustrado pelo gráfico de f na Figura 3. Agora, vamos mudar ligeiramente f definindo seu valor como 2 quando $x = 1$ e chamando a função resultante de g .												
C86:LN>A C87:A>GR		A	JS.12.08	$g(x) = \begin{cases} \frac{x-1}{x^2-1} & \text{se } x \neq 1 \\ 2 & \text{se } x = 1 \end{cases}$												
C88:GR>LN		LN	JS.12.09	Essa nova função g tem o mesmo limite quando x tende a 1												
C87:A>GR C88:GR>LN	T59:GR>GR	GR	JS.12.10	<p>FIGURA 4</p>												
C89:A>T C90:A>GR		A	JS.13.01	EXEMPLO 2 Estime o valor de $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sqrt{t^2+9}-3}{t^2}$.												
C89:A>T C91:T>LN		T	JS.13.02	<table border="1"> <thead> <tr> <th>t</th> <th>$\frac{\sqrt{t^2+9}-3}{t^2}$</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>$\pm 1,0$</td> <td>0,16228</td> </tr> <tr> <td>$\pm 0,5$</td> <td>0,16553</td> </tr> <tr> <td>$\pm 0,1$</td> <td>0,16662</td> </tr> <tr> <td>$\pm 0,05$</td> <td>0,16666</td> </tr> <tr> <td>$\pm 0,01$</td> <td>0,16667</td> </tr> </tbody> </table>	t	$\frac{\sqrt{t^2+9}-3}{t^2}$	$\pm 1,0$	0,16228	$\pm 0,5$	0,16553	$\pm 0,1$	0,16662	$\pm 0,05$	0,16666	$\pm 0,01$	0,16667
t	$\frac{\sqrt{t^2+9}-3}{t^2}$															
$\pm 1,0$	0,16228															
$\pm 0,5$	0,16553															
$\pm 0,1$	0,16662															
$\pm 0,05$	0,16666															
$\pm 0,01$	0,16667															

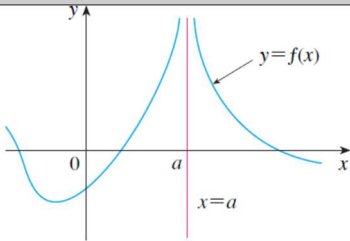
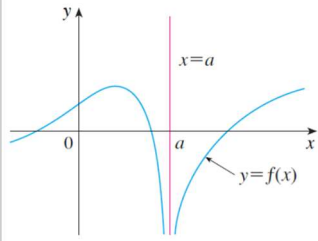
C91:T>LN C92:LN>A		LN	JS.13.03	À medida que t tende a 0, os valores da função parecem tender a $0,1666666\dots$ e, assim, demos conjecturar que																						
C92:LN>A		A	JS.13.04	$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sqrt{t^2 + 9} - 3}{t^2} = \frac{1}{6}$																						
C90:A>GR C93:T>LN		T	JS.13.05	<table border="1"> <thead> <tr> <th>t</th> <th>$\frac{\sqrt{t^2 + 9} - 3}{t^2}$</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>$\pm 0,0005$</td> <td>0,16800</td> </tr> <tr> <td>$\pm 0,0001$</td> <td>0,20000</td> </tr> <tr> <td>$\pm 0,00005$</td> <td>0,00000</td> </tr> <tr> <td>$\pm 0,00001$</td> <td>0,00000</td> </tr> </tbody> </table>	t	$\frac{\sqrt{t^2 + 9} - 3}{t^2}$	$\pm 0,0005$	0,16800	$\pm 0,0001$	0,20000	$\pm 0,00005$	0,00000	$\pm 0,00001$	0,00000												
t	$\frac{\sqrt{t^2 + 9} - 3}{t^2}$																									
$\pm 0,0005$	0,16800																									
$\pm 0,0001$	0,20000																									
$\pm 0,00005$	0,00000																									
$\pm 0,00001$	0,00000																									
C93:T>LN C94:LN>A		LN	JS.13.06	Se você tentar fazer esses cálculos em sua calculadora, poderá obter valores diferentes, mas finalmente vai obter o valor 0 para um t suficientemente pequeno. Isso significa que a resposta é realmente 0, e não $\frac{1}{6}$? Não, o valor do limite é $\frac{1}{6}$, como veremos na próxima seção. O problema é que a calculadora dá valores falsos, pois $\sqrt{t^2 + 9}$ fica muito próximo de 3 quando t é pequeno. (Na realidade, quando t é suficientemente pequeno, o valor obtido na calculadora para $\sqrt{t^2 + 9}$ é 3,000... com tantas casas decimais quanto a calculadora for capaz de fornecer).																						
C94:LN>A C95:A>GR		A	JS.13.07	$f(t) = \frac{\sqrt{t^2 + 9} - 3}{t^2}$																						
C95:A>GR C96:GR>LN	T60:GR>GR T61:GR>GR T62:GR>GR	GR GR GR GR	JS.13.08 JS.13.08' JS.13.08'' JS.13.08'''	<p>FIGURA 5</p>																						
C96:GR>LN		LN	JS.13.09	do Exemplo 2 em uma calculadora gráfica ou computador. As partes (a) e (b) da Figura 5 mostram gráficos bem precisos de f , quando usamos o <i>trace mode</i> (se disponível), por isso é fácil estimar que o limite é de cerca de $\frac{1}{6}$. Porém, se dermos um <i>zoom</i> , como em (c) e (d), obteremos gráficos imprecisos, novamente em virtude de problemas com a subtração de números muito próximos.																						
C97:A>GR	T63:A>A	A	JS.14.01	EXEMPLO 3 Faça uma estimativa de $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{sen } x}{x}$.																						
C98:A>T C99:A>GR	T63:A>A	LN	JS.14.02	SOLUÇÃO A função $f(x) = (\text{sen } x)/x$ não está definida quando $x = 0$. Usando uma calculadora (e lembrando-se de que, se $x \in \mathbb{R}$, $\text{sen } x$ indica o seno de um ângulo cuja medida em radianos é x), construímos a tabela ao lado usando valores com precisão de oito casas decimais.																						
C98:A>T C100:T>GR C101:T>A		T	JS.14.03	<table border="1"> <thead> <tr> <th>x</th> <th>$\frac{\text{sen } x}{x}$</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>$\pm 1,0$</td> <td>0,84147098</td> </tr> <tr> <td>$\pm 0,5$</td> <td>0,95892108</td> </tr> <tr> <td>$\pm 0,4$</td> <td>0,97545866</td> </tr> <tr> <td>$\pm 0,3$</td> <td>0,98507666</td> </tr> <tr> <td>$\pm 0,2$</td> <td>0,99334665</td> </tr> <tr> <td>$\pm 0,1$</td> <td>0,99833417</td> </tr> <tr> <td>$\pm 0,05$</td> <td>0,99966319</td> </tr> <tr> <td>$\pm 0,01$</td> <td>0,99998333</td> </tr> <tr> <td>$\pm 0,005$</td> <td>0,99999653</td> </tr> <tr> <td>$\pm 0,001$</td> <td>0,99999983</td> </tr> </tbody> </table>	x	$\frac{\text{sen } x}{x}$	$\pm 1,0$	0,84147098	$\pm 0,5$	0,95892108	$\pm 0,4$	0,97545866	$\pm 0,3$	0,98507666	$\pm 0,2$	0,99334665	$\pm 0,1$	0,99833417	$\pm 0,05$	0,99966319	$\pm 0,01$	0,99998333	$\pm 0,005$	0,99999653	$\pm 0,001$	0,99999983
x	$\frac{\text{sen } x}{x}$																									
$\pm 1,0$	0,84147098																									
$\pm 0,5$	0,95892108																									
$\pm 0,4$	0,97545866																									
$\pm 0,3$	0,98507666																									
$\pm 0,2$	0,99334665																									
$\pm 0,1$	0,99833417																									
$\pm 0,05$	0,99966319																									
$\pm 0,01$	0,99998333																									
$\pm 0,005$	0,99999653																									
$\pm 0,001$	0,99999983																									
C101:T>A C102:A>GR		A	JS.14.04	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{sen } x}{x} = 1$																						
C97:A>GR C99:A>GR C100:T>GR C102:A>GR		GR	JS.14.05																							
	T64:A>A	A	JS.15.01	EXEMPLO 4 Analise $\lim_{x \rightarrow 0} \text{sen} \frac{\pi}{x}$.																						

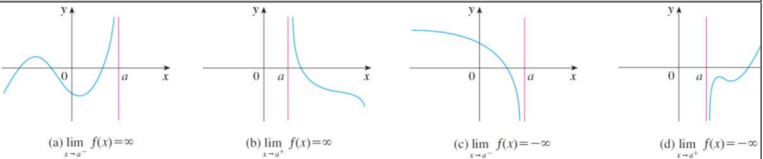
C103:A>N	T64:A>A	LN	JS.15.02	SOLUÇÃO Mais uma vez a função $f(x) = \text{sen}(\pi/x)$ não está definida em 0. Calculando para alguns valores pequenos de x , temos												
C103:A>N C104:N>A		N	JS.15.03	<table border="1" style="margin-left: auto; margin-right: auto;"> <tbody> <tr> <td>$f(1) = \text{sen } \pi = 0$</td> <td>$f(\frac{1}{2}) = \text{sen } 2\pi = 0$</td> </tr> <tr> <td>$f(\frac{1}{3}) = \text{sen } 3\pi = 0$</td> <td>$f(\frac{1}{4}) = \text{sen } 4\pi = 0$</td> </tr> <tr> <td>$f(0,1) = \text{sen } 10\pi = 0$</td> <td>$f(0,01) = \text{sen } 100\pi = 0$</td> </tr> </tbody> </table> <p>Da mesma maneira, $f(0,001) = f(0,0001) = 0$. Com base nessa informação, ficaríamos tentados a conjecturar que</p>	$f(1) = \text{sen } \pi = 0$	$f(\frac{1}{2}) = \text{sen } 2\pi = 0$	$f(\frac{1}{3}) = \text{sen } 3\pi = 0$	$f(\frac{1}{4}) = \text{sen } 4\pi = 0$	$f(0,1) = \text{sen } 10\pi = 0$	$f(0,01) = \text{sen } 100\pi = 0$						
$f(1) = \text{sen } \pi = 0$	$f(\frac{1}{2}) = \text{sen } 2\pi = 0$															
$f(\frac{1}{3}) = \text{sen } 3\pi = 0$	$f(\frac{1}{4}) = \text{sen } 4\pi = 0$															
$f(0,1) = \text{sen } 10\pi = 0$	$f(0,01) = \text{sen } 100\pi = 0$															
C104:N>A	T64:A>A	A	JS.15.05	$\lim_{x \rightarrow 0} \text{sen} \frac{\pi}{x} = 0.$												
C105:A>GR	T64:A>A	LN	JS.15.06	Dessa vez, no entanto, nossa conjectura está errada . Observe que, embora $f(1/n) = \text{sen } n\pi = 0$ para todo número inteiro n , é também verdadeiro que $f(x) = 1$ para infinitos valores de x que tendem a 0. Você poderá ver isto a partir do gráfico de f mostrado na Figura 7.												
C105:A>GR		GR	JS.15.07													
Limites e Derivadas: O Limite de uma função: Exemplo 5																
C106:A>T		A	JS.16.01	EXEMPLO 5 Encontre $\lim_{x \rightarrow 0} \left(x^3 + \frac{\cos 5x}{10\,000} \right).$												
C106:A>T	T68:A>A	T	JS.16.02	<table border="1" style="margin-left: auto; margin-right: auto;"> <thead> <tr> <th>x</th> <th>$x^3 + \frac{\cos 5x}{10\,000}$</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>1</td> <td>1,000028</td> </tr> <tr> <td>0,5</td> <td>0,124920</td> </tr> <tr> <td>0,1</td> <td>0,001088</td> </tr> <tr> <td>0,05</td> <td>0,000222</td> </tr> <tr> <td>0,01</td> <td>0,000101</td> </tr> </tbody> </table>	x	$x^3 + \frac{\cos 5x}{10\,000}$	1	1,000028	0,5	0,124920	0,1	0,001088	0,05	0,000222	0,01	0,000101
x	$x^3 + \frac{\cos 5x}{10\,000}$															
1	1,000028															
0,5	0,124920															
0,1	0,001088															
0,05	0,000222															
0,01	0,000101															
C107:T>A	T68:A>A	T	JS.16.03	<table border="1" style="margin-left: auto; margin-right: auto;"> <thead> <tr> <th>x</th> <th>$x^3 + \frac{\cos 5x}{10\,000}$</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>0,005</td> <td>0,0001009</td> </tr> <tr> <td>0,001</td> <td>0,0001000</td> </tr> </tbody> </table>	x	$x^3 + \frac{\cos 5x}{10\,000}$	0,005	0,0001009	0,001	0,0001000						
x	$x^3 + \frac{\cos 5x}{10\,000}$															
0,005	0,0001009															
0,001	0,0001000															
C107:T>A	T66:A>A	A	JS.16.04	$\lim_{x \rightarrow 0} \left(x^3 + \frac{\cos 5x}{10\,000} \right) = 0$												
	T66:A>A T67:A>A	A	JS.16.05	$\lim_{x \rightarrow 0} \left(x^3 + \frac{\cos 5x}{10\,000} \right) = 0,000100 = \frac{1}{10\,000}$												
	T67:A>A T69:A>A	LN LN	JS.16.06 JS.16.06'	Mais tarde, veremos que $\lim_{x \rightarrow 0} \cos 5x = 1$, e então segue que o limite é 0.												
Limites e Derivadas: O Limite de uma função: Exemplo 6																
C108:A>GR C109:A>LN		A	JS.17.01	EXEMPLO 6 A função de Heaviside, H , é definida por												
C108:A>GR C110:GR>LN		GR	JS.17.02	$H(t) = \begin{cases} 0 & \text{se } t < 0 \\ 1 & \text{se } t \geq 0 \end{cases}$  <p style="text-align: center; font-size: small;">FIGURA 6 A função Heaviside</p>												
C109:A>LN C110:GR>LN		LN	JS.17.03	Quando t tende a 0 pela esquerda, $H(t)$ tende a 0. Quando t tende a 0 pela direita, $H(t)$ tende a 1. Não há um número único para o qual $H(t)$ tende quando t tende a 0. Por isso, $\lim_{t \rightarrow 0} H(t)$ não existe.												
Limites e Derivadas: O Limite de uma função: Limites Laterais																
C111:LN>A	T70:LN>LN	LN	JS.18.01	$H(t)$ tende a 0 quando t tende a 0 pela esquerda,												

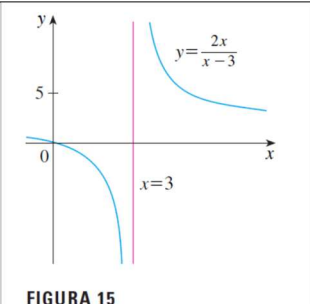
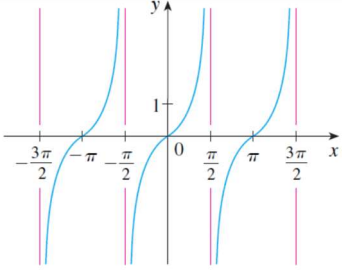
C112:LN>A	T70:LN>LN	LN	JS.18.02	$H(t)$ tende a 1 quando t tende a 0 pela direita.
C111:LN>A	T71:A>A T78:A>A	A	JS.18.03	$\lim_{t \rightarrow 0^-} H(t) = 0$
C113:A>LN C112:LN>A	T71:A>A	A	JS.18.04	$\lim_{t \rightarrow 0^+} H(t) = 1$
C114:LN>GR	T74:LN>LN T78:A>A	A LN LN LN	JS.18.05 JS.18.05' JS.18.05'' JS.18.05'''	<p>2 Definição Escrevemos</p> $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = L$ <p>e dizemos que o limite à esquerda de $f(x)$ quando x tende a a [ou o limite de $f(x)$ quando x tende a a pela esquerda] é igual a L se pudermos tornar os valores de $f(x)$ arbitrariamente próximos de L, para x suficientemente próximo de a e x menor que a.</p>
C113:A>LN C115:A>GR C113':LN>A C113':LN>A	T74:LN>LN	LN A	JS.18.06 JS.18.06'	<p>menor que a. De maneira semelhante, se exigirmos que x seja maior que a, obtemos “o limite à direita de $f(x)$ quando x tende a a é igual a L” e escrevemos</p> $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = L$
C114:LN>GR C116:GR>A	T75:GR>GR	GR A	JS.18.07 JS.18.07'	 <p>(a) $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = L$</p>
C115:A>GR C117:GR>A	T75:GR>GR	GR A	JS.18.08 JS.18.08'	 <p>(b) $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = L$</p>
C116:GR>A C117:GR>A	T76:A>A T77:A>A	A A	JS.18.09 JS.18.09'	<p>3 $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$ se e somente se $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = L$ e $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = L$</p>

