

UNIVERSIDADE FEDERAL DE GOIÁS
INSTITUTO DE INFORMÁTICA

JULIANA PAULA FÉLIX

Códigos Identificadores em Algumas Classes de Grafos

Goiânia
2018

**TERMO DE CIÊNCIA E DE AUTORIZAÇÃO PARA DISPONIBILIZAR VERSÕES ELETRÔNICAS
DE TESES E
DISSERTAÇÕES NA BIBLIOTECA DIGITAL DA UFG**

Na qualidade de titular dos direitos de autor, autorizo a Universidade Federal de Goiás (UFG) a disponibilizar, gratuitamente, por meio da Biblioteca Digital de Teses e Dissertações (BDTD/UFG), regulamentada pela Resolução CEPEC nº 832/2007, sem ressarcimento dos direitos autorais, de acordo com a Lei nº 9610/98, o documento conforme permissões assinaladas abaixo, para fins de leitura, impressão e/ou *download*, a título de divulgação da produção científica brasileira, a partir desta data.

1. Identificação do material bibliográfico: **Dissertação** **Tese**

2. Identificação da Tese ou Dissertação:

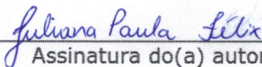
Nome completo do autor: Juliana Paula Félix

Título do trabalho: Códigos Identificadores em Algumas Classes de Grafos

3. Informações de acesso ao documento:

Concorda com a liberação total do documento SIM NÃO¹

Havendo concordância com a disponibilização eletrônica, torna-se imprescindível o envio do(s) arquivo(s) em formato digital PDF da tese ou dissertação.



Assinatura do(a) autor(a)²

Ciente e de acordo:



Assinatura do(a) orientador(a)²

Data: 19 / 02 / 18

¹ Neste caso o documento será embargado por até um ano a partir da data de defesa. A extensão deste prazo suscita justificativa junto à coordenação do curso. Os dados do documento não serão disponibilizados durante o período de embargo.

Casos de embargo:

- Solicitação de registro de patente
- Submissão de artigo em revista científica
- Publicação como capítulo de livro
- Publicação da dissertação/tese em livro

²A assinatura deve ser escaneada.

JULIANA PAULA FÉLIX

Códigos Identificadores em Algumas Classes de Grafos

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação do Instituto de Informática da Universidade Federal de Goiás, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Ciência da Computação.

Área de concentração: Ciência da Computação.

Orientadora: Profa. Dra. Márcia Rodrigues Cappelle Santana

Goiânia
2018

Ficha de identificação da obra elaborada pelo autor, através do Programa de Geração Automática do Sistema de Bibliotecas da UFG.

Paula Félix, Juliana
Códigos Identificadores em Algumas Classes de Grafos
[manuscrito] / Juliana Paula Félix. - 2018.
xciii, 93 f.: il.

Orientador: Profa. Dra. Márcia Rodrigues Cappelle Santana.
Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal de Goiás, Instituto de Informática (INF), Programa de Pós-Graduação em Ciência da Computação, Goiânia, 2018.

Bibliografia. Apêndice.

Inclui símbolos, tabelas, lista de figuras, lista de tabelas.

1. Códigos Identificadores. 2. Caterpillar. 3. Produto corona. 4. Produto Cartesiano. 5. Prisma complementar. I. Rodrigues Cappelle Santana, Márcia, orient. II. Título.

CDU 004



ATA Nº 01/2018

**ATA DA SESSÃO DE JULGAMENTO DA DISSERTAÇÃO
DE MESTRADO DE JULIANA PAULA FÉLIX**

Aos dezanove dias do mês de fevereiro de dois mil e dezoito, às catorze horas, na sala 151 do Instituto de Informática da Universidade Federal de Goiás, Campus Samambaia, reuniu-se a banca examinadora designada na forma regimental pela Coordenação do Curso para julgar a dissertação de mestrado intitulada “**Códigos Identificadores em Algumas Classes de Grafos**”, apresentada pela aluna Juliana Paula Félix como parte dos requisitos necessários à obtenção do grau de Mestre em Ciência da Computação, área de concentração Ciência da Computação. A banca examinadora foi presidida pela orientadora do trabalho de dissertação, Professora Doutora Márcia Rodrigues Cappelle Santana (INF/UFG), tendo como membros os Professores Doutores Diane Castonguay (INF/UFG) e Uéverton dos Santos Souza (IC/UFG). O professor Uéverton dos Santos Souza participou à distância por videoconferência. Aberta a sessão, a candidata expôs seu trabalho. Em seguida, a aluna foi arguida pelos membros da banca e:

tendo demonstrado suficiência de conhecimento e capacidade de sistematização do tema de sua dissertação, a banca concluiu pela **aprovação** da candidata, sem restrições.

não tendo demonstrado suficiência de conhecimento e capacidade de sistematização do tema de sua dissertação, a banca concluiu pela **reprovação** da candidata.

Os trabalhos foram encerrados às 16 horas. Nos termos do Regulamento Geral dos Cursos de Pós-Graduação desta Universidade, lavrou-se a presente ata que, lida e julgada conforme, segue assinada pelos membros da banca examinadora.

Profa. Dra. Márcia Rodrigues Cappelle Santana _____ *M. Cappelle*

Profa. Dra. Diane Castonguay _____ *Diane Castonguay*

Prof. Dr. Uéverton dos Santos Souza _____ *Uéverton dos Santos Souza*

Todos os direitos reservados. É proibida a reprodução total ou parcial do trabalho sem autorização da universidade, do autor e do orientador(a).

Juliana Paula Félix

É bacharel em Ciência da Computação pelo Instituto de Informática da Universidade Federal de Goiás, UFG (2015). Durante a graduação, foi monitora de diversas disciplinas e participou de projetos de pesquisa na área de Processamento de Imagens e Teoria dos Grafos. Realizou graduação sanduíche na University of Manitoba, em Winnipeg - MB, Canadá (2013-2014), onde também participou de um projeto de pesquisa na área de Teoria dos Grafos, estudando principalmente grafos extremais e hipergrafos. Durante o mestrado, foi bolsista CAPES e desenvolveu um trabalho teórico sobre códigos identificadores em grafos.

Dedico este trabalho a você, mamãe.

Agradecimentos

Agradeço, primeiramente, a Deus, pelo dom da vida, por me ajudar a superar os vários momentos de dificuldades, e por me permitir chegar até aqui.

Agradeço à minha mãe, Nancy, pelo apoio incondicional sempre oferecido. Agradeço, também, por compreender minha ausência devido aos muitos momentos em que o mestrado foi uma prioridade.

Agradeço à minha orientadora, Márcia Cappelle. Obrigada, professora, por sempre respeitar o meu tempo e minhas dificuldades. Agradeço pela confiança, pela paciência, presteza, e por toda a atenção dispensada à mim, especialmente na reta final. Obrigada por todas as horas de orientação, mesmo em finais de semana e período de férias. Obrigada, acima de tudo, pela amizade.

Agradeço ao Fabrizzio, que acompanhou toda esta jornada, sempre me incentivando e contribuindo de inúmeras formas para que esta etapa fosse concluída.

Agradeço ao Rafael Cruz, pela implementação de um algoritmo que facilitou a identificação e análise de códigos identificadores em produtos Cartesianos.

Agradeço à professora Diane Castonguay pelas correções e valiosas contribuições oferecidas na fase de qualificação, contribuindo com melhorias significativas deste trabalho.

Agradeço à banca examinadora, por aceitar o convite para participar da avaliação deste trabalho.

Agradeço aos funcionários da secretaria da pós graduação do Instituto de Informática, em especial à Mariana Rodrigues, pela prontidão excepcional durante toda a fase de realização do mestrado.

Agradeço aos colegas da 250, por todos os momentos de descontração proporcionados.

Finalmente, agradeço à CAPES e FAPEG pelo apoio financeiro.

A vida é um sonho. Realize-o.
Autor desconhecido

Resumo

Félix, Juliana Paula. **Códigos Identificadores em Algumas Classes de Grafos**. Goiânia, 2018. 93p. Dissertação de Mestrado. Instituto de Informática, Universidade Federal de Goiás.

Neste trabalho, investigamos o problema de se encontrar códigos identificadores de cardinalidade mínima em diversas classes de grafos, tais como árvores, produtos coronas, produtos Cartesianos e prismas complementares. Para árvores *caterpillar*, determinamos a cardinalidade mínima de um código identificador em *caterpillars* completo, grafos *broom* e *broom* duplo, e provamos um limite superior justo para *caterpillars* gerais. Para coronas, determinamos a cardinalidade mínima de um código identificador em $K_n \circ \bar{K}_m$. Para produtos Cartesianos, investigamos códigos identificadores em grafos $K_{1,n} \square P_m$, definimos um limite superior justo para o caso em que $n = 3$ e um limite superior mais abrangente para o caso em que $n \geq 3$. Quando $n = 3$, conjecturamos que o limite proposto é mínimo. Para prismas complementares de grafos, encontramos o tamanho de um código identificador mínimo em grafos bipartidos completos e grafos split completos. Para prismas complementares, obtivemos ainda outros resultados: demonstramos que um grafo prisma complementar $G\bar{G}$ é identificável se, e somente se, a ordem de G é pelo menos dois; definimos o menor tamanho possível de um código identificador em um grafo $G\bar{G}$; determinamos um limite superior justo para o código identificador de um grafo conexo, mostrando também que seu conjunto de vértices é um conjunto identificador com o tamanho proposto e, finalmente, mostramos que o grafo bipartido completo é um exemplo de grafo que atinge a igualdade do limite superior apresentado.

Palavras-chave

Código identificador, Caterpillar, Produto corona, Produto Cartesiano, Prisma complementar.

Abstract

Félix, Juliana Paula. **Identifying Codes in Some Classes of Graphs**. Goiânia, 2018. 93p. MSc. Dissertation. Instituto de Informática, Universidade Federal de Goiás.

In this work, we investigate the problem of finding identifying codes of minimum size in a variety of graph classes, such as trees corona products, Cartesian products and complementary prisms. For caterpillar trees, we show the minimum size of an identifying code on complete caterpillars, brooms and double brooms. We also prove a sharp upper bound for the general case. For coronas $K_n \circ \overline{K}_m$, we prove what is the minimum size of an identifying code. We demonstrate a sharp upper bound for an identifying code of the Cartesian product of a star and a path $K_{1,n} \square P_m$ and, when $n = 3$, we conjecture that the limit proposed is minimum. We also find the minimum cardinality of an identifying code in the complementary prism of complete bipartite graphs and complete split graphs, among with other results: we demonstrate that the complementary prism graph \overline{GG} is identifiable if, and only if, G has at least two vertices; we find what is the smallest size possible of an identifying code of complementary prisms; we prove a sharp upper bound for an identifying code of the complementary prism \overline{GG} of a connected graph G , showing that the set $C = V(G)$ is an identifying code with the size proposed and, finally, we determine the size of a minimum identifying code of the complementary prism of a complete bipartite graph, showing that it is an example of a graph that attains our upper bound.

Keywords

Identifying code, Caterpillar, Corona product, Cartesian product, Complementary prism.

Sumário

Lista de Figuras	12
Lista de Tabelas	14
Notação	15
1 Introdução	16
2 Definições Básicas	19
3 Códigos Identificadores	27
4 Códigos Identificadores em Árvores	37
4.1 Resultados em Caterpillars	40
5 Códigos Identificadores em Produto Corona	48
6 Códigos Identificadores em Produtos Cartesianos	53
6.1 Processo de construção do conjunto C^*	58
6.2 Resultados em Produtos Cartesianos	63
7 Códigos Identificadores em Prismas Complementares	73
7.1 Resultados em Prismas Complementares	75
8 Considerações Finais	82
Referências Bibliográficas	85
Índice Remissivo	91

Lista de Figuras

2.1	Duas formas de se desenhar um mesmo grafo.	19
2.2	Grafos completos de ordem $n \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$	20
2.3	Um grafo G e um grafo 3-regular são apresentados em 2.3(a) e 2.3(b), respectivamente.	21
2.4	Um hipercubo Q_3 .	22
2.5	Ciclos de ordem $n \in \{3, 4, 5, 6\}$.	23
2.6	Um grafo desconexo G com 10 vértices.	23
2.7	Um grafo simples, com número de dominação $\gamma = 3$.	24
2.8	Um grafo G e seu complemento \overline{G} .	25
2.9	Alguns grafos bipartidos completos.	25
2.10	Os grafos G e H são isomorfos.	26
3.1	Vista superior de um ambiente qualquer.	29
3.2	Um grafo G que representa o ambiente da Figura 3.1.	29
3.3	Um código identificador mínimo no grafo que modela o ambiente da Figura 3.1. Vértices em preto são <i>codewords</i> .	30
3.4	Alguns grafos que precisam de $n - 1$ vértices para serem identificados. <i>Codewords</i> são representados em preto.	33
3.5	Exemplo de construção de códigos identificadores mínimos em grafos caminho.	35
3.6	Ilustração do Lema 3.9.	36
4.1	Padrões para construção de grafos que atingem o limite inferior do Teorema 4.1.	37
4.2	Exemplos de grafos <i>caterpillar</i> e um não <i>caterpillar</i> .	39
4.3	Um broom, um broom duplo e um <i>caterpillar</i> completo são ilustrados em (a), (b) e (c), respectivamente.	40
4.4	Exemplo de códigos identificadores mínimos em grafos <i>broom</i> tal que c é par (4.4(a)), ou ímpar (4.4(b)). Os vértices preenchidos indicam os <i>codewords</i> .	42
4.5	Exemplo de códigos identificadores mínimos em grafos <i>broom</i> duplo cujo caminho central c possui cardinalidade par (4.5(a)) e ímpar (4.5(b)). Os vértices preenchidos indicam os <i>codewords</i> .	45
4.6	Um grafo <i>caterpillar</i> $G = P_{10}(k_1, 0, 0, k_4, 0, 0, 0, k_8, 0, k_{10})$. O grafo G tem um subconjunto de caminhos $\phi = \{P^1, P^2, P^3\}$, tal que $P^1 = v_1, \dots, v_4$, $P^2 = v_4, \dots, v_8$, e $P^3 = v_8, \dots, v_{10}$.	46
5.1	Grafos G , H , e o corona $G \circ H$.	48

5.2	Exemplo de grafo da Proposição 5.4. Corona $K_5 \circ \overline{K}_3$. Os vértices em preto representam um código identificador de tamanho $\gamma^{ID}(K_5 \circ \overline{K}_3) = 5 \cdot 3 = 15$.	50
6.1	Representação do produto Cartesiano $C_3 \square C_4$.	53
6.1	Alguns exemplos de grafos livro.	57
6.2	Representação de um grafo $K_{1,n} \square P_m$ em forma matricial.	57
6.3	Representação adotada neste trabalho para ilustrar um grafo $K_{1,n} \square P_m$.	58
6.4	Código identificador em $K_{1,3} \square P_8$, indicado pelos vértices preenchidos em preto.	59
6.5	Exemplo de construção de um código identificador no grafo $K_{1,3} \square P_{16}$, em que 2 cópias de $K_{1,3} \square P_8$ são agrupadas lado a lado.	59
6.6	Grafos G_y com os padrões adicionais necessários para construção de um conjunto C^* no grafo $K_{1,3} \square P_m$ com $m = 8k + y$.	60
6.7	Grafos $K_{1,3} \square P_m$, em que $m = 8k + y$, com $y \in \{2, \dots, 7\}$.	62
6.8	Padrão adicional necessário para construção de um código identificador no grafo $K_{1,3} \square P_m$, em que $m = 8k + 1$.	63
6.9	Ilustração do grafo $K_{1,3} \square P_m$, em que $m = 8k + 1$.	63
6.10	Subgrafo referente à junção de dois grafos $K_{1,3} \square P_8$ em um grafo $K_{1,3} \square P_{8k}$.	65
6.11	Junção do grafo padrão G_y , com $y \in \{2, 4, 5\}$, ao grafo $K_{1,3} \square P_{8k}$.	66
6.12	Junção do grafo padrão G_y , com $y \in \{3, 6\}$, ao grafo $K_{1,3} \square P_{8k}$.	66
6.13	Junção do grafo padrão G_y , com $y \in \{7\}$, ao grafo $K_{1,3} \square P_{8k}$.	67
6.14	Ilustração do Lema 6.14, mostrando os cenários possíveis em um grafo $K_{1,3} \square P_m$.	69
6.15	Exemplos do conjunto C quando $m \bmod 3 \in \{0, 1, 2\}$.	71
7.1	Um grafo G , seu complemento \overline{G} , e seu prisma complementar $G\overline{G}$.	74
7.2	Ilustração de um código identificador mínimo para o grafo $K_5 \overline{K}_5$.	75
7.3	Exemplos de grafos em que $\gamma^{ID}(G\overline{G}) > 3$.	77
7.4	Exemplo de grafo em que $\gamma^{ID}(G\overline{G}) < n$.	78
7.5	Prisma complementar do grafo bipartido completo $K_{4,3} = (A \cup B, E)$.	79
7.6	Um grafo split é apresentado em 7.6(a), um grafo split completo em 7.6(b), e o prisma complementar deste último é apresentado em 7.6(c).	80
7.7	Prisma complementar de um grafo split completo $G = (K \cup S, E)$.	81

Lista de Tabelas

8.1	Resultados em árvores.	84
8.2	Resultados em produtos corona.	84
8.3	Resultados em produtos Cartesianos.	84
8.4	Resultados em prismas complementares.	84

Notação

Os termos aqui presentes são definidos informalmente. Para a definição dos termos, o leitor pode fazer uso do Índice Remissivo localizado no final deste documento. Quando utilizado sem especificação, G denota um grafo $G = (V, E)$, u, v indicam vértices, e uma aresta, e n indica a ordem do grafo.

$\alpha(G)$	número de independência de G
$\delta(G)$	grau mínimo do grafo G
$\Delta(G)$	grau máximo do grafo G
$\gamma(G)$	tamanho de um conjunto dominante mínimo de G
$\gamma^D(G)$	tamanho de um código identificador mínimo de G
$A \triangle B$	diferença simétrica dos conjuntos A e B
C_n	ciclo com n vértices
$d(v)$	grau do vértice v
$d(u, v)$	distância entre u e v no grafo G
$diam(G)$	diâmetro do grafo G
$E(G)$	conjunto de arestas de G
$g(G)$	cintura de G
\bar{G}	grafo complemento de G
$G\bar{G}$	prisma complementar de G
$G \square H$	produto Cartesiano dos grafos G e H
$G \cong H$	G é isomorfo a H
$G \circ H$	corona de G e H
$K_{1,n}$	grafo estrela com $n + 1$ vértices
$K_{m,n}$	grafo bipartido com partições de tamanho m e n
K_n	grafo completo com n vértices
$n(G)$	ordem de G
$N^d(v)$	vizinhança aberta de v a uma distância $\leq d$
$N^d[v]$	conjunto de vértices a uma distância até d d v distância $\leq d$
$N(v)$	vizinhança aberta de v
$N[v]$	vizinhança fechada de v
$N(K)$	vizinhança aberta de um conjunto de vértices K
$N[K]$	vizinhança fechada de um conjunto de vértices K
P_n	caminho com n vértices
Q_k	hipercubo de dimensão k
uv	aresta $\{u, v\}$
$V(G)$	conjunto de vértices de G

Introdução

O desenvolvimento da Teoria dos Grafos se deu, em geral, através de problemas envolvendo jogos e quebra-cabeças. Semelhantemente, o estudo de conjuntos dominantes em grafos surgiu por volta de 1862 com o Problema das Rainhas [44, p. 15], que consiste em determinar o número mínimo de rainhas necessárias para dominar um tabuleiro $n \times n$ de xadrez. Sua formalização, entretanto, se deu apenas em 1958, quando Claude Berge escreveu um livro sobre Teoria dos Grafos e definiu, pela primeira vez, o conceito de número de dominação de um grafo [6, 7] (na época, intitulado de "coeficiente de estabilidade externa"). Somente em 1962, com a obra de Oystein Ore [61], o termo conjunto dominante foi empregado.

Um conjunto dominante em um grafo, de maneira geral, pode ser definido como um subconjunto D de vértices, tal que cada vértice do grafo que não está em D é adjacente a pelo menos um vértice em D . Geralmente, estamos interessados em encontrar conjuntos dominantes de cardinalidade mínima. São diversas as aplicações reais que podem ser modeladas utilizando conjuntos dominantes, como por exemplo a modelagem de redes sociais [54] e disposição de câmeras de vigilância [5].

Códigos identificadores, uma variação do problema de dominação, foram introduzidos em 1998 por Karpovsky, Chakrabarty e Levitin [50]. Um código d -identificador em um grafo é um subconjunto de vértices C tal que, além de ser dominante, também tem a propriedade de que a vizinhança fechada de cada vértice do grafo, quando considerada uma distância no máximo d de cada vértice analisado, possui uma interseção não vazia e distinta com o conjunto C . Quando $d = 1$, dizemos simplesmente códigos identificadores. Assim como os conjuntos dominantes propriamente ditos, os códigos identificadores também podem ser utilizados para modelar diversos problemas reais, tais como a análise de falhas em sistemas de multiprocessadores [51], monitoramento ambiental [8] ou mesmo análise de estruturas secundárias de RNA [41].

Um crescente número de pesquisadores vem dando atenção ao problema de encontrar códigos identificadores, mas são poucas as famílias de grafos para as quais existem caracterizações ou fórmulas explícitas para o tamanho de um código identificador mínimo. Além disso, o problema de encontrar códigos identificadores de cardinalidade

mínima foi provado ser NP-Completo [16]. O problema também permanece NP-Completo mesmo para certas subclasses de grafos, como a família dos grafos planares [3]. Por isso, é natural que muitos pesquisadores, ao invés de estudar códigos d -identificadores para classes gerais de grafos, tenham restringido o estudo desta propriedade para valores restritos de d e em classes restritas de grafos.

Mesmo quando se restringe o problema a classes simples, o problema mostra-se de difícil caracterização. Para ciclos, por exemplo, o problema foi estudado por diferentes pesquisadores que consideraram ciclos de ordem par [9] ou ímpar [37]. Resultados para d -códigos identificadores em caminhos só foram determinados em 2004, mais de 6 anos depois do surgimento do problema [9]. Dentre os tipos de grafos que têm tido mais atenção dos pesquisadores, estão aqueles originados através de produtos de grafos, tais como o produto direto de duas cliques [62], produto lexicográfico de dois grafos [23], produto corona [24], produto Cartesiano de cliques de mesmo tamanho [38], de cliques de tamanhos distintos [32], de grafos completos com caminho [45], e prisma complementar de ciclos [13].

Neste trabalho, temos como objetivo expor resultados existentes para códigos identificadores em grafos e contribuir com a área através de novos limites e resultados, de forma a caracterizar o número do código de identificação em classes de grafos ainda não investigadas. Para isto, reunimos neste documento diversos resultados existentes sobre códigos identificadores, principalmente aqueles voltados a produtos de grafos.

Neste documento, também reunimos os resultados obtidos durante esta pesquisa, incluindo exemplos de grafos que atingem alguns limites existentes, caracterização de novos limites, e delimitação da cardinalidade mínima de um código identificador em tipos especiais de grafos. Para os grafos caterpillars, um tipo especial de árvore, mostramos uma melhoria do resultado de Bertrand et al. [9] e de Blidia et al. [12], determinando o tamanho mínimo de um código identificador para alguns tipos de caterpillars, e exibindo um limite superior justo para caterpillars gerais.

Também estudamos códigos identificadores em produtos de grafos. Mais especificamente, estudamos os produtos coronas, produtos Cartesianos e prismas complementares. Para coronas, determinamos a cardinalidade mínima de um código identificador em grafos $K_n \circ \bar{K}_m$. Para produtos Cartesianos, determinamos um limite superior para grafos $K_{1,n} \square P_m$. Para prismas complementares, demonstramos que, dado um grafo conexo, seu prisma complementar é identificável. Determinamos o tamanho do menor código identificador possível em um grafo prisma complementar e mostramos, também, um limite superior para o tamanho de um código identificador mínimo em prismas complementares de grafos conexos identificáveis, exibindo um conjunto que atinge o limite proposto. Além disso, determinamos a cardinalidade mínima de um conjunto identificador no prisma complementar de um grafo bipartido completo, confirmando que o limite proposto é um limite

justo, e a cardinalidade mínima de um código identificador do prisma complementar de um grafo split completo.

O restante deste texto está dividido em mais sete capítulos. No próximo capítulo, Capítulo 2, apresentamos algumas definições básicas de teoria dos grafos e algumas notações que serão utilizadas no decorrer deste trabalho. Outras definições não clássicas são apresentadas quando necessárias. No Capítulo 3, apresentamos o problema de códigos identificadores, abordando sua origem, aplicações, e apresentando diversos resultados teóricos existentes. No Capítulo 4, tratamos de códigos identificadores em árvores, mostrando limites e resultados teóricos para esta classe. Ainda neste capítulo, mostramos nossos resultados obtidos sobre as árvores caterpillars.

Nos Capítulos 5, 6 e 7, continuamos o estudo de códigos identificadores, agora em produtos de grafos, também apresentando os resultados obtidos durante este estudo para códigos identificadores nestas classes. No Capítulo 5, consideramos produto corona. No Capítulo 6, consideramos produtos Cartesianos, e no Capítulo 7, tratamos de prismas complementares. Finalmente, as considerações finais são abordadas no Capítulo 8, onde também destacamos os principais resultados obtidos nesta dissertação e sugerimos alguns trabalhos futuros.

Definições Básicas

Neste capítulo, apresentamos uma introdução concisa à teoria dos grafos, apresentando definições e notações básicas que serão necessárias para a leitura desta dissertação. Os conceitos aqui apresentados seguem a terminologia adotada por Diestel [21] e por West [69]. Outras definições serão introduzidas em capítulos subsequentes, quando for mais apropriado.

Um **grafo** G é um par ordenado (V, E) , onde V é um conjunto não vazio e $E \subseteq [V^2]$ é um subconjunto de pares não ordenados de elementos de V . Elementos de V são chamados de **vértices** e elementos de E são chamados de **arestas**.

Uma aresta que começa e termina em um mesmo vértice é chamada de **laço**. Grafos que possuem laços são ditos **multigrafos**. Em um multigrafo, pode existir mais de uma aresta entre um mesmo par de vértice, as quais denominamos **multiarestas**. Um grafo que não possui laços, nem multiarestas, é chamado de **grafo simples**. Um grafo é **finito** se os seus conjuntos de vértices e de arestas são finitos. Um grafo **nulo** ou **vazio** é um grafo cujos conjuntos de vértices e arestas são vazios. Neste trabalho, todos os grafos são simples, não nulos e finitos, salvo indicação contrária.

Usualmente, desenhamos um grafo da seguinte forma: cada vértice é representado por um ponto, e existe uma linha ligando dois desses vértices (pontos) se os dois vértices representados formam uma aresta. A forma como os pontos e linhas são desenhados e arranjados, no entanto, é irrelevante. Um grafo é dito **planar** se ele pode ser representado em um plano sem que haja cruzamento de suas arestas além das extremida-

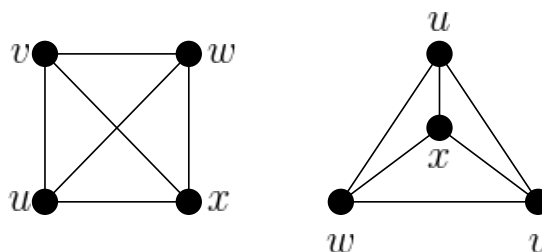


Figura 2.1: Duas formas de se desenhar um mesmo grafo.

des.

A Figura 2.1 ilustra duas formas de se desenhar um mesmo grafo. O conjunto de vértices desse grafo é $V = \{u, v, w, x\}$. Em geral, denotamos uma aresta através da especificação de seus dois vértices. Assim, uma aresta que liga os vértices u e v é denotada por uv (ou por vu). No grafo da Figura 2.1, seu conjunto de arestas pode ser denotado por $E = \{uv, uw, ux, vx, vw, xw\}$. Como se pode observar, ambos os desenhos da Figura 2.1 representam as mesmas ligações, apesar de estarem desenhados de forma distinta. No desenho da esquerda, as arestas vx e uw se cruzam. No entanto, existe uma forma de desenhar este grafo sem o cruzamento de arestas, como mostrado no desenho à direita. Portanto, esse grafo é planar. Além disso, como não há laços ou arestas repetidas, esse grafo também é simples.

O conjunto de vértices de um grafo G é referido como $V(G)$ ou simplesmente V , e seu conjunto de arestas como $E(G)$ ou simplesmente E . Às vezes, escrevemos $v \in G$ ao invés de $v \in V(G)$ para dizer que um vértice v pertence a um grafo G .

Seja $e = uv$ uma aresta que liga os vértices u e v . Dizemos que os vértices u e v são **incidentes** sobre a aresta e e chamamos os vértices u e v de **extremos** ou **vértices pendentes** de e . Quando u e v são vértices pendentes de uma aresta, dizemos que eles são **adjacentes** ou **vizinhos**.

