UNIVERSIDADE FEDERAL DE GOIÁS
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA
IME

WILLIAN ISAO TOKURA

Rigidez métrica e topológica de hipersuperfícies imersas em formas espaciais

Goiânia
2016

TERMO DE CIÊNCIA E DE AUTORIZAÇÃO PARA DISPONIBILIZAR AS TESES E DISSERTAÇÕES ELETRÔNICAS (TEDE) NA BIBLIOTECA DIGITAL DA UFG

Na qualidade de titular dos direitos de autor, autorizo a Universidade Federal de Goiás (UFG) a disponibilizar, gratuitamente, por meio da Biblioteca Digital de Teses e Dissertações (BDTD/UFG), sem ressarcimento dos direitos autorais, de acordo com a Lei nº 9610/98, o documento conforme permissões assinaladas abaixo, para fins de leitura, impressão e/ou download, a título de divulgação da produção científica brasileira, a partir desta data.

1. Identificação do Material Bibliográfico: [x] **Dissertação** [ ] **Tese**

2. Identificação da Tese ou Dissertação

Autor(a):	WILLIAN ISAO TOKURA				
E-mail:	williamisaotokura@hotmail.com				
Seu E-mail pode ser disponibilizado na página? [X]Sim [ ] Não					
Vínculo empregatício do Autor	Bolsista				
Agência de Fomento: CAPES			Sigla:	CAPES	
País:	Brasil	UF: GO		CNPJ:	
Título:	RIGIDEZ MÉTRICA E TOPOLÓGICA DE HIPERSUPERFÍCIES IMERSAS EM FORMAS ESPACIAIS				
Palavras-Chave:	RIGIDEZ, FORMAS ESPACIAIS, HIPERSUPERFÍCIES				
Título em outra língua:	TOPOLOGICAL AND METRIC RIGIDITY THEOREMS FOR HYPERSURFACES IN SPACE FORMS				
Palavras-Chave em outra língua:	RIGIDITY, SPACE FORMS, HYPERSURFACES				
Área de Concentração:	GEOMETRIA				
Data Defesa: (dd/mm/aaaa)	08/03/2016				
Programa de Pós-Graduação:	MESTRADO EM MATEMÁTICA				
Orientador (a):	Dr. LEVI ROSA ADRIANO				
E-mail:	levi@ufg.br				
Co-Orientador (a):*					
E-mail:					

*Necessita do CPF quando não constar no SisPG

3. Informações de acesso ao documento:

Liberação para disponibilização?[1] [X] Total [ ] Parcial

Em caso de disponibilização parcial, assinale as permissões:

[ ] Capítulos. Especifique: ____

[ ] Outras restrições: ____

Havendo concordância com a disponibilização eletrônica, torna-se imprescindível o envio do(s) arquivo(s) em formato digital PDF ou DOC da Tese ou Dissertação.

O Sistema da Biblioteca Digital de Teses e Dissertações garante aos Autores, que os arquivos contendo eletronicamente as Teses e ou Dissertações, antes de sua disponibilização, receberão procedimentos de segurança, criptografia (para não permitir cópia e extração de conteúdo, permitindo apenas impressão fraca) usando o padrão do Acrobat.

Willian Isao Tokura

____ Data: 18 / 03 / 2016

Assinatura do(a) Autor(a)

[1] Em caso de restrição, esta poderá ser mantida por até um ano a partir da data de Defesa. A extensão deste prazo suscita justificativa junto à Coordenação do Curso. Todo resumo e dados ficarão sempre disponibilizados.

WILLIAN ISAO TOKURA

Rigidez métrica e topológica de hipersuperfícies imersas em formas espaciais

Dissertação apresentada ao Programa de Pós–Graduação do Instituto de Matemática e Estatística da Universidade Federal de Goiás, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Área de concentração: Geometria.

Orientador: Prof. Dr. Levi Rosa Adriano

Goiânia
2016

Ficha catalográfica elaborada automaticamente
com os dados fornecidos pelo(a) autor(a), sob orientação do Sibi/UFG.

Tokura, Willian Isao
Rigidez métrica e topológica de hipersuperfícies imersas em formas espaciais [manuscrito] / Willian Isao Tokura. - 2016.
66 f.

Orientador: Prof. Dr. Levi Rosa Adriano.
Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal de Goiás, Instituto de Matemática e Estatística (IME) , Programa de Pós-Graduação em Matemática, Goiânia, 2016.
Bibliografia.
Inclui símbolos.