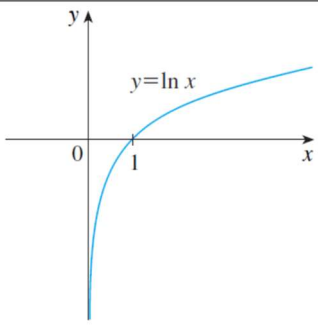
		A	JS.18.09'																	
Límites e Derivadas: O Limite de uma função: Limites Laterais: Exemplo 7																				
C118:GR>LN C119:GR>A		GR	JS.19.01																	
C118:GR>LN C120:LN>A	T79:LN>LN	LN LN	JS.19.02 JS.19.02'	SOLUÇÃO A partir do gráfico, vemos que os valores de $g(x)$ tendem a 3 à medida que x tende a 2 pela esquerda, mas tendem a 1 quando x tende a 2 pela direita. Logo																
C120:LN>A C119:GR>A	T80:A>A	A A	JS.19.03 JS.19.03'	(a) $\lim_{x \rightarrow 2^-} g(x) = 3$ e (b) $\lim_{x \rightarrow 2^+} g(x) = 1$																
	T81:A>A T82:A>A	A A	JS.19.04 JS.19.04'	(d) $\lim_{x \rightarrow 5^-} g(x) = 2$ e (e) $\lim_{x \rightarrow 5^+} g(x) = 2$																
	T82:A>A	A	JS.19.05	$\lim_{x \rightarrow 5} g(x) = 2$																
Límites e Derivadas: O Limite de uma função: Limites Infinitos: Exemplo 8																				
C121:A>T C122:A>GR		A	JS.20.01	EXEMPLO 8 Encontre $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2}$, se existir.																
C121:A>T C123:T>GR C124:T>LN		T	JS.20.02	<table border="1" data-bbox="925 1478 1173 1758"> <thead> <tr> <th>x</th> <th>$\frac{1}{x^2}$</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>± 1</td> <td>1</td> </tr> <tr> <td>$\pm 0,5$</td> <td>4</td> </tr> <tr> <td>$\pm 0,2$</td> <td>25</td> </tr> <tr> <td>$\pm 0,1$</td> <td>100</td> </tr> <tr> <td>$\pm 0,05$</td> <td>400</td> </tr> <tr> <td>$\pm 0,01$</td> <td>10.000</td> </tr> <tr> <td>$\pm 0,001$</td> <td>1.000.000</td> </tr> </tbody> </table>	x	$\frac{1}{x^2}$	± 1	1	$\pm 0,5$	4	$\pm 0,2$	25	$\pm 0,1$	100	$\pm 0,05$	400	$\pm 0,01$	10.000	$\pm 0,001$	1.000.000
x	$\frac{1}{x^2}$																			
± 1	1																			
$\pm 0,5$	4																			
$\pm 0,2$	25																			
$\pm 0,1$	100																			
$\pm 0,05$	400																			
$\pm 0,01$	10.000																			
$\pm 0,001$	1.000.000																			

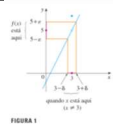

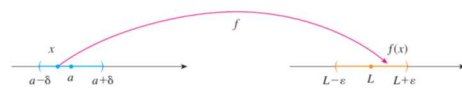
C122:A>GR C123:T>GR C125:GR>LN		GR	JS.20.03	 <p>FIGURA 11</p>
C124:T>LN C125:GR>LN C126:LN>A	T83:LN>LN	LN LN	JS.20.04 JS.20.04'	<p>À medida que x tende a 0, x^2 também tende a 0, e $1/x^2$ fica muito grande (tabela na margem.) De fato, a partir do gráfico da função $f(x) = 1/x^2$ da Figura 11, parece que a função $f(x)$ pode se tornar arbitrariamente grande ao tornarmos os valores de x suficientemente próximos de 0. Assim, os valores de $f(x)$ não tendem a um número, e não ex</p>
C126:LN>A C127:A>LN	T84:A>A	A	JS.20.05	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2} = \infty$
C127:A>LN C128:LN>A		LN	JS.20.06	<p>existe. Expressa simplesmente uma maneira particular de não existência de limite: $1/x$ ser tão grande quanto quisermos, tomando x suficientemente perto de 0.</p>
C128:LN>A C129:A>LN	T84:A>A	A	JS.20.07	$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty$
C129:A>LN C130:LN>A		LN	JS.20.08	<p>para indicar que os valores de $f(x)$ tendem a se tornar cada vez maiores (ou “a cresce cada vez mais”) à medida que x se tornar cada vez mais próximo de a.</p>
C130:LN>A C131:LN>A C137:A>LN C137:A>LN		A LN	JS.20.09 JS.20.09'	<p>4 Definição Seja f uma função definida em ambos os lados de a, exceto possivelmente no próprio a. Então</p> $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty$ <p>significa que podemos fazer os valores de $f(x)$ ficarem arbitrariamente grandes (tão grandes quanto quisermos) tornando x suficientemente próximo de a, mas não igual a a.</p>
C131:LN>A	T85:A>A	A	JS.20.10	<p>Outra notação para $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty$ é</p>
	T85:A>A T86:A>A	A	JS.20.11	$f(x) \rightarrow \infty \quad \text{quando} \quad x \rightarrow a$
C132:A>LN	T86:A>A	A	JS.20.12	$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty$
C132:A>LN C133:LN>GR	T87:LN>LN	LN	JS.20.13	<p>“o limite de $f(x)$, quando x tende a a, é infinito”</p>
C134:LN>GR	T87:LN>LN T88:LN>LN	LN	JS.20.14	<p>“$f(x)$ se torna infinito quando x tende a a”</p>

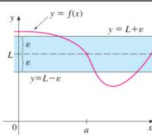
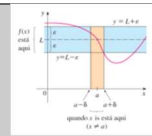
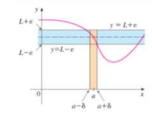
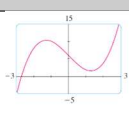
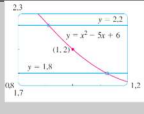
C135:LN>GR	T88:LN>LN	LN	JS.20.15	“ $f(x)$ cresce ilimitadamente quando x tende a a ”
C133:LN>GR C134:LN>GR C135:LN>GR C139:GR>A C139:GR>A	T89:GR>GR	GR GR	JS.20.16 JS.20.16'	 <p>FIGURA 12 $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty$</p>
C136:GR>A C140:GR>A C140:GR>A	T89:GR>GR	GR A	JS.20.17 JS.20.17'	<p>Quando dizemos que um número é um “negativo grande”, queremos dizer que ele é negativo, mas que seu valor absoluto é grande.</p>  <p>FIGURA 13 $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = -\infty$</p>
C132:LN>A C136:GR>A C141:A>LN C141:A>LN C142:LN>A		A LN	JS.20.18 JS.20.18'	<p>5 Definição Seja f definida em ambos os lados de a, exceto possivelmente no próprio a. Então</p> $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = -\infty$ <p>significa que os valores de $f(x)$ podem ser arbitrariamente grandes, porém negativos ao tornarmos x suficientemente próximo de a, mas não igual a a.</p>
C142:LN>A C143:A>LN C143:A>LN C144:LN>A	T90:LN>LN	A LN LN	JS.20.19 JS.20.19' JS.20.19''	<p>O símbolo $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = -\infty$ pode ser lido das seguintes formas: “o limite de $f(x)$ quando x tende a a é menos infinito”, ou “$f(x)$ decresce ilimitadamente quando x tende a a”.</p>
C144:LN>A	T91:A>A	A	JS.20.20	$\lim_{x \rightarrow 0} \left(-\frac{1}{x^2} \right) = -\infty$
C145:A>GR	T91:A>A T92:A>A T93:A>A T94:A>A	A A A A	JS.20.21 JS.20.21' JS.20.21'' JS.20.21'''	$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = \infty \qquad \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \infty$ $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = -\infty \qquad \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = -\infty$

C145:A>GR	T95:GR>GR	GR	JS.20.22	 <p>(a) $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = \infty$ (b) $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \infty$ (c) $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = -\infty$ (d) $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = -\infty$</p> <p>FIGURA 14</p>						
C146:GR>A	T96:GR>GR	A	JS.20.22'							
C146:GR>A	T97:GR>GR	GR	JS.20.22''							
C150:A>GR	T104:A>A	A	JS.20.22'''							
C150:A>GR		GR	JS.20.22''''							
C147:GR>A		A	JS.20.22'''''							
C147:GR>A		GR	JS.20.22''''''							
C151:A>GR		A	JS.20.22'''''''							
C151:A>GR										
C148:GR>A										
C148:GR>A										
C152:A>GR										
C152:A>GR										
C149:GR>A										
C149:GR>A										
C132':LN>A	T98:A>A	A	JS.20.23	<p>6 Definição A reta $x = a$ é chamada assíntota vertical da curva $y = f(x)$ se pelo menos uma das seguintes condições estiver satisfeita:</p> <table style="width: 100%; border: none;"> <tr> <td style="text-align: center;">$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty$</td> <td style="text-align: center;">$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = \infty$</td> <td style="text-align: center;">$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \infty$</td> </tr> <tr> <td style="text-align: center;">$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = -\infty$</td> <td style="text-align: center;">$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = -\infty$</td> <td style="text-align: center;">$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = -\infty$</td> </tr> </table>	$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty$	$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = \infty$	$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \infty$	$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = -\infty$	$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = -\infty$	$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = -\infty$
$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty$	$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = \infty$	$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \infty$								
$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = -\infty$	$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = -\infty$	$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = -\infty$								
	T99:A>A	A	JS.20.23'							
	T100:A>A	A	JS.20.23''							
	T101:A>A	A	JS.20.23'''							
	T102:A>A	A	JS.20.23''''							
	T104:A>A	A	JS.20.23''''''							
	T105:A>A									
	T103:A>A	A	JS.20.24	<p>Por exemplo, o eixo y é uma assíntota vertical da curva $y = 1/x^2$, pois $\lim_{x \rightarrow 0} (1/x^2)$</p>						
	T105:A>A	A	JS.20.24'							
Límites e Derivadas: O Limite de uma função: Limites Infinitos: Exemplo 9										
C153:A>GR	T106:A>A	A	JS.21.01	$\lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{2x}{x-3}$						
C154:A>GR	T106:A>A	A	JS.21.02	$\lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{2x}{x-3}$						
C156:GR>A		A	JS.21.03	<p>O gráfico da curva $y = 2x/(x-3)$ está dado na Figura 15. A reta $x = 3$ é uma assíntota vertical.</p>						
		A	JS.21.03'							

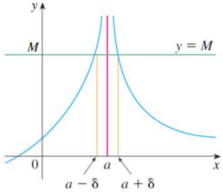
C153:A>GR		GR	JS.21.04	 <p>FIGURA 15</p>
C154:A>GR		A	JS.21.04'	
C155:GR>A				
C155:GR>A				
C156:GR>A				
Limites e Derivadas: O Limite de uma função: Limites Infinitos: Exemplo 10				
	T107:A>A T110:A>A	A	JS.22.01	<p>EXEMPLO 10 Encontre as assíntotas verticais de $f(x) = \operatorname{tg} x$</p>
	T107:A>A T108:A>A T109:A>A	A A	JS.22.02 JS.22.02'	<p>existem assíntotas verticais em potencial nos pontos nos quais $\cos x = 0$. De fato, $\cos x \rightarrow 0^+$ quando $x \rightarrow (\pi/2)^-$ e $\cos x \rightarrow 0^-$ quando $x \rightarrow (\pi/2)^+$, enquanto $\sin x$ é positivo quando x está próximo de $\pi/2$, temos</p>
C157:A>GR	T108:A>A T111:A>A	A	JS.22.03	$\lim_{x \rightarrow (\pi/2)^-} \operatorname{tg} x = \infty$
C158:A>GR	T109:A>A T111:A>A	A	JS.22.04	$\lim_{x \rightarrow (\pi/2)^+} \operatorname{tg} x = -\infty$
C157:A>GR C158:A>GR C159:GR>A C159:GR>A		GR A	JS.22.05 JS.22.05'	 <p>FIGURA 16 $y = \operatorname{tg} x$</p>
C160:A>GR	T110:A>A	A	JS.22.06	$y = \ln x.$

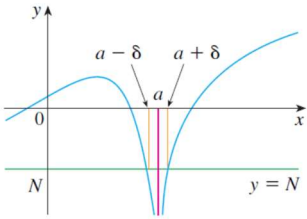
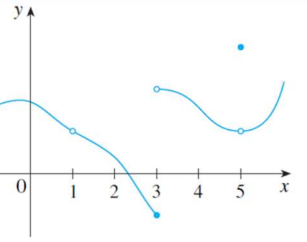
C160:A>GR C161:GR>A		GR	JS.22.07	 <p>FIGURA 17 O eixo y é uma assíntota vertical da função logaritmo natural.</p>
C161:GR>A		A	JS.23.08	$\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x = -\infty$
Limites e Derivadas: A Definição Precisa de Limite				
	T112:A>A T113:A>A	A	JS.23.01	$\lim_{x \rightarrow 0} \left(x^3 + \frac{\cos 5x}{10.000} \right) = 0,0001$
	T112:A>A T114:A>A	A	JS.23.02	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$
C162:A>LN	T113:A>A T114:A>A	LN	JS.23.03	$f(x) = \begin{cases} 2x - 1 & \text{se } x \neq 3 \\ 6 & \text{se } x = 3 \end{cases}$
C162:A>LN	T124:A>A	LN A	JS.23.04 JS.23.04'	<p>É intuitivamente claro que quando x está próximo de 3, mas $x \neq 3$, então $f(x)$ está próximo de 5 e, sendo assim, $\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = 5$.</p>
C163:LN>A C163:LN>A	T115:A>A	LN	JS.23.05	$ f(x) - 5 < 0,1 \quad \text{se} \quad x - 3 < \delta \quad \text{mas } x \neq 3$
	T115:A>A T116:A>A	A	JS.23.06	$ f(x) - 5 < 0,1 \quad \text{se} \quad 0 < x - 3 < \delta$
C164:A>LN	T116:A>A	LN	JS.23.07	$ f(x) - 5 < 0,1 \quad \text{se} \quad 0 < x - 3 < 0,05$
C164:A>LN	T117:LN>LN	LN	JS.23.14	<p>Assim, uma resposta para o problema é dada por $\delta = 0,05$; isto é, se x estiver a uma distância de no máximo 0,05 de 3, então $f(x)$ estará a uma distância de no máximo 0,1 de 5.</p>
C165:LN>A	T117:LN>LN	A	JS.23.15	<p>Se mudarmos o número 0,1 em nosso problema para o número menor 0,01, então, pelo mesmo método, achamos que $f(x)$ diferirá de 5 por menos que 0,01, desde que x difira de 3 por menos que $(0,01)/2 = 0,005$:</p>
C165:LN>A	T118:A>A	A	JS.23.16	$ f(x) - 5 < 0,01 \quad \text{se} \quad 0 < x - 3 < 0,005$
	T118:A>A T119:A>A	LN	JS.23.17	$ f(x) - 5 < 0,001 \quad \text{se} \quad 0 < x - 3 < 0,0005$
C166:A>LN	T119:A>A	LN	JS.23.19	$ f(x) - 5 < \varepsilon \quad \text{se} \quad 0 < x - 3 < \delta = \frac{\varepsilon}{2}$