Se todos os vértices de um grafo G são dois a dois adjacentes, esse grafo é dito ser **completo**. Dado um grafo G e um vértice $u \in G$, dizemos que a **vizinhança** ou **vizinhança aberta** $N_G(u)$ de um vértice u é o conjunto formado pela união de todos os seus vizinhos. A **vizinhança fechada**, por sua vez, é dada pela união dos conjuntos $\{u\}$ e $N_G(u)$, e é denotada por $N_G[u]$. Dois vértices u e $v \in G$ são considerados **gêmeos** se $N_G[u] = N_G[v]$ e são ditos **gêmeos falsos** se $N_G(u) = N_G(v)$. Para um subconjunto $K \subseteq V(G)$, denotamos $N_G[K]$ como a união das vizinhanças fechadas dos vértices de K . Quando claro no contexto, escrevemos simplesmente $N[u]$ ou $N[K]$ ao invés de $N_G[u]$ ou $N_G[K]$.

Se G é um grafo com n vértices, dizemos que a **ordem** de G , denotada por $n(G)$, ou $|V(G)|$, ou simplesmente $|V|$, é n . Se $n(G) = 1$, então o grafo é dito ser **trivial**.

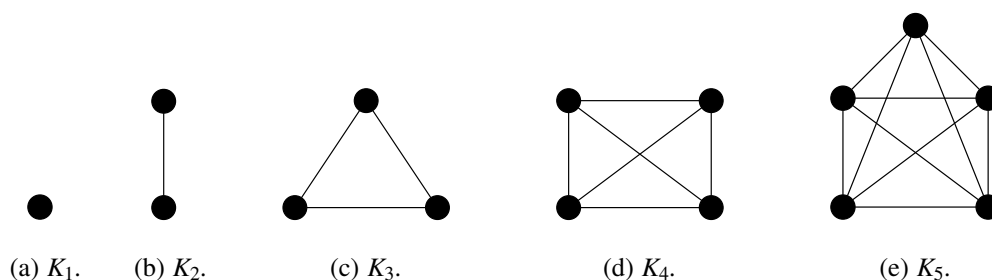


Figura 2.2: Grafos completos de ordem $n \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$

Um grafo completo de ordem n é denotado por K_n . A Figura 2.2 exemplifica os grafos completos K_n , com $n \in \{1, \dots, 5\}$. Visto que $n(K_1) = 1$, então o grafo K_1 é um grafo trivial.

O número de arestas incidentes a um vértice v em um grafo G ou, de forma equivalente, $|N(v)|$, é dito ser o **grau** de v e é denotado por $d(v)$. Um vértice que possui grau zero é chamado de vértice **isolado**. Um vértice de grau 1, ou seja, um vértice que possui apenas um vizinho, é denominado **folha** ou **vértice pendente**. Chamamos de **vértice de suporte** o único vizinho de um vértice folha. O **grau máximo** dentre todos os vértices de um grafo é representado por $\Delta(G)$ e o **grau mínimo** por $\delta(G)$. Se $\Delta(G) = \delta(G) = k$, então G é dito ser **k -regular**. Um grafo 3-regular é também chamado de **grafo cúbico**.

Na Figura 2.3(a), mostramos um grafo com grau mínimo $\delta = 1$, grau máximo $\Delta = 4$ e ordem $n = 6$. Já na Figura 2.3(b), exibimos um grafo 3-regular de ordem $n = 10$. Este grafo, em especial, é denominado **grafo de Peterson**.

Um **cubo k -dimensional** ou **hipercubo** Q_k é o grafo regular cujos vértices são uma k -tupla com entradas $\{0, 1\}$ e cujas arestas são os pares de k -tuplas que diferem em exatamente uma posição. Um hipercubo Q_3 é mostrado na Figura 2.4.

Um **caminho** entre dois vértices a e b em um grafo G é uma sequência de vértices $P = v_1, v_2, \dots, v_n$, onde $a = v_1$, $b = v_n$, e $v_i v_{i+1} \in E(G)$ para todo $i = 1, \dots, n - 1$. Dizemos que um caminho é um **caminho simples** se todos os seus vértices são distintos. Um grafo com n vértices que é um caminho é chamado de **grafo caminho**, denotado por P_n e possui $n - 1$ arestas. Em um grafo P_n , os vértices v_1 e v_n são chamados de **pontas** ou **extremos** de P , e os demais vértices são chamados de **vértices internos** do caminho.

Por vezes, poderá existir mais de um caminho ligando dois vértices. Por isso,

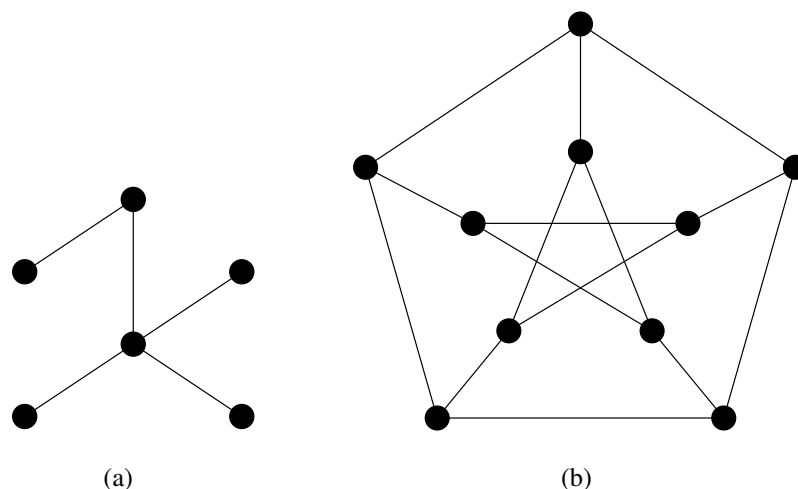


Figura 2.3: Um grafo G e um grafo 3-regular são apresentados em 2.3(a) e 2.3(b), respectivamente.

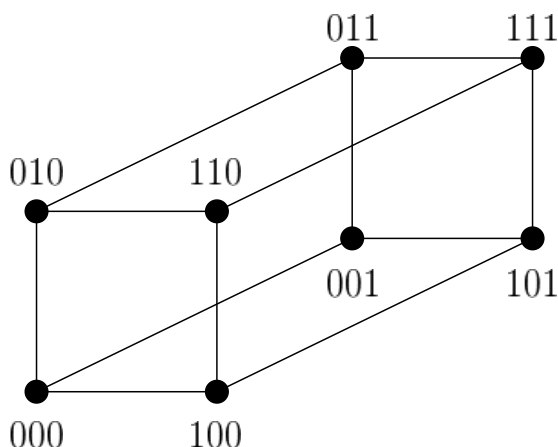


Figura 2.4: Um hipercubo Q_3 .

chamamos de **distância** $d_G(u, v)$ o comprimento do menor caminho entre os vértices u e v em um grafo G . Se tal caminho não existe, dizemos que $d_G(u, v) = \infty$. Quando claro, escrevemos simplesmente $d(u, v)$ ou invés de $d_G(u, v)$. Chamamos de **diâmetro** e denotamos por $diam(G)$ o $\max_{u, v \in V(G)} d_G(u, v)$, isto é, a maior distância existente entre dois vértices quaisquer de um grafo G . Um grafo é **conexo** se existe um caminho entre cada par de vértices e **desconexo** caso contrário.

Um **ciclo** simples, geralmente chamado apenas de ciclo, é um caminho simples que começa e termina no mesmo vértice, possui comprimento maior do que 2, e todos os vértices internos são distintos. Um grafo que é um ciclo é chamado de **grafo ciclo** e é denotado por C_n , em que n representa seu número de vértices. A Figura 2.5 ilustra alguns grafos ciclos. O ciclo C_3 , em especial, é denominado **triângulo**.

Chamamos de **cintura** e denotamos por $g(G)$ a cardinalidade do menor ciclo de um grafo G . Um grafo G que não possui ciclo é dito **acíclico** e $g(G) = \infty$. Uma **árvore** é um grafo conexo e acíclico. Uma **floresta** é um grafo desconexo no qual todo componente é uma árvore.

Dado um grafo G , um grafo $H = (V(H), E(H))$ é um **subgrafo** de G se $V(H) \subseteq V(G)$ e $E(H) \subseteq E(G)$. Se H é um subgrafo de G , dizemos que G contém H e escrevemos $H \subseteq G$. Além disso, se H é diferente de G , então dizemos que H é um **subgrafo próprio**, e se H contém todos os vértices de G , então H é um **subgrafo gerador**.

Um subgrafo **induzido** por A é um subgrafo de G com conjunto de vértices A que contém todas as arestas de G que possuem extremidades em A . Um subconjunto K de $V(G)$ é uma **clique** se os vértices de K induzem um subgrafo completo em G . Um **subcaminho** é um subgrafo que é um caminho. Um **caterpillar** é uma árvore cuja remoção de todas as suas folhas induz um caminho.

Se um grafo G não possui um subgrafo isomorfo a H , dizemos que G é **livre** de H . Os **componentes** de um grafo G são seus subgrafos conexos maximais. Uma **aresta de**

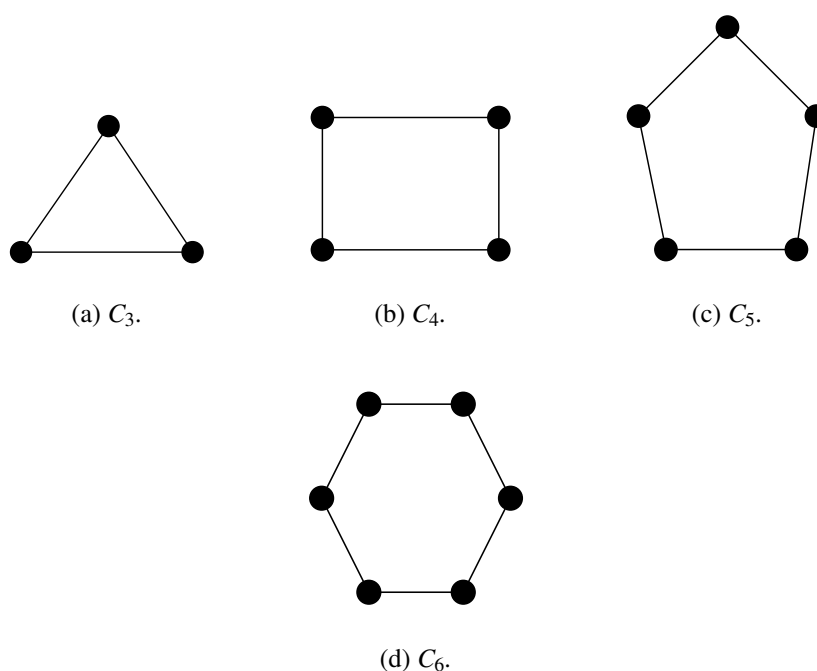


Figura 2.5: Ciclos de ordem $n \in \{3, 4, 5, 6\}$.

corte (ou um **vértice de corte**) é uma aresta (ou vértice) cuja remoção aumenta o número de componentes de um grafo. Uma aresta de corte também é chamada de **ponte**.

Para exemplificar os últimos conceitos descritos, considere o grafo G da Figura 2.6. Há um caminho entre os vértices g e j , por exemplo, o caminho g, h, i, j . Este, no entanto, não é o único caminho possível entre os dois vértices. O caminho g, f, i, j e o caminho g, h, f, i, j também ligam o vértice g ao vértice j . A distância entre esses dois vértices $d_G(g, j)$ é 3. Por haver vértices em G que não estão ligados por um caminho (os vértices e e f , por exemplo), G é desconexo. O grafo G possui um ciclo C_5 como subgrafo (o ciclo a, b, c, d, e, a por exemplo), e sua cintura $g(G) = 3$, (devido ao ciclo f, g, h, f). Há dois componentes no grafo G , e o vértice i é um vértice de corte pois sua remoção aumenta o número de componentes do grafo. A aresta ij , por sua vez, é uma aresta de corte.

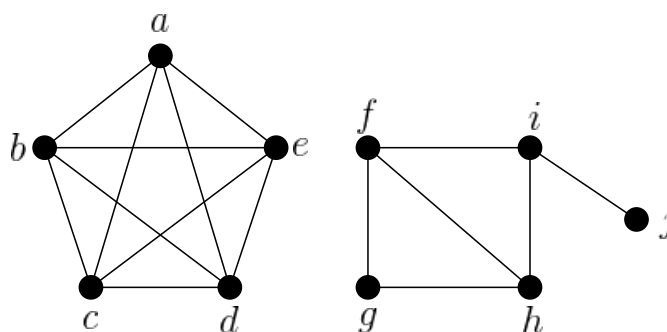


Figura 2.6: Um grafo desconexo G com 10 vértices.

Sejam $G = (V, E)$ e D um subconjunto de vértices de G . Dizemos que D é um **conjunto dominante** se para cada $v \in V$ a condição $|N_G[v] \cap D| \geq 1$ for satisfeita. Um **conjunto dominante mínimo** é aquele que possui cardinalidade mínima dentre todos os conjuntos dominantes possíveis em G . Um vértice u de D **domina** um vértice v se $u = v$ ou se u é adjacente a v , e o vértice v é dito **dominado** por u . Um conjunto dominante D é dito **conjunto dominante minimal** se não existir um conjunto dominante D' de G tal que $D' \subset D$. Denotamos por $\gamma(G)$ o tamanho do conjunto dominante mínimo de um grafo G , chamado de **número de dominação**.

Observe o grafo G ilustrado na Figura 2.7. O conjunto $\{b, h, i, d\}$ é um conjunto dominante, mas há outro conjunto de cardinalidade menor, $\{b, c, d\}$, que também domina todos os vértices do grafo. Como este é o menor conjunto dominante existente em G , então $\gamma(G) = |\{b, c, d\}| = 3$.

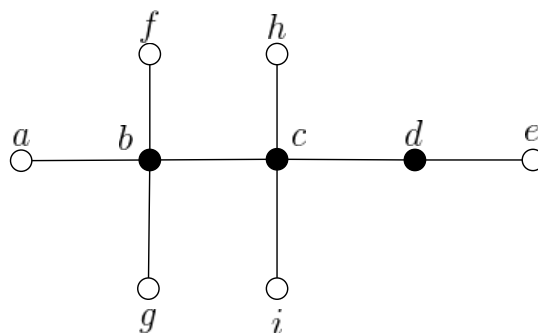
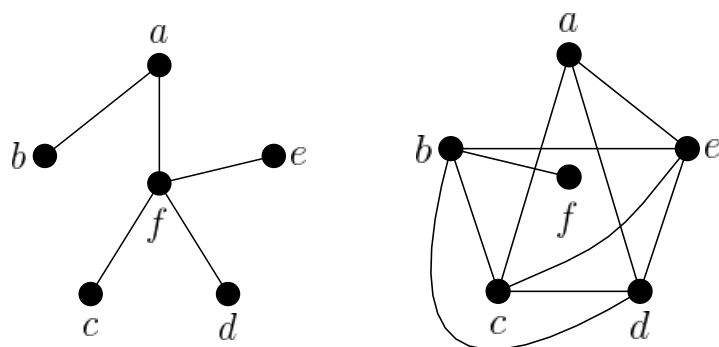


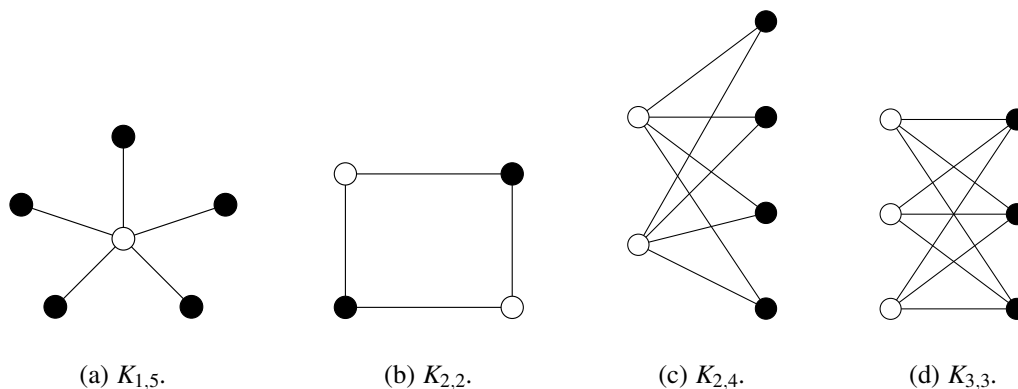
Figura 2.7: Um grafo simples, com número de dominação $\gamma = 3$.

Um **conjunto independente** ou **conjunto estável** em um grafo G é um conjunto de vértices não adjacentes dois a dois. Um conjunto independente é **maximal** se não é subconjunto próprio de outro conjunto independente, e é **máximo** se tem cardinalidade máxima. A cardinalidade de um conjunto independente máximo em um grafo G é o **número de independência** de G e é denotada por $\alpha(G)$.

O **complemento** \overline{G} de um grafo simples G é um grafo com conjunto de vértices $V(G)$ e $uv \in E(\overline{G})$ se, e somente se, $uv \notin E(G)$, para $u, v \in V(G)$, e $u \neq v$. A Figura 2.8 ilustra um grafo G e seu complemento. Todos os pares de vértices que não são adjacentes em G , são adjacentes em \overline{G} , e vice-versa. Enquanto no grafo \overline{G} (Figura 2.8(b)) os vértices $\{b, c, d, e\}$ são todos adjacentes entre si, formando uma clique de tamanho 4, no grafo G (Figura 2.8(a)), esses vértices constituem um conjunto independente máximo. O grafo G , portanto, tem número de independência $\alpha(G) = 4$.

(a) Grafo G ,(b) Grafo \bar{G} .**Figura 2.8:** Um grafo G e seu complemento \bar{G} .

Um grafo G é **bipartido** se $V(G)$ pode ser particionado em dois conjuntos disjuntos, A e B , chamados **partição** de G , tal que não existem arestas com vértices pendentos na mesma partição. Um grafo G é **bipartido completo** se cada vértice do conjunto A é conectado a cada um dos vértices do conjunto B . Um grafo bipartido completo com m vértices na partição A , e n vértices na partição B , é denotado por $K_{m,n}$. O grafo bipartido completo $K_{1,n}$ é chamado de **estrela** e possui $n + 1$ vértices. A Figura 2.9 mostra alguns exemplos de grafos bipartidos completos. Em cada grafo, os vértices preenchidos representam uma partição, e os demais representam outra partição.

(a) $K_{1,5}$.(b) $K_{2,2}$.(c) $K_{2,4}$.(d) $K_{3,3}$.**Figura 2.9:** Alguns grafos bipartidos completos.

Um **isomorfismo** de um grafo G para um grafo H é uma bijeção $f : V(G) \rightarrow V(H)$, em que $uv \in E(G)$ se, e somente se, $f(u)f(v) \in E(H)$. Dizemos que G é **isomorfo** a H e escrevemos $G \cong H$ se há um isomorfismo de G para H .

Considere os grafos G e H desenhados na Figura 2.10, ambos caminhos de 4 vértices, e considere a função $f : V(G) \rightarrow V(H)$ definida por $f(w) = a, f(x) = b, f(y) = c, f(z) = d$. A função f é um isomorfismo, pois f é uma bijeção e preserva todas as arestas

e não-arestas do grafo G . Um outro isomorfismo possível mapeia w, x, y e z para d, c, b e a , respectivamente.

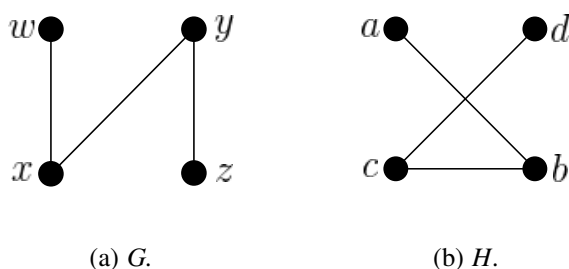


Figura 2.10: Os grafos G e H são isomorfos.

Em um grafo G , um **emparelhamento** $M \subseteq E$ é um subconjunto de arestas que não compartilham vértices penderes. Se o vértice v é vértice pendente de alguma aresta $e \in M$, diz-se que v é um vértice **saturado** por M . Um **emparelhamento perfeito** em um grafo é um emparelhamento que satura todos os vértices.

Dizemos que a é **congruente** a b módulo m se $(a - b)$ é divisível por m , e escrevemos $a \equiv b \pmod{m}$. Se $a \equiv b \pmod{m}$, então existe um inteiro k tal que $a = b + km$. Dois vértices u e v são **separados** por um conjunto $C \subseteq V(G)$ se $N[u] \cap C \neq N[v] \cap C$. O conjunto C é chamado **conjunto separador**. Dados dois conjuntos A e B , denotamos por $A \triangle B$ sua **diferença simétrica**, isto é, o conjunto de elementos que pertencem a A ou a B , mas não a ambos.

Neste trabalho, optamos por manter o nome de alguns grafos e características em inglês por se tratar da forma como são comumente conhecidos no Brasil, ou por serem pouco presentes, ou até mesmo ausentes, na literatura brasileira. Por isso, utilizamos o termo *caterpillar* quando nos referimos ao grafo *lagarta*, o termo *broom* para o grafo *vassoura*, e *codeword* para *palavra de código*. Os termos mencionados que ainda não foram definidos serão introduzido em capítulos seguintes, quando for mais apropriado.

Códigos Identificadores

O conceito de códigos identificadores em grafos foi introduzido por Karpovsky, Chakrabarty e Levitin em 1998 [51] e, desde então, vem ganhando a atenção de diversos pesquisadores. Neste capítulo, apresentamos mais formalmente o conceito de códigos identificadores em grafos e discorreremos sobre algumas de suas aplicações práticas que motivam o seu estudo. Ainda, visto que é desejável determinar a cardinalidade mínima de um código identificador, apresentamos alguns resultados básicos conhecidos em termos de ordem e grau que limitam o tamanho de um código identificador. Apresentamos, também, resultados conhecidos sobre códigos identificadores para algumas classes simples de grafos.

Um grafo pode ser utilizado para representar praticamente qualquer situação de relacionamento entre entidades. Por isso, uma gama de aplicações em diversos campos da engenharia, computação e da ciência, de modo geral, podem ser modeladas e resolvidas através do uso de grafos. Assim sendo, grafos são frequentemente utilizados na solução de um grande número de problemas práticos. Veja, por exemplo, [1, 39] para algumas aplicações.

Introduzimos o conceito de códigos identificadores através de um problema prático, conforme introduzido por Karpovsky, Chakrabarty e Levitin [51]. Considere um sistema multiprocessado. Representamos esse sistema através de um grafo não direcionado $G = (V, E)$ da seguinte forma: os processadores formam o conjunto de vértices V e uma aresta $e \in E$ representa a ligação entre dois processadores do sistema. A fim de prezar pela manutenção do sistema, atribui-se a alguns processadores a tarefa de monitorar a si mesmos e a todos os seus vizinhos (ou seja, os vértices com uma distância no máximo d) em busca de falhas. Imagine que um dos processadores apresente mau funcionamento. Sempre que um processador que possui a atribuição de monitoramento detecta uma falha, ele envia um sinal de alarme para a central dizendo que um elemento em seu raio de teste (sua vizinhança) apresenta mau funcionamento. O objetivo é que a central possa identificar, utilizando-se exclusivamente da informação de quais processadores enviaram o sinal de alarme, exatamente qual processador apresenta falha. Neste caso, deseja-se que um número mínimo possível de processadores com a característica de monitoramento seja

utilizado.

Ao conjunto de vértices (processadores) que possuem a característica de monitoramento e são capazes de identificar de forma única todos os vértices de um grafo (todos os processadores do sistema), damos o nome de **código identificador**. Formalmente, um código identificador pode ser definido como a seguir.

Sejam G um grafo, u um vértice de G , d um inteiro positivo e seja $N_G^{\leq d}[u]$ o conjunto de vértices de G a uma distância no máximo d de u . Perceba que a vizinhança fechada $N_G[u]$ de u em G coincide com $N_G^{\leq 1}[u]$. Um conjunto C de vértices de um grafo G é dito ser **código d -identificador** se, para todos os vértices u de G , os conjuntos $N_G^{\leq d}[u] \cap C$ são todos não vazios e distintos. Os elementos de C são chamados de *codewords*. Sempre que a distância entre dois vértices $d(u, v) \leq d$, dizemos que u e v **d -cobrem** um ao outro, ou simplesmente **cobrem** quando não há ambiguidade. Um código 1-identificador é dito, simplesmente, **código identificador**. O tamanho mínimo de um código identificador de G é denotado por $\gamma^{ID}(G)$.

Antes de prosseguirmos, daremos mais um exemplo prático em que o problema dos códigos identificadores pode ser aplicado, agora utilizando sua definição formal. O exemplo a seguir foi elaborado com base no exemplo apresentado no artigo de Honkala, Hudry e Lobstein [46].

Um incêndio, como muitos sabem, pode acontecer por diversas razões. Falta de conhecimento, negligência, e imprudência são apenas algumas. Uma das ações tomadas por muitos para evitar danos maiores causados pelo fogo é a instalação de equipamentos de incêndio, tais como o aspersor de água. Um aspersor é um equipamento contra incêndio, geralmente instalado no teto de um cômodo, que funciona como uma espécie de chuveiro automático e que, ao acionado, emite jatos de água em todas as direções do cômodo instalado a fim de inibir ou acabar com qualquer foco de incêndio que ali exista. Na maioria dos ambientes hoje, no entanto, jatos de água jogados em um cômodo podem ser responsáveis por uma grande perda de itens, principalmente eletrônicos, por não serem sensíveis à água. Logo, há o desejo de que equipamentos como o aspersor seja acionado somente no cômodo onde há presença de foco de incêndio, deixando os outros cômodos intactos (ou secos).

Suponha um ambiente qualquer (uma residência, um prédio, um ambiente comercial, etc) com cômodos dispostos conforme mostrado na Figura 3.1 e nomeados de a a f . Suponha que o ambiente seja equipado com aspersores de água no teto de cada um de seus cômodos. Um aspersor é acionado por uma central que o envia uma espécie de alarme. A fim de proteger o ambiente de um incêndio e, ao mesmo tempo, acionar o menor número de aspersores possível, deseja-se que o cômodo exato onde há presença de fumaça possa ser identificado.

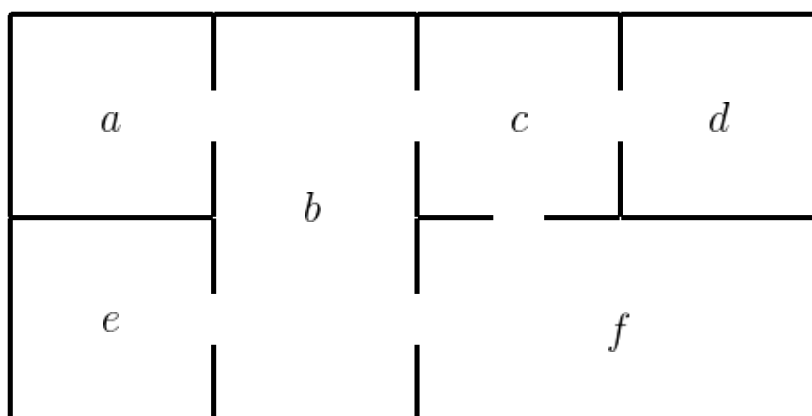


Figura 3.1: Vista superior de um ambiente qualquer.

Uma solução possível seria a instalação de sensores em cada um dos cômodos do ambiente. Assim, quando um sensor indicasse a presença de fumaça, ele enviaria um sinal para a central, que acionaria o aspersor daquele cômodo. No entanto, para poupar gastos, deseja-se que um número mínimo possível de sensores de fumaça sejam utilizados.

Sabe-se que cada sensor possui a capacidade de detectar fumaça no cômodo onde está presente e nos cômodos vizinhos, desde que haja uma passagem entre eles (uma porta, por exemplo). Cada cômodo desse ambiente pode ser representado por um vértice de um grafo. Existe uma aresta ligando dois cômodos (vértices) se existe uma passagem entre eles. A Figura 3.2 mostra a modelagem do ambiente da Figura 3.1 em forma de um grafo.

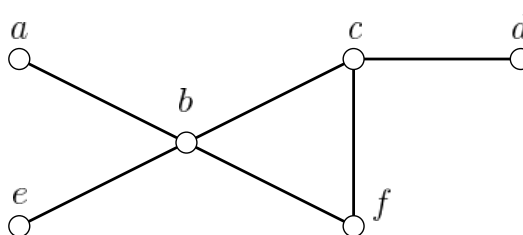


Figura 3.2: Um grafo G que representa o ambiente da Figura 3.1.

Os vértices b e c formam um conjunto dominante mínimo no grafo G . Uma solução ingênua consiste em instalar os sensores nos cômodos b e c , uma vez que os dois cômodos são suficientes para se ter acesso aos movimentos de todos os cômodos do prédio. Em outras palavras, escolhe-se o conjunto de vértices $C = \{b, c\}$. No entanto, o conjunto escolhido não é um código identificador, pois apenas os dois sensores não são suficientes para identificar unicamente qual cômodo acionou o alarme do sensor. Suponha que o sensor instalado no cômodo b , por exemplo, gere um sinal de alarme. Sabemos que o cômodo f não gerou o alarme pois o sensor c não foi disparado. Pelo mesmo motivo, sabemos que os cômodos b , c e d podem ser descartados da análise. Entretanto, não

podemos afirmar com certeza se o cômodo causador do disparo do sensor foi o cômodo a ou o cômodo e . Isso acontece porque $N[a] \cap C = N[e] \cap C = \{b\}$.