1. Rigidez. 2. Hipersuperfícies. 3. Formas Espaciais. 4. Variedades Diferenciáveis. I. Adriano, Levi Rosa, orient. II. Título.

WILLIAN ISAO TOKURA

RIGIDEZ MÉTRICA E TOPOLÓGICA DE HIPERSUPERFÍCIES IMERSAS EM FORMAS ESPACIAIS

Dissertação defendida no Programa de Pós–Graduação do Instituto de Matemática e Estatística da Universidade Federal de Goiás como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática, aprovada em 08 de março de 2016, pela Banca Examinadora constituída pelos professores:

LRAdriano

Prof. Dr. Levi Rosa Adriano
Instituto de Matemática e Estatística - UFG
Presidente da Banca

Prof. Dr. Mauricio Donizetti Pieterzack
Departamento de Matemática e Estatística - UFG

Xia Changyu

Prof. Dr. Xia Changyu
Departamento de Matemática - UnB

Willian Isao Tokura

Graduou-se em Licenciatura Matemática pela UFGD - Universidade Federal de Mato Grosso do Sul. Durante sua graduação, foi monitor no departamento de Matemática da UFGD e Bolsista da COAI. Durante o Mestrado, na UFG - Universidade de Goiás, foi bolsista da CAPES

Dedico este trabalho a vocês que sempre me fizeram acreditar na realização dos meus sonhos e trabalharam muito para que eu pudesse realizá-los, meus pais, Isao e Aparecida.

Agradecimentos

Esta dissertação é resultado de muito esforço e dedicação, e não poderia deixar de registrar aqui minha sincera gratidão a todos que me ajudaram durante o desenvolvimento deste trabalho.

Primeiramente gostaria de agradecer a Deus por ter me dado esta oportunidade e também saúde, coragem, persistência e sabedoria para poder chegar a mais esta conquista.

Aos meus pais, pela sólida formação que me foi dada, pelo incentivo e apoio incondicional que sempre me ajudaram em minhas conquistas.

Ao Professor Levi Rosa Adriano, professor e orientador, pela liberdade e confiança referente ao presente trabalho, pela amizade e pelos conselhos e ajuda no desenvolvimento deste trabalho, o que possibilitou um grande crescimento como acadêmico.

Agradeço ao Professor Maurício Donizetti Pieterzack, membro da banca, o qual ofereceu sugestões e contrinuições valorosas para este trabalho. Agradeço, sinceramente, pela presença e pela leitura do trabalho. Também, agradeço ao Professor Changyu Xia, membro da banca, pelas sugestões que foram dadas.

A todos os professores do IME-UFG, em especial aos professores da geometria, pelas excelentes aulas ministradas que contribuiram grandemente em minha formação acadêmica.

Ao professor Lino Sanabria da FACET-UFGD, pela enorme contribuição de vida e como acadêmico durante a graduação.

Ao professor Rafael Mendonça dos Santos que durante a escola me incentivou e despertou o interesse pela matemática.

A todos os amigos do IME-UFG, em especial a Elismar e Mariana, pela amizade, companherismo e pelas longas discucções matematicas, nas quais aprendi muito.

À minha namorada, amiga e companheira, Priscila Marques Kai, pelo apoio durante o desenvolvimento do mesmo.

Por fim, agradeço ao apoio financeiro da CAPES que me permitiu executar este trabalho.

Resumo

Tokura, Willian Isao. **Rigidez métrica e topológica de hipersuperfícies imersas em formas espaciais**. Goiânia, 2016. 80p. Dissertação de Mestrado. IME, Instituto de Matemática e Estatística, Universidade Federal de Goiás.

Neste trabalho, apresentamos resultados sobre teoremas de rigidez métrica e topológica para hipersuperfícies fechadas imersas em $\mathbb{H}^{n+1}$, $\mathbb{R}^{n+1}$ e $\mathbb{S}^{n+1}$. Tais resultados foram obtidos por Qiaoling Wang e Changyu Xia e publicados no The Quarterly Journal of Mathematics (2005), Proceedings of the Edinburgh Mathematical Society (2006) e Czechoslovak Mathematical Journal(2007).

Palavras–chave

Rigidez; Hypersuperfícies; Formas Espaciais.

Abstract

Tokura, Willian Isao. **Topological and metric rigidity theorems for hypersurfaces immersed in space forms**. Goiânia, 2016. 80p. MSc. Dissertation. IME, Instituto de Matemática e Estatística, Universidade Federal de Goiás.