C166:A>LN	T120:LN>LN	A	JS.23.20	Esta é uma maneira precisa de dizer que $f(x)$ está próximo de 5 quando x está próximo de 3 pois \square diz que podemos fazer os valores de $f(x)$ ficarem dentro de uma distância arbitrária ε de 5 tomando os valores de x dentro de uma distância $\varepsilon/2$ de 3 (mas $x \neq 3$).
C167:LN>A		A	JS.23.20'	
C167:LN>A		GR	JS.23.21	Observe que \square pode ser reescrita como:
C168:A>LN				se $3 - \delta < x < 3 + \delta$ ($x \neq 3$) então $5 - \varepsilon < f(x) < 5 + \varepsilon$
C169:LN>GR		LN	JS.23.22	
C168:A>LN		A	JS.23.23	e isso está ilustrado na Figura 1. Tomando os valores de x ($\neq 3$) dentro do intervalo $(3 - \delta, 3 + \delta)$, podemos obter os valores de $f(x)$ dentro do intervalo $(5 - \varepsilon, 5 + \varepsilon)$.
C169:LN>GR				
C170:GR>LN	T121:A>A	LN	JS.23.24	<p>2 Definição Seja f uma função definida em algum intervalo aberto que contenha o número a, exceto possivelmente no próprio a. Então dizemos que o limite de $f(x)$ quando x tende a a é L, e escrevemos</p> $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$ <p>se para todo número $\varepsilon > 0$ houver um número $\delta > 0$ tal que</p> $\text{se } 0 < x - a < \delta \text{ então } f(x) - L < \varepsilon$
C171:LN>A	T125:A>A	LN	JS.23.24'	
C171:LN>A		LN	JS.23.24''	
C172:A>LN		A	JS.23.26	$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$ significa que a distância entre $f(x)$ e L fica arbitrariamente pequena tomando a distância de x a a suficientemente pequena (mas não igual a 0).
C172:A>LN		LN	JS.23.26'	
C173:LN>A				
C173:LN>A	T125:A>A	A	JS.23.27	$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$ significa que os valores de $f(x)$ podem ser tornados tão próximos de L que desejarmos, tornando-se x suficientemente próximo de a (mas não igual a a).
C174:A>LN		LN	JS.23.27'	
C174:A>LN				
C175:LN>GE				
C175:LN>GE		GR	JS.23.29	
C176:GE>LN		LN	JS.23.30	
C176:GE>LN		GR	JS.23.31	A definição de limite afirma que, se for dado qualquer intervalo pequeno $(L - \varepsilon, L + \varepsilon)$ em torno de L , então podemos achar um intervalo $(a - \delta, a + \delta)$ em torno de a tal que todos os pontos de $(a - \delta, a + \delta)$ (exceto possivelmente a) para dentro do intervalo $(L - \varepsilon, L + \varepsilon)$. (Veja a Figura 3.)
C177:LN>GE		LN	JS.23.32	
C178:GE>LN				
C179:LN>GR		LN	JS.23.33	Outra interpretação geométrica de limite pode ser dada em termos do gráfico de uma função. Se for dado $\varepsilon > 0$, então trocamos as retas horizontais $y = L + \varepsilon$ e $y = L - \varepsilon$ e ficamos com o gráfico de f (veja a Figura 4). Se $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$, então podemos achar um número $\delta > 0$ tal que, se limitarmos x ao intervalo $(a - \delta, a + \delta)$ e deixarmos $x \neq a$, a curva $y = f(x)$ ficará entre as retas $y = L - \varepsilon$ e $y = L + \varepsilon$ (veja a Figura 5). Você pode ver que, se um δ tiver sido encontrado, então qualquer δ menor também servirá.
C178:GE>LN				
C180:LN>GR				
C181:LN>GR				

C179:LN>GR	T122:GR>GR	GR	JS.23.35	
C180:LN>GR	T122:GR>GR T123:GR>GR	GR	JS.23.36	
C181:LN>GR	T123:GR>GR	A	JS.23.37	
Límites e Derivadas: A Definição Precisa de Limite: Exemplo 1				
C182:A>LN		LN	JS.24.01	EXEMPLO 1 Use um gráfico para encontrar um número δ tal que se $ x - 1 < \delta$ então $ (x^3 - 5x + 6) - 2 < 0,2$
C182:A>LN C183:LN>GR		GR	JS.24.02	Em outras palavras, encontre um número δ que corresponda a $\varepsilon = 0,2$ na definição de limite para a função $f(x) = x^3 - 5x + 6$ com $a = 1$ e $L = 2$.
C183:LN>GR	T126:GR>GR	A	JS.24.03	
C184:GR>A	T126:GR>GR	LN	JS.24.04	
C184:GR>A	T127:A>A	LN	JS.24.05	se $0,92 < x < 1,12$ então $1,8 < x^3 - 5x + 6 < 2,2$
C185:A>LN	T127:A>A	LN	JS.24.06	se $ x - 1 < 0,08$ então $ (x^3 - 5x + 6) - 2 < 0,2$
C185:A>LN C186:LN>A		LN	JS.24.07	Isso somente nos diz que, mantendo x dentro de uma distância de 0,08 de 1, podemos ter $f(x)$ dentro de uma distância de 0,2 de 2. Embora tenhamos escolhido $\delta = 0,08$, qualquer valor menor positivo de δ também funcionaria.
C186:LN>A	T128:A>A	A	JS.24.14	Imagine uma competição entre duas pessoas, A e B, e suponha que você seja B. A pessoa A estipula que o número fixo L deverá ser aproximado por valores de $f(x)$ com um grau de precisão ε (digamos 0,01). O indivíduo B então responde encontrando um número δ tal que, se $0 < x - a < \delta$, então $ f(x) - L < \varepsilon$. Nesse caso, A pode tornar-se mais exigente e desafiar B com um valor menor de ε (digamos, 0,0001). Novamente, B deve responder encontrando um δ correspondente. Geralmente, quanto menor o valor de ε , menor deve ser o valor de δ correspondente. Se B sempre vencer, não importa quão pequeno ε torna-se, então $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$.
Límites e Derivadas: A Definição Precisa de Limite: Exemplo 2				
	T129:A>A	A	JS.25.01	EXEMPLO 2 Prove que $\lim_{x \rightarrow 3} (4x - 5) = 7$.
	T129:A>A T130:A>a	A	JS.25.02	1. Uma análise preliminar do problema (conjecturando um valor para δ). Seja ε um número positivo dado. Queremos encontrar um número δ tal que se $0 < x - 3 < \delta$ então $ (4x - 5) - 7 < \varepsilon$
	T130:A>A T131:A>A	A	JS.25.03	se $0 < x - 3 < \delta$ então $4 x - 3 < \varepsilon$

	T131:A>A T132:A>A	A	JS.25.04	isto é, se $0 < x - 3 < \delta$ então $ x - 3 < \frac{\varepsilon}{4}$ Isso sugere que deveríamos escolher $\delta = \varepsilon/4$.
	T132:A>A T133:A>A	A	JS.25.05	2. Demonstração (mostrando que este δ funciona). Dado $\varepsilon > 0$, escolha $\delta = \varepsilon/4$. Se $0 < x - 3 < \delta$, então $ (4x - 5) - 7 = 4x - 12 = 4 x - 3 < 4\delta = 4\left(\frac{\varepsilon}{4}\right) = \varepsilon$
	T133:A>A T134:A>A	A	JS.25.06	Assim, se $0 < x - 3 < \delta$ então $ (4x - 5) - 7 < \varepsilon$
C187:A>GR	T134:A>A	A	JS.25.07	Portanto, pela definição de limite, $\lim_{x \rightarrow 3} (4x - 5) = 7$
C187:A>GR		GR	JS.25.08	
Límites e Derivadas: A Definição Precisa de Limite: Exemplo 3				
	T135:A>A T136:A>A	A A	JS.26.01 JS.26.01'	3 Definição de Limite à Esquerda $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = L$ se para todo número $\varepsilon > 0$ houver um número $\delta > 0$ tal que se $a - \delta < x < a$ então $ f(x) - L < \varepsilon$
	T136:A>A T137:A>A T138:A>A	A A	JS.26.02 JS.26.02'	4 Definição de Limite à Direita $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = L$ se para todo número $\varepsilon > 0$ houver um número $\delta > 0$ tal que se $a < x < a + \delta$ então $ f(x) - L < \varepsilon$
	T138:A>A T139:A>A	A	JS.26.03	EXEMPLO 3 Use a Definição 4 para provar que $\lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt{x} = 0$.
	T139:A>A T140:A>A	A	JS.26.04	se $0 < x < \delta$ então $ \sqrt{x} - 0 < \varepsilon$
	T140:A>A T141:A>A	A	JS.26.05	se $0 < x < \delta$ então $\sqrt{x} < \varepsilon$
	T141:A>A T142:A>A	A	JS.26.06	se $0 < x < \delta$ então $x < \varepsilon^2$
	T142:A>A T143:A>A	A	JS.26.07	2. Mostrando que esse δ funciona. Dado $\varepsilon > 0$, seja $\delta = \varepsilon^2$. Se $0 < x < \delta$, então $\sqrt{x} < \sqrt{\delta} = \sqrt{\varepsilon^2} = \varepsilon$ logo $ \sqrt{x} - 0 < \varepsilon$
	T143:A>A	A	JS.26.08	$\lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt{x} = 0.$
Límites e Derivadas: A Definição Precisa de Limite: Exemplo 4				

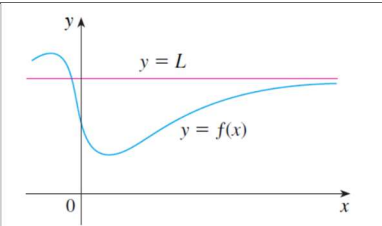
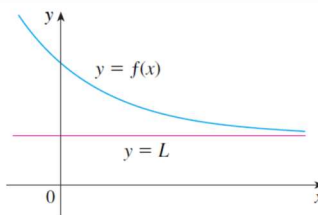
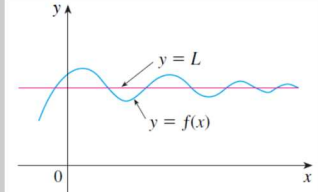
	T144:A>A	A	JS.27.01	EXEMPLO 4 Demonstre que $\lim_{x \rightarrow 3} x^2 = 9$.
	T144:A>A T145:A>A	A	JS.27.02	1. <i>Conjecturando um valor para δ.</i> Seja $\varepsilon > 0$ dado. Temos de achar um número $\delta > 0$ tal que se $0 < x - 3 < \delta$ então $ x^2 - 9 < \varepsilon$
	T145:A>A T146:A>A	A	JS.27.03	Para relacionar $ x^2 - 9 $ com $ x - 3 $ escrevemos $ x^2 - 9 = (x + 3)(x - 3) $. Assim sendo, queremos $\delta > 0$ cumprindo se $0 < x - 3 < \delta$ então $ x + 3 x - 3 < \varepsilon$
	T146:A>A T147:A>A	A	JS.27.08	2. <i>Mostrando que esse δ funciona.</i> Dado $\varepsilon > 0$, seja $\delta = \min\{1, \varepsilon/7\}$. Se $0 < x - 3 < \delta$, então $ x - 3 < 1 \Rightarrow 2 < x < 4 \Rightarrow x + 3 < 7$ (como na parte 1). Temos também
	T147:A>A T148:A>A	A	JS.27.09	então $ x - 3 < 1 \Rightarrow 2 < x < 4 \Rightarrow x + 3 < 7$ (como na parte 1). Temos também $ x - 3 < \varepsilon/7$, logo $ x^2 - 9 = x + 3 x - 3 < 7 \cdot \frac{\varepsilon}{7} = \varepsilon$
	T148:A>A	A	JS.27.10	Isso mostra que $\lim_{x \rightarrow 3} x^2 = 9$.
Limites e Derivadas: A Definição Precisa de Limite: Limites Infinitos				
C159':A>LN C160':A>GR	T149:A>A	A	JS.28.01 JS.28.01'	6 Definição Seja f uma função definida em algum intervalo aberto que contenha o número a , exceto possivelmente no próprio a . Então $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty$ significa que, para todo número positivo M , há um número positivo δ tal que se $0 < x - a < \delta$ então $f(x) > M$
C159':A>LN C161':LN>GR		A	JS.28.02	Isso diz que o valor de $f(x)$ pode ser arbitrariamente grande (maior que qualquer número dado M) tornando-se x suficientemente próximo de a (dentro de uma distância δ , em que pende de M , mas com $x \neq a$). Uma ilustração geométrica está na Figura 10.
C160':A>GR C161':LN>GR		A	JS.28.03	 FIGURA 10
Limites e Derivadas: A Definição Precisa de Limite: Limites Infinitos: exemplo 5				
	T150:A>A	A	JS.29.01	EXEMPLO 5 Use a Definição 6 para demonstrar que $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2} = \infty$
	T150:A>A T151:A>A	A	JS.29.02	se $0 < x < \delta$ então $1/x^2 > M$
	T151:A>A T152:A>A T153:A>A	A A	JS.29.03 JS.29.03'	Assim, se escolhermos $\delta = 1/\sqrt{M}$ e se $0 < x < \delta = 1/\sqrt{M}$, então $1/x^2 > M$. Isto mostra que $1/x^2 \rightarrow \infty$ quando $x \rightarrow 0$.

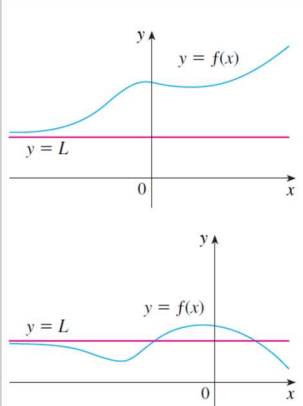
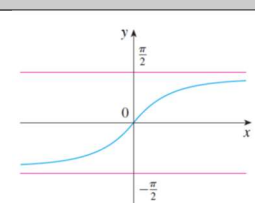
C162':A>GR		GR	JS.29.04	 <p>FIGURA 11</p>
C162':A>GR	T153:A>A T154:A>A	A A	JS.29.05 JS.29.05'	<p>7 Definição Seja f uma função definida em algum intervalo aberto que contenha o número a, exceto possivelmente no próprio a. Então</p> $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = -\infty$ <p>significa que para todo número negativo N há um número positivo δ tal que,</p> <p>se $0 < x - a < \delta$ então $f(x) < N$</p>
Limites e Derivadas: Continuidade				
C163':LN>A C163':LN>A C164':A>LN		LN A	JS.30.01 JS.30.01'	<p>1 Definição Uma função f é contínua em um número a se</p> $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$
C164':A>LN C165':LN>A C165':LN>A C166':A>LN		LN A	JS.30.02 JS.30.02'	<p>Observe que a Definição 1 implicitamente requer três coisas para a continuidade de f em a:</p> <ol style="list-style-type: none"> 1. $f(a)$ está definida (isto é, a está no domínio de f) 2. $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ existe 3. $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$
C166':A>LN	T155:LN>LN	LN	JS.30.03	<p>Se f está definida próximo de a (em outras palavras, f está definida em um intervalo contendo a, exceto possivelmente em a), dizemos que f é descontínua em a (ou que f tem descontinuidade em a) se f não é contínua em a.</p>
	T155:LN>LN	LN	JS.30.04	<p>Geometricamente, você pode pensar em uma função contínua em todo número de um intervalo como uma função cujo gráfico não se quebra. O gráfico pode ser desenhado se mover sua caneta do papel.</p>
Limites e Derivadas: Continuidade: Exemplo 1				
C167':GR>LN C168':GR>A C169':GR>A	T156:GR>GR T157:GR>GR	GR GR GR	JS.31.01 JS.31.01' JS.31.01''	 <p>FIGURA 2</p>
C167':GR>LN		LN	JS.31.02	<p>SOLUÇÃO Parece haver uma descontinuidade quando $a = 1$, pois aí o gráfico tem um salto. A razão oficial para f ser descontínua em 1 é que $f(1)$ não está definida.</p>
C168':GR>A		LN	JS.31.03	<p>O gráfico também tem uma quebra em $a = 3$, mas a razão para a descontinuidade é diferente. Aqui, $f(3)$ está definida, mas $\lim_{x \rightarrow 3} f(x)$ não existe (pois os limites esquerdo e direito são diferentes). Logo f é descontínua em 3.</p>