Designar quais cômodos devem receber um sensor de movimento de forma a identificar qual o exato cômodo responsável por disparar o alarme consiste em encontrar um código identificador em seu grafo correspondente. Para isso, deve-se encontrar um conjunto de vértices $C \subseteq V(G)$ tal que, para quaisquer dois vértices u, v de G , tenhamos $N[u] \cap C \neq N[v] \cap C$. Em outras palavras, C deve ser, além de dominante, um conjunto separador. No exemplo dado, se considerarmos o conjunto $C = \{a, b, c, d\}$, veremos que C é um conjunto dominante e, visto que

$$\begin{aligned} N[a] \cap C &= \{a, b\}, \\ N[b] \cap C &= \{a, b, c\}, \\ N[c] \cap C &= \{b, c, d\}, \\ N[d] \cap C &= \{c, d\}, \\ N[e] \cap C &= \{b\}, \\ N[f] \cap C &= \{b, c\}, \end{aligned}$$

segue que, dados dois vértices distintos de G , a intersecção de sua vizinhança fechada com o conjunto C são todas distintas, caracterizando um conjunto separador. A Figura 3.3 exibe, através dos vértices preenchidos em preto, um código identificador para o grafo que modela o problema de prevenção de incêndio apresentado.

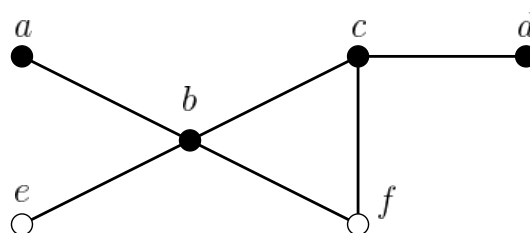


Figura 3.3: Um código identificador mínimo no grafo que modela o ambiente da Figura 3.1. Vértices em preto são *codewords*.

Do exemplo dado, segue outra definição de código identificador. Um conjunto C é um código identificador se C é, ao mesmo tempo, um conjunto dominante e um conjunto separador de G .

Desde que códigos identificadores foi introduzido em 1988 por Karpovsky, Chakrabarty e Levitin [51], o problema de encontrar códigos identificadores vem sendo aplicado em diversos outros problemas práticos, tais como análise de falhas em

multiprocessadores[51], detecção de localização em ambientes hostis [65, 64, 68], monitoramento ambiental [8], monitoramento conjunto e roteamento em redes de sensores sem fio [56] e análises de estruturas secundárias de RNA [41]. Códigos identificadores têm sido bastante estudados na literatura, e uma lista detalhada e atualizada de referências no assunto pode ser encontrada no *website* de Antoine Lobstein [57].

Chamamos de ID CODE o problema de decisão associado a códigos identificadores, definido conforme abaixo:

ID CODE

INSTÂNCIA: Um grafo G e um inteiro k .

PERGUNTA: Existe um código identificador em G de tamanho no máximo k ?

O problema ID CODE foi provado por Charon, Hudry e Lobstein ser NP-Completo¹. O problema ID CODE se mantém NP-Completo mesmo para diversas classes restritas, tais como grafos bipartidos [16], grafos planares com grau máximo 4 e cintura grande [2], grafos planares com grau máximo 4 e cintura pelo menos 9 [3], grafos linha [27], grafos split [26, 29] e grafos de intervalo [26, 29]. Por outro lado, existem classes restritas de grafos para o qual o problema ID CODE foi provado ser solucionável em tempo linear, como foi mostrado por Auger em [2], através de um algoritmo de tempo linear para resolver o ID CODE em árvores.

Assim, apesar da atenção dispensada ao assunto por um grande número de pesquisadores, são poucas as classes de grafos que foram totalmente caracterizadas até o momento. Por esse motivo, ainda existem diversas famílias de grafos para o qual o problema de encontrar códigos d -identificadores de cardinalidade mínima persiste. Uma estratégia frequentemente utilizada é a de estudar códigos d -identificadores para valores restritos de d em classes restritas de grafos, tais como árvores [10], ciclos [37], hipercubos [55, 48], produtos Cartesianos de grafos simples [38, 32, 45], produtos lexicográficos [24] e diversas outras famílias de grafos.

Um fato importante sobre códigos identificadores é que nem todos os grafos admitem um. Sempre que existem dois vértices distintos u e v tal que $N[u] = N[v]$, ou seja, quando u e v são gêmeos, então u e v não podem ser separados. Assim, podemos dizer que um grafo é **identificável** se, e somente se, ele não possui vértices gêmeos.

Um grafo completo K_n , por exemplo, não é identificável, pois para quaisquer dois vértices $u, v \in V$, temos que $N^d[u] = N^d[v]$ e, portanto, para qualquer código $C \subseteq V$, $N^d[u] \cap C = N^d[v] \cap C$, para todo $d \leq n$. Por outro lado, se G é um grafo identificável, então o conjunto $C = V(G)$ é um código identificador, pois para quaisquer dois vértices

¹Para definição de complexidades computacionais, nos referimos ao livro de Garey e Johnson [31].

distintos $u, v \in V$, $N^d[u] \neq N^d[v]$ é verdadeiro. Logo, um limite superior trivial para um código identificador em um grafo identificável G pode ser descrito como no Teorema 3.1.

Teorema 3.1 [51] *Seja G um grafo identificável com n vértices. Então, $\gamma^{ID}(G) \leq n$.*

Grafos sem arestas são exemplos de grafos que atingem o limite superior do Teorema 3.1. Quando um grafo finito e identificável G possui pelo menos uma aresta, o limite anterior pode ser melhorado conforme o Teorema 3.2.

Teorema 3.2 [36] *Seja G um grafo simples e identificável com n vértices, tal que G possua pelo menos uma aresta. Então, $\gamma^{ID}(G) \leq n - 1$.*

Prova. Visto que G possui pelo menos uma aresta, então sabe-se que $V(G)$ não é um conjunto independente. Assim, podemos considerar apenas um componente conexo de G de cardinalidade pelo menos dois. Então, vamos assumir que G é um grafo conexo com mais de dois vértices.

Dado um vértice $x \in V(G)$, sabendo que $V = V(G)$ é um código identificador de G , verificar se $C = V \setminus \{x\}$ é um código identificador de G é equivalente a verificar se todos os vértices na vizinhança fechada de x , $N[x]$, estão separados de todos os vértices de $V \setminus N[x]$. De fato, todos os vértices de G são cobertos por algum *codeword* de C , uma vez que G é conexo. Como V é um código identificador de G , todos os vértices de $N[x]$ são separados uns dos outros, ou seja,

$$\forall u, v \in N[x], N[u] \neq N[v] \Rightarrow N[u] \setminus \{x\} \neq N[v] \setminus \{x\}.$$

Similarmente, todos os vértices de $V \setminus N[x]$ são separados uns dos outros.

Logo, a única possibilidade restante é a existência de vértices $u \in N[x]$ e $v \notin N[x]$ que não são separados por C . Nesse caso, temos que $N[u] = N[v] \cup \{x\}$. Assim, para qualquer vértice w distinto de u, v e x , temos que: $uw \in E \iff vw \in E$. Em outras palavras, u separa w_1 de w_2 se, e somente se, v separa w_1 de w_2 , para todo $w_1, w_2 \neq u, v, w$.

Agora, considere o vértice a como sendo um vértice de grau máximo em G . Se $V \setminus \{a\}$ é um código identificador de G , então não há mais o que se provar. Caso contrário, existem dois vértices b e b' tais que $N[b] = (N[b'] \cup \{a\})$. Nós afirmamos que $V \setminus \{b'\}$ é um código identificador de G e checamos se todos os vértices de $N[b']$ estão separados de $V \setminus N[b']$:

- b separa cada vértice de $(V \setminus N[b']) \setminus \{a\}$ de cada vértice de $V \setminus N[b']$, uma vez que $N[b] = N[b'] \cup \{a\}$;
- a e b' são separados por a ;
- a é separado de qualquer vértice $a' \in (N[b'] \setminus \{b'\})$: se existe $a' \in (N[b'] \setminus \{b'\})$ tal que $N[a'] = (N[a] \cup \{b'\})$, então a' tem grau maior do que a , uma contradição.

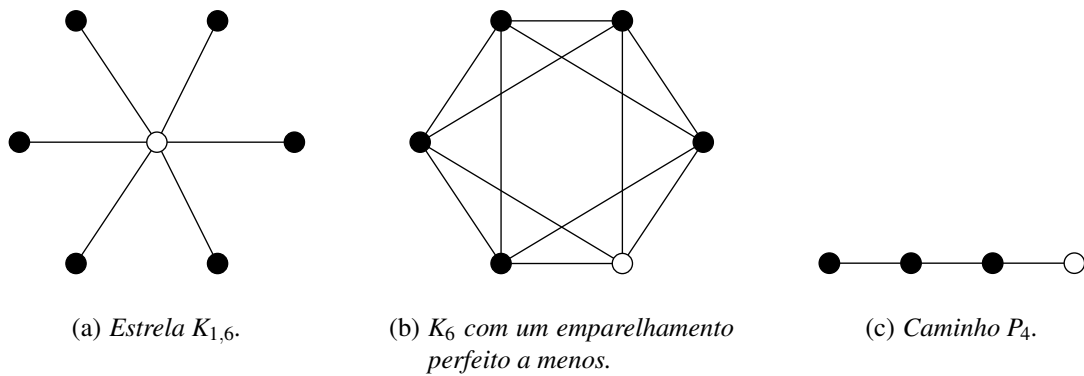


Figura 3.4: Alguns grafos que precisam de $n - 1$ vértices para serem identificados. Codewords são representados em preto.

Como existe um vértice $x \in V$ tal que $V \setminus \{x\}$ é um código identificador, então temos que $\gamma^D(G) \leq n - 1$. \square

Perceba que o Teorema 3.2 trata de grafos com grau limitado, ou seja, grafos finitos. Charon, Hudry e Lobstein [17] mostraram que existem grafos infinitos tais que o único código identificador é o seu próprio conjunto de vértices. Por outro lado, Foucad et al. [28] caracterizaram todos os grafos finitos atingindo o limite imposto pelo Teorema 3.2, bem como os grafos infinitos que necessitam de todo o conjunto de vértices para serem identificados.

Exemplos de grafos que atingem o limite superior do Teorema 3.2 são os grafos estrela $K_{1,n}$, com $n \geq 2$, o caminho P_4 e o grafo K_n com um emparelhamento perfeito a menos, ou seja, um grafo completo em que as arestas de um de seus emparelhamentos perfeitos foram removidas. Estes grafos são ilustrados na Figura 3.4.

Um outro limite ingênuo para códigos identificadores, dessa vez limitando inferiormente, foi introduzido por Karpovsky et al. [51] ainda quando introduziam o assunto de códigos identificadores. Esse limite pode ser visto no Teorema 3.3.

Teorema 3.3 [51] *Seja G um grafo identificável com n vértices. Então, $\gamma^D(G) \geq \lceil \log_2(n + 1) \rceil$.*

O limite apresentado no Teorema 3.3 segue do fato de que, quando se tem um código identificador C , atribuímos um subconjunto não vazio e distinto de C para cada um dos n vértices do grafo. Existem no máximo $2^{|C|} - 1$ desses subconjuntos (conjunto das partes menos o conjunto vazio, que não é um código identificador) e, portanto, $n \leq 2^{|C|} - 1$.

Moncel [60] determinou um algoritmo para construção de todos os grafos com n vértices que possuem código identificador de tamanho $\lceil \log_2(n + 1) \rceil$, conforme proposto

pelo Teorema 3.3. De modo geral, podemos dizer que, se G é um grafo identificável com n vértices, então

$$\lceil \log_2(n+1) \rceil \leq \gamma^D(G) \leq n.$$

Quando grafos possuem um grau máximo d especificado, o limite inferior pode ser melhorado conforme exibimos no Teorema 3.4.

Teorema 3.4 [51] *Seja G um grafo com n vértices e grau máximo d . Então, $\gamma^D(G) \geq 2n/(d+2)$.*

O Teorema 3.4 é justo e uma classificação de todos os grafos atingindo esse limite foi proposta por Foucaud em sua dissertação de mestrado [25]. Sua classificação inclui grafos regulares e grafos com cintura arbitrariamente grande que atingem esse limite.

Para ciclos, o problema de encontrar códigos identificadores de cardinalidade mínima foi estudado inicialmente por Moncel durante seu doutorado [58], mas o primeiro artigo científico mencionando os resultados são de autoria de Bertrand et al. [9], que estudaram o problema de códigos d -identificadores em ciclos. O resultado para ciclos é apresentado no Teorema 3.5.

Teorema 3.5 [9],[58] *Seja C_n um ciclo com n vértices. Então,*

$$\gamma^D(C_n) = \begin{cases} \text{inexistente} & \text{se } n = 3, \\ 3 & \text{se } 4 \leq n \leq 5, \\ n/2 & \text{se } n \text{ é par e } n \geq 6, \\ \frac{n+3}{2} & \text{se } n \text{ é ímpar e } n \geq 7. \end{cases}$$

Mesmo para uma classe simples como os ciclos, o problema de se encontrar códigos d -identificadores de cardinalidade mínima mostra-se de grande dificuldade de obtenção de resultados, tendo sido estudado por diferentes pesquisadores, dependendo da sua paridade. Bertrand et al. [9] definiram o tamanho mínimo de um código d -identificador para ciclos de tamanho par, enquanto ciclos de tamanho ímpar foram estudados por Gravier, Moncel e Semri [37] e por Xu, Thulasiramanb, e Hu [70].

Bertrand et al. [9] também determinaram o tamanho mínimo de um código identificador para caminhos, conforme descrito no Teorema 3.6. Frequentemente fazemos referência a esse resultado no decorrer deste trabalho.

Teorema 3.6 [9] *Seja P_n um caminho com n vértices. Então,*

$$\gamma^D(P_n) = \begin{cases} \text{inexistente} & \text{se } n = 2, \\ \lceil \frac{n+1}{2} \rceil & \text{se } n \geq 3. \end{cases}$$

Podemos facilmente encontrar um código identificador de tamanho mínimo em um caminho P_n . Na Observação 1, mostramos uma possível construção de códigos identificadores de cardinalidade mínima em grafos caminho.

Observação 1 *Seja $P_n = v_1, v_2, \dots, v_n$ um caminho com n vértices. Construa $C \subseteq V(P_n)$ através da adição de todos os vértices v_i , tal que i é ímpar, em C . Se n é ímpar, essa construção contém exatamente $\frac{n+1}{2}$ vértices. Se n é par, adicione também o vértice v_{n-2} . Essa construção resulta em $|C| = \lceil \frac{n+1}{2} \rceil$. Perceba que C é um conjunto dominante. Além disso, temos que $\forall v_i, v_j \in P_n, N[v_i] \cap C \neq N[v_j] \cap C$, o conjunto C é um código identificador.*

A Figura 3.5 exemplifica a construção descrita na Observação 1 para os casos em que $n = 5$ e $n = 6$.

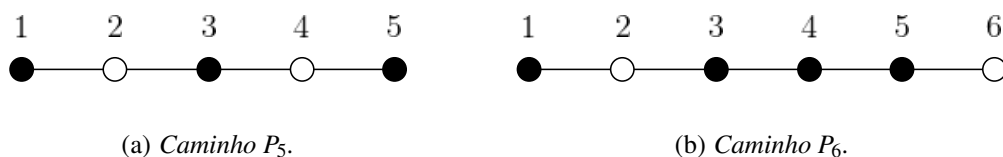


Figura 3.5: Exemplo de construção de códigos identificadores mínimos em grafos caminho.

Resultados sobre códigos d -identificadores em ciclos e caminhos foram todos determinados [9, 35, 18, 37, 49, 66, 70]. Outras classes de grafos, tais como árvores e, principalmente, aquelas relacionadas a produtos de grafos também foram objeto de estudo de diversos pesquisadores. Nos capítulos seguintes, reunimos resultados conhecidos e resultados obtidos durante este estudo acerca de tipos especiais de árvores e de produtos de grafos.

Antes de prosseguirmos, apresentamos uma proposição e alguns lemas gerais sobre códigos identificadores que serão frequentemente utilizados em nossos resultados. O primeiro deles, apresentado na Proposição 3.7, foi observado por Foucaud [26], e segue do fato de que, dados vértices u, v de um grafo G , tal que $d(u, v) \geq 3$, temos que $N[u] \triangle N[v] = N[u] \cup N[v]$.

Proposição 3.7 [26] *Seja G um grafo e seja $C \subseteq V(G)$. Se C é um conjunto dominante e $N[u] \cap C \neq N[v] \cap C$ é verdadeiro para todo par de vértices u, v a uma distância no máximo 2 um do outro, então C é um código identificador de G .*

Informalmente, a Proposição 3.7 mostra que códigos identificadores possuem uma estrutura local, no sentido de que um vértice de um código identificador não interfere ou influencia vértices a uma distância significativa.

A seguir, apresentamos o Lema 3.8 e, na sequência, o Lema 3.9. Ambos os lemas fazem observações a respeito do número mínimo de vértices que devem pertencem

a qualquer código identificador C de G quando vértices gêmeos falsos ou subgrafos completos estão presentes em G .

Lema 3.8 *Seja G um grafo identificável, C um código identificador de G , e seja $K \subseteq V(G)$, com $|K| = k$, um conjunto de vértices que são dois a dois gêmeos falsos. Então, $|K \cap C| \geq (k - 1)$.*

Prova. Suponha que $|K \cap C| \leq (k - 2)$. Então, existem pelo menos dois vértices gêmeos falsos, $u, v \in K$, que não são separados por C , e portanto C não é um código identificador. Então, $|K \cap C| \geq (k - 1)$. Assim, para qualquer par de vértices distintos u e v de K , pelo menos um de u, v deve pertencer a qualquer código identificador C , para que $(N[u] \cap C) \neq (N[v] \cap C)$. \square

Lema 3.9 *Seja G um grafo identificável e seja C um código identificador deste grafo. Se existe um conjunto de vértices $K \subseteq V(G)$ tal que K induz um subgrafo completo com n vértices, então $|(N[K] \setminus K) \cap C| \geq n - 1$.*

Prova. Se G é identificável, então para quaisquer dois vértices $u, v \in K$, com $u \neq v$, temos que $N[u] \triangle N[v] = A$, onde A é um conjunto de vértices, com $A \cap K = \emptyset$ e $A \neq \emptyset$ e, portanto, pelo menos um vértice de A deve pertencer a qualquer código identificador de G para que u e v sejam separados. Logo, $|(N[K] \setminus K) \cap C| \geq n - 1$. \square

Para ilustrar o Lema 3.9, considere o grafo G apresentado na Figura 3.6. Na figura, o conjunto de vértices ligados por arestas tracejadas induz um subgrafo completo K com $n = 4$ vértices. Para que um conjunto C seja um código identificador neste grafo, pelo menos 3 vértices em $(N_G[K] \setminus K)$ devem estar em C . Os vértices preenchidos em preto indicam um possível código identificador em G .

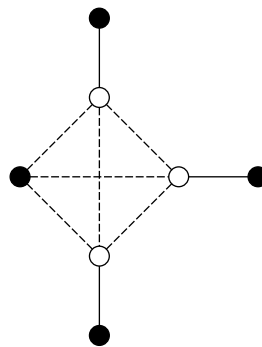


Figura 3.6: Ilustração do Lema 3.9.

Códigos Identificadores em Árvores

Neste capítulo, reunimos resultados conhecidos sobre códigos identificadores em árvores e apresentamos nossos resultados sobre um tipo especial de árvores: os *caterpillars*. Damos início ao capítulo enunciando os resultados existentes e apresentando, em seguida, a motivação para o estudo de códigos identificadores em *caterpillars*.

Códigos identificadores em árvores foram determinados por Bertrand et al. em 2005 [10], em que definiram um limite inferior que é uma melhoria do limite do Teorema 3.3. O resultado é apresentado no Teorema 4.1.

Teorema 4.1 [10] *Seja G uma árvore com $n \geq 3$ vértices. Então, $\gamma^{ID}(G) \geq \frac{3(n+1)}{7}$.*

Existem inúmeras árvores que atingem a igualdade do limite apresentado no Teorema 4.1. Os próprios autores mostraram, em seu artigo, uma construção de grafos que possuem um código identificador com exatamente $\frac{3(n+1)}{7}$ vértices. A construção é descrita a seguir, no Teorema 4.2.

Teorema 4.2 [10] *Se $n = 6 + 7(m - 1)$, $m \geq 2$, então existe uma árvore com n vértices que admite um código identificador de tamanho $\frac{3(n+1)}{7}$.*

Prova. Primeiro, pegue o padrão de grafo da Figura 4.1(a), ao qual chamamos de padrão (a) e, então, adicione o padrão de grafo da Figura 4.1(b), ao qual chamamos de padrão (b), por $m - 1$ vezes, da seguinte forma: ligue o vértice mais a esquerda do padrão (b) com o vértice do topo direito da construção anterior, sendo que o padrão (a) é utilizado para a

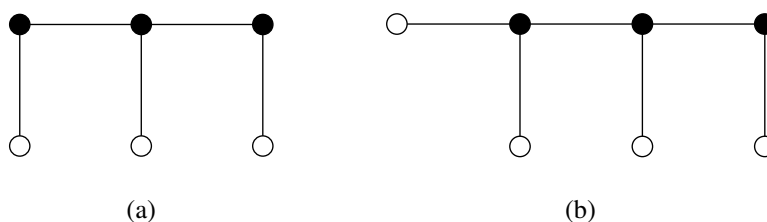


Figura 4.1: Padrões para construção de grafos que atingem o limite inferior do Teorema 4.1.

primeira construção. É fácil perceber que esse procedimento resulta em um código identificador, com os vértices preenchidos em preto representando o conjunto de *codewords*. \square

Bertrand et al. [10] também determinaram que a cardinalidade mínima de um código identificador em árvores binárias completas com $2^h - 1$ vértices é $\lceil 20(20^h - 1)/31 \rceil$, onde h é a altura da árvore ($h = 1$ se, e somente se, $|V(G)| = 1$).

Por mais que Bertrand et al. [10] tenham mostrado que um código identificador de uma árvore possui pelo menos $\frac{3(n+1)}{7}$ vértices, podemos perceber que o número mínimo de *codewords* necessários para identificar uma árvore tende a ser muito maior em certos tipos de árvores, principalmente aquelas que podem possuir um grande número de folhas.

Assim, em 2007, Blidia et al. [12] melhoram o limite do Teorema 4.1 ao considerar não apenas o número de vértices da árvore, mas também o seu número de folhas e, conseqüentemente, o número de vértices de suporte.

Teorema 4.3 [12] *Se G é uma árvore de ordem $n \geq 4$, com ℓ folhas e s vértices de suporte, então $\gamma^D(G) \geq 3(n + \ell - s + 1)/7$.*

O resultado acima também é válido para uma quantidade infinita de árvores de ordem n . Árvores que satisfazem $s = \ell$, ou seja, árvores em que o número de vértices de suporte é igual ao número de folhas, são exemplos de grafos que atingem a igualdade do limite do Teorema 4.3. Grafos gerados a partir da construção descrita na prova do Teorema 4.2 também são exemplos de grafos que atingem o limite do Teorema 4.3, visto que $s = \ell$.

O limite apresentado por Blidia et al. [12], apesar de apresentar uma melhoria em relação ao Teorema de Bertrand et al. [10], ainda pode ser melhorado quando consideram-se tipos especiais de árvores, tais como os *caterpillars*.

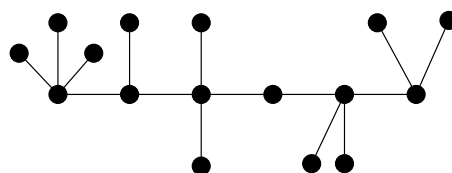
Árvores *caterpillar*, também conhecidas como árvores de Gutman ou árvores benzenóides, podem ser relacionadas a um grande número de outros objetos matemáticos. *Caterpillars* são particularmente conhecidos por sua relação com teoria dos grafos aplicado à química, por permitir que propriedades físicas e combinatórias de grafos muito mais complicados sejam estudadas através de *caterpillars* equivalentes, que são grafos muito menores [22].

Com esta motivação, somada à importância das árvores *caterpillars*, nós investigamos códigos identificadores nesta classe e encontramos valores mínimos para códigos identificadores em alguns *caterpillars*, definindo também um limite superior justo para o caso geral. Antes de prosseguirmos, relembremos a definição de grafo *caterpillar* e outros conceitos que serão utilizados para as demonstrações dos nossos resultados.

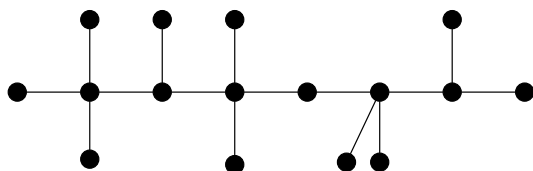
Um modo simples de definir um grafo **caterpillar**, $P_c(k_1, k_2, \dots, k_c)$, é através do conceito de **derivativo** de um grafo, que diz que o grafo derivativo G' de G é o grafo

obtido através da remoção de todos os vértices pendentos de G [40]. Um caterpillar é definido como uma árvore, cujo grafo derivativo é um caminho $P_c = v_1, \dots, v_c$, usualmente chamado de **caminho central**. Vértices do caminho central que estão ligados a vértices folhas são chamados de **vértices de suporte**. O grafo *caterpillar* também é chamado de **árvore caterpillar**.

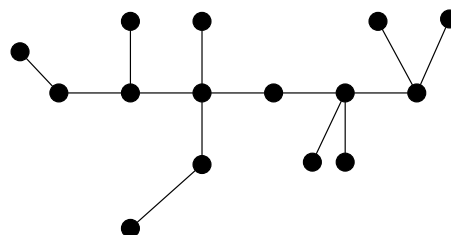
Uma árvore *caterpillar* $P_c(k_1, k_2, \dots, k_c)$ pode ser construída através da adição de k_1 vértices folha ao primeiro vértice v_1 do caminho P_c , k_2 vértices folha a v_2 de P_c , e assim por diante. Definimos K_1, K_2, \dots, K_c como os conjuntos de vértices folha ligados a v_1, v_2, \dots, v_c , respectivamente. Assim, o número de vértices em uma árvore *caterpillar* é $n = c + \sum_{i=1}^c k_i$. Exemplos de árvores *caterpillar* e outro de um grafo não *caterpillar* são exibidos na Figura 4.2.



(a) $P_6(3, 1, 2, 0, 2, 2)$.



(b) Um grafo *caterpillar* isomorfo ao grafo apresentado em (a).



(c) Um grafo não *caterpillar*.

Figura 4.2: Exemplos de grafos *caterpillar* e um não *caterpillar*.

Estendendo a definição anterior, um **broom** é o grafo $P_c(k_1, 0, \dots, 0)$, com $k_1 > 0$ e $k_i = 0$ para todo $i = 2, \dots, c$, e um grafo $P_c(k_1, 0, \dots, 0, k_c)$, com $k_1, k_c > 0$ e $k_i = 0$ para todo $i = 2, \dots, (c - 1)$, é chamado de **broom duplo**. Um grafo *caterpillar* $P_c(k_1, \dots, k_c)$ é dito **completo** se $k_i > 0$ para todo $i = 1, \dots, c$, ou seja, cada vértice do seu caminho central é um vértice de suporte. A Figura 4.3 ilustra os grafos *broom*, *broom duplo* e *caterpillar* completo.

Visto que quaisquer dois vértices folha de um mesmo vértice de suporte v_i em um *caterpillar* são gêmeos falsos, uma consequência direta do Lema 3.8 é que, em um grafo *caterpillar* G , pelo menos $(k_i - 1)$ vértices de qualquer vértice de suporte v_i do caminho central P_c deve pertencer a qualquer código identificador C de G .

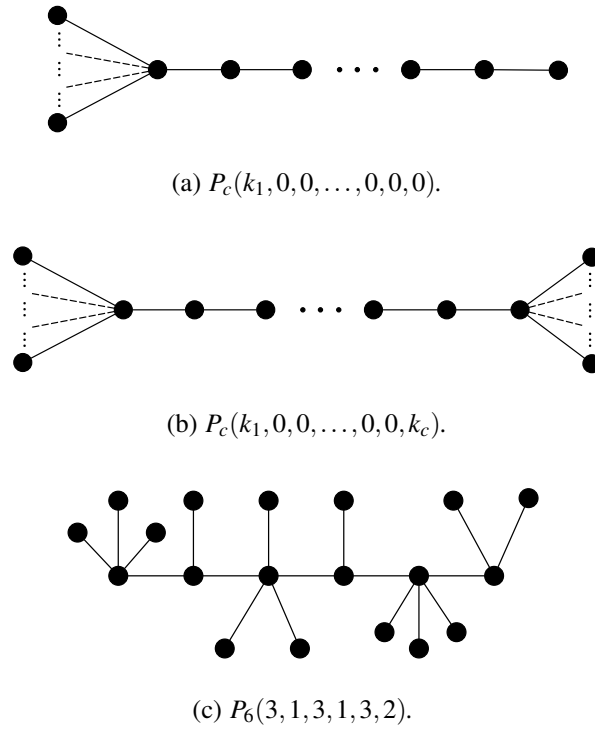


Figura 4.3: Um broom, um broom duplo e um caterpillar completo são ilustrados em (a), (b) e (c), respectivamente.