In this work, we present results about metric rigidity theorems and topological rigidity theorems for closed hypersurfaces immersed in $\mathbb{H}^{n+1}$, $\mathbb{R}^{n+1}$ and $\mathbb{S}^{n+1}$. These results were obtained by Qiaoling Wang and Changyu Xia and published in The Quarterly Journal of Mathematics (2005), Proceedings of the Edinburgh Mathematical Society (2006) and Czechoslovak Mathematical Journal(2007).

Keywords

Rigidity; Hypersuperfaces; space forms.

Sumário

Introdução

Nesta dissertação, apresentamos resultados sobre teoremas de rigidez métrica e topológica para hipersuperfícies fechadas imersas em $\mathbb{H}^{n+1}$, $\mathbb{R}^{n+1}$ e $\mathbb{S}^{n+1}$, que são o espaço hiperbólico $(n+1)$-dimensional, o espaço Euclidiano $(n+1)$-dimensional e a esfera Euclidiana $(n+1)$-dimensional, respectivamente. Tais resultados foram obtidos por Qiaoling Wang e Changyu Xia e publicados no The Quarterly Journal of Mathematics (2005), Proceedings of the Edinburgh Mathematical Society (2006) e Czechoslovak Mathematical Journal(2007).

do Carmo em [9], apresenta o seguinte teorema de rigidez para hipersuperfície em $\mathbb{R}^{n+1}$.

Teorema 0.1 *Seja $M^n (n \geq 2)$ uma hipersuperfície fechada conexa orientada imersa em $\mathbb{R}^{n+1}$ com curvatura de Gauss-Kronecker não nula em M, então M é difeomorfa a esfera n-dimensional $\mathbb{S}^n$.*

A curvatura de Gauss-Kronecker é, como sabemos, o produto das curvaturas principais referente a imersão. Neste caso, a imersão é tomada no espaço de curvatura seccional constante 0, que é o $\mathbb{R}^{n+1}$

Nos ultimos anos, foram obtidos diversos resultados de rigidez para hipersuperfícies imersas nos espaços completos de curvatura secccional constante -1 e 1 que são o $\mathbb{H}^{n+1}$ e $\mathbb{S}^{n+1}$, respectivamente. Em 1970, do Carmo e Warner provaram um resultado similar ao Teorema 0.1 para os espaços $\mathbb{H}^{n+1}$ e $\mathbb{S}^{n+1}$. Este resultado estabelece que uma hipersuperfície fechada, conexa e orientada com curvatura seccional maior ou igual a 1 em $\mathbb{S}^{n+1}$, ou curvatura seccional maior ou igual a -1 em $\mathbb{H}^{n+1}$, é difeomorfa a esfera n-dimensional $\mathbb{S}^{n+1}$.

Em 1977, Alexander obteve um resultado similar para hipersuperfície compacta, conexa e orientada imersa em um espaço simplesmente conexo de curvatura seccional não positiva, onde assume-se uma hipótese adicional sobre a segunda forma fundamental de M para obter o difeomorfismo com a esfera n-dimensional. Neste caso, a imersão em $\mathbb{H}^{n+1}$ pode ser tomado como caso particular.

Em [9] do Carmo utiliza técnicas de Espaços de Recobrimento para provar o Teorema 0.1. Mais precisamente, mostra-se que sob algumas hipóteses topológicas a aplicação normal de Gauss $N : M^n \to \mathbb{S}^{n+1}$ é um difeomorfismo global.

Recentemente, Qiaoling Wang e Changyu Xia, obtiveram teoremas de Rigidez topológica para hipersuperfícies fechadas em $\mathbb{H}^{n+1}$, $\mathbb{S}^{n+1}$ e $\mathbb{R}^{n+1}$. Os teoremas estabelecem que uma hipersuperfície $M^n(n \geq 2)$ imersa em $\mathbb{H}^{n+1}$, $\mathbb{S}^{n+1}$ ou $\mathbb{R}^{n+1}$, com certas hipóteses adicionais, é difeomorfa a esfera n-dimensional $\mathbb{S}^{n+1}$.