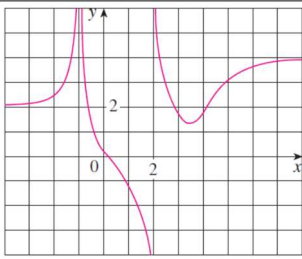
C169:GR>A		LN	JS.31.04	<p>E $a = 5$? Aqui, $f(5)$ está definida e $\lim_{x \rightarrow 5} f(x)$ existe (pois o limite esquerdo e o direito são iguais). Mas</p> $\lim_{x \rightarrow 5} f(x) \neq f(5)$ <p>Logo, f é descontínua em 5.</p>
Limites e Derivadas: Continuidade: Exemplo 2				
C170:A>LN	T158:A>A	A	JS.32.01	$(a) f(x) = \frac{x^2 - x - 2}{x - 2}$ $(b) f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x^2} & \text{se } x \neq 0 \\ 1 & \text{se } x = 0 \end{cases}$ $(c) f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - x - 2}{x - 2} & \text{se } x \neq 2 \\ 1 & \text{se } x = 2 \end{cases}$ $(d) f(x) = \llbracket x \rrbracket$
C170:A>LN	T159:A>A	A	JS.32.01'	
C170:A>LN	T160:A>A	A	JS.32.01''	
		A	JS.32.01'''	
C170:A>LN		LN	JS.32.02	(a) Observe que $f(2)$ não está definida; logo, f é descontínua em 2. Mais à frente veremos que f é contínua em todos os demais números.
C171:LN>GR				
C170:A>LN		LN	JS.32.03	(b) Aqui $f(0) = 1$ está definida, mas
C172:A>GR				$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2}$ <p>não existe. (Veja o Exemplo 8 na Seção 2.2.) Então f é descontínua em 0.</p>
C170:A>LN	T160a:A>A	LN	JS.32.04	<p>(c) Aqui $f(2) = 1$ está definida e</p> $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - x - 2}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x - 2)(x + 1)}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} (x + 1) = 3$ <p>existe. Mas</p> $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) \neq f(2)$ <p>logo, f não é contínua em 2.</p>
C173:A>LN	T160b:A>A	A	JS.32.04'	
C173:A>LN	T160c:A>A	A	JS.32.04''	
C173:A>GR		A	JS.32.04'''	
		A	JS.32.04''''	
C170:A>LN		LN	JS.32.05	(d) A função maior inteiro $f(x) = \llbracket x \rrbracket$ tem descontinuidades em todos os inteiros; $\lim_{x \rightarrow n} \llbracket x \rrbracket$ não existe se n for um inteiro. (Veja o Exemplo 10 e o Exercício 51 da Seção 2.2.)
C174:A>GR				
C171:LN>GR	T160d:GR>GR	GR	JS.32.06	<p>(a) $f(x) = \frac{x^2 - x - 2}{x - 2}$</p> <p>(b) $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x^2} & \text{se } x \neq 0 \\ 1 & \text{se } x = 0 \end{cases}$</p> <p>(c) $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - x - 2}{x - 2} & \text{se } x \neq 2 \\ 1 & \text{se } x = 2 \end{cases}$</p> <p>(d) $f(x) = \llbracket x \rrbracket$</p> <p>FIGURA 3 Gráficos das funções do Exemplo 2</p>
C172:A>GR	T160e:GR>GR	A	JS.32.06'	
C173:A>GR	T160f:GR>GR	GR	JS.32.06''	
C174:A>GR	T160f:A>A	A	JS.32.06'''	
C175:GR>A	T160g:A>A	GR	JS.32.06''''	
C175:GR>A	T160h:A>A	A	JS.32.06''''''	
C176:GR>A		GR	JS.32.06''''''''	
C176:GR>A		A	JS.32.06''''''''''	
C177:GR>A				
C177:GR>A				
C178:GR>A				

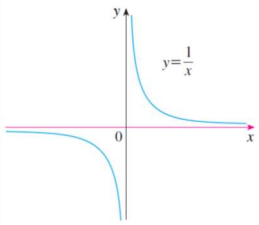
C178:GR>A				
C179:GR>LN				
C179:GR>LN		LN	JS.32.07	A Figura 3 mostra os gráficos das funções no Exemplo 2. Em cada caso o gráfico pode ser feito sem levantar a caneta do papel, pois um buraco, uma quebra ou salto no gráfico. As descontinuidades ilustradas nas partes (a) e (c) são chamadas removíveis
C180:LN>A		LN	JS.32.08	<div style="border: 1px solid black; padding: 10px;"> <p>2 Definição Uma função f é contínua à direita em um número a se</p> $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = f(a)$ <p>e f é contínua à esquerda em a se</p> $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = f(a)$ </div>
C181:LN>A		A	JS.32.08'	
C181:LN>A		LN	JS.32.08''	
C182:A>LN		A	JS.32.08'''	
C182:A>LN				
C183:LN>A				
C183:LN>A				
Limites e Derivadas: Continuidade: Exemplo 3				
C184:A>LN	T161:A>A	A	JS.33.01	<div style="border: 1px solid black; padding: 10px;"> <p>EXEMPLO 3 Em cada inteiro n, a função $f(x) = \llbracket x \rrbracket$ [veja a Figura 3(d)] é contínua à direita, mas descontínua à esquerda, pois</p> </div>
C184:A>LN	T163:A>A	LN	JS.33.01'	
C185:A>LN		LN	JS.33.01''	
C185:A>LN				
C186:A>LN	T161:A>A	A	JS.33.02	$\lim_{x \rightarrow n^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow n^+} \llbracket x \rrbracket = n = f(n)$
	T162:A>A	A	JS.33.02'	
C187:A>LN	T163:A>A	A	JS.33.03	$\lim_{x \rightarrow n^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow n^-} \llbracket x \rrbracket = n - 1 \neq f(n)$
	T164:A>A	A	JS.33.03'	
C186:A>LN	T165:LN>LN	LN	JS.33.04	<div style="border: 1px solid black; padding: 10px;"> <p>3 Definição Uma função f é contínua em um intervalo se for contínua em todos os números do intervalo. (Se f for definida somente de um lado da extremidade do intervalo, entendemos <i>continuidade</i> na extremidade como <i>continuidade à direita à esquerda</i>.)</p> </div>
C187:A>LN	T166:LN>LN	LN	JS.33.04'	
	T167:LN>LN	LN	JS.33.04''	
		LN	JS.33.04'''	
Limites e Derivadas: Limites Infinitos; Assíntotas Horizontais				
C188:LN>A		LN	JS.34.01	Nas Seções 2.2 e 2.4, estudamos os limites infinitos e as assíntotas verticais. Lá tomávamos x tendendo a um número e , como resultado, os valores de y ficavam arbitrariamente grandes (positivos ou negativos). Nesta seção vamos tornar x arbitrariamente grande (positivo e
C188:LN>A		A	JS.34.02	$f(x) = \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1}$
C189:A>GR				
C190:A>T				

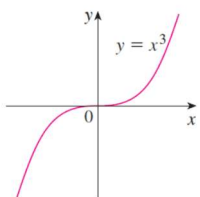
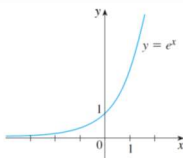
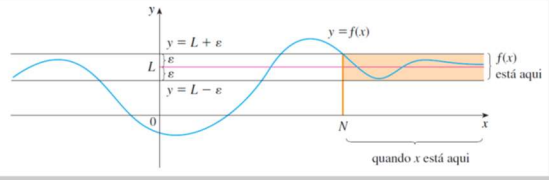
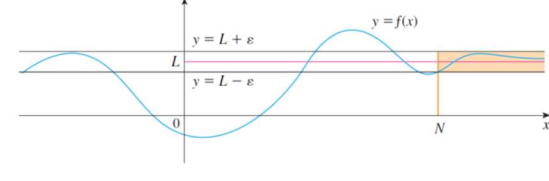
C190:A>T C191:T>GR C192:T>LN		T	JS.34.03	<table border="1"> <thead> <tr> <th>x</th> <th>$f(x)$</th> </tr> </thead> <tbody> <tr><td>0</td><td>-1</td></tr> <tr><td>± 1</td><td>0</td></tr> <tr><td>± 2</td><td>0,600000</td></tr> <tr><td>± 3</td><td>0,800000</td></tr> <tr><td>± 4</td><td>0,882353</td></tr> <tr><td>± 5</td><td>0,923077</td></tr> <tr><td>± 10</td><td>0,980198</td></tr> <tr><td>± 50</td><td>0,999200</td></tr> <tr><td>± 100</td><td>0,999800</td></tr> <tr><td>± 1000</td><td>0,999998</td></tr> </tbody> </table>	x	$f(x)$	0	-1	± 1	0	± 2	0,600000	± 3	0,800000	± 4	0,882353	± 5	0,923077	± 10	0,980198	± 50	0,999200	± 100	0,999800	± 1000	0,999998
x	$f(x)$																									
0	-1																									
± 1	0																									
± 2	0,600000																									
± 3	0,800000																									
± 4	0,882353																									
± 5	0,923077																									
± 10	0,980198																									
± 50	0,999200																									
± 100	0,999800																									
± 1000	0,999998																									
C189:A>GR C191:T>GR C197:GR>A C193:GR>LN C207:GR>LN		GR GR	JS.34.04 JS.34.04'																							
C192:T>LN C193:GR>LN C194:LN>A	T72:LN>LN	LN LN	JS.34.05 JS.34.05'	<p>Quanto maior o x, mais próximos de 1 ficam os valores de $f(x)$. De fato, temos a impressão de que podemos tornar os valores de $f(x)$ tão próximos de 1 quanto quisermos se tomarmos um x suficientemente grande. Essa situação é expressa simbolicamente escrevendo</p>																						
C194:LN>A	T73:A>A	A	JS.34.06	$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1} = 1$																						
C195:A>LN	T73:A>A	A	JS.34.07	$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = L$																						
C195:A>LN C196:LN>A		LN	JS.34.08	<p>para indicar que os valores de $f(x)$ ficam cada vez mais próximos de L à medida que x aumenta.</p>																						
C196:LN>A C198:A>LN C198:A>LN C199:LN>A C200:LN>A C201:LN>A C202:LN>GR C208:LN>GR		A LN	JS.34.09 JS.34.10	<p>1 Definição Seja f uma função definida em algum intervalo (a, ∞). Então</p> $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = L$ <p>significa que os valores de $f(x)$ ficam arbitrariamente próximos de L tomando x suficientemente grande.</p>																						
C199:LN>A	T174:A>A	A	JS.34.11	<p>Outra notação para $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = L$ é</p>																						
C200:LN>A	T174:A>A	A	JS.34.12	$f(x) \rightarrow L \text{ quando } x \rightarrow \infty.$																						

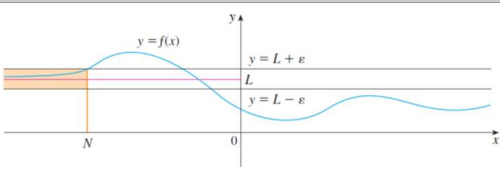
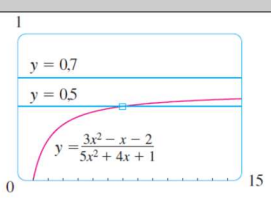
	T175:A>A			
C201:LN>A C203:A>LN C206:A>LN	T175:A>A	A	JS.34.13	$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = L$
C203:A>LN C205:A>LN	T176:LN>LN	LN	JS.34.14	“o limite de $f(x)$, quando x tende ao infinito, é L ”
C205:A>LN	T176:LN>LN T177:LN>LN	LN	JS.34.15	“o limite de $f(x)$, quando x se torna infinito, é L ”
C206:A>LN C209:LN>GR	T177:LN>LN	LN	JS.34.16	“o limite de $f(x)$, quando x cresce ilimitadamente, é
C202:LN>GR C209:LN>GR C210:GR>A C210:GR>A	T178:GR>GR A	GR A	JS.34.17 JS.34.17'	 <p>FIGURA 2 Exemplos ilustrando $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = L$</p>
	T178:GR>GR T179:GR>GR	GR	JS.34.18	
C208:LN>GR	T179:GR>GR	GR	JS.34.19	
C207:GR>LN C211:LN>A	T180:LN>LN	LN LN	JS.34.20 JS.34.20'	Com relação ainda à Figura 1, vemos que para os valores negativos de x com grande valor absoluto, os valores de $f(x)$ estão próximos de 1. Fazendo x decrescer ilimitadamente para valores negativos, podemos tornar $f(x)$ tão próximo de 1 quanto quisermos. Isso é expresso crevendo
C211:LN>A	T181:A>A	A	JS.34.21	$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1} = 1$
C212:A>LN C212:A>LN C213:LN>A C215:LN>GR	T181:A>A	A LN	JS.34.22 JS.34.22'	<p>2 Definição Seja f uma função definida em algum intervalo $(-\infty, a)$. Então</p> $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = L$ <p>significa que os valores de $f(x)$ podem ficar arbitrariamente próximos de L, tomando-se x suficientemente grande em valor absoluto, mas negativo.</p>

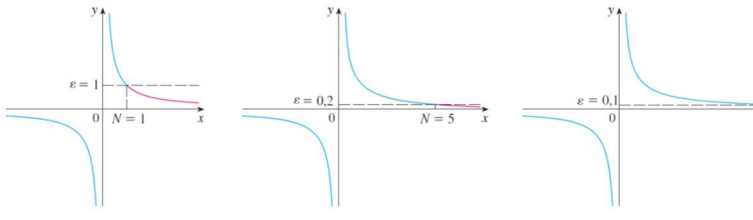
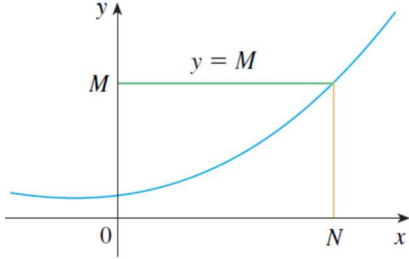
C213:LN>A		A	JS.34.23	$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = L$
C214:A>LN				
C214:A>LN		LN	JS.34.24	“o limite de $f(x)$, quando x tende a menos infinito, é
C216:LN>GR				
C215:LN>GR	T182:GR>GR	GR	JS.34.25	 <p>FIGURA 3 Exemplos ilustrando $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = L$</p>
C216:LN>GR	T184:A>A	GR	JS.34.25'	
C217:GR>A		A	JS.34.25''	
C218:GR>A				
C218:GR>A				
C217:GR>A	T183:A>A	A	JS.34.26	<p>3 Definição A reta $y = L$ é chamada assíntota horizontal da curva $y = f(x)$ se</p> $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = L \quad \text{ou} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = L$
		A	JS.34.26'	
	T184:A>A	A	JS.34.27	$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1} = 1.$
	T185:A>A			
C219:A>GR	T185:A>A	A	JS.34.28	Um exemplo de curva com duas assíntotas horizontais é $y = \text{tg}^{-1}x$. (veja a Figura verdade).
	T186:A>A			
C220:A>GR	T186:A>A	A	JS.34.29	<p>4</p> $\lim_{x \rightarrow -\infty} \text{tg}^{-1}x = -\frac{\pi}{2} \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \text{tg}^{-1}x = \frac{\pi}{2}$
	T187:A>A	A	JS.34.29'	
C219:A>GR		GR	JS.34.30	 <p>FIGURA 4 $y = \text{tg}^{-1}x$</p>
C220:A>GR				

C221:GR>LN C222:GR>LN C223:GR>LN		GR	JS.35.01	 <p>FIGURA 5</p>
C221:GR>LN C224:LN>A		LN	JS.35.02	SOLUÇÃO Vemos que os valores de $f(x)$ ficam grandes por ambos os lados como $x \rightarrow$ então
C224:LN>A		A	JS.35.03	$\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = \infty$
C222:GR>LN C225:LN>A	T189:LN>LN	LN LN	JS.35.04 JS.35.04'	Observe que $f(x)$ torna-se grande em valor absoluto (porém negativo) quando x tende esquerda; porém torna-se grande e positivo quando x tende a 2 à direita. Logo,
C225:LN>A	T190:A>A	A A	JS.35.05 JS.35.05'	$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = -\infty \quad \text{e} \quad \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \infty$
C223:GR>LN C226:LN>A	T188:LN>LN	LN LN	JS.35.06 JS.35.06'	Quando x torna-se grande, vemos que $f(x)$ tende a 4. Mas quando x decresce para valores negativos, $f(x)$ tende a 2. Logo,
C226:LN>A	T191:A>A	A A	JS.35.07 JS.35.07'	$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 4 \quad \text{e} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 2$
Limites e Derivadas: Limites Infinitos; Assíntotas Horizontais: Exemplo 2				
C227:A>LN C228:A>LN C229:A>GR	T192:A>A	A A	JS.36.01 JS.36.01'	EXEMPLO 2 Encontre $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x}$ e $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x}$.
C227:A>LN C230:LN>A		LN	JS.36.02	De fato, tomando x grande o bastante, podemos fazer $1/x$ tão próximo de 0 quanto quisermos. Portanto, conforme a Definição 1, temos
C230:LN>A C232:A>GR		A	JS.36.03	$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} = 0$
C228:A>LN C231:LN>A		LN	JS.36.03'	Um raciocínio análogo mostra que, quando x é grande em valor absoluto (porém negativo), $1/x$ é pequeno em valor absoluto (mas negativo); logo, temos também
C231:LN>A C233:A>GR		A	JS.36.04	$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x} = 0$