4.1 Resultados em Caterpillars

Tendo definido os grafos *caterpillar* estudados, prosseguimos agora com nossos resultados. Perceba que, se o caminho central P_c de um grafo *caterpillar* possui $c = 1$ vértice, então o *caterpillar* $P_c(k_1) \cong K_{1,k_1} \cong K_{1,n}$, com $n = k_1$ e, portanto, $\gamma^{ID}(P_c(k_1)) = k_1$. Se, por outro lado, o caminho central possui $c = 2$ vértices, então

$$\gamma^{ID}(P_c(k_1, k_2)) = \begin{cases} \text{inexistente} & \text{se } k_1 = k_2 = 0, \\ \gamma^{ID}(K_{1,n}) & \text{se } k_1 \text{ ou } k_2 = 0, \text{ com } n = \{\max\{k_1, k_2\} + 1\}, \\ 3 & \text{se } k_1 = k_2 = 1, \\ k_1 + k_2 & \text{se } k_1, k_2 \geq 1. \end{cases}$$

Deste ponto em diante, consideramos *caterpillars* $P_c(k_1, \dots, k_c)$, cujo caminho central tem $c \geq 3$ vértices. Iniciamos os resultados com o Teorema 4.4, em que provamos que um código identificador em um *caterpillar* completo depende, principalmente, do seu número de folhas, uma consequência direta do Lema 3.8.

Teorema 4.4 *Seja $G = P_c(k_1, \dots, k_c)$ um caterpillar completo, com $c \geq 3$. Então, $\gamma^{ID}(G) = \ell$, sendo $\ell = \sum_{i=1}^c k_i$ o número de folhas de G .*

Prova. Seja C um código identificador mínimo em G . Pelo Lema 3.8, para cada vértice $1 \leq i \leq c$, temos que $|K_i \cap C| \geq (k_i - 1)$. Suponha que $|K_i \cap C| = (k_i - 1)$ para todo $1 \leq i \leq c$. Então, para cada i existe um vértice $x_i \in K_i$ tal que x_i não é coberto por C , a menos que $v_i \in C$. Mas, se $v_i \in C$ e $x_i \notin C$, então $|(\{v_i\} \cup K_i) \cap C| = k_i$. Portanto, $|C| \geq \sum_{i=1}^c k_i = \ell$.

O conjunto $C = (K_i \setminus \{x_i\}) \cup \{v_i \mid 1 \leq i \leq c\}$ é um código identificador em G de cardinalidade ℓ . Logo, $\gamma^{ID}(G) = \ell$. \square

No Teorema 4.5, enunciamos nosso resultado sobre *caterpillars* $P_c(k_1, 0, \dots, 0)$, os chamados grafos *broom*, e no Teorema 4.6 enunciamos nosso resultado em *caterpillars* $P_c(k_1, 0, \dots, 0, k_c)$, também chamados de grafos *broom* duplo. Em ambos, pode-se perceber que um código identificador mínimo em tais grafos depende do seu número de folhas e do tamanho de um código identificador mínimo do caminho central P_c .

Teorema 4.5 *Seja G um caterpillar $P_c(k_1, 0, \dots, 0)$, com $k_1 \geq 3$ e $c \geq 3$. Então, $\gamma^{ID}(G) = \gamma^{ID}(P_c) + (k_1 - 1)$.*

Prova. Primeiramente, mostramos que um código identificador C' do tamanho proposto pode ser obtido. Seja $P_c = v_1, \dots, v_c$ o caminho central de G com c vértices e seja $x \in K_1$ um vértice qualquer de K_1 . Se c é ímpar, o código $C' = (K_1 \setminus \{x\}) \cup \{v_i \mid i \text{ é ímpar}\}$ é um código identificador. Se c é par, o código $C' = (K_1 \setminus \{x\}) \cup \{v_1\} \cup \{v_i \mid i \text{ é par}\}$ é um código identificador em G . Em ambos os casos, temos que $|C'| = \lceil (c+1)/2 \rceil + (k_1 - 1) = \gamma^{ID}(P_c) + (k_1 - 1)$.

Relembre que $\gamma^{ID}(P_c) = \lceil (c+1)/2 \rceil$ (veja Teorema 3.6) e note que, se $c = 3$, é fácil perceber que $\gamma^{ID}(G) = k_1 + 1 = \gamma^{ID}(P_c) + (k_1 - 1)$, e o resultado segue. Assim, assumimos que $c \geq 4$.

No restante da prova, tentamos construir um código identificador C de cardinalidade menor que $|C'|$. Pelo Lema 3.8, sabemos que pelo menos $(k_1 - 1)$ folhas de K_1 devem pertencer a qualquer código identificador de G , caso em que v_1 também deve pertencer a C para que o conjunto C cubra e separe todos os vértices de K_1 . Assim, sabemos que $|K_1 \cap C| \geq (k_1 - 1)$ e dois casos seguem: $v_1 \notin C$ e $v_1 \in C$.

Caso 1: $v_1 \notin C$. Neste caso, sabemos que todas as folhas de K_1 devem estar em C . Além disso, não existe nenhum vértice do subcaminho de P_c induzido pelos vértices $\{v_2, \dots, v_c\}$ que esteja coberto por algum vértice em C e, por isso, podemos considerar o subcaminho v_2, \dots, v_c , com $(c - 1)$ vértices, de forma isolada. Pelo Teorema 3.6, precisamos de pelo menos $\lceil c/2 \rceil$ vértices para identificá-lo, e portanto $|C| = \lceil c/2 \rceil + k_1$, que é maior que $|C'|$ quando c é ímpar, e possui o mesmo número de *codewords* de C' quando c é par. Assim, segue que $|C| \geq |C'|$.

Caso 2: $v_1 \in C$.

Subcaso 1: $\exists x \in K_1$ tal que $x \notin C$. Neste caso, o subgrafo induzido por $N[K_1]$ é coberto e separado por C . O vértice v_2 é coberto por v_1 , mas ainda não está separado

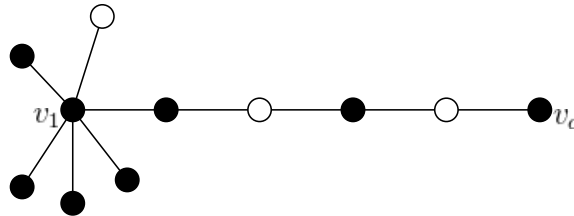
por C uma vez que $(N[x] \cap C) = (N[v_2] \cap C) = \{v_1\}$. Assim, para que C separe v_2 dos demais vértices do grafo, v_2 ou v_3 deve ser adicionado a C . Entretanto, se analisarmos o subcaminho $P_m = v_3, \dots, v_c$ de P_c , separadamente, podemos garantir que há um código identificador tal que $v_3 \in C$ (veja a Observação 1) e, ainda, teremos encontrado o menor código identificador no grafo G para esta situação descrita.

Deste modo, segue que, se $c \neq 4$, então $|C| = k_1 + \gamma^{ID}(P_m) = \gamma^{ID}(P_c) + k_1 - 1 = |C'|$. Se $c = 4$, o subcaminho P_m não pode ser identificado. Entretanto, ao adicionarmos v_2 e v_c a C , temos um código identificador em G de tamanho $\gamma^{ID}(P_c) + (k_1 - 1) = |C'|$ e, portanto, temos que $|C| \geq |C'|$.

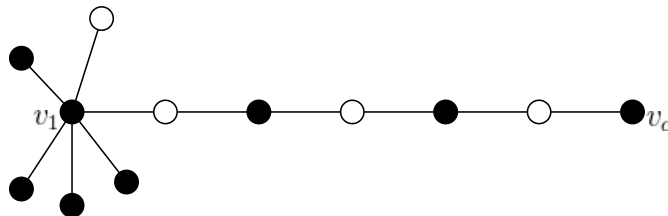
Subcaso 2: $|N[K_1] \cap C| = k_1 + 1$. Neste caso, todas as folhas de K_1 estão em C , assim como o vértice v_1 . Mas, se $v_1 \in C$, o vértice v_2 está coberto e separado por C , mas não existe nenhum vértice do subcaminho v_3, \dots, v_c de P_c que esteja coberto por C . Assim, ao analisarmos este caminho separadamente, encontraremos um código identificador mínimo no subcaminho de cardinalidade $\lceil (c-1)/2 \rceil$, resultando em um código identificador em G de tamanho $\lceil (c-1)/2 \rceil + k_1 + 1 = \lceil (c+1)/2 \rceil + k_1 > |C'|$.

Desta forma, mostramos que $|C| \geq |C'|$ e, portanto, $\gamma^{ID}(G) = |C'| = \gamma^{ID}(P_c) + (k_1 - 1)$, e o nosso resultado segue. \square

Na Figura 4.4, ilustramos códigos identificadores mínimos em grafos *broom*, conforme construção de C' descrita no Teorema 4.5. Na Figura 4.4(a), temos um *broom*



(a) $P_6\{5, 0, 0, 0, 0, 2\}$.



(b) $P_7\{5, 0, 0, 0, 0, 2\}$.

Figura 4.4: Exemplo de códigos identificadores mínimos em grafos *broom* tal que c é par (4.4(a)), ou ímpar (4.4(b)). Os vértices preenchidos indicam os codewords.

cujos caminhos central possui um número par de vértices e, na Figura 4.4(b), o grafo *broom* ilustrado possui um número ímpar de vértices no caminho central. Os vértices preenchidos indicam os *codewords*.

Teorema 4.6 *Seja G um caterpillar $P_c(k_1, 0, \dots, 0, k_c)$, com $k_1, k_c \geq 3$, $c \geq 3$ e $k_i = 0$ para $2 \leq i \leq (c-1)$. Então, $\gamma^{ID}(G) = \gamma^{ID}(P_c) + (k_1 - 1) + (k_c - 1)$.*

Prova. Primeiramente, mostramos que um código identificador C' do tamanho proposto pode ser obtido. Seja $P_c = v_1, \dots, v_c$ o caminho central de G com c vértices e sejam $x \in K_1$ e $y \in K_c$. Se c é ímpar, o código $C' = (K_1 \setminus \{x\}) \cup \{v_i \mid i \text{ é ímpar}\} \cup (K_c \setminus \{y\})$ é um código identificador em G . Se c é par, o código $C' = (K_1 \setminus \{x\}) \cup \{v_1\} \cup \{v_i \mid i \text{ é par}\} \cup (K_c \setminus \{y\})$ é um código identificador em G . Em ambos os casos, temos que $|C'| = \lceil (c+1)/2 \rceil + (k_1 - 1) + (k_c - 1) = \gamma^{ID}(P_c) + (k_1 - 1) + (k_c - 1)$.

Relembre que $\gamma^{ID}(P_c) = \lceil (c+1)/2 \rceil$ (veja Teorema 3.6) e note que, se $c = 3$, é fácil perceber que $\gamma^{ID}(G) = k_1 + k_c = \gamma^{ID}(P_c) + (k_1 - 1) + (k_c - 1)$, e o resultado segue. Se $c = 4$, $C = (K_1 \setminus x) \cup (K_c \setminus y) \cup \{v_1, v_2, v_c\}$ é um código identificador mínimo de G , e o resultado segue. Assim, assumimos que $c \geq 5$.

No restante da prova, tentamos construir um código identificador C de cardinalidade menor que $|C'|$. Pelo Lema 3.8, sabemos que pelo menos $(k_1 - 1)$ folhas de K_1 e $(k_c - 1)$ folhas de K_c devem pertencer a qualquer código identificador de G , caso em que v_1 e v_c também deve pertencer a C para que o conjunto C cubra e separe todos os vértices de K_1 e K_c , respectivamente. Assim, sabemos que $|K_1 \cap C| \geq (k_1 - 1)$ e $|K_c \cap C| \geq (k_c - 1)$ e 3 casos precisam ser analisados: quando $v_1, v_c \notin C$, quando $v_1 \in C$ mas $v_c \notin C$ (que é análogo ao caso em que $v_c \in C$ e $v_1 \notin C$), e o caso em que $v_1, v_c \in C$.

Caso 1: $v_1, v_c \notin C$. Neste caso, sabemos que todas as k_1 folhas de K_1 e todas as k_c folhas de K_c devem estar em C . Além disso, como não existe nenhum vértice do subcaminho v_2, \dots, v_{c-1} de P_c que esteja coberto por algum dos vértices em C , podemos considerar o subcaminho v_2, \dots, v_{c-1} com $(c-2)$ vértices isoladamente. Pelo Teorema 3.6, precisamos de $\lceil (c-1)/2 \rceil$ vértices para identificá-lo, e portanto $|C| = \lceil (c-1)/2 \rceil + k_1 + k_c > |C'|$.

Caso 2: $v_1 \in C$ e $v_c \notin C$ (ou $v_1 \notin C$ e $v_c \in C$). Neste caso, todas as folhas de K_c devem estar em C , e o vértice v_{c-1} não é coberto por nenhum vértice atualmente em C . Em relação ao vértice v_2 , duas possibilidades existem, baseadas nos seguintes subcasos.

Subcaso 1: $\exists x \in K_1$ tal que $x \notin C$. Neste caso, o subgrafo induzido por $N[K_1]$ é identificado por C , e o vértice v_2 é coberto por v_1 mas ainda não separado de x . Para que C separe v_2 dos demais vértices do grafo, v_2 ou v_3 deve ser adicionado a C . Sabemos, pela Observação 1, que, dado um caminho v_1, \dots, v_n , existe um código identificador neste caminho que contém v_1 . Assim, se $c \geq 6$, ao analisarmos o subcaminho de P_c , $P_m = v_3, \dots, v_{c-1}$, separadamente, podemos garantir que há um código identificador

tal que $v_3 \in C$ (veja a Observação 1) e, ainda, teremos encontrado o menor código identificador do grafo G para a situação descrita.

Pelo Teorema 3.6, precisamos de $\lceil (c-2)/2 \rceil$ vértices para identificá-lo e, portanto, $|C| = \lceil (c-2)/2 \rceil + k_1 + k_c$, que é maior que $|C'|$ quando c é ímpar e possui o mesmo número de *codewords* de C' quando c é par. Logo, $|C| \geq |C'|$.

Se $c = 5$, o subcaminho de P_c formado pelos vértices $\{v_3, v_4\}$ não pode ser identificado isoladamente. Neste caso, precisamos analisar o subcaminho $P_m = v_2, v_3, v_4$ de P_c , que precisa de 2 vértices para ser identificado e, assim, identificar o grafo G como um todo. Portanto $|C| = 2 + k_1 + k_c > |C'|$.

Subcaso 2: $|N[K_1] \cap C| = k_1 + 1$. Seguindo o mesmo raciocínio apresentado no Subcaso 1, conclui-se que $|C| > |C'|$ em pelo menos uma unidade.

O caso em que $v_1 \notin C$ e $v_c \in C$ segue de forma análoga.

Caso 3: $v_1, v_c \in C$.

Subcaso 1: $\exists x \in K_1$ e $\exists y \in K_c$ tal que $x, y \notin C$. Neste caso, os subgrafos induzidos por $N[K_1]$ e por $N[K_c]$ são cobertos e separados por C . Os vértices v_2 e v_{c-1} estão cobertos por C , mas ainda não são separados de x e y , respectivamente.

Se c é ímpar, podemos considerar o subcaminho de P_c induzido pelos vértices $\{v_3, \dots, v_{c-2}\}$ pois, pela Observação 1, existe um código identificador neste subcaminho que contém v_3 e v_{c-2} , respectivamente. Com estes vértices em C , garantimos que v_2 e v_{c-1} sejam identificados, assim como o próprio subcaminho v_3, \dots, v_{c-1} e, conseqüentemente, o grafo G como um todo. Nesta situação, $|C| = |C'|$.

Se c é par, não podemos considerar o subcaminho v_3, \dots, v_{c-2} isoladamente pois não há uma garantia de que o primeiro e o último vértice deste subcaminho esteja em C e, assim, não garantimos que v_2 e v_c sejam separados dos demais vértices do grafo. Portanto, nos resta considerar:

$$(1) - \{v_2, \dots, v_{c-2}\}, \text{ ou}$$

$$(2) - \{v_3, \dots, v_{c-1}\}, \text{ ou}$$

$$(3) - \{v_2, \dots, v_{c-1}\}.$$

Nas situações (1) e (2), temos um caminho com $(c-3)$ vértices, e $|C| = \lceil (c-2)/2 \rceil + k_1 + k_c = |C'|$. Na situação (3), temos um caminho com $(c-2)$ vértices e $|C| = \lceil (c-1)/2 \rceil + k_1 + k_c > |C'|$.

Subcaso 2: $|N[K_1] \cap C| = k_1 + 1$ e $\exists y \in K_c$ tal que $y \notin C$ (ou $|N[K_c] \cap C| = k_c + 1$ e $\exists x \in K_1$ tal que $x \notin C$). Seguindo o mesmo raciocínio apresentado no Subcaso 1, conclui-se que $|C| > |C'|$ em pelo menos uma unidade.

Subcaso 3: $|N[K_1] \cap C| = k_1 + 1$ e $|N[K_c] \cap C| = k_c + 1$. É fácil perceber que $|C| > |C'|$ em pelo menos duas unidades.

Desta forma, mostramos que não é possível construir um código identificador C de cardinalidade menor que $|C'|$ e, portanto, $|C| \geq |C'|$. Logo, $\gamma^{ID}(G) = \gamma^{ID}(P_c) + (k_1 - 1) + (k_c - 1)$, e o nosso resultado segue. \square

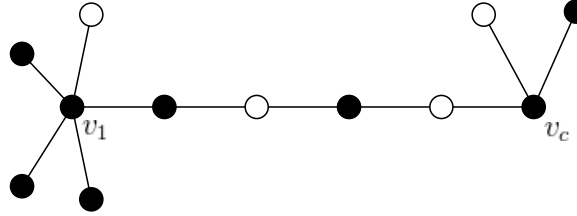
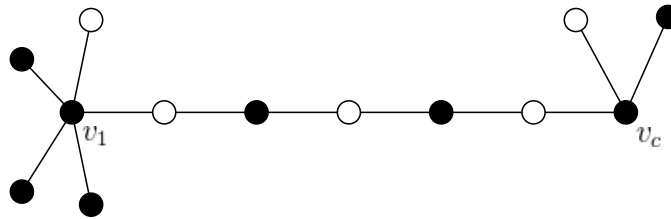
(a) $P_6\{4,0,0,0,0,0\}$.(b) $P_7\{4,0,0,0,0,0,0\}$.

Figura 4.5: Exemplo de códigos identificadores mínimos em grafos broom duplo cujo caminho central c possui cardinalidade par (4.5(a)) e ímpar (4.5(b)). Os vértices preenchidos indicam os *codewords*.

Na Figura 4.5, ilustramos códigos identificadores mínimos em grafos broom duplo, conforme construção de C' descrita na demonstração do Teorema 4.6. Na Figura 4.5(a), temos um broom duplo cujo caminho central possui um número par de vértices e, na Figura 4.5(b), o grafo broom duplo ilustrado possui um número ímpar de vértices no caminho central. Os vértices preenchidos indicam os *codewords*.

Agora, prosseguimos para o nosso resultado final, um limite superior para códigos identificadores em caterpillars, uma consequência direta do Teorema 4.6. Nós consideramos caterpillars $G = P_c(k_1, \dots, k_c)$, tal que $k_1, k_c, c \geq 3$ e $k_i = 0$ ou $k_i \geq 3$, para $2 \leq i \leq (c - 1)$. Além disso, G tem um conjunto de subcaminhos $\phi = \{P^1, P^2, \dots, P^q\}$, formado por caminhos P^m , com $|P^m| \geq 3$, para $1 \leq m \leq q$, tal que cada caminho P^m inicia em um vértice $v_a \in P_c$ e termina no próximo vértice de suporte $v_b \in P_c$, onde $v_a, v_b \in P_c$ são vértices de suporte. A Figura 4.6 ilustra esse conceito.

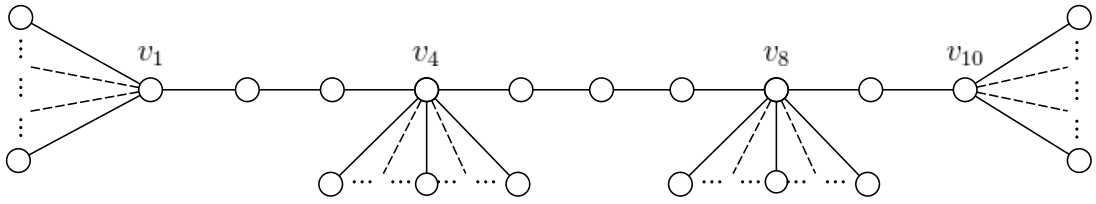


Figura 4.6: Um grafo caterpillar $G = P_{10}(k_1, 0, 0, k_4, 0, 0, 0, k_8, 0, k_{10})$. O grafo G tem um subconjunto de caminhos $\phi = \{P^1, P^2, P^3\}$, tal que $P^1 = v_1, \dots, v_4$, $P^2 = v_4, \dots, v_8$, e $P^3 = v_8, \dots, v_{10}$.

Teorema 4.7 Seja G um caterpillar $P_c(k_1, \dots, k_c)$ como definido acima, com $c \geq 3$, e seja $\ell = \sum_{i=1}^c k_i$. Então,

$$\gamma^{ID}(G) \leq \ell + \sum_{m=1}^q \left(\left\lceil \frac{|P^m|+1}{2} \right\rceil - 2 \right).$$

Prova. O limite apresentado é o resultado da soma do número total de vértices folha de G e o somatório do tamanho de um código identificador mínimo de cada subcaminho P^m distinto que satisfaz a definição, começando em um vértice de suporte v_a e terminando no próximo vértice de suporte v_b .

Informalmente, o teorema declara que um código identificador em um grafo *caterpillar* pode ser obtido através da união de um código identificador mínimo em cada subcaminho P^m , todos os vértices de suporte, e $(k_i - 1)$ vértices folha de cada vértice de suporte v_i do caminho central.

Afirmção 1: Cada subgrafo de G formado por P^m e todas as folhas de seus vértices de suporte v_a e v_b é equivalente a um grafo *broom* duplo. Nós provamos no Teorema 4.6 que esse subgrafo admite um código identificador mínimo de tamanho $\left\lceil \frac{|P^m|+1}{2} \right\rceil + (k_a - 1) + (k_b - 1)$, caso em que ambos os vértices v_a e v_b pertencem a um código identificador C , com $|N[K_a] \cap C| = k_a$ e $|N[K_b] \cap C| = k_b$. Em outras palavras, $|N[K_i] \cap C| = k_i$ para cada vértice de suporte v_i .

Afirmção 2: Sabemos que $\gamma^{ID}(P^m) = \left\lceil \frac{|P^m|+1}{2} \right\rceil$. Sabemos, também, que existe um código identificador mínimo em P^m que inclui v_a e v_b . Assim, se considerarmos o subcaminho $P = v_{a+1}, \dots, v_{b-1}$, ou seja, se considerarmos o subcaminho P^m excluindo-se os vértices de suporte v_a e v_b , teremos $|N[P] \cap C| = \left(\left\lceil \frac{|P^m|+1}{2} \right\rceil - 2 \right)$.

Finalmente, como ℓ é o somatório do número de vértices folha de cada vértice de suporte v_i de G , juntando a **Afirmção 1** e a **Afirmção 2**, obtemos $\gamma^{ID}(G) \leq \ell + \sum_{m=1}^q \left(\left\lceil \frac{|P^m|+1}{2} \right\rceil - 2 \right)$. \square

Apresentamos ao longo deste capítulo nossos resultados para tipos especiais de árvores *caterpillar* $P_c(k_1, \dots, k_c)$: *caterpillar* completo, grafos *broom* e os grafos *broom* duplo. Em cada um destes grafos, mostramos o tamanho de um código identificador mínimo. No Teorema 4.7, apresentamos um limite superior para o código identificador mínimo de um grafo *caterpillar* geral. O limite apresentado é justo para o caso em que possui $c = 3$ vértices e para os casos em que $P_c(k_1, \dots, k_c)$ é um *broom* ou um *broom* duplo. Além disso, com base nos nossos estudos, conjecturamos que o limite apresentado seja mínimo. Os resultados presentes neste capítulo foram apresentados no VII *Latin American Workshop on Cliques in Graphs*, realizado de 8-11 de novembro de 2016 na cidade de La Plata, Argentina.

Códigos Identificadores em Produto Corona

Neste capítulo, reunimos e apresentamos resultados conhecidos sobre códigos identificadores no produto corona, juntamente com exemplos de grafos que atingem alguns dos limites apresentados. Apresentamos, também, alguns resultados obtidos para esta classe durante este estudo.

O **produto corona**, ou simplesmente **corona**, de dois grafos G e H é um tipo de produto de grafos introduzido em 1969 por Frucht e Harary [30]. Sejam dois grafos G e H . O **corona** $G \circ H$ é formado através de uma cópia de G e $|V(G)|$ cópias de H , sendo o i -ésimo vértice de G adjacente a todos os vértices da i -ésima cópia de H . A Figura 5.1 ilustra um produto corona de dois grafos G e H .

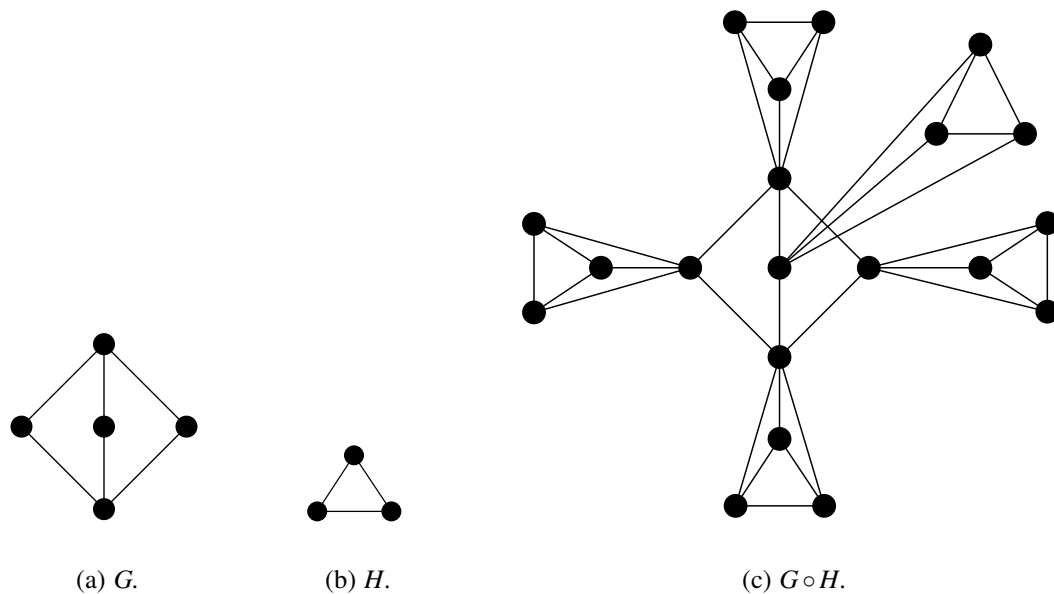


Figura 5.1: Grafos G , H , e o corona $G \circ H$.

Feng e Wang [23], até o momento, são os únicos autores dos quais temos conhecimento que estudaram códigos identificadores em coronas $G \circ H$. A seguir são apresentados alguns resultados de sua autoria, a começar pela caracterização de condições necessárias para que grafos $G \circ H$ sejam identificáveis, apresentada no teorema a seguir.

Teorema 5.1 [23] *Seja H um grafo.*

- *Então $K_1 \circ H$ é identificável se, e somente se, H é um grafo identificável com grau máximo até $|V(H)| - 2$.*
- *Se G é um grafo conexo com pelo menos dois vértices, então $G \circ H$ é identificável se, e somente se, H é identificável.*

Exemplificando o Teorema 5.1, temos que os grafos $G \circ K_n$ não são identificáveis, pois todos os vértices de um grafo completo K_n são gêmeos. No próximo teorema, Feng e Wang [23] apresentam um limite inferior para códigos identificadores em grafos $G \circ H$.

Teorema 5.2 [23] *Se $G \circ H$ é identificável, então $\gamma^{ID}(G \circ H) \geq |V(G)| \cdot \gamma^{ID}(H)$.*

Grafos que atingem a igualdade do Teorema 5.2 também foram caracterizados por Feng e Wang [23], conforme mostra o seguinte teorema.

Teorema 5.3 [23] *Seja H um grafo identificável e seja G um grafo. Suponha que H satisfaça uma das seguintes condições:*

1. *O grafo H não é conexo.*
2. *O diâmetro de H é pelo menos cinco.*
3. *O grau máximo de H é menor que $\gamma^{ID}(H) - 1$.*

$$\text{Então, } \gamma^{ID}(G \circ H) = |V(G)| \cdot \gamma^{ID}(H).$$

Visto que grafos \bar{K}_m são grafos desconexos, é possível concluir, portanto, que grafos $K_n \circ \bar{K}_m$ se enquadram na primeira condição do Teorema 5.3 e, por isso, $\gamma^{ID}(K_n \circ \bar{K}_m) = |V(K_n)| \cdot \gamma^{ID}(\bar{K}_m) = n \cdot m$. Neste trabalho, mostramos a Proposição 5.4, que exibe uma prova alternativa específica para códigos identificadores em grafos $K_n \circ \bar{K}_m$.