Uma das técnicas utilizadas pelos autores foi baseada na teoria de Espaços de Recobrimento, onde estabeleceram um difeomorfismo global entre M e $\mathbb{S}^{n+1}$, via um difeomorfismo local. Além disso, os autores obtiveram teoremas de rigidez métrica para o caso de imersão em $\mathbb{S}^{n+1}$, obtendo uma caracterização do produto de esferas $\mathbb{S}^1(\sqrt{1-c^2}) \times \mathbb{S}^{n-1}(c)$ em $\mathbb{S}^{n+1}$.

Para este último resultado, supomos que M^n imersa em $\mathbb{S}^{n+1}$ tem curvatura escalar constante. Teoremas de Rigidez de hipersuperfícies com curvatura escalar constante em $\mathbb{S}^{n+1}$ tiveram bastante fluxo de estudos nos últimos anos.

Cheng e Yau em [6] provaram que se M^n tem curvatura seccional não negativa e curvatura escalar constante dada por $n(n-1)r$, com $r \geq 1$, então M^n é isometrica ou a uma hipersuperfície totalmente umbílica ou a um produto de esferas. De maneira similar, Li em [12] trocou a hipótese da curvatura seccional no teorema acima por uma limitação sob a segunda forma fundamental de M e obteve o mesmo resultado. Recentemente, Cheng em [7] obteve uma caracterização para o produto de esferas $\mathbb{S}^1(\sqrt{1-c^2}) \times \mathbb{S}^{n-1}(c)$, partindo de uma hipersuperfície M^n completa imersa em $\mathbb{S}^{n+1}$ com curvatura escalar constante dada por $n(n-1)r$ e hipóteses sobre as curvaturas principais e a segunda forma fundamental de M, de que a hipersuperfície M é isometrica ao produto $\mathbb{S}^1(\sqrt{1-c^2}) \times \mathbb{S}^{n-1}(c)$, para um $c \in (0,1)$, obtendo assim, uma caracterização para o produto de esferas $\mathbb{S}^1(\sqrt{1-c^2}) \times \mathbb{S}^{n-1}(c)$.

Este trabalho está dividido em 4 capítulos. No capítulo 1, apresentaremos definições e resultados da Geometria Riemanniana e de Espaços de Recobrimento que serão necessários para a compreensão dos próximos capítulos.

No capítulo 2, estudaremos as hipersuperfícies fechadas imersas em $\mathbb{R}^{n+1}$, onde mostraremos que uma hipersuperfície M^n fechada, conexa e orientada imersa em $\mathbb{R}^{n+1}$, com curvatura de Ricci não negativa e uma hipótese de limitação da curvatura escalar, dada em função do autovalor do operador laplaciano atuando em M, é uma esfera n-dimensional.

No capítulo 3, estudaremos as hipersuperfícies fechadas imersas em $\mathbb{S}^{n+1}$. Neste capítulo, provaremos teoremas de rigidez topológica, onde estabeleceremos um difeomorfismo entre a hipersuperfície e a esfera n-dimensional via Espaços de Recobrimento e alguns resultados de rigidez métrica. Apresentaremos também, uma prova alternativa para um teorema proposto por Qiaoling Wang e Changyu Xia, dada por Harold Rosenberg, Hilário Alencar e Walcy Santos em [18], que o faz de maneira álgebrica. Além disso, Guoxin Wei e Young Jin Suh provaram em [23] uma generalização para um outro teorema obtido por Qiaoling Wang e Changyu Xia, trocando uma hipótese de compacidade por completude da hipersuperfície M. Apresentaremos, assim, a prova deste resultado que será baseada em [23].

Concluimos este trabalho, estudando , no capítulo 4, as hipersuperfícies fechadas imersas em $\mathbb{H}^{n+1}$. Essencialmente, provaremos teoremas de rigidez topológica, onde estabeleceremos um difeomorfismo entre a hipersuperfície e a esfera n-dimensional via Espaços de Recobrimento.

Preliminares

Neste capítulo, faremos uma breve abordagem de algumas noções de geometria Riemanniana. Para isso, definiremos variedades deferenciáveis, métricas Riemannianas e curvatura. Mais detalhes podem ser conferidos em [9]. Além disso, estabeleceremos algumas notações e resultados da Teoria de Espaços de Recobrimento e alguns fatos básicos da Análise Funcional. Sendo assim, a prova de alguns resultados não será feita, mas em todo o texto ficará clara a referência para obter tais justifícativas.