C229:A>GR	T193:A>A	GR	JS.36.05	 <p>FIGURA 6 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} = 0$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x} = 0$</p>
C232:A>GR	T194:A>A	GR	JS.36.05'	
C233:A>GR	T195:A>A	A	JS.36.05''	
C234:GR>A		A	JS.36.05'''	
C234:GR>A				
Limites e Derivadas: Limites Infinitos; Assintotas Horizontais: Limites Infinitos no Infinito: Exemplo 9				
C235:A>LN		A	JS.37.01	$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$
C235:A>LN		LN	JS.37.02	é usada para indicar que os valores de $f(x)$ tornam-se grandes quanto x se torna grande. nificados análogos são dados aos seguintes símbolos:
C236:LN>A				
C236:LN>A	T196:A>A	A	JS.37.03	$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \infty \quad \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = -\infty \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) =$
	T197:A>A	A	JS.37.03'	
		A	JS.37.03''	
C237:A>LN	T199:A>A	A	JS.37.04	EXEMPLO 9 Encontre $\lim_{x \rightarrow \infty} x^3$ e $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^3$.
C238:A>LN	T200:A>A	A	JS.37.04'	
C237:A>LN	T201:LN>LN	LN	JS.37.05	SOLUÇÃO Quando x torna-se grande, x^3 também fica grande. Por exem
C240:LN>A	T201:LN>LN	LN	JS.37.06	Na realidade, podemos fazer x^3 ficar tão grande quanto quisermos tomando x grande e suficiente. Portanto, podemos escrever
C240:LN>A	T203:A>A	A	JS.37.07	$\lim_{x \rightarrow \infty} x^3 = \infty$
C241:A>GR				
C238:A>LN		LN	JS.37.08	Analogamente, quando x é muito grande em módulo, porém negativo, x^3 também o é.
C239:LN>A				
C239:LN>A	T202:A>A	A	JS.37.09	$\lim_{x \rightarrow -\infty} x^3 = -\infty$
C243:A>GR				
C242:A>GR	T200:A>A	A	JS.37.10	$y = x^3$
	T202:A>A			
	T203:A>A			

C241:A>GR	T204:A>A	GR	JS.37.11	 <p>FIGURA 11 $\lim_{x \rightarrow \infty} x^3 = \infty, \lim_{x \rightarrow -\infty} x^3 = -\infty$</p>
C242:A>GR	T205:A>A	GR	JS.37.11'	
C243:A>GR	T206:GR>GR	A	JS.37.11''	
C244:GR>A		A	JS.37.11'''	
C244:GR>A				
C245:GR>A	T206:GR>GR	GR	JS.37.12	 <p>FIGURA 10</p>
C245:GR>A		A	JS.37.12'	
C246:GR>A				
C247:GR>A				
C246:GR>A		A	JS.37.13	$\lim_{x \rightarrow \infty} e^x = \infty$
C248:A>LN				
C247:GR>A	T207:LN>LN	LN	JS.37.14	<p>mas, como ilustra a Figura 12, $y = e^x$ torna-se grande muito mais rapidamente que quando $x \rightarrow \infty$.</p>
C248:A>LN		LN	JS.37.14'	
Limites e Derivadas: Limites Infinitos; Assíntotas Horizontais; Definições Precisas				
C249:A>LN	T208:A>A	A	JS.38.01	<p>7 Definição Seja f uma função definida em algum intervalo (a, ∞). Então</p> $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = L$ <p>significa que para todo $\varepsilon > 0$ existe um correspondente número N tal que</p> $\text{se } x > N \text{ então } f(x) - L < \varepsilon$
	T210:A>A	A	JS.38.01'	
C249:A>LN	T209:LN>LN	LN	JS.38.02	<p>Em palavras, isso diz que os valores de $f(x)$ podem ficar arbitrariamente próximo (dentro de uma distância ε, onde ε é qualquer número positivo), bastando apenas tornar suficientemente grande (maior que N, onde N depende de ε). Graficamente, isso quer dizer</p>
C250:LN>GR	T209:LN>LN	LN	JS.38.03	<p>ficentemente grande (maior que N, onde N depende de ε). Graficamente, isso quer dizer escolhendo x suficientemente grande (maior que algum número N), podemos fazer o gráfico de f ficar entre duas retas horizontais dadas $y = L - \varepsilon$ e $y = L + \varepsilon$, como na Figura 14.</p>
C250:LN>GR	T211:GR>GR	GR	JS.38.04	 <p>FIGURA 14 $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = L$</p>
C251:GR>A		A	JS.38.04'	
C251:GR>A				
C252:GR>A	T211:GR>GR	GR	JS.38.05	 <p>FIGURA 15 $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = L$</p>
C252:GR>A		A	JS.38.05'	
C253:GR>A				

C253:GR>A	T210:A>A	A	JS.38.06	<div style="border: 1px solid black; padding: 5px;"> <p>8 Definição Seja f uma função definida em algum intervalo $(-\infty, a)$. Então</p> $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = L$ <p>significa que para todo $\varepsilon > 0$ existe um correspondente número N tal que</p> <p style="text-align: center;">se $x < N$ então $f(x) - L < \varepsilon$</p> </div>
C254:A>GR	T212:A>A	A	JS.38.06'	
	T212:A>A			
C254:A>GR		GR	JS.38.07	 <p style="text-align: right;">FIGURA 16 $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = L$</p>
C255:GR>A		A	JS.38.07'	
Límites e Derivadas: Límites Infinitos; Assíntotas Horizontais: Definições Precisas: Exemplo 13				
	T213:A>A	A	JS.39.01	$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2 - x - 2}{5x^2 + 4x + 1} = \frac{3}{5}$
C256:A>GR	T213:A>A	A	JS.39.02	<p>se $x > N$ então $\left \frac{3x^2 - x - 2}{5x^2 + 4x + 1} - 0,6 \right < 0,1$</p>
C256:A>GR		GR	JS.39.03	 <p style="text-align: center;">FIGURA 17</p>
C257:GR>A		A	JS.39.03'	
C257a:GR>A				
C257a:GR>A				
C257:GR>A		A	JS.39.04	<p>se $x > 7$ então $\left \frac{3x^2 - x - 2}{5x^2 + 4x + 1} - 0,6 \right < 0,1$</p>
Límites e Derivadas: Límites Infinitos; Assíntotas Horizontais: Definições Precisas: Exemplo 14				
	T215:A>A	A	JS.40.01	<p>EXEMPLO 14 Use a Definição 7 para demonstrar que $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x}$</p>
	T215:A>A	A	JS.40.02	<p>SOLUÇÃO Dado $\varepsilon > 0$, queremos encontrar N tal que</p> <p style="text-align: center;">se $x > N$ então $\left \frac{1}{x} - 0 \right < \varepsilon$</p>
	T216:A>A			
	T216:A>A	A	JS.40.03	<p>se $x > N = \frac{1}{\varepsilon}$ então $\left \frac{1}{x} - 0 \right = \frac{1}{x} < \varepsilon$</p>
	T217:A>A			
C258:A>GR	T217:A>A	A	JS.40.04	$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} = 0$

C258:A>GR T218:GR>GR T219:GR>GR T220:GR>GR	GR GR GR	JS.40.05 JS.40.05' JS.40.05''	 <p>FIGURA 18</p>
C259:GR>A C260:GR>A C260:GR>A	T220:GR>GR GR GR	JS.40.06 JS.40.06'	 <p>FIGURA 19 $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$</p>
C259:GR>A	T221:A>A A A	JS.40.07 JS.40.07'	<p>9 Definição Seja f uma função definida em algum intervalo (a, ∞). Então</p> $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$ <p>significa que para todo positivo M existe um correspondente número positivo N tal que</p> <p style="text-align: center;">se $x > N$ então $f(x) > M$.</p>

Fonte: Elaborado pelo autor.


INVENTÁRIO DOS EXERCÍCIOS DO LIVRO DO STEWART

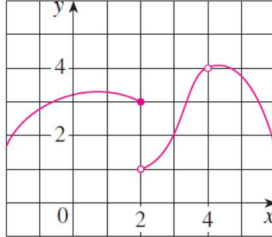
Quadro 23 - Inventário do exercício do Stewart.

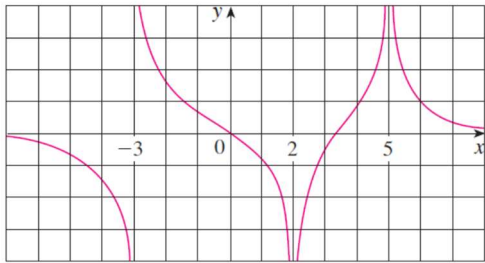
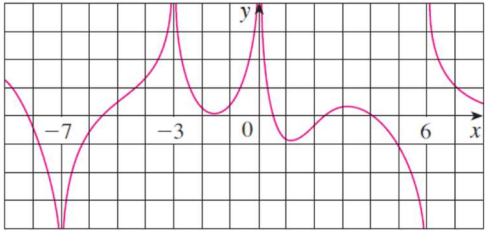
Verbos	Conversões	Representações	Questões														
		T	<p>1. Um tanque com capacidade para 1.000 litros de água é drenado pela base em meia hora. Os valores na tabela mostram o volume V de água remanescente no tanque (em litros) após t minutos.</p> <table border="1"> <thead> <tr> <th>t (min)</th> <th>5</th> <th>10</th> <th>15</th> <th>20</th> <th>25</th> <th>30</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <th>V (L)</th> <td>694</td> <td>444</td> <td>250</td> <td>111</td> <td>28</td> <td>0</td> </tr> </tbody> </table>	t (min)	5	10	15	20	25	30	V (L)	694	444	250	111	28	0
t (min)	5	10	15	20	25	30											
V (L)	694	444	250	111	28	0											
D			(a) Se P é o ponto $(15, 250)$ sobre o gráfico de V , encontre as inclinações das retas secantes PQ , onde Q é o ponto sobre o gráfico com $t = 5, 10, 20, 25$ e 30 .														
ES			(b) Estime a inclinação da reta tangente em P pela média das inclinações de duas retas secantes.														
C ES	T>GR		(c) Use um gráfico da função para estimar a inclinação da tangente em P . (Essa inclinação representa a razão na qual a água flui do tanque após 15 minutos.)														


I	T > GR	T	<p>2. Um monitor é usado para medir os batimentos cardíacos de um paciente após uma cirurgia. Ele fornece um número de batimentos cardíacos após t minutos. Quando os dados na tabela são colocados em um gráfico, a inclinação da reta tangente representa a taxa de batimentos cardíacos por minuto.</p> <table border="1"> <thead> <tr> <th>t (min)</th> <th>36</th> <th>38</th> <th>40</th> <th>42</th> <th>44</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>Batimentos cardíacos</td> <td>2.530</td> <td>2.661</td> <td>2.806</td> <td>2.948</td> <td>3.080</td> </tr> </tbody> </table> <p>O monitor estima esse valor calculando a inclinação de uma reta secante. Use os dados para estimar a taxa de batimentos cardíacos após 42 minutos, utilizando a reta secante entre os pontos para os valores de t dados.</p> <p>Quais são suas conclusões?</p>	t (min)	36	38	40	42	44	Batimentos cardíacos	2.530	2.661	2.806	2.948	3.080
t (min)	36	38	40	42	44										
Batimentos cardíacos	2.530	2.661	2.806	2.948	3.080										
ES			(a) $t = 36$ e $t = 42$												
ES			(b) $t = 38$ e $t = 42$												
ES			(c) $t = 40$ e $t = 42$												
ES			(d) $t = 42$ e $t = 44$												
		A	3. O ponto $P(2, -1)$ está sobre a curva $y = 1/(1 - x)$.												
D	A > T		(a) Se Q é o ponto $(x, 1/(1 - x))$, use sua calculadora para determinar a inclinação da reta secante PQ , com precisão de seis casas decimais, para os seguintes valores de x :												
D			(i) 1,5 (ii) 1,9 (iii) 1,99 (iv) 1,999												
D			(v) 2,5 (vi) 2,1 (vii) 2,01 (viii) 2,001												
D															
D															
D															
D															
ES			(b) Usando os resultados da parte (a), estime o valor da inclinação da reta tangente à curva no ponto $P(2, -1)$.												

D			(c) Usando a inclinação da parte (b), encontre uma equação da reta tangente à curva em $P(2, -1)$.
		A	4. O ponto $P(0,5; 0)$ está sobre a curva $y = \cos \pi x$.
D	A>T		(a) Se Q é o ponto $(x, \cos \pi x)$, use sua calculadora para determinar a inclinação da reta secante PQ (com precisão de 5 casas decimais) para os seguintes valores de x :
D			(i) 0 (ii) 0,4 (iii) 0,49 (iv) 0,499
D			(v) 1 (vi) 0,6 (vii) 0,51 (viii) 0,501
D			
D			
D			
D			
ES			(b) Usando os resultados da parte (a), estime o valor da inclinação da reta tangente à curva no ponto $P(0,5; 0)$.
D			(c) Use a inclinação obtida na parte (b) para achar uma equação da reta tangente à curva em $P(0,5; 0)$.
C	A>GR		(d) Esboce a curva, duas das retas secantes e a reta tangente.
		A	5. Uma bola é atirada no ar com velocidade de 10 m/s. Sua altura em metros após t segundos é dada por $y = 10t - 4,9t^2$.
D			(a) Encontre a velocidade média para o período de tempo que começa quando $t = 1,5$ s e dura
D			(i) 0,5 s (ii) 0,1 s
D			(iii) 0,05 s (iv) 0,01 s
D			
ES			(b) Estime a velocidade instantânea quando $t = 1,5$ s.
		A	6. Se uma pedra for jogada para cima no planeta Marte com velocidade de 10 m/s, sua altura (em metros) t segundos mais tarde é dada por $y = 10t - 1,86t^2$.