Proposição 5.4 *Seja $n, m \geq 2$. Então, $\gamma^{ID}(K_n \circ \bar{K}_m) = |V(K_n)| \cdot \gamma^{ID}(\bar{K}_m)$.*

Prova. Sabemos que o grafo K_n não é identificável pois para quaisquer dois vértices $v_1, v_2 \in K_n$, temos que $N[u] = N[v]$. No entanto, o Teorema 5.1 garante que o produto $K_n \circ \bar{K}_m$ é identificável.

Seja $V = V(K_n) = \{v_1, \dots, v_n\}$. Para cada $i \in \{1, \dots, n\}$, denote por \bar{K}_m^i a cópia i de \bar{K}_m ligada ao vértice $v_i \in K_n \circ \bar{K}_m$.

Seja C um código identificador de $K_n \circ \bar{K}_m$. Uma consequência do Lema 3.8 é que $|(\{v_i\} \cup V(\bar{K}_m^i)) \cap C| \geq m$. Como existem n vértices em \bar{K}_n , logo $|C| \geq n \cdot m$.

Além disso, podemos exibir um código identificador para $K_n \circ \bar{K}_m$ que possui $n \cdot m$ vértices como segue. Seja $u_i \in V(\bar{K}_m^i)$ e seja $M = \bigcup_{i \in \{1, \dots, n\}} (V(\bar{K}_m^i) \setminus \{u_i\})$. O

conjunto $C = V(G) \cup M$ é um código identificador de $K_n \circ \overline{K}_m$ e possui $n \cdot m$ elementos. Logo, $\gamma^{ID}(K_n \circ \overline{K}_m) = n \cdot m$.

Sabemos que \overline{K}_m é um grafo vazio com m vértices e, conseqüentemente, $\gamma^{ID}(\overline{K}_m) = m$. Além disso, $|V(K_n)| = n$. Tendo em vista que um código identificador mínimo de $K_n \circ \overline{K}_m$ possui $n \cdot m$ vértices, podemos concluir que $\gamma^{ID}(K_n \circ \overline{K}_m) = |V(K_n)| \cdot \gamma^{ID}(\overline{K}_m)$, como queríamos demonstrar. \square

A Figura 5.2 exibe um exemplo de grafo que se enquadra na Proposição 5.4.

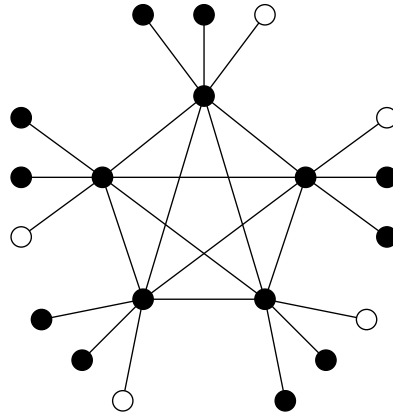


Figura 5.2: Exemplo de grafo da Proposição 5.4. Corona $K_5 \circ \overline{K}_3$. Os vértices em preto representam um código identificador de tamanho $\gamma^{ID}(K_5 \circ \overline{K}_3) = 5 \cdot 3 = 15$.

Feng e Wang [23] determinaram diversos resultados para códigos identificadores de coronas $G \circ K_1$. Exibimos nos Teoremas 5.5 e 5.6 seus resultados para o corona $G \circ K_1$ quando $G = K_n$, e para grafos G conexos e não completo, respectivamente.

Teorema 5.5 [23] *Seja $n \geq 2$. Então, $\gamma^{ID}(K_n \circ K_1) = n + 1$.*

Prova. Uma vez que K_1 é identificável, o Teorema 5.1 diz que $K_n \circ K_1$ também é identificável. Seja $V = V(K_n) = \{v_1, \dots, v_n\}$. Para cada $i \in \{1, \dots, n\}$, denote por u_i o vértices da cópia de K_1 conectado a $v_i \in K_n \circ K_1$. Seja $V' = \{u_1, \dots, u_n\}$. Perceba que $V(K_n \circ K_1) = V \cup V'$. Seja C um código identificador de $K_n \circ K_1$ com tamanho $\gamma^{ID}(K_n \circ K_1)$. Temos as seguintes afirmações.

Afirmção 1: $|V \cap C| \geq 2$. De fato, para todo $i \in \{1, \dots, n\}$, como

$$(V \cup \{u_i\}) \cap C = N_{K_n \circ K_1}[v_i] \cap C \neq N_{K_n \circ K_1}[u_i] \cap C = \{u_i, v_i\} \cap C,$$

temos que $|V \setminus \{v_i\} \cap C| \geq 1$. Então, $|V \cap C| \geq 2$.

Afirmção 2: $|V' \cap C| \geq n - 1$. Se existem dois vértices distintos u_i e u_j tais que nenhum deles pertencem a C , então $N_{K_n \circ K_1}[v_i] \cap C = N_{K_n \circ K_1}[v_j] \cap C$, uma contradição. Combinando as Afirmções 1 e 2, temos que

$$\gamma^{ID}(K_n \circ K_1) = |V \cap C| + |V' \cap C| \geq n + 1.$$

É simples verificar que $\{u_i \mid 2 \leq i \leq n\} \cup \{v_1, v_2\}$ é um código identificador de $K_n \circ K_1$ com tamanho $\gamma^{ID}(K_n \circ K_1) = n + 1$, e o resultado segue. \square

Teorema 5.6 [23] *Seja G um grafo conexo que não é completo. Então, $\gamma^{ID}(G \circ K_1) = |V(G)|$.*

Nos Teoremas 5.7 e 5.8, enunciamos os resultados de Feng e Wang [23] para coronas $K_1 \circ H$, quando $H = P_n$ ou $H = C_n$.

Teorema 5.7 [23] *Seja $n \geq 4$. Então,*

$$\gamma^{ID}(K_1 \circ P_n) = \begin{cases} 4 & \text{se } n = 4, \\ \lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 1 & \text{se } n \geq 5. \end{cases}$$

Teorema 5.8 [23] *Seja $n \geq 4$. Então,*

$$\gamma^{ID}(K_1 \circ C_n) = \begin{cases} 4 & \text{se } n = 4, \\ \frac{n}{2} & \text{se } n \text{ é par e } n \geq 6, \\ \frac{n+3}{2} & \text{se } n \text{ é ímpar e } n \geq 5. \end{cases}$$

Para coronas $G \circ P_n$ ou $G \circ C_n$ quando G é um grafo qualquer com $m \geq 2$ vértices, Feng e Wang [23] determinaram o resultado a seguir.

Teorema 5.9 [23] *Seja G um grafo com m vértices, $m \geq 2$.*

Seja $n \geq 5$,

$$\gamma^{ID}(G \circ P_n) = m \left(\left\lfloor \frac{mn}{2} \right\rfloor + 1 \right).$$

Se $n \geq 6$,

$$\gamma^{ID}(G \circ C_n) = \begin{cases} \frac{mn}{2} & \text{se } n \text{ é par,} \\ \frac{m(n+3)}{2} & \text{se } n \text{ é ímpar.} \end{cases}$$

Finalmente, para grafos estrela $K_{1,n} \cong K_1 \circ \overline{K}_n$, Feng e Wang [23] determinaram o tamanho de um código identificador mínimo do corona $G \circ K_{1,n}$.

Teorema 5.10 [23] *Seja $K_{1,n} = K_1 \circ \overline{K}_n$ um grafo estrela, com $n \geq 3$. Seja G um grafo com m vértices, $m \geq 2$. Então, $\gamma^{ID}(G \circ K_{1,n}) = n$.*

No próximo capítulo, continuamos o estudo de códigos identificadores, desta vez em produtos Cartesianos.

Códigos Identificadores em Produtos Cartesianos

Dentre os diversos resultados exatos e limites inferiores ou superiores para códigos identificadores em classes restritas, uma classe que tem tido muita atenção dos pesquisadores é aquela que envolve produtos de grafos, principalmente produtos Cartesianos. Veja, por exemplo, [11, 32, 38, 47, 48, 52, 59]. Neste capítulo, reunimos resultados existentes sobre códigos identificadores para produtos Cartesianos, e apresentamos nossos resultados obtidos para produtos Cartesianos de grafos estrela com caminho, $K_{1,n} \square P_m$.

O **produto Cartesiano** de dois grafos G e H , denotado por $G \square H$, é o grafo com conjunto de vértices $V(G) \times V(H)$, em que (u, v) é adjacente a (u', v') se, e somente se, $u = u'$ e $vv' \in E(H)$, ou se $v = v'$ e $uu' \in E(G)$. Mostramos na Figura 6.1 o produto Cartesiano $C_3 \square C_4$.

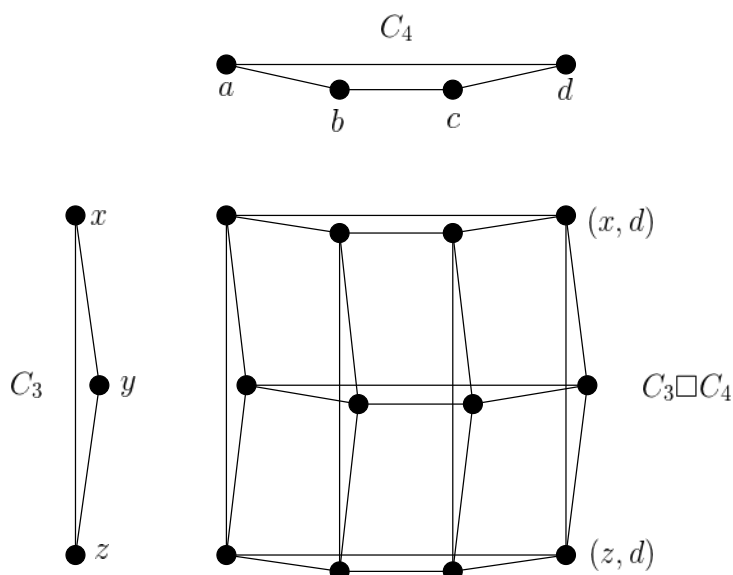


Figura 6.1: Representação do produto Cartesiano $C_3 \square C_4$.

Perceba que o produto Cartesiano é uma operação comutativa, e por isso $G \square H \cong H \square G$. De modo geral, no produto Cartesiano $G \square H$, o grafo G se decompõe em cópias

de H para cada vértice de G , e cópias de G para cada vértice de H . Chamamos de **grade** $n \times m$ o produto Cartesiano $P_n \square P_m$ de dois caminhos P_n e P_m . Um hipercubo Q_k é o grafo $Q_{k-1} \square K_2$, com $k \geq 1$, em que $Q_0 \cong K_1$. Diversos resultados para hipercubos existem na literatura [11, 47, 48, 52, 59].

O problema de se encontrar códigos identificadores em produtos Cartesianos de cliques foi estudado por autores distintos. Primeiramente, em 2008, Gravier, Moncel e Semri [38] estudaram o problema em cliques de mesmo tamanho. Os resultados determinados pelos autores são apresentados a seguir.

Teorema 6.1 [38] *Seja $n \geq 1$. Então, $\gamma^{ID}(K_n \square K_n) = \lfloor \frac{3n}{2} \rfloor$. Além disso, se $n \geq 5$ e ímpar, então existe um único código identificador (a não ser pelas permutações de linhas e colunas) com cardinalidade $\lfloor \frac{3n}{2} \rfloor$.*

Somente em 2013 resultados para cliques de tamanhos distintos foram determinados, desta vez por Goddard e Wash [32], conforme mostra o próximo teorema.

Teorema 6.2 [32] *Seja $2 \leq n \leq m$. Então,*

$$\gamma^{ID}(K_n \square K_m) = \begin{cases} m + \lfloor n/2 \rfloor & \text{se } m < 3n/2, \\ 2m - n & \text{se } m \geq 3n/2. \end{cases}$$

Ainda para produtos Cartesianos que envolvem grafos completos (ou cliques), Hedetniemi [45] determinou, em 2016, alguns resultados para códigos identificadores mínimos em produtos Cartesianos de grafos completos com caminho, $K_n \square P_m$ para valores de $n = 3$, e $n \geq 5$.

Teorema 6.3 [45] *Seja $m \geq 4$. Então, $\gamma^{ID}(K_3 \square P_m) = m + 2 + \lfloor \frac{m-4}{4} \rfloor$.*

Teorema 6.4 [45] *Seja $n \geq 3$. Então,*

$$\gamma^{ID}(K_n \square P_3) = 2n - 2,$$

$$\gamma^{ID}(K_n \square P_4) = 2n.$$

Teorema 6.5 [45] *Seja $n \geq 5$.*

Se $k \geq 1$, então

$$\gamma^{ID}(K_n \square P_{4k+1}) = (2k+1)(n-1) + 1,$$

$$\gamma^{ID}(K_n \square P_{4k+2}) = (2k+2)(n-1),$$

$$\gamma^{ID}(K_n \square P_{4k+3}) = \begin{cases} (k+1) \cdot 2(n-1) & \text{se } n \geq k+3, \\ (k+1) \cdot 2(n-1) + 1 & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Se $k \geq 2$, então

$$\gamma^{ID}(K_n \square P_{4k}) = 2k(n-1) + 3.$$

Perceba que os grafos $K_4 \square P_m$ não foram considerados pelo autor, que afirma que provar um valor exato para um código identificador mínimo nestes grafos se mostrou mais complexo que os demais. Ainda se tratando de produtos Cartesianos de grafos completos com caminhos $K_n \square P_m$, Cruz e Cappelle [19] forneceram um algoritmo de programação dinâmica para computar códigos identificadores mínimos nesta classe. O algoritmo proposto pelos autores encontra os mesmos valores provados por Hedetniemi [45] e, além disso, possui complexidade de tempo $O(m)$ para o caso em que $n = 4$, que não havia sido considerado anteriormente. A partir do algoritmo desenvolvido, Cruz e Cappelle [19] propuseram a seguinte conjectura.

Conjectura 1 [19] *Seja $m \geq 3$. Então, $\gamma^{ID}(K_4 \square P_m) = 18 \lfloor \frac{m}{11} \rfloor + a$, onde a é um inteiro positivo e $a \leq 17$.*

Produtos Cartesianos de grafos G com caminhos P_m , $G \square P_m$, foram considerados por Rall e Wash [63]. Quando G é um grafo caminho, $G \square P_m$ é uma grade. Os autores consideraram este caso particular e mostram o limite superior apresentado no Teorema 6.6.

Teorema 6.6 [63] *Para quaisquer inteiros positivos m e k com $m \leq 3k$,*

$$\begin{aligned} \gamma^{ID}(P_m \square P_{3k}) &\leq mk + k \left\lceil \frac{m}{3} \right\rceil, \\ \gamma^{ID}(P_m \square P_{3k+1}) &\leq mk + k \left\lceil \frac{m}{3} \right\rceil + \left\lceil \frac{m}{2} \right\rceil, \\ \gamma^{ID}(P_m \square P_{3k+2}) &\leq m(k+1) + (k-1) \left\lceil \frac{m}{3} \right\rceil. \end{aligned}$$

Ainda para produtos cartesianos $P_m \square P_n$, Rall e Wash mostram em [63] um limite inferior para códigos identificadores quando $2 \leq m \leq n$, conforme exibido no Teorema 6.7

Teorema 6.7 [63] *Para inteiros positivos m e n tal que $2 \leq m \leq n$, $\gamma^{ID}(P_m \square P_n) \geq mn/3$.*

Rall e Wash [63] também determinaram um limite superior para o código identificador mínimo em produtos Cartesianos de grafos gerais G identificáveis com caminhos P_m .

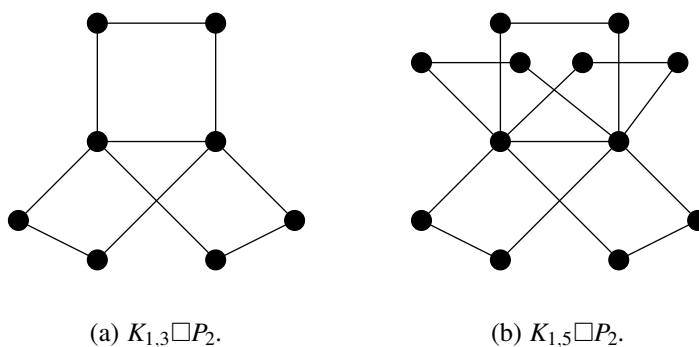
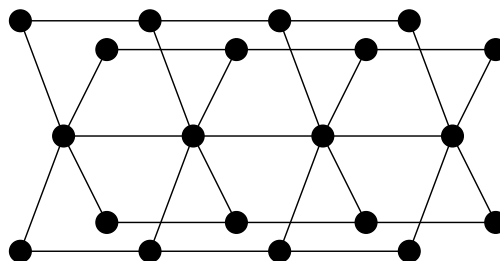
Teorema 6.8 [63] *Para qualquer grafo G identificável de ordem n e qualquer inteiro positivo $m \geq 3$,*

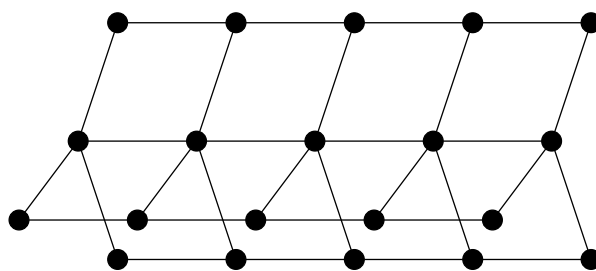
$$\gamma^{ID}(G \square P_m) \leq \min\{m\gamma^{ID}(G), m\gamma(G) + \left\lceil \frac{m}{3} \right\rceil (n - \gamma(G))\}.$$

Outros resultados existentes para códigos identificadores em produtos Cartesianos envolvem grades $P_n \square P_m$ infinitas. De forma geral, pesquisadores buscam determinar a **densidade** mínima de um código identificador (uma razão da quantidade de *codewords* sobre o número total de vértices) em tais grafos. Diversos grafos infinitos foram considerados, como as grades infinitas $P_\infty \square P_\infty$ [4, 15, 51, 67], grades infinitas d -dimensionais $P_\infty^{(1)} \square \dots \square P_\infty^{(d)}$ [67], grades hexagonais [15, 51, 67], e grades infinitas triangulares [15, 51].

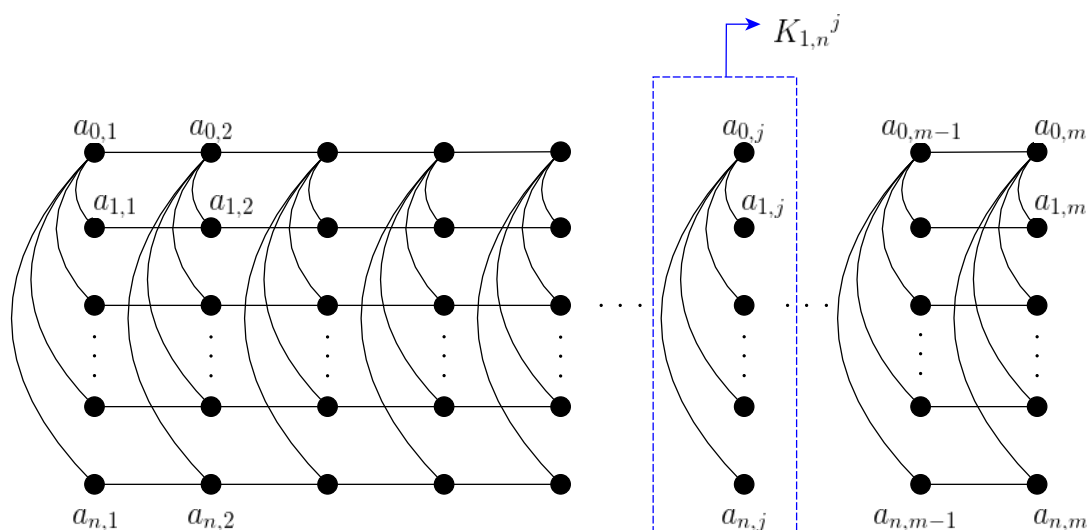
Curiosamente, os casos finitos de grafos grade são ainda mais difíceis de se obter resultados, assim como é o caso do número de dominação em grades, que somente em 2011 foi completamente determinado [33], apesar de dominação ser um dos problemas mais antigo e estudado na Teoria dos Grafos. Uma vez que um código identificador é também um conjunto dominante, fica evidente a dificuldade do problema.

Neste trabalho, estudamos códigos identificadores em produtos Cartesianos de grafos estrela com caminhos, denotados por $K_{1,n} \square P_m$ e conhecidos como grafos **livro**. Relembre que um grafo estrela $K_{1,n}$ pode ser definido como um corona $K_1 \circ \bar{K}_n$. Na Figura 6.1 mostramos alguns exemplos de grafos livro.

(a) $K_{1,3} \square P_2$.(b) $K_{1,5} \square P_2$.(c) $K_{1,4} \square P_4$.

(d) $K_{1,3} \square P_5$.**Figura 6.1:** Alguns exemplos de grafos livro.

Grafos livro podem ser ilustrados de diversas maneiras. Para as demonstrações contidas neste trabalho, consideramos grafos livro ilustrados de maneira similar à uma matriz, conforme exibido na Figura 6.2. Assim, consideramos um grafo $K_{1,n} \square P_m$ como uma matriz de $(n+1) \times m$ elementos, cujos vértices $a_{i,j}$ são identificados através dos índices da matriz, com $0 \leq i \leq n$ e $1 \leq j \leq m$. A linha $i=0$ é composta pelos vértices de grau n de cada uma das m cópias de $K_{1,n}$. Por $K_{1,n}^j$, nos referimos ao subgrafo de $K_{1,n} \square P_m$ referente à j -ésima cópia de $K_{1,n}$.

**Figura 6.2:** Representação de um grafo $K_{1,n} \square P_m$ em forma matricial.

Com o objetivo de tornar as ilustrações visualmente mais simples, as arestas que ligam a linha $i=0$ às linhas $i=1, \dots, n$ serão omitidas. Assim, o grafo da Figura 6.2 será representado neste trabalho como ilustrado na Figura 6.3.

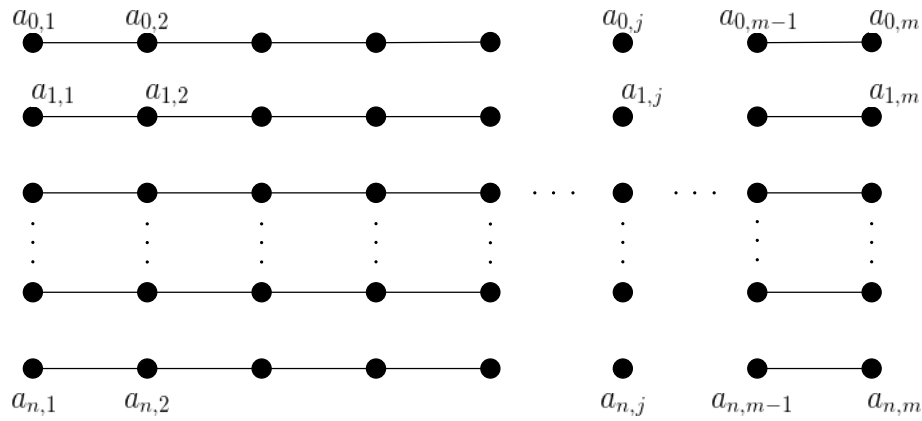


Figura 6.3: Representação adotada neste trabalho para ilustrar um grafo $K_{1,n} \square P_m$.

Antes de prosseguirmos para os resultados, enunciamos a seguir um processo para construção de um código identificador em um grafo $K_{1,3} \square P_m$. Os resultados obtidos consideram produtos Cartesianos de grafos estrela com caminhos cujos conjuntos C^* foram construídos a partir deste processo de construção.

6.1 Processo de construção de um conjunto $C^* \subseteq V(K_{1,3} \square P_m)$

O processo de construção do conjunto C^* para grafos $K_{1,3} \square P_m$ detalhado nesta seção utiliza o grafo $K_{1,3} \square P_8$ e seu código identificador como padrão para a geração de códigos identificadores em grafos $K_{1,3} \square P_k$, em que $2 \leq k \leq m$. Para grafos em que m não é múltiplo de 8, um conjunto adicional de padrões, para cada valor entre 1 e 7 fazem-se necessários. Visto que os vértices utilizados para a criação do conjunto C^* são todos *codewords*, segue que o conjunto C^* obtido ao final desta construção também é um código identificador.

Na Figura 6.4, mostramos o grafo $K_{1,3} \square P_8$, cujos vértices preenchidos em preto representam um código identificador mínimo (a verificação fica a cargo do leitor). Sejam $m \geq 2$, $k = \lfloor \frac{m}{8} \rfloor$ e seja $y = m \bmod 8$. Podemos construir um código C^* em um grafo $K_{1,3} \square P_m$, onde $m = 8k$, ou seja, onde m é um múltiplo de 8, através de k cópias sucessivas do grafo $K_{1,3} \square P_8$ da Figura 6.4. Quando $k = 1$, o grafo se resume ao grafo apresentado na Figura 6.4. A Figura 6.5 exemplifica o código identificador no grafo $K_{1,3} \square P_{16}$, caso em que $k = 2$. As arestas pontilhadas apresentadas na figura indicam o local de junção das duas cópias sucessivas, e os quadros tracejados indicam a cópia k de $K_{1,3} \square P_8$.

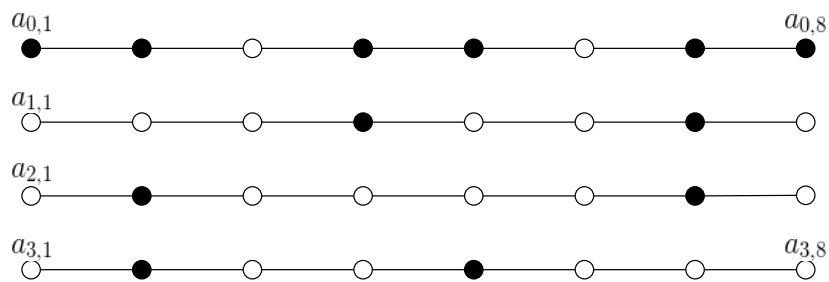


Figura 6.4: Código identificador em $K_{1,3} \square P_8$, indicado pelos vértices preenchidos em preto.

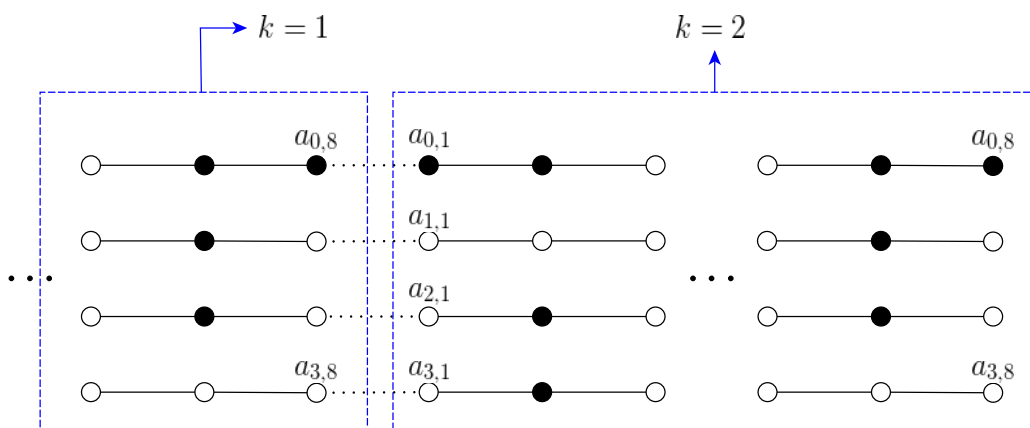


Figura 6.5: Exemplo de construção de um código identificador no grafo $K_{1,3} \square P_{16}$, em que 2 cópias de $K_{1,3} \square P_8$ são agrupadas lado a lado.

Daqui em diante, detalhamos o processo de construção de um conjunto C^* em um grafo $K_{1,3} \square P_m$, em que m não é múltiplo de 8. Perceba que, neste caso, podemos dizer que $m = 8k + y$, onde k representa a quantidade de cópias do grafo $K_{1,3} \square P_8$ que se encaixam no grafo $K_{1,3} \square P_m$, e y varia de 1 até 7. Chamaremos de C_x , com $1 \leq x \leq k$, o código identificador de cada subgrafo $K_{1,3} \square P_8$ de $K_{1,3} \square P_{8k}$. Note que, se $y = 0$, então $m = 8k$ e o conjunto C^* desejado que contempla os vértices do grafo $K_{1,3} \square P_{8k}$ é $C^* = C_1 \cup C_2 \cup \dots \cup C_k$.

Quando $y \geq 2$, o grafo $K_{1,3} \square P_m$ é equivalente a k cópias sucessivas do grafo $K_{1,3} \square P_8$, e um conjunto adicional de *codewords* faz-se necessário para identificá-lo. Mostramos inicialmente 6 diferentes padrões necessários para a construção do código identificador C^* desejado, todos exibidos na Figura 6.6. O sétimo padrão será tratado logo mais. Para cada grafo apresentado na figura, ao qual denominaremos G_y , o conjunto C_y , identificado através dos vértices preenchidos em preto, representa o código identificador do padrão y . É fácil verificar que os códigos identificadores apresentados são mínimos em cada grafo.