1.1 Variedade Diferenciável

Definição 1.1 *Uma variedade diferenciável de dimensão n é um conjunto M e uma família de aplicações biunívocas $X_\alpha : U_\alpha \subset \mathbb{R}^n \to M$ de abertos U_α de $\mathbb{R}^n$ em M tais que:*

i) $\bigcup\limits_{\alpha} X_\alpha(U_\alpha) = M$.

ii) Para todo par α, β, com $X_\alpha(U_\alpha) \cap X_\beta(U_\beta) = W \neq \emptyset$, os conjuntos $X_\alpha^{-1}(W)$ e $X_\beta^{-1}(W)$ são abertos em $\mathbb{R}^n$ e as aplicações $X_\beta^{-1} \circ X_\alpha^{-1}$ são diferenciáveis.

iii) A família $\{(U_\alpha, X_\alpha)\}$ é máxima relativamente às condições i) e ii).

O par (U_α, X_α) (ou a aplicação X_α) com $p \in X_\alpha(U_\alpha)$ é chamado uma parametrização (ou sistema de coordenadas) de M em p; $X_\alpha(U_\alpha)$ é então chamada uma vizinhança coordenada em p. Uma família $\{(U_\alpha, X_\alpha)\}$ satisfazendo i) e ii) é chamada uma estrutura diferenciável em M.

As variedades aqui apresentadas serão supostas Hausdorff e de base enumerável.

Definição 1.2 *Sejam M_1^n e M_2^m variedades diferenciáveis. Uma aplicação $\varphi : M_1^n \to M_2^m$ é diferenciável em $p \in M_1$ se dada uma parametrização $Y : V \subset \mathbb{R}^m \to M_2$ em $\varphi(p)$ existe uma parametrização $X : U \subset \mathbb{R}^n \to M_1$ em p tal que $\varphi(X(U)) \subset Y(V)$ e a aplicação*

$$Y^{-1} \circ \varphi \circ X : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$$

é diferenciável em $X^{-1}(p)$. φ é diferenciável em um aberto de M_1 se é diferenciável em todos os pontos desse aberto.

Definição 1.3 *Sejam M^m e N^n variedades diferenciáveis. Uma aplicação diferenciável $\varphi : M \to N$ é uma imersão se $d\varphi_p : T_pM \to T_{\varphi(p)}N$ é injetiva para todo $p \in M$. Se, além disso, φ é um homeomorfismo sobre $\varphi(M) \subset N$, onde $\varphi(M)$ tem a topologia induzida por N, diz-se que φ é um mergulho. Se $M \subset N$ e a inclusão $i : M \hookrightarrow N$ é um mergulho, diz-se que M é uma subvariedade de N.*

Definição 1.4 *Uma métrica Riemanniana (ou estrutura Riemanniana) em uma variedade diferenciável M é uma correspondência que associa a cada ponto p de M um produto interno $\langle .,. \rangle_p$ (isto é, uma forma bilinear simétrica, positiva definida) no espaço tangente T_pM, que varia diferenciavelmente no seguinte sentido: Se $X : U \subset \mathbb{R}^n \to M$ é um sistema de coordenadas locais em torno de p, com $X(x_1, x_2, \ldots, x_n) = q \in X(U)$ e $\frac{\partial}{\partial x_i}(q) = dX(0, \ldots, 1, \ldots, 0)$ então $\langle \frac{\partial}{\partial x_i}(q), \frac{\partial}{\partial x_j}(q) \rangle_q = g_{ij}(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ é uma função diferenciável em U.*

Uma variedade diferenciável com uma dada métrica Riemanniana chama-se uma variedade Riemanniana.

A primeira coisa a se fazer depois de definir certa estrutura é estabelecer uma noção de equivalência para tal estrutura.

Definição 1.5 *Sejam M e N variedades Riemannianas. Um difeomorfismo $f : M \to N$ (isto é, f é uma bijeção diferenciável com inversa diferenciável) é chamado uma isometria se:*

$$\langle u, v \rangle_p = \langle df_p(u), df_p(v) \rangle_{f(p)}$$

para todo $p \in M$, u, $v \in T_pM$

Nas definições seguintes indicaremos por $\mathfrak{X}(M)$ o conjunto dos campos de vetores de classe C^∞ em M e por $\mathcal{D}(M)$ o anel das funções reais de classe C^∞ definidas em M.