D			(a) Encontre a velocidade média entre os intervalos de tempo dados:														
D			(i) [1, 2] (ii) [1; 1,5] (iii) [1; 1,1]														
D			(iv) [1; 1,01] (v) [1; 1,001]														
D																	
D																	
ES			(b) Estime a velocidade instantânea quando $t = 1$.														
		T	<p>7. A tabela mostra a posição de um ciclista.</p> <table border="1" style="margin-left: auto; margin-right: auto;"> <tbody> <tr> <td>t (segundos)</td> <td>0</td> <td>1</td> <td>2</td> <td>3</td> <td>4</td> <td>5</td> </tr> <tr> <td>s (metros)</td> <td>0</td> <td>1,4</td> <td>5,1</td> <td>10,7</td> <td>17,7</td> <td>25,8</td> </tr> </tbody> </table>	t (segundos)	0	1	2	3	4	5	s (metros)	0	1,4	5,1	10,7	17,7	25,8
t (segundos)	0	1	2	3	4	5											
s (metros)	0	1,4	5,1	10,7	17,7	25,8											
D			(a) Encontre a velocidade média nos períodos de tempo a seguir:														
D			(i) [1, 3] (ii) [2, 3] (iii) [3, 5] (iv) [3, 4]														
D																	
D																	
C	T>GR		(b) Use o gráfico de s como uma função de t para estimar a velocidade instantânea quando $t = 3$.														
ES																	
		A	<p>8. O deslocamento (em centímetros) de uma partícula se move para frente e para trás ao longo de uma reta é dado pela equação de movimento $s = 2 \sin \pi t + 3 \cos \pi t$, em que t é medido em segundos.</p>														
D			(a) Encontre a velocidade média em cada período de tempo:														
D			(i) [1, 2] (ii) [1; 1,1]														
D			(iii) [1; 1,01] (iv) [1; 1,001]														
D																	
ES			(b) Estime a velocidade instantânea da partícula quando $t = 1$.														
		A	<p>9. O ponto $P(1, 0)$ está sobre a curva $y = \sin(10\pi/x)$. </p>														





D I			(a) Se Q for o ponto $(x, \sin(10\pi/x))$, encontre a inclinação da reta secante PQ (com precisão de quatro casas decimais) para $x = 2, 1,5, 1,4, 1,3, 1,2, 1,1, 0,5, 0,6, 0,7, 0,8$ e $0,9$. As inclinações parecem tender a um limite?
C E	A>GR		(b) Use um gráfico da curva para explicar por que as inclinações das retas secantes da parte (a) não estão próximas da inclinação da reta tangente em P .
ES			(c) Escolhendo as retas secantes apropriadas, estime a inclinação da reta tangente em P .
E I E	A>LN	A	<p>1. Explique com suas palavras o significado da equação</p> $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 5$ <p>É possível que a equação anterior seja verdadeira, mas $f(2) = 3$? Explique.</p>
E I E	A>LN	A A	<p>2. Explique o que significa dizer que</p> $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = 3 \quad \text{e} \quad \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = 7$ <p>Nesta situação, é possível que $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ exista? Explique.</p>
E E	A>LN A>LN	A A	<p>3. Explique o significado de cada uma das notações a seguir.</p> <p>(a) $\lim_{x \rightarrow -3} f(x) = \infty$ (b) $\lim_{x \rightarrow 4^+} f(x) = -\infty$</p>
D E D E D E D E D	GR>A GR>LN	GR A A A A	<p>4. Use o gráfico dado de f para dizer o valor de cada quantidade, se ela existir. Se não existir, explique por quê.</p> <p>(a) $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x)$ (b) $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x)$ (c) $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$ (d) $f(2)$ (e) $\lim_{x \rightarrow 4} f(x)$ (f) $f(4)$</p> 




D	GR>A	GR	<p>8. Para a função R, cujo gráfico é mostrado a seguir, diga quem são:</p> <p>(a) $\lim_{x \rightarrow 2} R(x)$ (b) $\lim_{x \rightarrow 5} R(x)$</p> <p>(c) $\lim_{x \rightarrow -3^-} R(x)$ (d) $\lim_{x \rightarrow -3^+} R(x)$</p> <p>(e) As equações das assíntotas verticais.</p> 
D	GR>LN	A	
D	GR>A	A	
D	GR>LN	A	
D	GR>A	A	
	GR>LN		
	GR>A		
	GR>LN		
	GR>A		
	GR>LN		
D	GR>A	GR	<p>9. Para a função f cujo gráfico é mostrado a seguir, determine o seguinte:</p> <p>(a) $\lim_{x \rightarrow -7} f(x)$ (b) $\lim_{x \rightarrow -3} f(x)$ (c) $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$</p> <p>(d) $\lim_{x \rightarrow 6^-} f(x)$ (e) $\lim_{x \rightarrow 6^+} f(x)$</p> <p>(f) As equações das assíntotas verticais.</p> 
D	GR>LN	A	
D	GR>A	A	
D	GR>LN	A	
D	GR>A	A	
D	GR>LN	A	
	GR>A		
	GR>LN		
	GR>A		
	GR>LN		
			<p>11–12 Esboce o gráfico da função e use-o para determinar os valores de a para os quais $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ existe:</p>
C	A>GR	A	$11. f(x) = \begin{cases} 1 + x & \text{se } x < -1 \\ x^2 & \text{se } -1 \leq x < 1 \\ 2 - x & \text{se } x \geq 1 \end{cases}$
D			
C	A>GR	A	$12. f(x) = \begin{cases} 1 + \text{sen } x & \text{se } x < 0 \\ \cos x & \text{se } 0 \leq x \leq \pi \\ \text{sen } x & \text{se } x > \pi \end{cases}$
D			



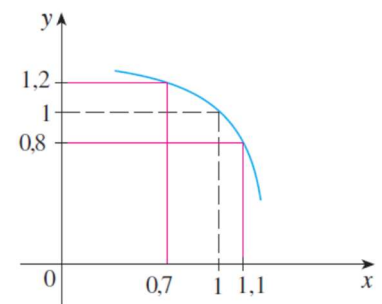
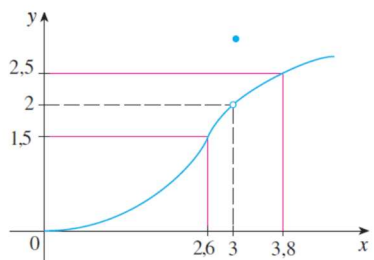
		A A A	 13–14 Use o gráfico da função f para dizer o valor de cada limite, se existir. Se não existir, explique por quê. (a) $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x)$ (b) $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$ (c) $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$
C D E C D E C D E	A>GR GR>LN GR>A	A	13. $f(x) = \frac{1}{1 + e^{1/x}}$
C D E C D E C D E	A>GR GR>LN GR>A	A	14. $f(x) = \frac{x^2 + x}{\sqrt{x^3 + x^2}}$
			15–18 Esboce o gráfico de um exemplo de uma função f que satisfaça a todas as condições dadas.
C	A>GR	A A	15. $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = 2, \quad \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = -2, \quad f(1) = 2$
C	A>GR	A A A A	16. $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = 1, \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -1, \quad \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = 0,$ $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = 1, \quad f(2) = 1, \quad f(0)$ não está definido

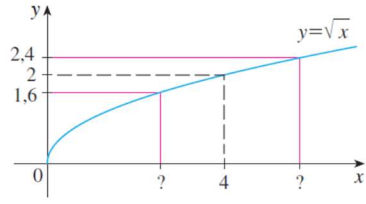
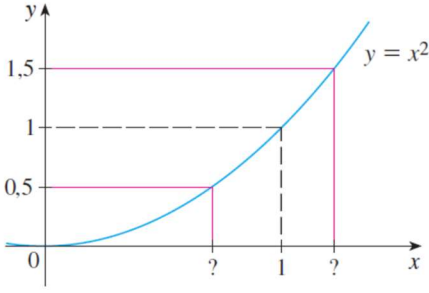



C	A>GR	A A A	17. $\lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = 4$, $\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = 2$, $\lim_{x \rightarrow -2} f(x) = 2$, $f(3) = 3$, $f(-2) = 1$
C	A>GR	A A A A	18. $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = 2$, $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 0$, $\lim_{x \rightarrow 4^-} f(x) = 3$, $\lim_{x \rightarrow 4^+} f(x) = 0$, $f(0) = 2$, $f(4) = 1$
			19–22 Faça uma conjectura sobre o valor do limite (se ele existir) p meio dos valores da função nos números dados (com precisão de se casas decimais).
I	A>T T>A	A	19. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 2x}{x^2 - x - 2}$, $x = 2,5, 2,1, 2,05, 2,01, 2,005, 2,001,$ $1,9, 1,95, 1,99, 1,995, 1,999$
I	A>T T>A	A	20. $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 - 2x}{x^2 - x - 2}$, $x = 0, -0,5, -0,9, -0,95, -0,99, -0,999,$ $-2, -1,5, -1,1, -1,01, -1,001$
I	A>T T>A	A	21. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1 - x}{x^2}$, $x = \pm 1, \pm 0,5, \pm 0,1, \pm 0,05, \pm 0,01$
I	A>T T>A	A	22. $\lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln(x + x^2)$, $x = 1, 0,5, 0,1, 0,05, 0,01, 0,005, 0,00$
			23–26 Use uma tabela de valores para estimar o valor do limite. você tiver alguma ferramenta gráfica, use-a para confirmar seu sultado.
C ES	A>T T>A	A	23. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+4} - 2}{x}$





C ES	A>T T>A	A	24. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} 3x}{\operatorname{tg} 5x}$
C ES	A>T T>A	A	25. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^6 - 1}{x^{10} - 1}$
C ES	A>T T>A	A	26. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{9^x - 5^x}{x}$
C ES D	A>GR GR>T T>A	A	<p> 27. (a) A partir do gráfico da função $f(x) = (\cos 2x - \cos x)/x^2$ e dando <i>zoom</i> no ponto em que o gráfico cruza o eixo y, estime o valor de $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$.</p> <p>(b) Verifique sua resposta da parte (a), calculando $f(x)$ para valores de x que se aproximem de 0.</p>
ES C D	A>GR GR>A A>T T>A	A	<p> 28. (a) Estime o valor de</p> $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen} x}{\operatorname{sen} \pi x}$ <p>traçando o gráfico da função $f(x) = (\operatorname{sen} x)/(\operatorname{sen} \pi x)$. Forneça sua resposta com precisão de duas casas decimais.</p> <p>(b) Verifique sua resposta da parte (a) calculando $f(x)$ para valores de x que se aproximem de 0.</p>
			29–37 Determine o limite infinito.
D		A	29. $\lim_{x \rightarrow -3^+} \frac{x + 2}{x + 3}$
D		A	30. $\lim_{x \rightarrow -3^-} \frac{x + 2}{x + 3}$
D		A	31. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2 - x}{(x - 1)^2}$
D		A	32. $\lim_{x \rightarrow 5^-} \frac{e^x}{(x - 5)^3}$

D		A	33. $\lim_{x \rightarrow 3^+} \ln(x^2 - 9)$
D		A	34. $\lim_{x \rightarrow \pi^-} \cot x$
D		A	35. $\lim_{x \rightarrow 2\pi^-} x \csc x$
D		A	36. $\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x^2 - 2x}{x^2 - 4x + 4}$
D		A	37. $\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x^2 - 2x - 8}{x^2 - 5x + 6}$
D C	A>GR	A	38. (a) Encontre as assíntotas verticais da função $y = \frac{x^2 + 1}{3x - 2x^2}$  (b) Confirme sua resposta da parte (a) fazendo o gráfico da função
D D D D D D C	A>GR	A	39. Determine $\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{1}{x^3 - 1}$ e $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{1}{x^3 - 1}$ (a) calculando $f(x) = 1/(x^3 - 1)$ para valores de x que se aproximam de 1 pela esquerda e pela direita, (b) raciocinando como no Exemplo 9, e  (c) a partir do gráfico de f .
C ES D	A>GR GR>A A>T	A A	 40. (a) A partir do gráfico da função $f(x) = (\operatorname{tg} 4x)/x$ e dando <i>zoom</i> no ponto em que o gráfico cruza o eixo y , estime o valor de $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$. (b) Verifique sua resposta da parte (a) calculando $f(x)$ para valores de x que se aproximam de 0.
ES I C	A>T A>GR	A A	41. (a) Estime o valor do limite $\lim_{x \rightarrow 0} (1 + x)^{1/x}$ com cinco casas decimais. Esse número lhe parece familiar?  (b) Ilustre a parte (a) fazendo o gráfico da função $y = (1 + x)^{1/x}$.

C I I	A>GR GR>LN	A	 42. (a) Faça o gráfico da função $f(x) = e^x + \ln x - 4 $ para $0 \leq x \leq 5$. Você acha que o gráfico é uma representação precisa de f ? (b) Como você faria para que o gráfico represente melhor f ?
D I D I	A>T T>A A>T T>A	A A	43. (a) Avalie a função $f(x) = x^2 - (2^x/1.000)$ para $x = 1, 0,8, 0,6, 0,4, 0,2, 0,1$ e $0,05$, e conjecture qual o valor de $\lim_{x \rightarrow 0} \left(x^2 - \frac{2^x}{1.000} \right)$ (b) Avalie $f(x)$ para $x = 0,04, 0,02, 0,01, 0,005, 0,003$ e $0,001$. Faça uma nova conjectura.
D ES D I E C I	A>T T>A A>T A>GR	A A	44. (a) Avalie $h(x) = (\operatorname{tg} x - x)/x^3$ para $x = 1, 0,5, 0,1, 0,05, 0,01$ e $0,005$. (b) Estime o valor de $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x - x}{x^3}$ (c) Calcule $h(x)$ para valores sucessivamente menores de x até finalmente atingir um valor de 0 para $h(x)$. Você ainda está confiante que a conjectura em (b) está correta? Explique como finalmente obteve valores 0 . (Na Seção 4.4 veremos um método para calcular esse limite.)  (d) Faça o gráfico da função h na janela retangular $[-1, 1]$ por $[0, 1]$. Dê <i>zoom</i> até o ponto onde o gráfico corta o eixo y para estimar o limite de $h(x)$ quando x tende a 0 . Continuando <i>zoom</i> até observar distorções no gráfico de h . Compare com os resultados da parte (c).
C E	A>GR GR>LN	A	 45. Faça o gráfico da função $f(x) = \operatorname{sen}(\pi/x)$ do Exemplo 4 na janela retangular $[-1, 1]$ por $[-1, 1]$. Então dê um <i>zoom</i> em direção à origem diversas vezes. Comente o comportamento da função.
I		A	46. Na teoria da relatividade, a massa de uma partícula com velocidade v é $m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$ onde m_0 é a massa da partícula em repouso e c , a velocidade da luz. O que acontece se $v \rightarrow c^-$?

ES D	A>GR	A	<p> 47. Use um gráfico para estimar as equações de todas as assíntotas verticais da curva</p> $y = \operatorname{tg}(2 \operatorname{sen} x) \quad -\pi \leq x \leq \pi$ <p>Encontre, então, as equações exatas dessas assíntotas.</p>
C C I D	A>T A.GR	A	<p> 48. (a) Use evidências numéricas e gráficas para fazer uma conjectura sobre o valor do limite</p> $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 1}{\sqrt{x} - 1}$ <p>(b) A que distância de 1 deverá estar x para garantir que a função da parte (a) esteja a uma distância de 0,5 de seu limite?</p>
D	GR>A	A GR	<p>1. Use o gráfico dado de f para encontrar um número δ tal que</p> <p>se $x - 1 < \delta$ então $f(x) - 1 < 0,2$</p> 
D	GR>A	A GR	<p>2. Use o gráfico dado de f para encontrar um número δ tal que</p> <p>se $0 < x - 3 < \delta$ então $f(x) - 2 < 0,5$</p> 

D	GR>A	A GR	<p>3. Use o gráfico dado de $f(x) = \sqrt{x}$ para encontrar um número δ tal que</p> <p>se $x - 4 < \delta$ então $\sqrt{x} - 2 < 0,4$</p> 
D	GR>A	A GR	<p>4. Use o gráfico dado de $f(x) = x^2$ para encontrar um número δ tal que</p> <p>se $x - 1 < \delta$ então $x^2 - 1 < \frac{1}{2}$</p> 
C D	A>GR	A	<p> 5. Use um gráfico para encontrar um número δ tal que</p> <p>se $\left x - \frac{\pi}{4} \right < \delta$ então $\operatorname{tg} x - 1 < 0,1$</p>
C D	A>GR	A	<p> 6. Use um gráfico para encontrar um número δ tal que</p> <p>se $x - 1 < \delta$ então $\left \frac{2x}{x^2 + 4} - 0,4 \right < 0,1$</p>
D		A	<p> 7. Para o limite</p> $\lim_{x \rightarrow 2} (x^3 - 3x + 4) = 6$ <p>ilustre a Definição 2 encontrando os valores de δ que correspondam a $\varepsilon = 0,2$ e $\varepsilon = 0,1$.</p>

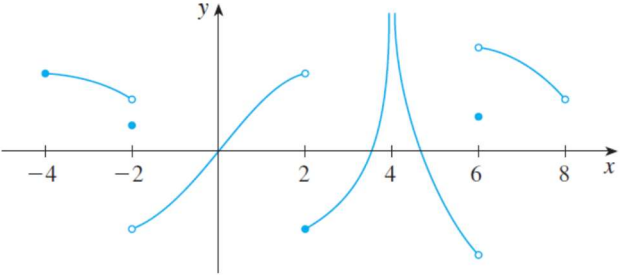
D		A	<p> 8. Para o limite</p> $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{2x} - 1}{x} = 2$ <p>ilustre a Definição 2 encontrando os valores de δ que correspondam a $\varepsilon = 0,5$ e $\varepsilon = 0,1$.</p>
D		A	<p> 9. Dado que $\lim_{x \rightarrow \pi/2} \operatorname{tg}^2 x = \infty$, ilustre a Definição 6 encontrando os valores de δ que correspondam a (a) $M = 10$ e (b) $M = 10\,000$.</p>
D	A > GR	A	<p> 10. Use um gráfico para encontrar um número δ tal que</p> <p>se $5 < x < 5 + \delta$ então $\frac{x^2}{\sqrt{x-5}} > 10$</p>
		LN	<p>11. Foi pedido a um torneiro mecânico que fabricasse um disco metal circular com área de 1.000 cm^2.</p>
D	LN > A		(a) Qual o raio do disco produzido?
D	A > LN		(b) Se for permitido ao torneiro uma tolerância do erro de $\pm 5 \text{ cm}^2$ na área do disco, quão próximo do raio ideal da parte (a) o torneiro precisa controlar o raio?
E	A > LN	A	(c) Em termos da definição ε, δ de $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$, o que é x ? O que é $f(x)$? O que é a ? O que é L ? Qual valor de ε é dado? Qual o valor correspondente de δ ?
		A	<p> 12. Uma fornalha para a produção de cristais é usada em uma pesquisa para determinar a melhor maneira de manufaturar cristais utilizados em componentes eletrônicos para os satélites espaciais. Para a produção perfeita do cristal, a temperatura precisa ser controlada precisamente, ajustando-se a potência de entrada. Suponha que a relação seja dada por</p> $T(w) = 0,1w^2 + 2,155w + 20$ <p>onde T é a temperatura em graus Celsius e w é a potência em watts.</p>