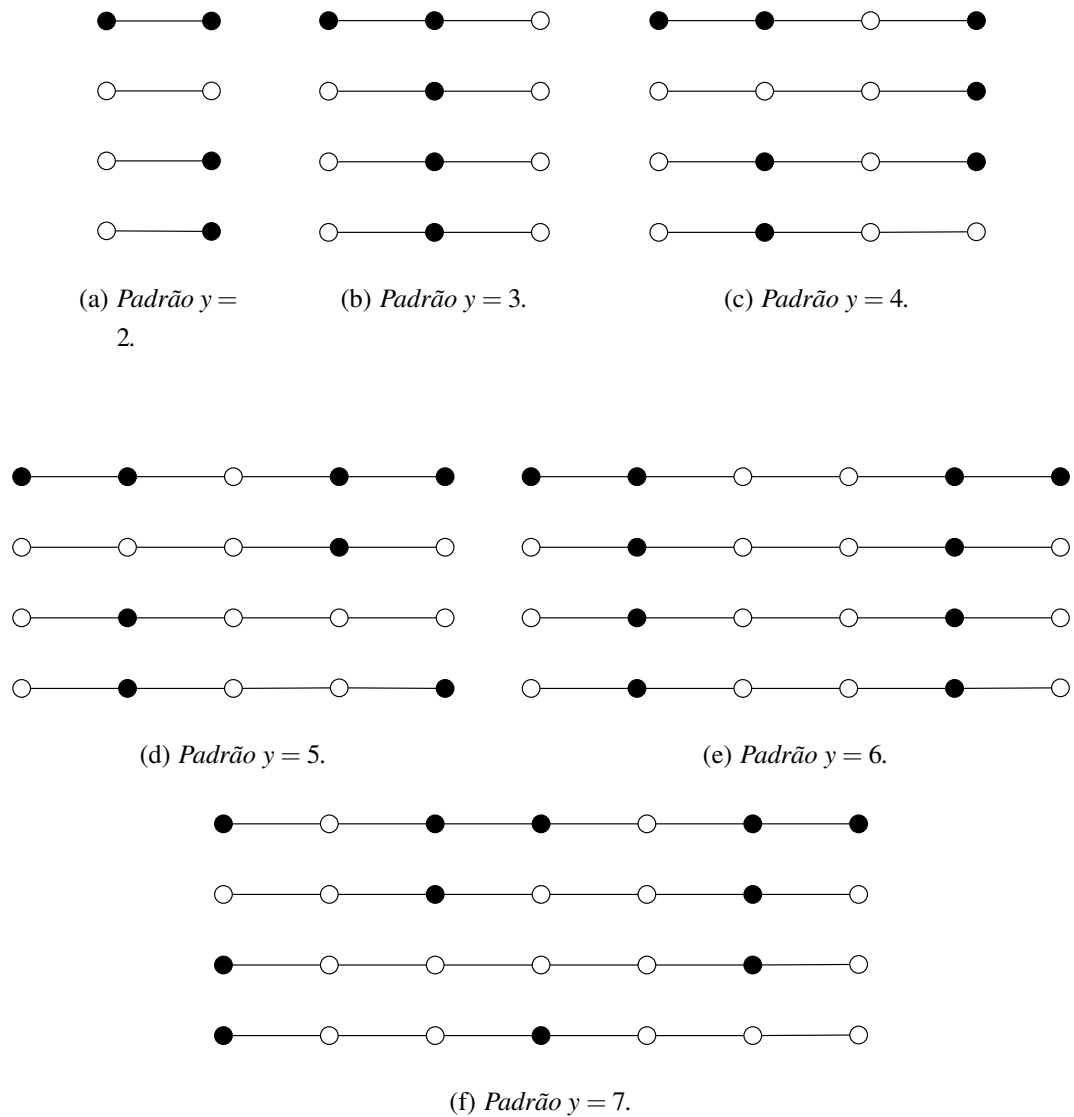
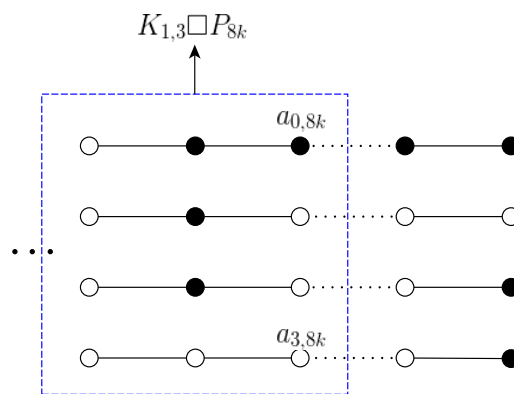
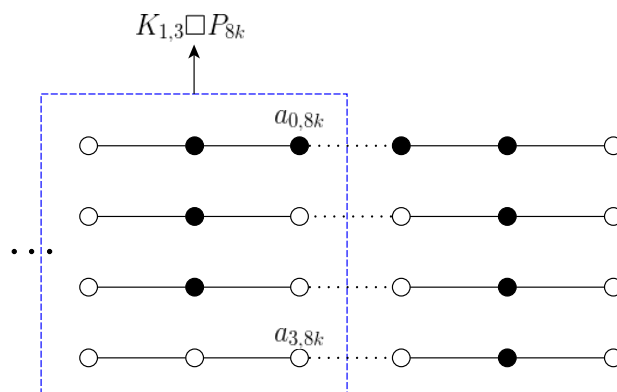
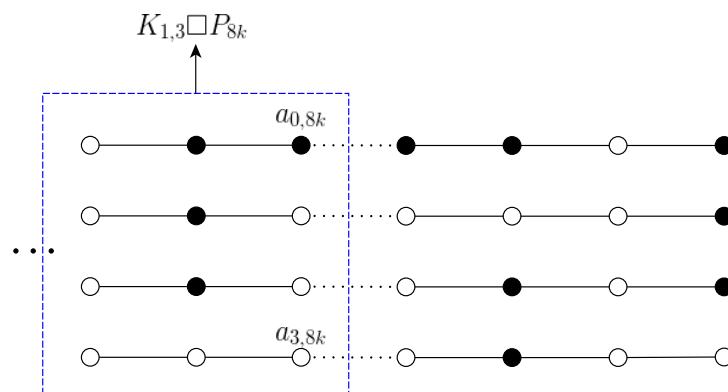


Figura 6.6: Grafos G_y com os padrões adicionais necessários para construção de um conjunto C^* no grafo $K_{1,3} \square P_m$ com $m = 8k + y$.

A fim de ilustrar o grafo $K_{1,3} \square P_m$, onde $m = 8k + y$, observe a Figura 6.7, cujas arestas pontilhadas indicam o local de junção entre o grafo $K_{1,3} \square P_{8k}$, onde o extremo direito deste grafo é apresentado dentro de um quadro tracejado, e os diferentes padrões. Para estes grafos da figura, o conjunto C^* desejado é equivalente a $C^* = \{C_1 \cup C_2 \cup \dots \cup C_k \cup C_y\}$.

(a) Grafo $K_{1,3} \square P_m$ com $m = 8k + 2$.(b) Grafo $K_{1,3} \square P_m$ com $m = 8k + 3$.(c) Grafo $K_{1,3} \square P_m$ com $m = 8k + 4$.

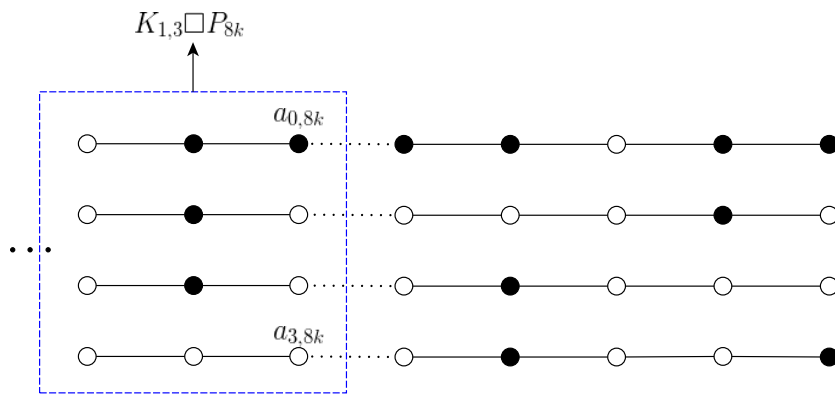
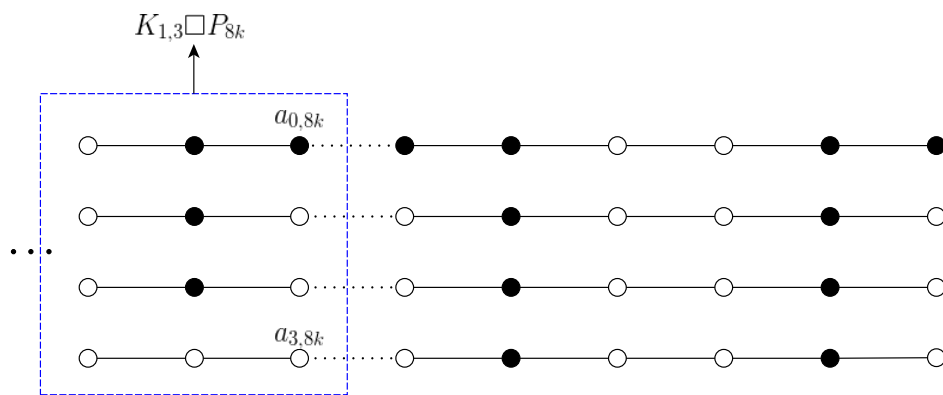
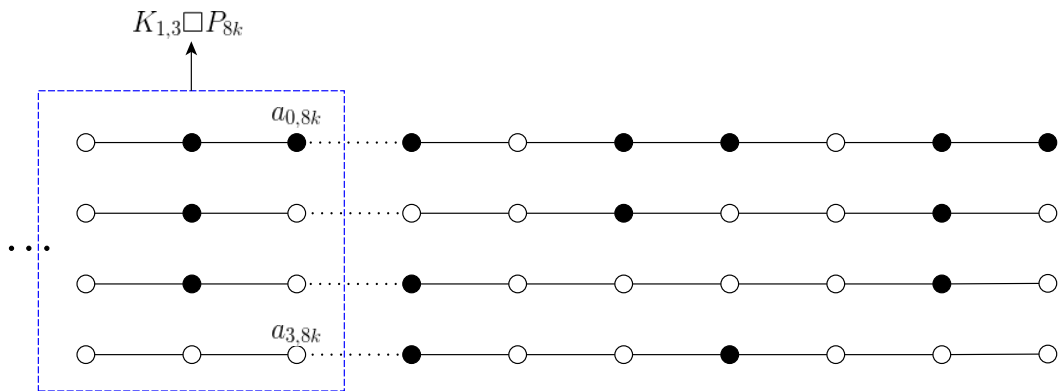
(d) Grafo $K_{1,3} \square P_m$ com $m = 8k + 7$.(e) Grafo $K_{1,3} \square P_m$ com $m = 8k + 6$.(f) Grafo $K_{1,3} \square P_m$ com $m = 8k + 7$.

Figura 6.7: Grafos $K_{1,3} \square P_m$, em que $m = 8k + y$, com $y \in \{2, \dots, 7\}$.

O caso em que $y = 1$ é especial e é tratado isoladamente. Neste caso, o conjunto C^* para o grafo $K_{1,3} \square P_m$, em que $m = 8k + 1$, considera o grafo formado por $k - 1$ cópias do grafo $K_{1,3} \square P_8$ lado a lado, ligada a uma cópia do grafo $K_{1,3} \square P_9$ exibido na Figura 6.8. Os vértices preenchidos em preto na figura indicam o código identificador C_y para o

padrão $y = 1$, e o conjunto desejado é equivalente a $C^* = \{C_1 \cup \dots \cup C_{k-1} \cup C_y\}$. Na Figura 6.9, ilustramos o grafo $K_{1,3} \square P_m$, em que $m = 8k + 1$.

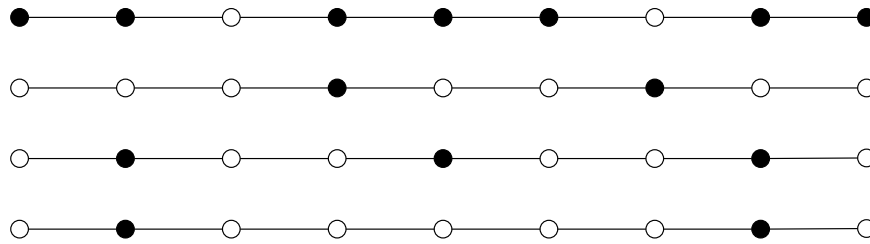


Figura 6.8: Padrão adicional necessário para construção de um código identificador no grafo $K_{1,3} \square P_m$, em que $m = 8k + 1$.

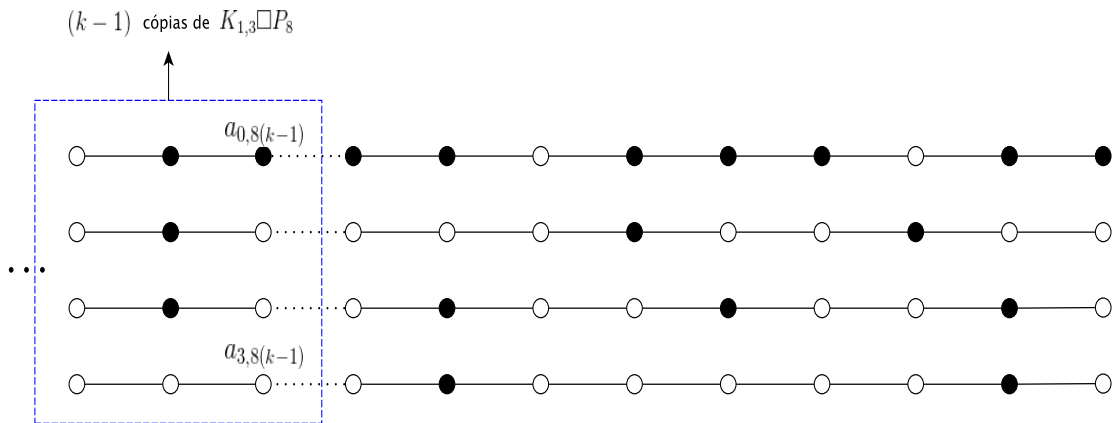


Figura 6.9: Ilustração do grafo $K_{1,3} \square P_m$, em que $m = 8k + 1$.

Perceba que, se $k = 0$, então o grafo $K_{1,3} \square P_m$ não contém nenhuma cópia do grafo $K_{1,3} \square P_8$, e se resume ao grafo cujo padrão corresponde a y . A construção descrita nesta seção gera um código identificador em um grafo $C^* \subseteq V(K_{1,3} \square P_m)$.

6.2 Resultados em Produtos Cartesianos

Antes de prosseguirmos para o resultado final, apresentamos uma proposição necessária para a construção das provas seguintes. Os resultados desta seção consideram $0 \leq i \leq n$, $1 \leq j \leq m$, $K_{1,n}^j$ refere-se à j -ésima cópia do grafo $K_{1,n}$ em $K_{1,n} \square P_m$, e C^* é um conjunto dominante em um grafo $K_{1,3} \square P_m$ obtido através da construção descrita na Seção 6.1.

Proposição 6.9 *Seja G um grafo, e sejam G_1 e G_2 subgrafos induzidos de G , tal que $V(G) = V(G_1) \cup V(G_2)$. Sejam C_1 e C_2 códigos identificadores em G_1 e G_2 , respectiva-*

mente, e seja $C = C_1 \cup C_2$. Se, para quaisquer dois vértices u, v , tal que $u \in G_1$ e $v \in G_2$, o conjunto C separa u, v , então C é um código identificador em G .

Prova. Como C_1 e C_2 são códigos identificadores, segue que C é um conjunto dominante. Sabemos que para quaisquer dois vértices u, v , tal que $u \in G_1$ e $v \in G_2$, o conjunto C separa u, v . Então, para que C seja um código identificador, também é preciso garantir que C separe $u, v \in V(G_1)$ (ou $u, v \in V(G_2)$).

Sabemos que C_1 é um código identificador em G_1 . Logo, $\forall u, v \in V(G_1)$, $N[u] \cap C \neq N[v] \cap C$ e existe pelo menos um vértice $a \in V(G_1)$ tal que $a \in (N[u] \cap C_1) \Delta (N[v] \cap C_1)$. No entanto, visto que G_1 é um subgrafo induzido de G , então, mesmo que u e v tenham os mesmos vizinhos em $G_2 \subseteq G$, o vértice $a \in C$ continua a separar os vértices u, v . Ou seja, o conjunto C separa $u, v \in V(G_1)$. O argumento é análogo para dois vértices $u, v \in V(G_2)$. Portanto, para quaisquer dois vértices $u, v \in V(G)$, o conjunto C separa u, v , e C é um código identificador. \square

O primeiro resultado para produtos Cartesianos determinado durante esta pesquisa refere-se a grafos $K_{1,3} \square P_m$, com $m \geq 1$. Para estes grafos, um limite superior de um código identificador foi determinado. O Teorema 6.10 considera grafos $K_{1,3} \square P_{8k}$, o Teorema 6.11 considera grafos $K_{1,3} \square P_{8k+y}$, com $y \in \{2, 3, \dots, 7\}$ e, finalmente, o Teorema 6.12 considera grafos $K_{1,3} \square P_{8k+1}$. O Corolário 6.13 sintetiza os resultados dos Teoremas 6.11 e 6.12.

Teorema 6.10 *Se $m \geq 8$, então $\gamma^{ID}(K_{1,3} \square P_{m=8k}) \leq \frac{3m}{2}$.*

Prova. O código C apresentado na Figura 6.4 é um código identificador para $K_{1,3} \square P_8$. Quando $k = 1$, temos que $m = 8$, e o código identificador exibido na Figura 6.4 satisfaz a igualdade do Teorema. Queremos mostrar que a construção descrita na Seção 6.1 obtém um código identificador C^* em $K_{1,3} \square P_m$, de cardinalidade $3m/2$, com $m = 8k$ e $k \geq 2$.

Visto que C é um código identificador, então, sem perda de generalidade, podemos afirmar que o conjunto C^* gerado é um conjunto dominante. Pela Proposição 6.9, para verificar se C^* separa todos os vértices de $K_{1,3} \square P_{8k}$ é suficiente considerar apenas o subgrafo de $K_{1,3} \square P_{8k}$ apresentado na Figura 6.10, referente à junção de um grafo $K_{1,3} \square P_8$ a outro $K_{1,3} \square P_8$, indicada através das arestas pontilhadas.

$$\begin{aligned} \text{se } j = 0, K_{1,3}^j &= K_{1,3}^{j-1} = \emptyset, \\ \text{se } j - 1 \leq 0, K_{1,3}^{j-1} &= \emptyset. \end{aligned}$$

Assim, considerando os padrões $y \in \{2, \dots, 7\}$, e agrupando os padrões cujas duas primeiras colunas iniciais são semelhantes, podemos reduzir a análise para 3 casos. Em cada um dos casos, para dois vértices u, v tal que $u \in K_{1,3} \square P_{8k}$, e $v \in G_y$, com $d(u, v) \leq 2$, é fácil verificar que $N[u] \cap C \neq N[v] \cap C$.

Caso 1: $y \in \{2, 4, 5\}$, indicado pela Figura 6.11.

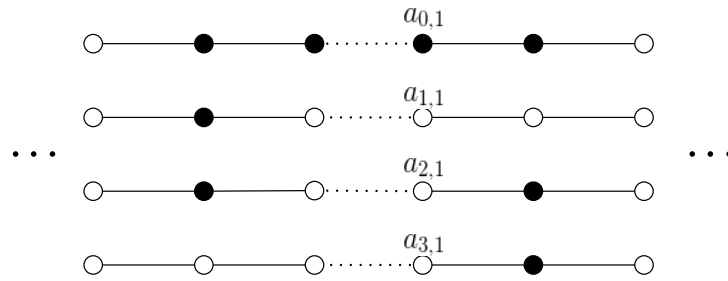


Figura 6.11: Junção do grafo padrão G_y , com $y \in \{2, 4, 5\}$, ao grafo $K_{1,3} \square P_{8k}$.

Caso 2: $y \in \{3, 6\}$, indicado pela Figura 6.12.

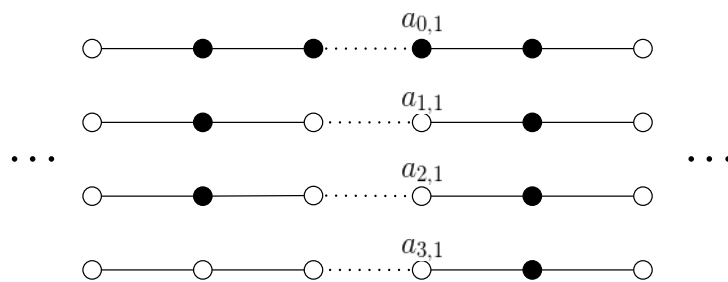


Figura 6.12: Junção do grafo padrão G_y , com $y \in \{3, 6\}$, ao grafo $K_{1,3} \square P_{8k}$.

Caso 3: $y \in \{7\}$, indicado pela Figura 6.13.

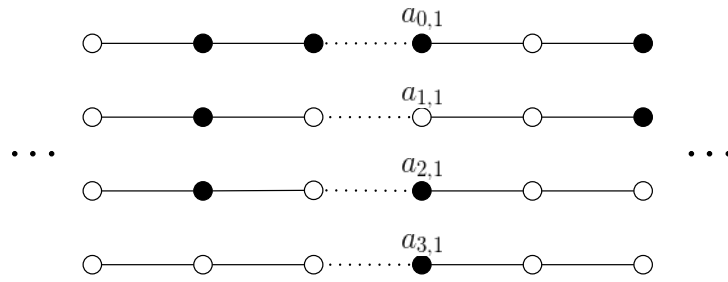


Figura 6.13: Junção do grafo padrão G_y , com $y \in \{7\}$, ao grafo $K_{1,3} \square P_{8k}$.

Perceba que nas Figuras 6.11, 6.12 e 6.13, as cópias $K_{1,3}^{j-2}$ e $K_{1,3}^{j+3}$ também são ilustradas. Apesar de a análise de vértices presentes especificamente nestas cópias não serem necessárias para verificar se C^* é um código identificador, as cópias são apresentadas na imagem pois os vértices destas cópias fazem parte da vizinhança dos vértices das cópias $K_{1,3}^{j-1}$ e $K_{1,3}^{j+1}$ e, caso possuam *codewords*, influenciam na análise das colunas em questão.

Verificado que C é um código identificador, resta agora mostrar que $|C| = \lfloor 3m/2 \rfloor + 1$.

Sabemos que $|C| = 12 \lfloor m/8 \rfloor + |C_y|$. Mas $k = \lfloor m/8 \rfloor$ e, pela Figura 6.6, temos que $|C_2| = 4$, $|C_3| = 5$, $|C_4| = 7$, $|C_5| = 8$, $|C_6| = 10$, e $|C_7| = 11$. Além disso, podemos verificar que $\lfloor 3y/2 \rfloor + 1 = |C_y|$. Assim, segue que

$$\begin{aligned} |C| &= 12 \left\lfloor \frac{m}{8} \right\rfloor + |C_y| \\ &= 12k + |C_y| \\ &= 12k + \left\lfloor \frac{3y}{2} \right\rfloor + 1. \end{aligned} \tag{6-1}$$

Visto que $m = 8k + y$, podemos reescrever a Equação 6-1 como

$$\begin{aligned} 12k + \left\lfloor \frac{3y}{2} \right\rfloor + 1 &= \left\lfloor \frac{24k}{2} + \frac{3y}{2} \right\rfloor + 1 \\ &= \left\lfloor \frac{3(8k+y)}{2} \right\rfloor + 1 \\ &= \left\lfloor \frac{3m}{2} \right\rfloor + 1, \end{aligned}$$

como queríamos demonstrar. Uma vez que existe um código identificador C em $K_{1,3} \square P_m$ de tamanho $\lfloor 3m/2 \rfloor + 1$, então $\gamma^{ID}(K_{1,3} \square P_m) \leq \lfloor 3m/2 \rfloor + 1$. \square

Teorema 6.12 *Sejam $m = 8k + 1$ e $k \geq 1$. Então, $\gamma^{ID}(K_{1,3} \square P_m) \leq \lfloor \frac{3m}{2} \rfloor + 1$.*

Prova. Quando $m = 8k + 1$, o grafo $K_{1,3} \square P_m$ é similar ao grafo $K_{1,3} \square P_{8(k-1)+9}$ mostrado na Figura 6.9. Seja C^* o código identificador do grafo $K_{1,3} \square P_{8(k-1)}$, construído conforme a construção descrita na Seção 6.1. Sejam $y = 1$, C_y o código identificador mostrado na Figura 6.8, e seja $C = C^* \cup C_y$. A prova de que C é um código identificador segue de maneira análoga à descrita para o caso 1 do Teorema 6.11, em que $y \in \{2, 4, 5\}$.

Resta mostrar que $|C| = \lfloor 3m/2 \rfloor + 1$. Sabemos que

$$|C| = 12(k-1) + |C_y| = 12k - 12 + 14 = 12k + 2.$$

Como $\lfloor 3y/2 \rfloor + 1 = 2$, utilizando o mesmo raciocínio mostrado na prova do Teorema 6.11, temos que $|C| = 12k + \lfloor 3y/2 \rfloor + 1 = \lfloor 3m/2 \rfloor + 1$. Uma vez que existe um código identificador C em $K_{1,3} \square P_m$ de cardinalidade $\lfloor 3m/2 \rfloor + 1$, então $\gamma^{ID}(K_{1,3} \square P_m) \leq \lfloor 3m/2 \rfloor + 1$. \square

Dos Teoremas 6.11 e 6.12, temos o seguinte resultado.

Corolário 6.13 *Sejam $m \geq 2$, e $y = m \bmod 8$ tal que $y \neq 0$. Então, $\gamma^{ID}(K_{1,3} \square P_m) \leq \lfloor \frac{3m}{2} \rfloor + 1$.*

Até o momento em que este trabalho foi redigido, não obtivemos resultados que comprovem que $\gamma^{ID}(K_{1,3} \square P_m) \geq \lfloor \frac{3m}{2} \rfloor + 1$. No entanto, com base no estudo realizado, acreditamos que isso seja verdade. Assim, apresentamos a seguinte conjectura para a cardinalidade mínima de códigos identificadores em grafos $K_{1,3} \square P_m$.

Conjectura 2 *Sejam $m \geq 2$, e $y = m \bmod 8$ tal que $y \neq 0$. Então, $\gamma^{ID}(K_{1,3} \square P_m) = \lfloor \frac{3m}{2} \rfloor + 1$.*

Os próximos resultados consideram grafos estrela $K_{1,n}$, não se restringindo aos produtos Cartesianos do estrela $K_{1,3}$ com P_m , com $n \geq 3$ e $m \geq 1$. Primeiramente, mostramos a Proposição 6.14 que identifica uma condição para que um código identificador C separe uma cópia $K_{1,n}^j$ no grafo $K_{1,n} \square P_m$ quando um vértice da primeira linha do grafo pertence a C . Em seguida, o Teorema 6.15 apresenta um limite superior para o tamanho de um código identificador mínimo neste grafo.

Proposição 6.14 *Seja $a_{0,j} \in K_{1,n}^j$ e seja C um código identificador em $K_{1,n} \square P_m$, com $n \geq 3$ e $m \geq 1$. Se $a_{0,j} \in C$, então $|N[K_{1,n}^j] \cap C| \geq n$.*

Prova. Dados dois vértices $u, v \in K_{1,n}^j$, tal que $u \neq a_{0,j}$ e $v \neq a_{0,j}$, temos que $N[u] \cap N[v] = \{a_{0,j}\}$. Se $a_{0,j} \in C$, então para que C separe os vértices u e v , então

poelo menos um de u, v deve estar em C ou ter um vizinho diferente de $a_{0,j}$ que esteja em C . Assim, para que C separe os n vértices restantes da cópia $K_{1,n}^j$, pelo menos $n - 1$ destes vértices devem estar em C ou ter um vizinho diferente de $a_{0,j}$ que esteja em C . Portanto, $|N[K_{1,n}^j] \cap C| \geq n$. \square

A Figura 6.14 ilustra o Lema 6.14 para o caso em que $n = 3$. Perceba que um subgrafo $K_{i,n}^j$ pode possuir cópias vizinhas à esquerda e à direita, desde que $j \neq 1$ e $j \neq m$. Em cada um dos grafos da Figura 6.14, exibe-se uma cópia $K_{1,3}^j$ em que $a_{0,j} \in C$, representado pelo vértice preenchido em preto. Para que C seja um código identificador, C deve separar os vértices de $K_{1,3}^j$ em $K_{1,3} \square P_m$. Os vértices preenchidos em verde representam os quatro diferentes cenários possíveis (considerando-se permutações de linhas e colunas) para que C separe os vértices de $K_{1,3}^j$.