D			(a) Qual a potência necessária para manter a temperatura em 200 °C?
D			(b) Se for permitida uma variação de ± 1 °C a partir dos 200 °C qual será o intervalo de potência permitido para a entrada?
E E E E E E			(c) Em termos da definição ε, δ de $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$, o que é x ? O que é $f(x)$? O que é a ? O que é L ? Qual valor de ε é dado? Qual o valor correspondente de δ ?
D		A	13. (a) Encontre um número δ tal que se $ x - 2 < \delta$, $ 4x - 8 < \varepsilon$, onde $\varepsilon = 0,1$.
D			(b) Repita a parte (a) com $\varepsilon = 0,01$.
D		A	14. Dado que $\lim_{x \rightarrow 2} (5x - 7) = 3$, ilustre a Definição 2 encontrando valores de δ que correspondam a $\varepsilon = 0,1$, $\varepsilon = 0,05$ e $\varepsilon =$
			15–18 Demonstre cada afirmação usando a definição ε, δ de limite e ilustre com um diagrama como o da Figura 9.
P C	A>GR	A	15. $\lim_{x \rightarrow 1} (2x + 3) = 5$
P C	A>GR	A	16. $\lim_{x \rightarrow -2} \left(\frac{1}{2}x + 3\right) = 2$
P C	A>GR	A	17. $\lim_{x \rightarrow -3} (1 - 4x) = 13$
P C	A>GR	A	18. $\lim_{x \rightarrow -2} (3x + 5) = -1$
			19–32 Demonstre cada afirmação usando a definição ε, δ de limite

P		A	19. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2 + 4x}{3} = 2$
P		A	20. $\lim_{x \rightarrow 10} (3 - \frac{4}{5}x) = -5$
P		A	21. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + x - 6}{x - 2} = 5$
P		A	22. $\lim_{x \rightarrow -1,5} \frac{9 - 4x^2}{3 + 2x} = 6$
P		A	23. $\lim_{x \rightarrow a} x = a$
P		A	24. $\lim_{x \rightarrow a} c = c$
P		A	25. $\lim_{x \rightarrow 0} x^2 = 0$
P		A	26. $\lim_{x \rightarrow 0} x^3 = 0$
P		A	27. $\lim_{x \rightarrow 0} x = 0$
P		A	28. $\lim_{x \rightarrow -6^+} \sqrt[8]{6 + x} = 0$
P		A	29. $\lim_{x \rightarrow 2} (x^2 - 4x + 5) = 1$
P		A	30. $\lim_{x \rightarrow 2} (x^2 + 2x - 7) = 1$
P		A	31. $\lim_{x \rightarrow -2} (x^2 - 1) = 3$
P		A	32. $\lim_{x \rightarrow 2} x^3 = 8$
I		A	33. Verifique que outra escolha possível de δ para mostrar $\lim_{x \rightarrow 3} x^2 = 9$ no Exemplo 4 é $\delta = \min\{2, \varepsilon/8\}$.


C I	A>GR	A	34. Verifique, usando argumentos geométricos, que a maior escopo possível para o δ para que se possa mostrar que $\lim_{x \rightarrow 3} x^2 = 9$ é $\delta = \sqrt{9 + \varepsilon} - 3$.
C D	A>GR	A	SCA 35. (a) Para o limite $\lim_{x \rightarrow 1} (x^3 + x + 1) = 3$, use um gráfico para encontrar o valor de δ que corresponde a $\varepsilon = 0,4$.
D		A	(b) Usando um sistema de computação algébrica para resolver a equação cúbica $x^3 + x + 1 = 3 + \varepsilon$, determine o maior valor possível para δ que funcione para qualquer $\varepsilon > 0$ dado.
D I			(c) Tome $\varepsilon = 0,4$ na sua resposta da parte (b) e compare com a sua resposta da parte (a).
P		A	36. Demonstre que $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{1}{x} = \frac{1}{2}$.
P		A	37. Demonstre que $\lim_{x \rightarrow a} \sqrt{x} = \sqrt{a}$ se $a > 0$. [Dica: Use $ \sqrt{x} - \sqrt{a} = \frac{ x - a }{\sqrt{x} + \sqrt{a}}$.]
P		A	38. Se H é a função de Heaviside definida no Exemplo 6 na Seção 2.2, prove, usando a Definição 2, que $\lim_{t \rightarrow 0} H(t)$ não existe. [Dica: Use uma prova indireta como segue. Suponha que o limite seja L . Tome $\varepsilon = \frac{1}{2}$ na definição de limite e tente chegar a uma contradição.]
P		A A	39. Se a função f for definida por $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \text{ é racional} \\ 1 & \text{se } x \text{ é irracional} \end{cases}$ demonstre que $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ não existe.
P			40. Comparando as Definições 2, 3 e 4, demonstre o Teorema 1 da Seção 2.3.

D		A	<p>41. Quão próximo de -3 devemos deixar x para que</p> $\frac{1}{(x+3)^4} > 10\,000?$
P		A	<p>42. Demonstre, usando a Definição 6, que $\lim_{x \rightarrow -3} \frac{1}{(x+3)^4} = \infty$.</p>
P		A	<p>43. Demonstre que $\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x = -\infty$.</p>
P P P		A A A A A	<p>44. Suponha que $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty$ e $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = c$, onde c é um número real. Demonstre cada afirmação</p> <p>(a) $\lim_{x \rightarrow a} [f(x) + g(x)] = \infty$</p> <p>(b) $\lim_{x \rightarrow a} [f(x)g(x)] = \infty$ se $c > 0$</p> <p>(c) $\lim_{x \rightarrow a} [f(x)g(x)] = -\infty$ se $c < 0$</p>
C	LN>A		<p>1. Escreva uma equação que expresse o fato de que uma função f é contínua no número 4.</p>
I	LN>GR		<p>2. Se f é contínua em $(-\infty, \infty)$, o que você pode dizer sobre seu gráfico?</p>
D E D	GR>LN	GR	<p>3. (a) Do gráfico de f, identifique números nos quais f é descontínua e explique por quê. (b) Para cada um dos números indicados na parte (a), determine se f é contínua à direita ou à esquerda, ou nenhum deles.</p>

I	GR>LN	GR	<p>4. Do gráfico de g, identifique os intervalos nos quais g é contínua.</p> 
			<p>5–8 Esboce o gráfico de uma função que seja contínua exceto para descontinuidade declarada.</p>
C	LN>GR		<p>5. Descontínua, porém contínua à direita, em 2</p>
C	LN>GR		<p>6. Descontinuidades em -1 e 4, porém contínua à esquerda em -1 e à direita em 4</p>
C	LN>GR		<p>7. Descontinuidade removível em 3, descontinuidade em salto em 4</p>
C	LN>GR		<p>8. Não é contínua à direita nem à esquerda em -2; contínua somente à esquerda em 2</p>
C E	A>GR GR>LN	LN	<p>9. A tarifa T cobrada para dirigir em um certo trecho de uma rodovia com pedágio é de \$ 5, exceto durante o horário de pico (entre 7 da manhã e 10 da manhã e entre 4 da tarde e 7 da noite), quando a tarifa é de \$ 7.</p> <p>(a) Esboce um gráfico de T como função do tempo t, medido em horas após a meia-noite.</p> <p>(b) Discuta as descontinuidades da função e seu significado para alguém que use a rodovia.</p>
E E E E E		LN LN LN LN LN	<p>10. Explique por que cada função é contínua ou descontínua.</p> <p>(a) A temperatura em um local específico como uma função do tempo.</p> <p>(b) A temperatura em um tempo específico como uma função da distância em direção a oeste a partir da cidade de Paris.</p> <p>(c) A altitude acima do nível do mar como uma função da distância em direção a oeste a partir da cidade de Paris.</p> <p>(d) O custo de uma corrida de táxi como uma função da distância percorrida.</p> <p>(e) A corrente no circuito para as luzes de uma sala como uma função do tempo.</p>

D		A	11. Suponha que f e g sejam funções contínuas tal que $g(2) = 6$ $\lim_{x \rightarrow 2} [3f(x) + f(x)g(x)] = 36$. Encontre $f(2)$.
			12–14 Use a definição de continuidade e propriedades de limites para demonstrar que a função é contínua em um dado número a .
P		A	12. $f(x) = x^2 + \sqrt{7 - x}$, $a = 4$.
P		A	13. $f(x) = (x + 2x^3)^4$, $a = -1$.
P		A	14. $h(t) = \frac{2t - 3t^2}{1 + t^3}$, $a = 1$.
			15–16 Use a definição da continuidade e propriedades de limites para mostrar que a função é contínua no intervalo dado.
P		A	15. $f(x) = \frac{2x + 3}{x - 2}$, $(2, \infty)$.
P		A	16. $g(x) = 2\sqrt{3 - x}$, $(-\infty, 3]$.
			17–22 Explique por que a função é descontínua no número dado a . Esboce o gráfico da função.
E C	A>LN A>GR	A	17. $f(x) = \frac{1}{x + 2}$ $a = -2$
E C	A>LN A>GR	A	18. $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x + 2} & \text{se } x \neq -2 \\ 1 & \text{se } x = -2 \end{cases}$ $a = -2$
E C	A>LN A>GR	A	19. $f(x) = \begin{cases} e^x & \text{se } x < 0 \\ x^2 & \text{se } x \geq 0 \end{cases}$ $a = 0$

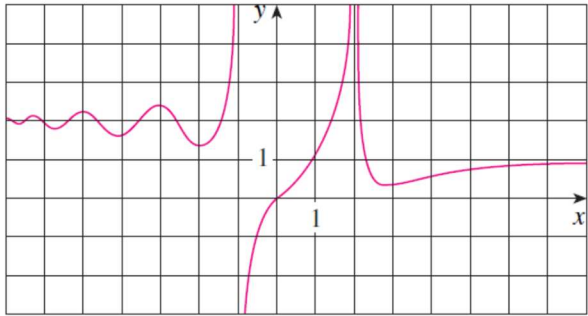
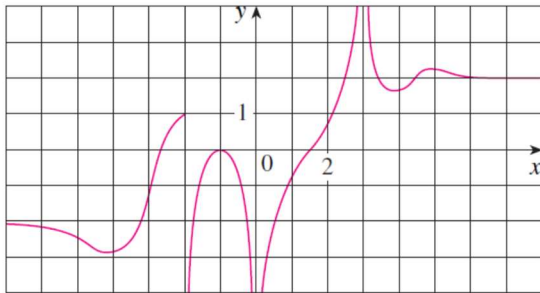
E C	A>LN A>GR	A	$20. f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - x}{x^2 - 1} & \text{se } x \neq 1 \\ 1 & \text{se } x = 1 \end{cases} \quad a = 1$
E C	A>LN A>GR	A	$21. f(x) = \begin{cases} \cos x & \text{se } x < 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \\ 1 - x^2 & \text{se } x > 0 \end{cases} \quad a = 0$
E C	A>LN A>GR	A	$22. f(x) = \begin{cases} \frac{2x^2 - 5x - 3}{x - 3} & \text{se } x \neq 3 \\ 6 & \text{se } x = 3 \end{cases} \quad a = 3$
			<p>23–24 Como você “removeria a descontinuidade” de f? Em outras palavras, como você definiria $f(2)$ no intuito de fazer f contínua em 2?</p>
I	A>LN	A	$23. f(x) = \frac{x^2 - x - 2}{x - 2}$
I	A>LN	A	$24. f(x) = \frac{x^3 - 8}{x^2 - 4}$
			<p>25–32 Explique, usando os Teoremas 4, 5, 7 e 9, por que a função contínua em todo o número em seu domínio. Diga qual é o domínio</p>
E D	A>LN	A	$25. F(x) = \frac{x}{x^2 + 5x + 6}$
E D	A>LN	A	$26. G(x) = \sqrt[3]{x} (1 + x^3)$
E D	A>LN	A	$27. R(x) = x^2 + \sqrt{2x - 1}$



E D	A>LN	A	28. $h(x) = \frac{\operatorname{sen} x}{x + 1}$
E D	A>LN	A	29. $A(t) = \operatorname{arcsen}(1 + 2t)$
E D	A>LN	A	30. $B(x) = \frac{\operatorname{tg} x}{\sqrt{4 - x^2}}$
E D	A>LN	A	31. $M(x) = \sqrt{1 + \frac{1}{x}}$
E D	A>LN	A	32. $N(r) = \operatorname{tg}^{-1}(1 + e^{-r^2})$
			 33–34 Localize as descontinuidades da função e ilustre com um gráfico.
D C	A>GR	A	33. $y = \frac{1}{1 + e^{1/x}}$
D C	A>GR	A	34. $y = \ln(\operatorname{tg}^2 x)$
			39–40 Mostre que f é contínua em $(-\infty, \infty)$.
P		A	39. $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{se } x < 1 \\ \sqrt{x} & \text{se } x \geq 1 \end{cases}$
P		A	40. $f(x) = \begin{cases} \operatorname{sen} x & \text{se } x < \pi/4 \\ \operatorname{cos} x & \text{se } x \geq \pi/4 \end{cases}$
			41–43 Encontre os pontos nos quais f é descontínua. Em quais desses pontos f é contínua à direita, à esquerda ou em nenhum deles? Esboce o gráfico de f .

D I C	A>GR	A	<p>41. $f(x) = \begin{cases} 1 + x^2 & \text{se } x \leq 0 \\ 2 - x & \text{se } 0 < x \leq 2 \\ (x - 2)^2 & \text{se } x > 2 \end{cases}$</p>
D I C	A>GR	A	<p>42. $f(x) = \begin{cases} x + 1 & \text{se } x \leq 1 \\ 1/x & \text{se } 1 < x < 3 \\ \sqrt{x - 3} & \text{se } x \geq 3 \end{cases}$</p>
D I C	A>GR	A	<p>43. $f(x) = \begin{cases} x + 2 & \text{se } x < 0 \\ e^x & \text{se } 0 \leq x \leq 1 \\ 2 - x & \text{se } x > 1 \end{cases}$</p>
I		A	<p>44. A força gravitacional exercida pela Terra sobre uma unidade de massa a uma distância r do centro do planeta é</p> $F(r) = \begin{cases} \frac{GMr}{R^3} & \text{se } r < R \\ \frac{GM}{r^2} & \text{se } r \geq R \end{cases}$ <p>onde M é a massa da Terra; R é seu raio; e G é a constante gravitacional. F é uma função contínua de r?</p>
D		A	<p>45. Para quais valores da constante c a função f é contínua em $(-\infty, \infty)$?</p> $f(x) = \begin{cases} cx^2 + 2x & \text{se } x < 2 \\ x^3 - cx & \text{se } x \geq 2 \end{cases}$
D		A	<p>46. Encontre os valores de a e b que tornam f contínua em toda parte</p> $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 4}{x - 2} & \text{se } x < 2 \\ ax^2 - bx + 3 & \text{se } 2 \leq x < 3 \\ 2x - a + b & \text{se } x \geq 3 \end{cases}$


I D I D I D		A A A	<p>47. Quais das seguintes funções f têm uma descontinuidade removível em a? Se a descontinuidade for removível, encontre uma função g que seja igual a f para $x \neq a$ e seja contínua em a.</p> <p>(a) $f(x) = \frac{x^4 - 1}{x - 1}, \quad a = 1$</p> <p>(b) $f(x) = \frac{x^3 - x^2 - 2x}{x - 2}, \quad a = 2$</p> <p>(c) $f(x) = \llbracket \text{sen } x \rrbracket, \quad a = \pi$</p>
C C	LN>GR LN>GR		<p>48. Suponha que uma função f seja contínua em $[0, 1]$, exceto em $x = 0,25$, e que $f(0) = 1$ e $f(1) = 3$. Seja $N = 2$. Esboce dois gráficos possíveis de f, um indicando que f pode não satisfazer a conclusão do Teorema do Valor Intermediário e outro mostrando que f poderia ainda satisfazer a conclusão do Teorema do Valor Intermediário (mesmo que não satisfaça as hipóteses).</p>
P		A	<p>49. Se $f(x) = x^2 + 10 \text{ sen } x$, mostre que existe um número c tal que $f(c) = 1.000$.</p>
E			<p>50. Suponha f contínua em $[1, 5]$ e que as únicas soluções da equação $f(x) = 6$ sejam $x = 1$ e $x = 4$. Se $f(2) = 8$, explique por que $f(3) > 6$.</p>
P		A	<p>59. Demonstre que f é contínua em a se, e somente se,</p> $\lim_{h \rightarrow 0} f(a + h) = f(a).$
P		A	<p>60. Para demonstrar que seno é contínuo, precisamos mostrar que $\lim_{x \rightarrow a} \text{sen } x = \text{sen } a$ para todo número real a. Pelo Exercício 59, uma afirmação equivalente é que</p> $\lim_{h \rightarrow 0} \text{sen}(a + h) = \text{sen } a.$ <p>Use [6] para mostrar que isso é verdadeiro.</p>
P		LN	<p>61. Demonstre que o cosseno é uma função contínua.</p>
P P			<p>62. (a) Demonstre a parte 3 do Teorema 4. (b) Demonstre a parte 5 do Teorema 4.</p>



D		A	<p>63. Para que valores de x a função f é contínua?</p> $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \text{ é racional} \\ 1 & \text{se } x \text{ é irracional} \end{cases}$
D		A	<p>64. Para que valores de x a função g é contínua?</p> $g(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \text{ é racional} \\ x & \text{se } x \text{ é irracional} \end{cases}$
D			<p>65. Existe um número que é exatamente uma unidade a mais do que seu cubo?</p>
P		A	<p>67. Demonstre que a função</p> $f(x) = \begin{cases} x^4 \operatorname{sen}(1/x) & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases}$ <p>é contínua em $(-\infty, \infty)$.</p>
P P I P		A	<p>68. (a) Mostre que a função valor absoluto $F(x) = x$ é contínua em toda parte.</p> <p>(b) Demonstre que se f for uma função contínua em um intervalo então também o é f.</p> <p>(c) A recíproca da afirmação da parte (b) também é verdadeira? Em outras palavras, se f for contínua, segue que f também o é? Se for assim, demonstre isso. Caso contrário, encontre um contraexemplo.</p>
E	A>LN A>LN	A A	<p>1. Explique com suas palavras o significado de cada um dos itens seguir.</p> <p>(a) $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 5$ (b) $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 3$</p>
I C I C	A>LN A>GR		<p>2. (a) O gráfico de $y = f(x)$ pode interceptar uma assíntota vertical? E uma assíntota horizontal? Ilustre com gráficos.</p> <p>(b) Quantas assíntotas horizontais pode ter o gráfico de $y = f(x)$? Ilustre com gráficos as possibilidades.</p>


D	GR>A	A	<p>3. Para a função f, cujo gráfico é dado, diga quem são.</p> <p>(a) $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$ (b) $\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x)$</p> <p>(c) $\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x)$ (d) $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$</p> <p>(e) $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ (f) As equações das assíntotas</p> 
D	GR>A	A	
D	GR>A	A	
D	GR>A	A	
D	GR>A	A	
D	GR>A	GR	
D	GR>A	A	<p>4. Para a função g, cujo gráfico é dado, determine o que se pede.</p> <p>(a) $\lim_{x \rightarrow \infty} g(x)$ (b) $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x)$</p> <p>(c) $\lim_{x \rightarrow 3} g(x)$ (d) $\lim_{x \rightarrow 0} g(x)$</p> <p>(e) $\lim_{x \rightarrow -2^+} g(x)$ (f) As equações das assíntotas</p> 
D	GR>A	A	
D	GR>A	A	
D	GR>A	A	
D	GR>A	A	
D	GR>A	GR	
			<p>5-10 Esboce o gráfico de um exemplo de uma função f que satisfaça a todas as condições dadas.</p>
C	A>GR	A	<p>5. $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = -\infty$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 5$, $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = -5$</p>
		A	
		A	
C	A>GR	A	<p>6. $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \infty$, $\lim_{x \rightarrow -2^+} f(x) = \infty$, $\lim_{x \rightarrow -2^-} f(x) = -\infty$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$, $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$, $f(0) = 0$</p>
		A	
		A	
		A	
		A	





C	A>GR	A A A A A	<p>7. $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = -\infty$, $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$,</p> <p>$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \infty$, $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = -\infty$</p>
C	A>GR	A A A	<p>8. $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 3$, $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \infty$, $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = -\infty$, f é ímpar</p>
C	A>GR	A A A A A A	<p>9. $f(0) = 3$, $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = 4$, $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 2$,</p> <p>$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$, $\lim_{x \rightarrow 4^-} f(x) = -\infty$, $\lim_{x \rightarrow 4^+} f(x) = \infty$,</p> <p>$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 3$</p>
C	A>GR	A A A	<p>10. $\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = -\infty$, $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 2$, $f(0) = 0$, f é par</p>
I C	A>T T>GR	A A	<p> 11. Faça uma conjectura sobre o valor do limite</p> $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2}{2^x}$ <p>calculando a função $f(x) = x^2/2^x$ para $x = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9, 10, 20, 50$ e 100. Então, use o gráfico de f para comprovar sua conjectura.</p>
C ES C ES	A>GR A>T	A A	<p> 12. (a) Use o gráfico de</p> $f(x) = \left(1 - \frac{2}{x}\right)^x$ <p>para estimar o valor de $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$ com precisão de duas casas decimais.</p> <p>(b) Use uma tabela de valores de $f(x)$ para estimar o limite com precisão de quatro casas decimais.</p>
			15–38 Encontre o limite ou demonstre que não existe.



D P		A	$15. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{2x + 3}$
D P		A	$16. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x + 5}{x - 4}$
D P		A	$17. \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1 - x - x^2}{2x^2 - 7}$
D P		A	$18. \lim_{y \rightarrow \infty} \frac{2 - 3y^2}{5y^2 + 4y}$
D P		A	$19. \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{t} + t^2}{2t - t^2}$
D P		A	$20. \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{t - t\sqrt{t}}{2t^{3/2} + 3t - 5}$
D P		A	$21. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(2x^2 + 1)^2}{(x - 1)^2(x^2 + x)}$
D P		A	$22. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2}{\sqrt{x^4 + 1}}$
D P		A	$23. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{9x^6 - x}}{x^3 + 1}$
D P		A	$24. \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{9x^6 - x}}{x^3 + 1}$
D P		A	$25. \lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{9x^2 + x} - 3x)$
D P		A	$26. \lim_{x \rightarrow -\infty} (x + \sqrt{x^2 + 2x})$
D P		A	$27. \lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2 + ax} - \sqrt{x^2 + bx})$

D P		A	28. $\lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{x^2 + 1}$
D P		A	29. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^4 - 3x^2 + x}{x^3 - x + 2}$
D P		A	30. $\lim_{x \rightarrow \infty} (e^{-x} + 2 \cos 3x)$
D P		A	31. $\lim_{x \rightarrow -\infty} (x^4 + x^5)$
D P		A	32. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1 + x^6}{x^4 + 1}$
D P		A	33. $\lim_{x \rightarrow \infty} \operatorname{arctg}(e^x)$
D P		A	34. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^{3x} - e^{-3x}}{e^{3x} + e^{-3x}}$
D P		A	35. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 - e^x}{1 + 2e^x}$
D P		A	36. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\operatorname{sen}^2 x}{x^2 + 1}$
D P		A	37. $\lim_{x \rightarrow \infty} (e^{-2x} \cos x)$
D P		A	38. $\lim_{x \rightarrow 0^+} \operatorname{tg}^{-1}(\ln x)$
ES C C ES P	A>GR A>T	A A	<p> 39. (a) Estime o valor de</p> $\lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x^2 + x + 1} + x)$ <p>traçando o gráfico da função $f(x) = \sqrt{x^2 + x + 1} + x$</p> <p>(b) Faça uma tabela de valores de $f(x)$ para estimar qual será o valor do limite.</p> <p>(c) Demonstre que sua conjectura está correta.</p>

C ES C ES P	A>GR A>T	A A	 40. (a) Use um gráfico de $f(x) = \sqrt{3x^2 + 8x + 6} - \sqrt{3x^2 + 3x + 1}$ para estimar o valor de $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$ com precisão de um casa decimal. (b) Use uma tabela de valores de $f(x)$ para estimar o limite com precisão de quatro casas decimais. (c) Encontre o valor exato do limite.
			41–46 Encontre as assíntotas horizontais e verticais de cada curva. Confira seu trabalho por meio de um gráfico da curva e das estimativas das assíntotas.
D C	A>GR	A	41. $y = \frac{2x + 1}{x - 2}$
D C	A>GR	A	42. $y = \frac{x^2 + 1}{2x^2 - 3x - 2}$
D C	A>GR	A	43. $y = \frac{2x^2 + x - 1}{x^2 + x - 2}$
D C	A>GR	A	44. $y = \frac{1 + x^4}{x^2 - x^4}$
D C	A>GR	A	45. $y = \frac{x^3 - x}{x^2 - 6x + 5}$
D C	A>GR	A	46. $y = \frac{2e^x}{e^x - 5}$
E C D I	A>GR GR>LN	A	 47. Estime a assíntota horizontal da função $f(x) = \frac{3x^3 + 500x^2}{x^3 + 500x^2 + 100x + 2000}$ através do gráfico f para $-10 \leq x \leq 10$. A seguir, determine a equação da assíntota calculando o limite. Como você explica a discrepância?

C													
D	A>GR	A	55. $y = (3 - x)(1 + x)^2(1 - x)^4$										
C													
D	A>GR	A	56. $y = x^2(x^2 - 1)^2(x + 2)$										
C													
E	A>LN	A	 58. Por <i>comportamento final</i> de uma função queremos indicar uma descrição do que acontece com seus valores quando $x \rightarrow \infty$ quando $x \rightarrow -\infty$. (a) Descreva e compare o comportamento final das funções $P(x) = 3x^5 - 5x^3 + 2x \quad Q(x) = 3x^5$ por meio do gráfico de ambas nas janelas retangulares $[-2, 2]$ por $[-2, 2]$ e $[-10, 10]$ por $[-10.000, 10.000]$. (b) Dizemos que duas funções têm o <i>mesmo comportamento final</i> se sua razão tende a 1 quando $x \rightarrow \infty$. Mostre que P e Q têm o mesmo comportamento final.										
C		A											
P		A											
D		A	59. Sejam P e Q polinômios. Encontre $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{P(x)}{Q(x)}$ se o grau de P for (a) menor que o grau de Q e (b) maior que grau de Q .										
C	A>GR	A	60. Faça um esboço da curva $y = x^n$ (n inteiro) nos seguintes casos: <table style="width: 100%; border: none;"> <tr> <td style="width: 50%;">(i) $n = 0$</td> <td style="width: 50%;">(ii) $n > 0, n$ ímpar</td> </tr> <tr> <td>(iii) $n > 0, n$ par</td> <td>(iv) $n < 0, n$ ímpar</td> </tr> <tr> <td>(v) $n < 0, n$ par</td> <td></td> </tr> </table> Então, use esses esboços para encontrar os seguintes limites: <table style="width: 100%; border: none;"> <tr> <td style="width: 50%;">(a) $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^n$</td> <td style="width: 50%;">(b) $\lim_{x \rightarrow 0^-} x^n$</td> </tr> <tr> <td>(c) $\lim_{x \rightarrow \infty} x^n$</td> <td>(d) $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^n$</td> </tr> </table>	(i) $n = 0$	(ii) $n > 0, n$ ímpar	(iii) $n > 0, n$ par	(iv) $n < 0, n$ ímpar	(v) $n < 0, n$ par		(a) $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^n$	(b) $\lim_{x \rightarrow 0^-} x^n$	(c) $\lim_{x \rightarrow \infty} x^n$	(d) $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^n$
(i) $n = 0$	(ii) $n > 0, n$ ímpar												
(iii) $n > 0, n$ par	(iv) $n < 0, n$ ímpar												
(v) $n < 0, n$ par													
(a) $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^n$	(b) $\lim_{x \rightarrow 0^-} x^n$												
(c) $\lim_{x \rightarrow \infty} x^n$	(d) $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^n$												
C	A>GR	A											
C	A>GR	A											
C	A>GR	A											
C	A>GR	A											
C	GR>A												
D	GR>A												
D	GR>A												
D	GR>A												
D													

P I	LN>A A>LN	LN A	<p>62. (a) Um tanque contém 5.000 litros de água pura. Água salgada contendo 30 g de sal por litro de água é bombeada para dentro do tanque a uma taxa de 25 L/min. Mostre que a concentração de sal depois de t minutos (em gramas por litro) é</p> $C(t) = \frac{30t}{200 + t}$ <p>(b) O que acontece com a concentração quando $t \rightarrow \infty$?</p>
D C I	A.GR	A A	<p>63. Seremos capazes de mostrar, no Capítulo 9 do Volume II, que, sob certas condições, a velocidade $v(t)$ de uma gota de chuva caindo no instante t é</p> $v(t) = v^*(1 - e^{-gt/v^*}),$ <p>onde g é a aceleração da gravidade e v^* é a <i>velocidade final</i> da gota.</p> <p>(a) Encontre $\lim_{t \rightarrow \infty} v(t)$.</p> <p> (b) Faça o gráfico de $v(t)$ se $v^* = 1$ m/s e $g = 9,8$ m/s². Quanto tempo levará para a velocidade da gota atingir 99% de sua velocidade final?</p>
C I I	A.GR	A	<p> 64. (a) Fazendo os gráficos de $y = e^{-x/10}$ e $y = 0,1$ na mesma tela descubra quão grande você precisará tomar x para que $e^{-x/10} < 0,1$.</p> <p>(b) A parte (a) pode ser resolvida sem usar uma ferramenta gráfica?</p>
C D	A.GR	A	<p> 65. Use um gráfico para encontrar um número N tal que</p> $\text{se } x > N \text{ então } \left \frac{3x^2 + 1}{2x^2 + x + 1} - 1,5 \right < 0,0$
C D		A	<p> 66. Para o limite</p> $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{4x^2 + 1}}{x + 1} = 2$ <p>ilustre a Definição 7, encontrando os valores de N que correspondam a $\varepsilon = 0,5$ e $\varepsilon = 0,1$.</p>

C D		A	<p> 67. Para o limite</p> $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{4x^2 + 1}}{x + 1} = -2$ <p>ilustre a Definição 8, encontrando os valores de N correspondentes a $\varepsilon = 0,5$ e $\varepsilon = 0,1$.</p>
C D		A	<p> 68. Para o limite</p> $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x + 1}{\sqrt{x + 1}} = \infty$ <p>ilustre a Definição 9, encontrando um valor de N correspondente a $M = 100$.</p>
D P		A	<p>69. (a) De que tamanho devemos tomar x para que $1/x^2 < 0,0001$ (b) Tomando $r = 2$ no Teorema 5, temos a igualdade</p> $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x^2} = 0$ <p>Demonstre isso diretamente usando a Definição 7.</p>
D P		A	<p>70. (a) De que tamanho devemos tornar x para que $1/\sqrt{x} < 0,0001$ (b) Tomando $r = \frac{1}{2}$ no Teorema 5, temos a igualdade</p> $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{x}} = 0$ <p>Demonstre isso diretamente usando a Definição 7.</p>
P		A	<p>71. Use a Definição 8 para demonstrar que $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x} = 0$.</p>
P		A	<p>72. Demonstre, usando a Definição 9, que $\lim_{x \rightarrow \infty} x^3 = \infty$.</p>
P		A	<p>73. Use a Definição 9 para demonstrar que $\lim_{x \rightarrow \infty} e^x = \infty$.</p>
C P		A A	<p>74. Formule precisamente a definição de</p> $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$ <p>Então, use sua definição para demonstrar que</p> $\lim_{x \rightarrow -\infty} (1 + x^3) = -\infty$

P		A	75. Demonstre que	
P		A	$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{t \rightarrow 0^+} f(1/t)$	
		A	e	
		A	$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{t \rightarrow 0^-} f(1/t)$	
			se esses limites existirem.	

Fonte: Elaborado pelo autor.