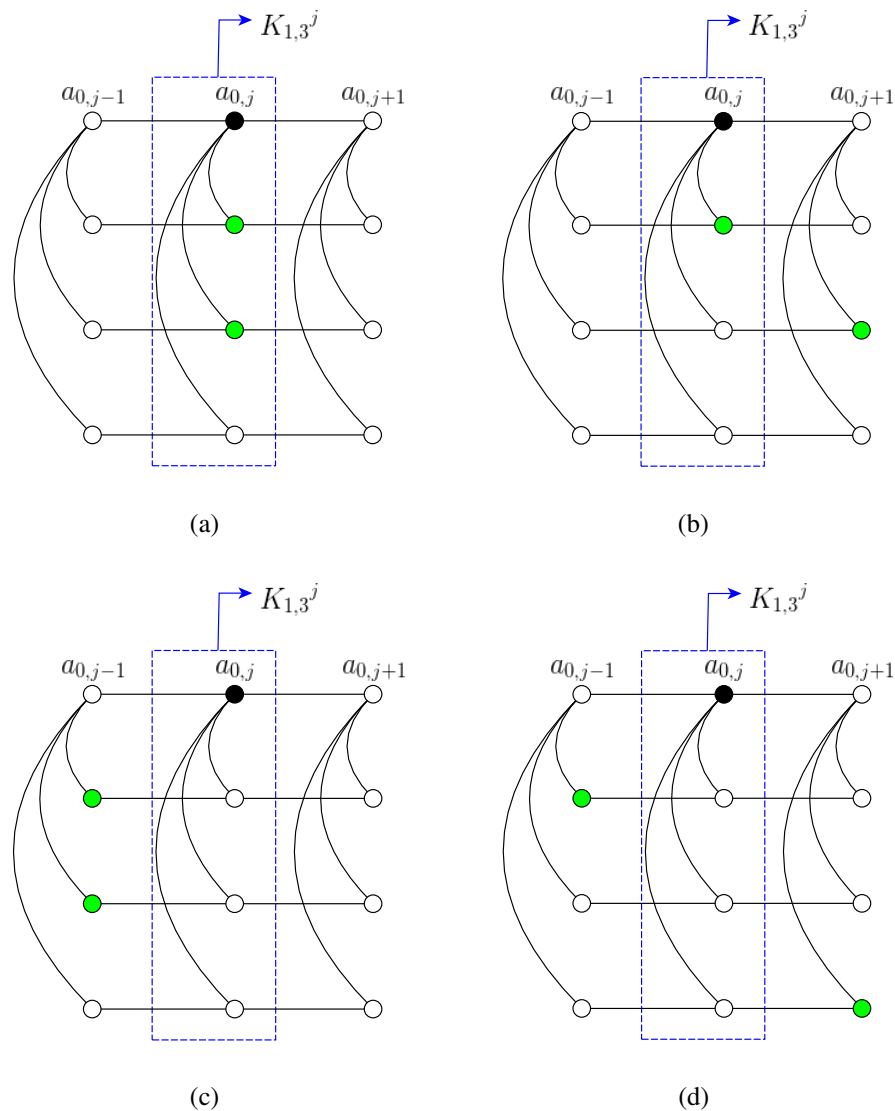
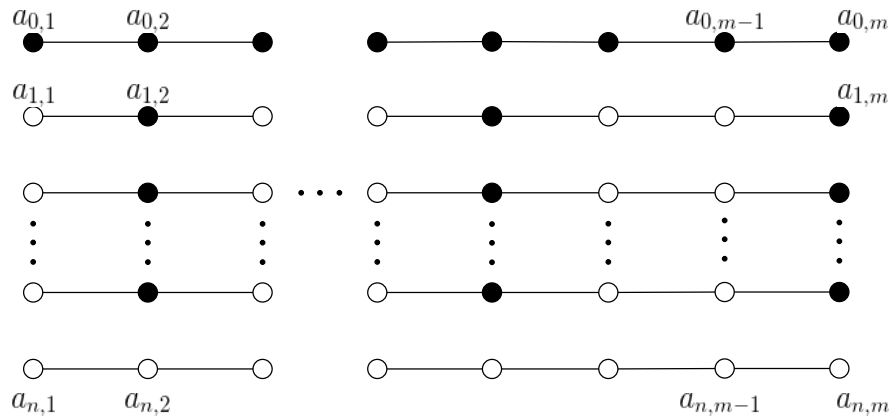


Figura 6.14: Ilustração do Lema 6.14, mostrando os cenários possíveis em um grafo $K_{1,3} \square P_m$.

(c) Caso $m \bmod 3 = 2$.**Figura 6.15:** Exemplos do conjunto C quando $m \bmod 3 \in \{0, 1, 2\}$.

Uma vez que todos os vértices $a_{0,j}$ fazem parte do conjunto C , então C é um conjunto dominante em $K_{1,n} \square P_m$. Além disso, para todas as m cópias de $K_{1,n}$, temos que $|N[K_{1,n}^j] \cap C| \geq n$ vértices, satisfazendo a condição prevista pela Proposição 6.14. Finalmente, uma rápida análise permite verificar que, para quaisquer dois vértices $u, v \in K_{1,n} \square P_m$, $N[u] \cap C \neq N[v] \cap C$, comprovando que C também é um conjunto separador e, portanto, um código identificador no grafo.

Sabemos que $|C_1| = m$, $|C_2| = (n-1)\lfloor m/3 \rfloor$, e $|C_3| = (n-1)$. Então,

$$|C_1| + |C_2| = m + (n-1)\lfloor m/3 \rfloor, \quad (6-2)$$

e

$$|C_1| + |C_2| + |C_3| = m + (n-1)\lfloor m/3 \rfloor + (n-1). \quad (6-3)$$

Mas $C = C_1 \cup C_2$ apenas quando $m \bmod 3 = 0$. Além disso, quando $C = C_1 \cup C_2 \cup C_3$, temos que $\lfloor m/3 \rfloor + 1 = \lceil m/3 \rceil$. Logo, a Equação 6-2 e a Equação 6-3 podem ser reescritas como mostrado na Equação 6-4,

$$|C| = m + (n-1)\lceil m/3 \rceil. \quad (6-4)$$

Portanto, C é um código identificador em $K_{1,n} \square P_m$ de cardinalidade $m + (n-1)\lceil m/3 \rceil$, e segue que $\gamma^D(K_{1,n} \square P_m) \leq m + (n-1)\lceil m/3 \rceil$, como desejado. \square

O limite apresentado no Teorema 6.15 é justo para infinitos grafos, tais como grafos $K_{1,n} \square P_3$. Ainda assim, o resultado apresentado pode ser melhorado, visto que o Corolário 6.13 atinge valores menores que os apresentados pelo teorema para o caso em que $n = 3$. Acredita-se que melhorias também sejam possíveis para outros valores de n , que poderão ser investigados em trabalhos futuros.

Códigos Identificadores em Prismas Complementares

Introduzido por Haynes et al. [42], o **produto complementar** é um tipo de produto de grafo que generaliza produtos Cartesianos. Uma subclasse de produtos complementares que vem ganhando muita atenção é a de **prismas complementares**, principalmente em assuntos relacionados a dominação, como pode ser evidenciado em [14, 20, 34, 43, 53]. Neste capítulo, apresentamos os grafos prismas complementares e apresentamos o estado da arte para códigos identificadores neste tipo de grafos. Finalmente, apresentamos nossa contribuição com resultados para códigos identificadores nesta classe.

Prismas complementares são interessantes por abranger diversos grafos especiais. O corona $K_n \circ K_1$, por exemplo, é equivalente ao prisma complementar $K_n \overline{K}_n$. Outro exemplo é o grafo de Peterson, que é equivalente ao prisma complementar $C_5 \overline{C}_5$. Apesar da atenção que vem sendo dada a prismas complementares, são poucos os resultados existentes para códigos identificadores relacionados a este tipo de produto, mesmo para as classes de grafos mais simples. Neste capítulo, apresentamos com mais detalhes este tipo de produto, mostramos alguns resultados presentes na literatura acerca de códigos identificadores e apresentamos algumas contribuições sobre códigos identificadores em prismas complementares de grafos.

Vimos no Capítulo 2 que o complemento \overline{G} de um grafo simples G é um grafo com conjunto de vértices $V(G)$ e $uv \in E(\overline{G})$ se, e somente se, $uv \notin E(G)$. Dado um vértice $v \in V(G)$, utilizamos neste trabalho o termo **vértices correspondentes** para nos referir ao vértice correspondente a v em $V(\overline{G})$, e denotamos-o por \bar{v} . Para simplificação, dado um conjunto $A \subseteq V(G)$, dizemos que o conjunto \overline{A} representa o conjunto de vértices correspondentes em $V(\overline{G})$.

O **prisma complementar** $G\overline{G}$ de um grafo G é o grafo formado pela união disjunta de G e o complemento \overline{G} através da adição de arestas de um emparelhamento perfeito entre os vértices correspondentes (com o mesmo rótulo) de G e \overline{G} . Na Figura 7.1 mostramos um exemplo de um grafo G , seu complemento \overline{G} , e seu prisma complementar

$G\bar{G}$. Perceba, em cada um dos grafos apresentados, o rótulo dos vértices e a ligação de um vértice de G ao seu vértice correspondente em \bar{G} no grafo $G\bar{G}$, indicada através das arestas tracejadas.

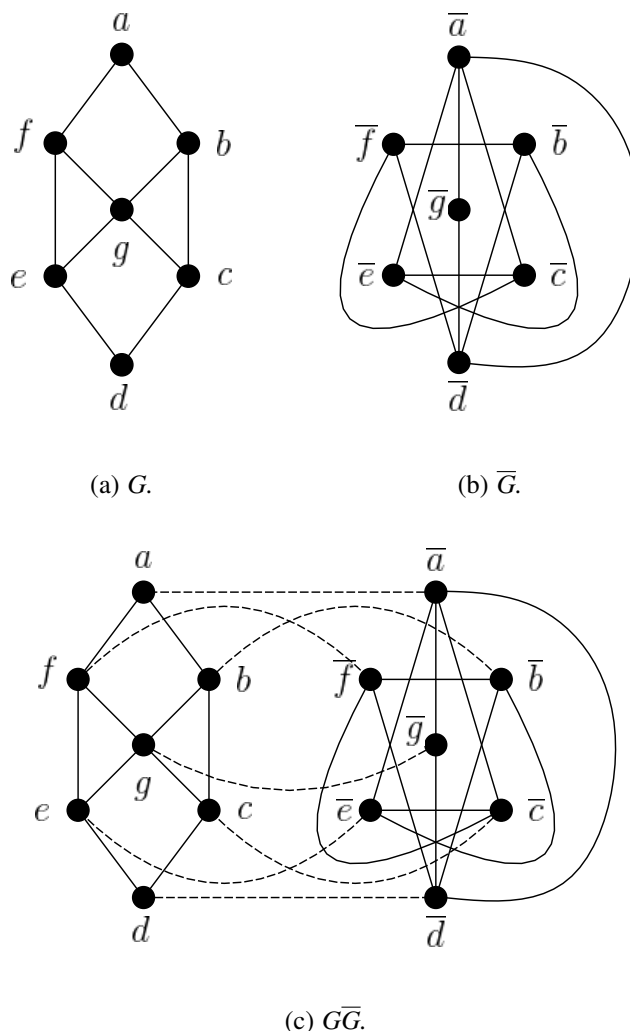


Figura 7.1: Um grafo G , seu complemento \bar{G} , e seu prisma complementar $G\bar{G}$.

Até o momento em que este trabalho foi redigido, os únicos dos quais temos conhecimento que pesquisaram códigos identificadores especificamente para prismas complementares de grafos foram Cappelle et al. [13], que obtiveram resultados acerca de códigos identificadores em prismas complementares de ciclos. Este resultado é apresentado a seguir.

Teorema 7.1 [13] *Seja C_n um ciclo com n vértices. Então, $\gamma^{ID}(C_n\bar{C}_n) = \frac{7}{9}n + c$, onde $-14 \leq c \leq \frac{16}{9}$ e $n \geq 18$.*

O resultado de Feng e Wang [23] para códigos identificadores mínimos em coronas $K_n \circ K_1$ apresentado no Teorema 5.5 também pode ser estendido como um

resultado para prismas complementares, uma vez que o corona $K_n \circ K_1$ é equivalente ao prisma complementar $K_n \overline{K_n}$ e, conseqüentemente, um código identificador mínimo em $K_n \overline{K_n}$ tem cardinalidade $\gamma^{ID}(K_n \overline{K_n}) = n + 1$. O resultado adaptado é enunciado a seguir.

Teorema 7.2 [23] *Seja K_n um grafo completo com $n \geq 2$ vértices. Então, $\gamma^{ID}(K_n \overline{K_n}) = n + 1$.*

Uma construção para códigos identificadores mínimos para prismas complementares de grafos completos pode ser facilmente encontrada. Seja K_n um grafo completo com n vértices, e seja $K_n \overline{K_n}$ seu prisma complementar, tal que $V = V(K_n) = \{v_1, \dots, v_n\}$ e $V' = V(\overline{K_n}) = \{u_1, \dots, u_n\}$. Um conjunto $C = \{V' \setminus u_1\} \cup \{v_1, v_2\}$ é um código identificador para prismas complementares $K_n \overline{K_n}$ de tamanho $\gamma^{ID}(K_n \overline{K_n})$. A Figura 7.2 ilustra essa construção para o grafo completo K_5 . Os vértices preenchidos em preto indicam um código identificador neste grafo com $n + 1$ codewords.

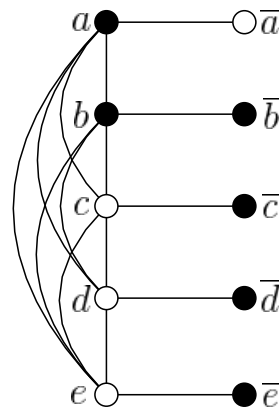


Figura 7.2: Ilustração de um código identificador mínimo para o grafo $K_5 \overline{K_5}$.

Nesta dissertação, contribuimos com alguns resultados sobre códigos identificadores em prismas complementares de grafos. Os resultados obtidos são apresentados na seção a seguir.

7.1 Resultados em Prismas Complementares

Primeiramente, mostramos que $G\overline{G}$ é um grafo identificável se, e somente se, G é um grafo com pelo menos $n \geq 2$ vértices.

Teorema 7.3 *O grafo $G\overline{G}$ é identificável se, e somente se, $n(G) \geq 2$.*

Prova.

(\Rightarrow) Seja G um grafo trivial. Então, $G\bar{G}$ é um grafo completo com 2 vértices. Sabemos que grafos completos não são identificáveis, pois todos os vértices são gêmeos. Logo, se $G\bar{G}$ é identificável, então $n(G) \geq 2$.

(\Leftarrow) Seja G um grafo com $n \geq 2$ vértices e seja $G\bar{G}$ seu prisma complementar. Para quaisquer dois vértices $\bar{u}, \bar{v} \in V(\bar{G})$ em $G\bar{G}$, temos que $\{u, v\} \subseteq (N_{G\bar{G}}[\bar{u}] \Delta N_{G\bar{G}}[\bar{v}])$, sendo que $u \in N_{G\bar{G}}[\bar{u}]$ e $v \in N_{G\bar{G}}[\bar{v}]$. O mesmo é válido para quaisquer dois vértices $u, v \in V(G)$ em $G\bar{G}$, pois $\{\bar{u}, \bar{v}\} \subseteq (N_{G\bar{G}}[u] \Delta N_{G\bar{G}}[v])$, com $\bar{u} \in N_{G\bar{G}}[u]$ e $\bar{v} \in N_{G\bar{G}}[v]$. Além disso, a aresta $u\bar{u}$ é a única aresta que liga um vértice $u \in V(G)$ ao grafo \bar{G} em $G\bar{G}$ e, conseqüentemente, para quaisquer dois vértices $u \in V(G)$ e $\bar{v} \in V(\bar{G})$ em $G\bar{G}$ tal que $u \neq v$, temos que $N_{G\bar{G}}[u] \neq N_{G\bar{G}}[\bar{v}]$. Assim, para quaisquer dois vértices $u, v \in V(G\bar{G})$, temos que $N_{G\bar{G}}[u] \neq N_{G\bar{G}}[v]$ e, portanto, $G\bar{G}$ é identificável. \square

No próximo teorema, mostramos que a menor cardinalidade possível de um código identificador em um grafo identificável $G\bar{G}$ é 3.

Teorema 7.4 *Seja G um grafo tal que $G\bar{G}$ é identificável. Então, $\gamma^D(G\bar{G}) \geq 3$.*

Prova. Seja n o número de vértices de G . Pelo Teorema 7.3, temos que $n \geq 2$. Além disso, pelo Teorema 3.1, segue que $\gamma^D(G\bar{G}) \geq \lceil \log_2(2n+1) \rceil \geq 3$. Portanto, $\gamma^D(G\bar{G}) \geq 3$. \square

A Figura 7.3 contém alguns grafos que satisfazem o Teorema 7.4. Na Figura 7.3(a), 7.3(b) e 7.3(c), mostramos grafos G com $n = 2$ e $n = 3$ vértices, tais que $\gamma^D(G\bar{G}) = 3$. Já na Figura 7.3(d) e 7.3(e), mostramos grafos completos G com $n = 3$ e $n = 4$ vértices em que $\gamma^D(G\bar{G}) > 3$. Em cada grafo apresentado, um código identificador pode ser obtido através dos vértices preenchidos em preto.

Nosso próximo resultado define um limite superior para $\gamma^D(G\bar{G})$, dado que G é um grafo conexo e identificável com $n \geq 3$ vértices.

Teorema 7.5 *Seja G um grafo conexo e identificável com $n \geq 3$ vértices. Então $V(G)$ é um código identificador de $G\bar{G}$ e $\gamma^D(G\bar{G}) \leq n$.*

Prova. Se G é um grafo identificável, então sabemos que $V(G)$ é um código identificador de G . Sabemos que $G\bar{G}$ é um grafo identificável (Teorema 7.3). Queremos provar que $V(G)$ também é um código identificador de $G\bar{G}$.

Seja $C = V(G)$. O conjunto C domina o grafo $G\bar{G}$ e separa todos os vértices de G em $G\bar{G}$. Ainda, visto que para qualquer vértice $\bar{u} \in V(\bar{G})$ em $G\bar{G}$, temos que $N_{G\bar{G}}[\bar{u}] \cap C = \{u\}$, então C separa todos os vértices de \bar{G} em $G\bar{G}$.

Resta verificar se C é um código que separa $V(G)$ de $V(\bar{G})$ em $G\bar{G}$. Sabemos que $N_{G\bar{G}}[v] \cap C = N_G[v] \cap C = N_G[v]$ e, uma vez que G é conexo e possui pelo menos 3

vértices, então $N_G[v] \geq 2$. Portanto, $(N_{G\bar{G}}[v] \cap C) \neq (N_{G\bar{G}}[\bar{v}] \cap C)$. Além disso, se $u \in V(G)$, $\bar{v} \in V(\bar{G})$ e $u \neq v$, então $(N_{G\bar{G}}[u] \cap C) \neq (N_{G\bar{G}}[\bar{v}] \cap C)$.

Portanto, para quaisquer dois vértices $u, v \in G\bar{G}$, temos que $(N_{G\bar{G}}[u] \cap C) \neq (N_{G\bar{G}}[v] \cap C)$, e $C = V(G)$ é um código identificador de $G\bar{G}$. \square

Dos Teoremas 7.3, 7.4 e 7.5, chega-se no resultado a seguir.

Corolário 7.6 *Se G é um grafo conexo e identificável com $n \geq 3$ vértices, então $G\bar{G}$ é um grafo identificável e*

$$3 \leq \gamma^{ID}(G\bar{G}) \leq n.$$

A Figura 7.4 exibe um exemplo de grafo em que $\gamma^{ID}(G\bar{G}) < n$. Na Figura 7.4(a) exibimos um grafo G conexo, identificável e com $n(G) = 8$; Já na Figura 7.4(b) mostramos o grafo complementar de G e, na Figura 7.4(c), ilustramos seu prisma complementar, cujas arestas tracejadas indicam as arestas que ligam um vértice v a seu vértice correspondente \bar{v} . Um código identificador de $n - 1$ vértices é indicado em $G\bar{G}$ através dos vértices preenchidos em preto.

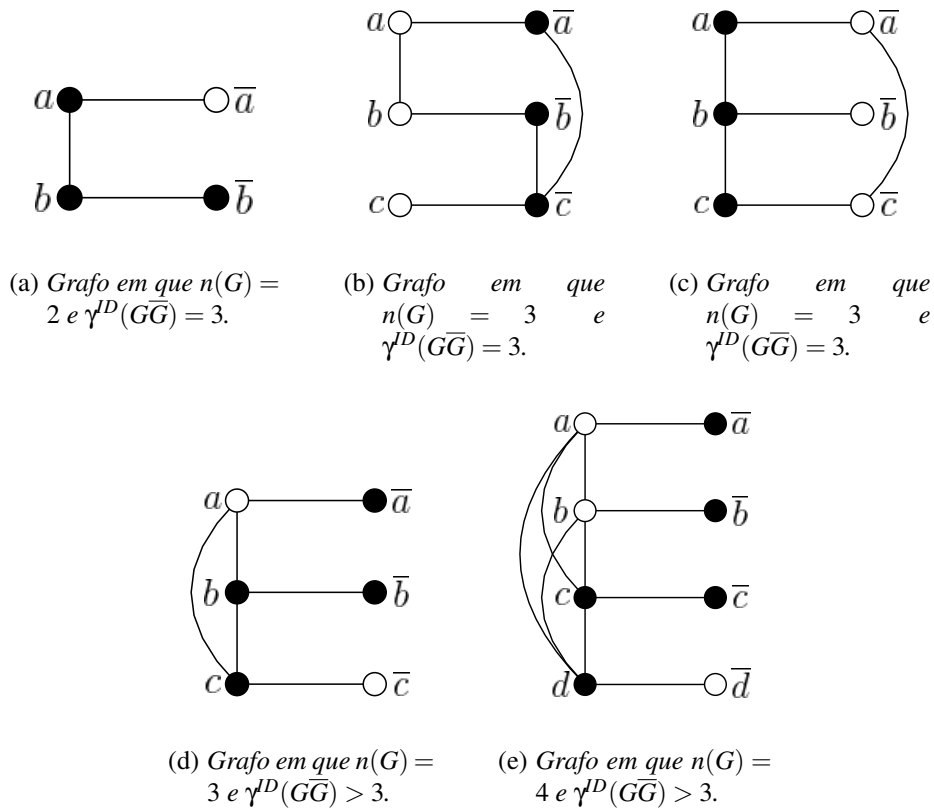


Figura 7.3: Exemplos de grafos em que $\gamma^{ID}(G\bar{G}) > 3$.

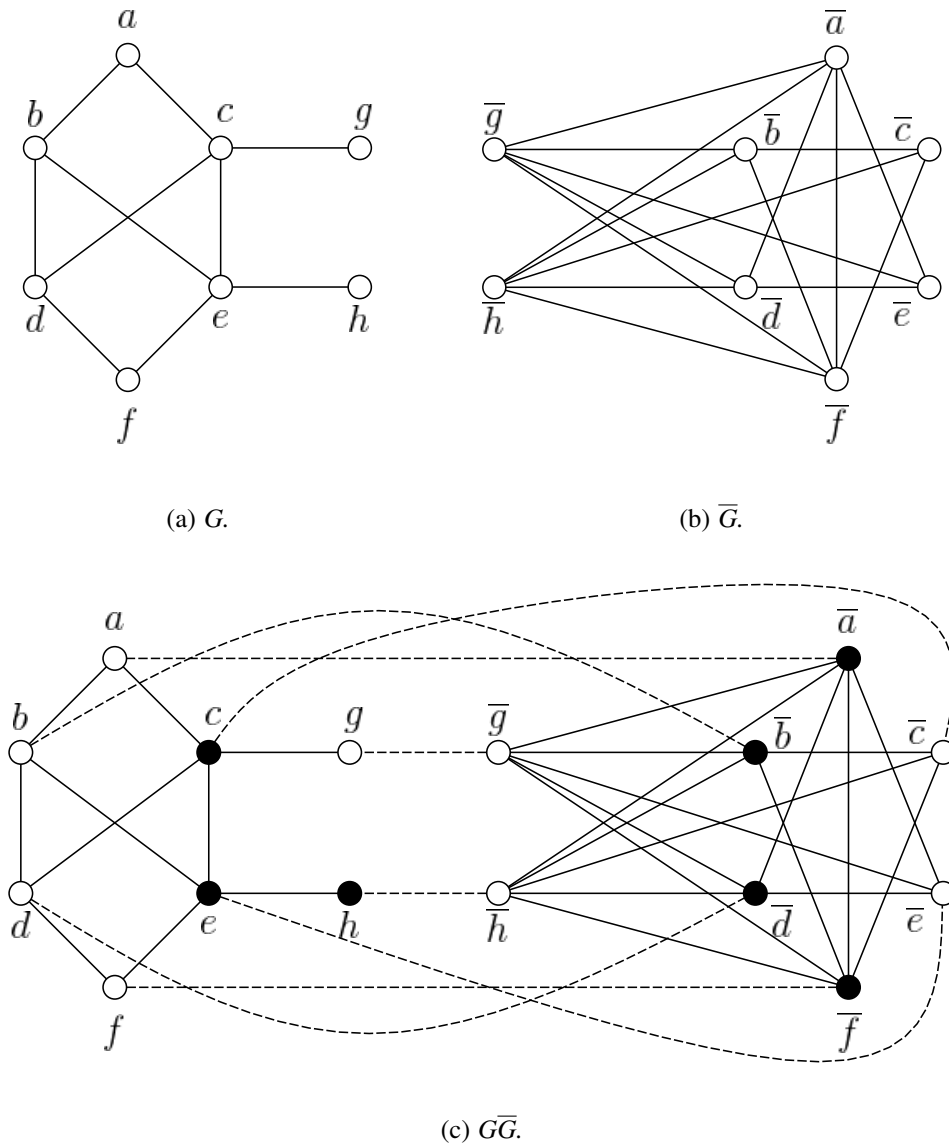


Figura 7.4: Exemplo de grafo em que $\gamma^{ID}(G\bar{G}) < n$.

No Teorema 7.7 apresentamos nosso resultado para códigos identificadores em prismas complementares de grafos bipartidos completo.

Teorema 7.7 *Seja $G = (A \cup B, E)$ um grafo bipartido completo, tal que $|A| = m, |B| = n$, com $m, n \geq 1$ e $G \not\cong K_{1,1}$. Então, $\gamma^{ID}(G\bar{G}) = m + n$.*

Prova. Seja $G\bar{G}$ o prisma complementar do grafo G , em que $V(G\bar{G}) = (A \cup \bar{A} \cup B \cup \bar{B})$. Sejam $A = \{u_1, \dots, u_m\}$, $\bar{A} = \{\bar{u}_1, \dots, \bar{u}_m\}$, $B = \{v_1, \dots, v_n\}$, e $\bar{B} = \{\bar{v}_1, \dots, \bar{v}_n\}$, e seja C um código identificador mínimo de G .

O conjunto \bar{A} induz um subgrafo completo e, de acordo com o Lema 3.9, $|(N_{G\bar{G}}[\bar{A}] \setminus \bar{A}) \cap C| \geq (m - 1)$. Uma vez que $(N_{G\bar{G}}[\bar{A}] \setminus \bar{A}) = A$, então $|A \cap C| \geq (m - 1)$. Suponha que $|A \cap C| = m - 1$. Visto que um dos vértices de A , por exemplo u_i , não pertence

a C , então \bar{u}_i deve pertencer a C ou estar conectado a um vértice que pertença a C para que o conjunto C domine todos os vértices de \bar{A} . Logo, $|(A \cup \bar{A}) \cap C| \geq m$. Analogamente, $|(B \cup \bar{B}) \cap C| \geq n$.

Assim, $\gamma^{ID}(G\bar{G}) \geq m + n$. Mas, pelo Teorema 7.5, temos que $C = (A \cup B)$ é um código identificador de $G\bar{G}$ com $m + n$ vértices. Portanto, $\gamma^{ID}(G\bar{G}) = m + n$. \square

A Figura 7.5 ilustra o Teorema 7.7 para o caso em que $G = K_{4,3}$. *Codewords* são representados em preto. Perceba que no Teorema 7.7 mostramos que, dado que G é um grafo bipartido completo com n vértices, então $\gamma^{ID}(G\bar{G}) = n$. Temos, portanto, que grafos bipartidos completos são exemplos de grafos que atingem a igualdade do Teorema 7.5, mostrando que o limite proposto é um limite justo.

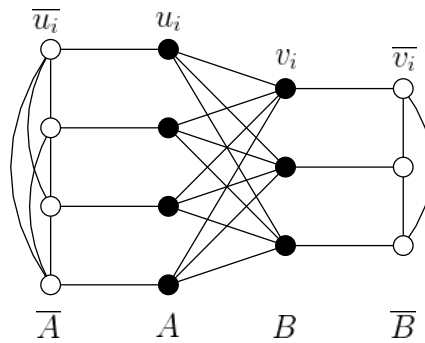
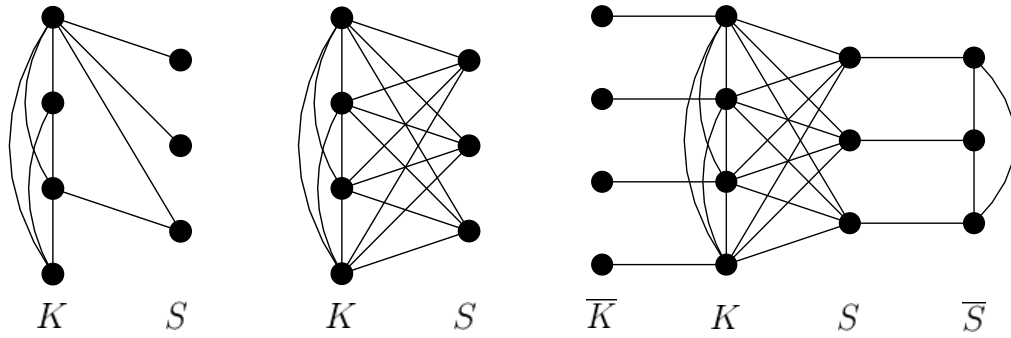


Figura 7.5: Prisma complementar do grafo bipartido completo $K_{4,3} = (A \cup B, E)$.

Nosso próximo resultado considera grafos split. Um grafo $G = (K \cup S, E)$ é um **grafo split** se o seu conjunto de vértices pode ser particionado em uma clique K e um conjunto independente S . Além disso, se G é um grafo split e todas as arestas entre K e S existem, então G é chamado de **grafo split completo**. Um exemplo de um grafo split, um grafo split completo, e outro do prisma complementar deste último são exibidos na Figura 7.6. Os conjuntos K e S ilustrados representam as cliques e os conjuntos independentes, respectivamente, enquanto \bar{K} e \bar{S} são seus conjuntos correspondentes.



(a) Grafo split.

(b) Grafo split completo G .(c) Prisma complementar de G .

Figura 7.6: Um grafo split é apresentado em 7.6(a), um grafo split completo em 7.6(b), e o prisma complementar deste último é apresentado em 7.6(c).

Antes de prosseguirmos para o nosso próximo resultado, perceba que um grafo split $G = (K \cup S, E)$ é identificável se, e somente se, não existem dois vértices em K com os mesmos vizinhos em S . Isso acontece pois sempre que um grafo split completo possui 2 ou mais vértices em K , quaisquer vértices de K são gêmeos. Assim, o único grafo split completo identificável é o grafo estrela $G = K_{1,n} \cong G = (\{u\} \cup S, E)$, em que $\gamma(G) = n$ foi determinado por Feng e Wang [23] e é apresentado no Teorema 5.10. Prismas complementares de grafos split completo, no entanto, são identificáveis, como demonstrado no Teorema 7.3.

Teorema 7.8 *Seja $G = (K \cup S, E)$ um grafo split completo, $|K| = m$, $|S| = n$, com $m \geq 1, n \geq 2$. Então, $\gamma^{ID}(G\bar{G}) = m + n$.*

Prova. Seja $G\bar{G}$ o prisma complementar do grafo G , em que $V(G\bar{G}) = (K \cup \bar{K} \cup S \cup \bar{S})$. Sejam $K = \{u_1, \dots, u_m\}$, $\bar{K} = \{\bar{u}_1, \dots, \bar{u}_m\}$, $S = \{v_1, \dots, v_n\}$, e $\bar{S} = \{\bar{v}_1, \dots, \bar{v}_n\}$, e seja C um código identificador mínimo de G .

Sabemos que $(N_{G\bar{G}}[\bar{S}] \setminus \bar{S}) = S$. O conjunto \bar{S} induz um subgrafo completo e, pelo Lema 3.9, temos que $|(S \cap C)| \geq n - 1$. Mas, se C é um código identificador e $|S \cap C| = n - 1$, então existe um vértice $\bar{v}_i \in C$, caso contrário \bar{v}_i não seria dominado. Portanto, $|(S \cup \bar{S}) \cap C| \geq n$.

Ainda, dados dois vértices distintos $u_i, u_j \in V_{G\bar{G}}(K)$, temos que $N_{G\bar{G}}[u_i] \Delta N_{G\bar{G}}[u_j] = \{\bar{u}_i, \bar{u}_j\}$ e, portanto, $|\bar{K} \cap C| \geq m - 1$. Entretanto, se $|\bar{K} \cap C| = m - 1$, então existe um vértice $u_i \in C$, caso contrário \bar{u}_i não seria dominado. Portanto, $|(K \cup \bar{K}) \cap C| \geq m$.

Logo, $|C| \geq m + n$. O conjunto $C = \{u_1\} \cup \{\bar{u}_2, \dots, \bar{u}_m\} \cup \{v_1, \dots, v_n\}$ é um código identificador em $G\bar{G}$ de cardinalidade $m + n$. Assim, $\gamma^{ID}(G\bar{G}) = m + n$. \square

A Figura 7.7 exibe um prisma complementar de um grafo split completo e um código identificador mínimo, conforme descrito no Teorema 7.8, e identificado pelos vértices preenchidos em preto.

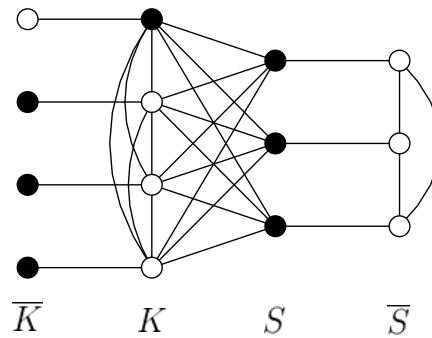


Figura 7.7: Prisma complementar de um grafo split completo $G = (K \cup S, E)$.

Considerações Finais

Neste trabalho, realizamos um estudo sobre códigos identificadores em grafos, apresentando no Capítulo 3 seu conceito, algumas aplicações práticas e resultados teóricos para diversas classes de grafos. Códigos identificadores em árvores e produtos de grafos, tais como corona, produto Cartesiano e prisma complementar foram estudados mais a fundo nos capítulos seguintes. Durante este trabalho, o problema de códigos identificadores também foi estudado para diversas classes de grafos ainda não caracterizadas, das quais alguns resultados foram obtidos.

No Capítulo 4, reunimos resultados existentes para códigos identificadores em árvores e estudamos um tipo especial de árvore, os *caterpillars*. Para os *caterpillars*, determinamos no Teorema 4.4 a cardinalidade mínima de um código identificador em um *caterpillar* completo. Mostramos nos Teoremas 4.5 e 4.6 o tamanho de um código identificador mínimo para grafos *broom* e *broom* duplo, respectivamente, e que o seu tamanho depende fortemente do tamanho do seu caminho central e da sua quantidade de folhas. Para *caterpillars* gerais, mostramos no Teorema 4.7 um limite superior justo para o seu código identificador.

Nos Capítulos 5, 6 e 7, tratamos de códigos identificadores em produtos de grafos, reunindo diversos resultados existentes para coronas, produtos Cartesianos e prismas complementares, respectivamente, assim como os resultados obtidos durante esta pesquisa. No Capítulo 5, mostramos na Proposição 5.4 uma prova alternativa para o resultado de Feng e Wang exibido no Teorema 5.3, mostrando a cardinalidade mínima de um código identificador em coronas $K_n \circ \bar{K}_m$.

No Capítulo 6, reunimos nossos resultados para produtos Cartesianos de grafos estrela com caminhos, $K_{1,n} \square P_m$. Para estes grafos, exibimos no Corolário 6.13 um limite superior para códigos identificadores em grafos $K_{1,3} \square P_m$, e conjecturamos que o limite apresentado é mínimo. Também apresentamos, no Teorema 6.15, um limite superior para o caso geral $K_{1,n} \square P_m$, que é justo para infinitos grafos, mas que pode ser melhorado, visto que o limite quando $n = 3$ é maior que o limite apresentado anteriormente.

No Capítulo 7, exibimos alguns resultados obtidos para prismas complementares. No Teorema 7.3, mostramos que o prisma complementar de um grafo G é identificável

se, e somente se, a ordem de G é pelo menos dois. No Teorema 7.4, demonstramos que a menor cardinalidade possível de um código identificador em um prisma complementar é 3. No Teorema 7.5, determinamos um limite superior para prismas complementares de grafos conexos e identificáveis G , mostrando também que o conjunto $C = V(G)$ é um código identificador. Além disso, provamos no Teorema 7.7 a cardinalidade mínima do prisma complementar de um grafo bipartido completo, confirmando que o limite proposto pelo Teorema 7.5 é um limite justo. Finalmente, mostramos no Teorema 7.8 que dado um grafo split completo com n vértices, então $\gamma^{ID}(\overline{GG}) = n$.

As Tabelas 8.1, 8.2, 8.3 e 8.4 resumizam os resultados obtidos neste trabalho.

Ressaltamos que, durante esta pesquisa, alguns resultados parciais foram apresentados em congressos e seminários. Um resumo dos resultados sobre caterpillars exibidos no Capítulo 4 foi submetido para o *VII Latin American Workshop on Cliques in Graphs* e apresentado durante o evento em La Plata, Argentina. Uma palestra envolvendo a aplicação de códigos identificadores para prevenção de incêndio, exibido no Capítulo 3, foi realizada no *VIII Ciclo de Palestras do Curso de Licenciatura em Matemática do IFG - Câmpus Goiânia*, e um curso de curta duração envolvendo assuntos relacionados a Teoria dos Grafos e aplicações, incluindo aquelas descritas neste trabalho, foi ministrado na *8ª Semana da Licenciatura em Matemática do Instituto Federal de Goiás / Câmpus Goiânia*.

Como trabalhos futuros, sugerimos:

- Provar a Conjectura 1 para códigos identificadores em produtos Cartesianos $K_4 \square P_m$, proposta por Cruz e Cappelle [19];
- Provar a Conjectura 2 para códigos identificadores em produtos Cartesianos $K_{1,3} \square P_m$;
- Investigar códigos identificadores em produtos Cartesianos $K_{1,n} \square P_m$, melhorando o limite apresentado no Teorema 6.15 e buscando determinar o tamanho de um código identificador mínimo para esta classe;
- Investigar códigos identificadores em prismas complementares, buscando caracterizar códigos identificadores mínimos para grafos gerais nesta classe;
- Investigar d -códigos identificadores para produtos de grafos, tais como produto Cartesiano e prismas complementares;
- Verificar se o problema de códigos identificadores em prismas complementares se mantém NP-completo.

Tabela 8.1: Resultados em árvores.

Condição	γ^{ID}
$G = P_c(k_1, \dots, k_c)$ é um <i>caterpillar</i> completo com $c \geq 3$ e ℓ folhas.	$\gamma^{ID}(G) = \ell$, sendo $\ell = \sum_{i=1}^s k_i$
$G = P_c(k_1, 0, \dots, 0)$ é um <i>broom</i> com $c \geq 3$ e $k_1 \geq 2$.	$\gamma^{ID}(G) = \gamma^{ID}(P_c) + (k_1 - 1)$
$G = P_c(k_1, 0, \dots, 0, k_c)$ é um <i>broom</i> duplo com $c \geq 3$, $k_1, k_c \geq 2$ e $k_i = 0$ para $2 \leq i \leq (s - 1)$.	$\gamma^{ID}(G) = \gamma^{ID}(P_c) + k_1 + k_c - 2$
$G = P_c(k_1, \dots, k_c)$ é um <i>caterpillar</i> , com $c \geq 2$ e $\ell = \sum_{i=1}^c k_i$.	$\gamma^{ID}(G) \leq \ell + \sum_{m=1}^q \left(\left\lceil \frac{ P^m + 1}{2} \right\rceil - 2 \right)$

Tabela 8.2: Resultados em produtos corona.

Condição	γ^{ID}
G é um grafo $K_n \circ \bar{K}_m$, com $n \geq 2$ e $m \geq 1$	$\gamma^{ID}(K_n \circ \bar{K}_m) = V(K_n) \cdot \gamma^{ID}(\bar{K}_m)$

Tabela 8.3: Resultados em produtos Cartesianos.

Condição	γ^{ID}
$G = K_{1,3} \square P_{8k}$ e $m \geq 8$	$\gamma^{ID}(G) \leq 3m/2$
$G = K_{1,3} \square P_m$, $m \geq 2$ e $y = m \bmod 8$ com $y \neq 0$	$\gamma^{ID}(G) \leq \lfloor 3m/2 \rfloor + 1$
$G = K_{1,n} \square P_m$, com $n \geq 3$ e $m \geq 1$	$\gamma^{ID}(G) \leq m + (n - 1) \left\lceil \frac{m}{3} \right\rceil$

Tabela 8.4: Resultados em prismas complementares.

Condição	γ^{ID}
O grafo $G\bar{G}$ é identificável se, e somente se, $n(G) \geq 2$ vértices.	
$G\bar{G}$ é identificável	$\gamma^{ID}(G\bar{G}) \geq 3$.
G conexo e identificável com $n \geq 3$ vértices.	$\gamma^{ID}(G\bar{G}) \leq n$ e $C = V(G)$ é um código identificador de $G\bar{G}$.
$G = (A \cup B, E)$ é um grafo bipartido completo, $ A = m$, $ B = n$, com $m, n \geq 3$.	$\gamma^{ID}(G\bar{G}) = m + n$.
$G = (K \cup S, E)$ é um grafo split completo, $ K = m$, $ S = n$, com $m, n \geq 2$.	$\gamma^{ID}(G\bar{G}) = m + n$.

Referências Bibliográficas

- [1] ALDOUS, J. M.; WILSON, R. J. **Graphs and Applications: An Introductory Approach**, volume 1. Springer, 2004.
- [2] AUGER, D. **Minimal identifying codes in trees and planar graphs with large girth**. *European Journal of Combinatorics*, 31(5):1372 – 1384, 2010.
- [3] AUGER, D.; CHARON, I.; HUDRY, O.; LOBSTEIN, A. **Complexity results for identifying codes in planar graphs**. *International Transactions in Operational Research*, 17(6):691–710, 2010.
- [4] BEN-HAIM, Y.; LITSYN, S. **Exact minimum density of codes identifying vertices in the square grid**. *SIAM Journal on Discrete Mathematics*, 19(1):69–82, 2005.
- [5] BERGE, C. **Graphs and hypergraphs**, volume 6. Elsevier, 1976.
- [6] BERGE, C. **Théorie des graphes et ses applications**. Dunod, Paris, 1958.
- [7] BERGE, C. **Theory of Graphs and its Applications**. Methuen, London, 1962.
- [8] BERGER-WOLF, T. Y.; HART, W. E.; SAIA, J. **Discrete sensor placement problems in distribution networks**. *Mathematical and Computer Modelling*, 42(13):1385–1396, 2005.
- [9] BERTRAND, N.; CHARON, I.; HUDRY, O.; LOBSTEIN, A. **Identifying and locating-dominating codes on chains and cycles**. *European Journal of Combinatorics*, 25(7):969–987, 2004.
- [10] BERTRAND, N.; CHARON, I.; HUDRY, O.; LOBSTEIN, A. **1-identifying codes on trees**. *Australasian Journal of Combinatorics*, 31(21-35):4We, 2005.
- [11] BLASS, U.; HONKALA, I.; LITSYN, S. **On binary codes for identification**. *Journal of Combinatorial Designs*, 8(2):151–156, 2000.
- [12] BLIDIA, M.; CHELLALI, M.; MAFFRAY, F.; MONCEL, J.; SEMRI, A. **Locating-dominance and identifying codes in trees**. *Australasian Journal of Combinatorics*, 39:219–232, 2007.

- [13] CAPPELLE, M. R.; COELHO, E. M. M.; COELHO, H.; PENSO, L. D.; RAUTENBACH, D. **Identifying codes in the complementary prism of cycles.** *arXiv preprint arXiv:1507.05083*, 2015.
- [14] CHALUVARAJU, B.; CHAITRA, V. **Roman domination in complementary prism graphs.** *Mathematical Combinatorics*, 2:24–31, 2012.
- [15] CHARON, I.; HONKALA, I.; HUDRY, O.; LOBSTEIN, A. **General bounds for identifying codes in some infinite regular graphs.** *Electron. J. Combin*, 8(1):R39, 2001.
- [16] CHARON, I.; HUDRY, O.; LOBSTEIN, A. **Minimizing the size of an identifying or locating-dominating code in a graph is np-hard.** *Theoretical Computer Science*, 290(3):2109–2120, 2003.
- [17] CHARON, I.; HUDRY, O.; LOBSTEIN, A. **Extremal cardinalities for identifying and locating-dominating codes in graphs.** *Discrete Mathematics*, 307(3–5):356 – 366, 2007.
- [18] CHEN, C.; LU, C.; MIAO, Z. **Identifying codes and locating–dominating sets on paths and cycles.** *Discrete Applied Mathematics*, 159(15):1540–1547, 2011.
- [19] CRUZ, R. D. A.; CAPPELLE, M. R. **An algorithm for minimum identifying codes in some cartesian products of graphs.** In: *XLIX Simpósio Brasileiro de Pesquisa Operacional*, 2017.
- [20] DESORMEAUX, W. J. **Restrained and other domination parameters in complementary prisms.** PhD thesis, East Tennessee State University, 2008.
- [21] DIESTEL, R. **Graph theory.** Springer, 2000.
- [22] EL-BASIL, S. **Applications of caterpillar trees in chemistry and physics.** *Journal of Mathematical Chemistry*, 1(2):153–174, 1987.
- [23] FENG, M.; WANG, K. **Identifying codes of corona product graphs.** *Discrete Applied Mathematics*, 169:88–96, 2014.
- [24] FENG, M.; XU, M.; WANG, K. **Identifying codes of lexicographic product of graphs.** *The Electronic Journal of Combinatorics*, 19(4):P56, 2012.
- [25] FOUCAUD, F. **Identifying codes in special graph classes. master thesis, université bordeaux 1, france.** <https://ffoucaud.github.io/Publications/>, 2009. Acessado em: 05/04/2017.
- [26] FOUCAUD, F. **Combinatorial and algorithmic aspects of identifying codes in graphs.** PhD thesis, Université Sciences et Technologies-Bordeaux I, 2012.

- [27] FOUCAUD, F.; GRAVIER, S.; NASERASR, R.; PARREAU, A.; VALICOV, P. **Identifying codes in line graphs.** *Journal of Graph Theory*, 73(4):425–448, 2013.
- [28] FOUCAUD, F.; GUERRINI, E.; KOVŠE, M.; NASERASR, R.; PARREAU, A.; VALICOV, P. **Extremal graphs for the identifying code problem.** *European Journal of Combinatorics*, 32(4):628–638, 2011.
- [29] FOUCAUD, F.; MERTZIOS, G. B.; NASERASR, R.; PARREAU, A.; VALICOV, P. **Identification, location-domination and metric dimension on interval and permutation graphs. ii. algorithms and complexity.** *Algorithmica*, 78(3):914–944, 2017.
- [30] FRUCHT, R.; HARARY, F. **On the corona of two graphs.** *Aequationes Mathematicae*, 4(3):322–325, 1970.
- [31] GAREY, M. R.; JOHNSON, D. S. **Computers and intractability.** W. H. Freeman and Co., San Francisco, Calif., 1979. A guide to the theory of NP-completeness, A Series of Books in the Mathematical Sciences.
- [32] GODDARD, W.; WASH, K. **Id codes in cartesian products of cliques.** *J. Combin. Math. Combin. Comput*, 85:97–106, 2013.
- [33] GONÇALVES, D.; PINLOU, A.; RAO, M.; THOMASSÉ, S. **The domination number of grids.** *SIAM Journal on Discrete Mathematics*, 25(3):1443–1453, 2011.
- [34] GÓNGORA, J. A. **Independent domination in complementary prisms.** PhD thesis, East Tennessee State University, 2009.
- [35] GRAVIER, S.; MONCEL, J. **Construction of codes identifying sets of vertices.** *The Electronic Journal of Combinatorics*, 12(R13):1, 2005.
- [36] GRAVIER, S.; MONCEL, J. **On graphs having a $V \setminus \{x\}$ set as an identifying code.** *Discrete Mathematics*, 307(3–5):432 – 434, 2007.
- [37] GRAVIER, S.; MONCEL, J.; SEMRI, A. **Identifying codes of cycles.** *European Journal of Combinatorics*, 27(5):767–776, 2006.
- [38] GRAVIER, S.; MONCEL, J.; SEMRI, A. **Identifying codes of cartesian product of two cliques of the same size.** *Electron. J. Combin*, 15(1):N4, 2008.
- [39] HARARY, F. **Graph theory.** Addison-Wesley, Reading, MA, 1969.
- [40] HARARY, F.; SCHWENK, A. J. **The number of caterpillars.** *Discrete Mathematics*, 6(4):359–365, 1973.

- [41] HAYNES, T.; KNISLEY, D.; SEIER, E.; ZOU, Y. **A quantitative analysis of secondary rna structure using domination based parameters on trees.** *BMC Bioinformatics*, 7(1):108, 2006.
- [42] HAYNES, T. W.; HENNING, M. A.; SLATER, P. J.; VAN DER MERWE, L. C. **The complementary product of two graphs.** *Bulletin of the Institute of Combinatorics and its Applications*, 51:21–30, 2007.
- [43] HAYNES, T. W.; HENNING, M. A.; VAN DER MERWE, L. C. **Domination and total domination in complementary prisms.** *Journal of Combinatorial Optimization*, 18(1):23–37, 2009.
- [44] HAYNES, T.; HEDETNIEMI, S.; SLATER, P. **Fundamentals of domination in graphs**, volume 208. CRC, 1998.
- [45] HEDETNIEMI, J. **On identifying codes in the cartesian product of a path and a complete graph.** *Journal of Combinatorial Optimization*, 31(4):1405–1416, 2016.
- [46] HONKALA, I.; HUDRY, O.; LOBSTEIN, A. **On the ensemble of optimal identifying codes in a twin-free graph.** *Cryptography and Communications*, 8(1):139–153, 2016.
- [47] HONKALA, I.; LOBSTEIN, A. **On identifying codes in binary hamming spaces.** *Journal of Combinatorial Theory, Series A*, 99(2):232–243, 2002.
- [48] JANSON, S.; LAIHONEN, T. **On the size of identifying codes in binary hypercubes.** *Journal of Combinatorial Theory, Series A*, 116(5):1087–1096, 2009.
- [49] JUNNILA, V.; LAIHONEN, T. **Optimal identifying codes in cycles and paths.** *Graphs and Combinatorics*, p. 1–13, 2012.
- [50] KARP, R. M. **Reducibility among combinatorial problems.** In: *Complexity of computer computations (Proc. Sympos., IBM Thomas J. Watson Res. Center, Yorktown Heights, N.Y., 1972)*, p. 85–103. Plenum, New York, 1972.
- [51] KARPOVSKY, M. G.; CHAKRABARTY, K.; LEVITIN, L. B. **On a new class of codes for identifying vertices in graphs.** *IEEE Transactions on Information Theory*, 44(2):599–611, 1998.
- [52] KARPOVSKY, M. G.; CHAKRABARTY, K.; LEVITIN, L. B.; AVRESKY, D. R. **On the covering of vertices for fault diagnosis in hypercubes.** *Information Processing Letters*, 69(2):99–103, 1999.

- [53] KAZEMI, A. P. **κ -tuple total domination in complementary prisms.** *ISRN Discrete Mathematics*, 2011, 2012.
- [54] KELLEHER, L.; COZZENS, M. **Dominating sets in social network graphs.** *Mathematical Social Sciences*, 16(3):267–279, 1988.
- [55] KIM, J.-L.; KIM, S.-J. **Identifying codes in q -ary hypercubes.** *Bulletin of the Institute of Combinatorics and its Applications*, 59:93–102, 2010.
- [56] LAIFENFELD, M.; TRACHTENBERG, A.; COHEN, R.; STAROBINSKI, D. **Joint monitoring and routing in wireless sensor networks using robust identifying codes.** In: *Broadband Communications, Networks and Systems, 2007. BROADNETS 2007. Fourth International Conference on*, p. 197–206, 2007.
- [57] LOBSTEIN, A. **Watching systems, identifying, locating-dominating and discriminating codes in graphs.** <http://perso.telecom-paristech.fr/~lobstein/debutBIBidetlocdom.pdf>, 2016. Acessado em: 10/04/2017.
- [58] MONCEL, J. **Codes identifiants dans les graphes.** PhD thesis, Université Joseph-Fourier-Grenoble I, 2005.
- [59] MONCEL, J. **Monotonicity of the minimum cardinality of an identifying code in the hypercube.** *Discrete Applied Mathematics*, 154(6):898–899, 2006.
- [60] MONCEL, J. **On graphs on n vertices having an identifying code of cardinality $\lceil \log_2(n+1) \rceil$.** *Discrete Applied Mathematics*, 154(14):2032–2039, 2006.
- [61] ORE, O.; ORE, Y. **Theory of graphs**, volume 38. American Mathematical Society Providence, RI, 1962.
- [62] RALL, D. F.; WASH, K. **Identifying codes of the direct product of two cliques.** *European Journal of Combinatorics*, 36:159–171, 2014.
- [63] RALL, D. F.; WASH, K. **On minimum identifying codes in some cartesian product graphs.** *Graphs and Combinatorics*, 33(4):1037–1053, 2017.
- [64] RAY, S.; STAROBINSKI, D.; TRACHTENBERG, A.; UNGRANGSI, R. **Robust location detection with sensor networks.** *IEEE Journal on Selected Areas in Communications (Special Issue on Fundamental Performance Limits of Wireless Sensor Networks)*, 22(6):1016–1025, 2004.
- [65] RAY, S.; UNGRANGSI, R.; PELLEGRINI, D.; TRACHTENBERG, A.; STAROBINSKI, D. **Robust location detection in emergency sensor networks.** In: *INFOCOM 2003. Twenty-Second Annual Joint Conference of the IEEE Computer and Communications Societies*. IEEE Societies, volume 2, p. 1044–1053. IEEE, 2003.

- [66] ROBERTS, D. L.; ROBERTS, F. S. **Locating sensors in paths and cycles: The case of 2-identifying codes.** *European Journal of Combinatorics*, 29(1):72–82, 2008.
- [67] STANTON, B. **On vertex identifying codes for infinite lattices.** *arXiv preprint arXiv:1102.2643*, 2011.
- [68] UNGRANGSI, R.; TRACHTENBERG, A.; STAROBINSKI, D. **An implementation of indoor location detection systems based on identifying codes**, p. 175–189. Springer Berlin Heidelberg, 2004.
- [69] WEST, D. B. **Introduction to graph theory**, volume 2. Pearson Prentice Hall, 2001.
- [70] XU, M.; THULASIRAMAN, K.; HU, X.-D. **Identifying codes of cycles with odd orders.** *European Journal of Combinatorics*, 29(7):1717–1720, 2008.

Índice Remissivo

A

acíclico, [22](#)
adjacente, [20](#)
aresta, [19](#)
 de corte, [22](#)
árvore, [22](#)
 benzenóide, [38](#)
 caterpillar, [39](#)
 de Gutman, [38](#)

B

bipartido, [25](#)
 completo, [25](#)
broom, [39](#)
 duplo, [39](#)

C

código d-identificador, [28](#)
código identificador, [28](#), [30](#)
caminho, [21](#)
 central, [39](#)
 simples, [21](#)
caterpillar, [22](#), [38](#)
 completo, [39](#)
ciclo, [22](#)
cintura, [22](#)
clique, [22](#)
cobrem, [28](#)
codewords, [28](#)
complemento, [24](#)
completo, [20](#)
componente, [22](#)

conexo, [22](#)
congruente, [26](#)
conjunto
 dominante, [24](#)
 mínimo, [24](#)
 minimal, [24](#)
 estável, [24](#)
 independente, [24](#)
 máximo, [24](#)
 maximal, [24](#)
 separador, [26](#)
corona, [48](#)
cubo k-dimensional, [21](#)

D

d-cobrem, [28](#)
densidade, [56](#)
derivativo, [38](#)
desconexo, [22](#)
diâmetro, [22](#)
diferença simétrica, [26](#)
distância, [22](#)
domina, [24](#)
dominado, [24](#)

E

emparelhamento, [26](#)
 perfeito, [26](#)
estrela, [25](#)
extremo, [21](#)
extremos, [20](#)

F

floresta, 22

folha, 21

G

gêmeos, 20

falsos, 20

grade, 54

grafo, 19

bipartido, 25

cúbico, 21

completo, 20

de Peterson, 21

finito, 19

livro, 56

nulo, 19

planar, 19

simples, 19

split, 79

completo, 79

trivial, 20

vazio, 19

grau, 21

mínimo, 21

máximo, 21

H

hipercubo, 21, 54

I

Id Code, 31

identificável, 31

incidente, 20

independente, 24

isolado, 21

isomorfismo, 25

isomorfo, 25

L

laço, 19

livre, 22

M

maximal, 24

multiaresta, 19

multigrafo, 19

N

número

de dominação, 24

de independência, 24

O

ordem, 20

P

partição, 25

planar, 19

ponta, 21

ponte, 23

prisma complementar, 73

produto

Cartesiano, 53

Complementar, 73

corona, 48

R

regular, 21

S

saturado, 26

separados, 26

split, 79

completo, 79

subcaminho, 22

subgrafo, 22

gerador, 22

induzido, 22

próprio, 22

T

triângulo, 22

trivial, 20

V

vértice, 19

correspondente, 73

de corte, 23

de suporte, 21, 39

interno, 21

isolado, 21

pendente, 20, 21

vizinhança, 20

aberta, 20

fechada, 20

vizinhos, 20