Definição 1.6 *Uma conexão afim ∇ em uma variedade diferenciável M é uma aplicação*

$$\nabla : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \to \mathfrak{X}(M)$$

que se indica por $(X, Y) \longmapsto \nabla_X Y$ e que satisfaz as seguintes propriedades:

i) $\nabla_{fX+gY} Z = f\nabla_X Z + g\nabla_Y Z$,

ii) $\nabla_X (Y + Z) = \nabla_X Y + \nabla_X Z$,

iii) $\nabla_X (fY) = f\nabla_X Y + X(f)Y$,

onde $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$ e $f, g \in \mathcal{D}(M)$.

Os resultados a seguir podem ser encontrados com detalhes em [9].

Proposição 1.7 *Seja M uma variedade diferenciável com uma conexão afim ∇. Então existe uma única correspondência que associa a um campo vetorial V ao longo da curva diferenciável $c : I \to M$ um outro campo vetorial $\frac{DV}{dt}$ ao longo de c, denominado derivada covariante de V ao longo de c, tal que:*

i) $\frac{D}{dt}(V+W) = \frac{DV}{dt} + \frac{DW}{dt}$.

ii) $\frac{D}{dt}(fV) = \frac{df}{dt}V + f\frac{DV}{dt}$, *onde W é um campo de vetores ao longo de c e f é uma função diferenciável em I.*

iii) Se V é induzido por um campo de vetores $Y \in \mathfrak{X}(M)$, isto é, $V(t) = Y(c(t))$, então $\frac{DV}{dt} = \nabla_{\frac{dc}{dt}} Y$.

Proposição 1.8 *Seja M uma variedade Riemanniana. Uma conexão ∇ em M é compatível com a métrica se e só se para todo par V e W de campos de vetores ao longo da curva diferenciável $c : I \subset \mathbb{R} \to M$ tem-se*

$$\frac{d}{dt}\langle V,W\rangle = \left\langle \frac{DV}{dt}, W \right\rangle + \left\langle V, \frac{DW}{dt} \right\rangle, t \in I.$$

Corolário 1.9 *Uma conexão ∇ em uma variedade Riemanniana M é compatível com a métrica se, e só se,*

$$X\langle Y,Z\rangle = \langle \nabla_X Y, Z\rangle + \langle Y, \nabla_X Z\rangle, \qquad X,Y,Z \in \mathfrak{X}(M).$$

Definição 1.10 *Uma conexão afim ∇ em uma variedade diferenciável M é dita simétrica quando*

$$\nabla_X Y - \nabla_Y X = [X,Y], \qquad \forall X,Y \in \mathfrak{X}(M).$$

Teorema 1.11 *(Levi-Civita) Dada uma variedade Riemanniana M, existe uma conexão afim ∇ em M satisfazendo as condições:*

i) ∇ *é simétrica.*

ii) ∇ *é compatível com a métrica Riemanniana.*

A conexão dada pelo teorema acima é denominada conexão de Levi-Civita(ou Riemanniana) de M.

Definição 1.12 *Sejam M uma variedade Riemanniana e $X \in \mathfrak{X}(M)$. O divergente de X é definido como:*

$$\begin{aligned} divX \ &: \ M \longrightarrow \mathbb{R} \\ & \quad p \longmapsto traço(Y(p) \to \nabla_Y X(p)), \qquad p \in M. \end{aligned}$$

Definição 1.13 *Sejam M uma variedade Riemanniana e $f \in \mathcal{D}(M)$. O gradiente de f é definido como o campo vetorial $gradf$ em M tal que:*

$$\langle gradf(p), v\rangle = df_p(v), \qquad p \in M, v \in T_pM$$

Definição 1.14 *Sejam M uma variedade Riemanniana. O Laplaciano de M é definido como o operador*

$$\begin{aligned} \Delta f \ &: \ \mathcal{D}(M) \longrightarrow \mathcal{D}(M) \\ & f \longmapsto \Delta f = div(gradf), \qquad f \in \mathcal{D}(M) \end{aligned}$$

Definição 1.15 *Sejam M uma variedade Riemanniana. A Hessiana de $f : M \to \mathbb{R}$ é dado por*

$$\begin{aligned} \nabla^2 f \ &: \ \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \longrightarrow C^\infty(M) \\ & (X,Y) \longmapsto \langle \nabla_X gradf, Y\rangle \end{aligned}$$

Podemos considerar $Hessf$ como um tensor, tal que, para cada par de campos X, $Y \in \mathfrak{X}(M)$, temos $Hessf(X,Y) = \langle Hessf(X), Y\rangle$.

Adotando um referencial ortonormal $E_1, E_2, E_3, \ldots E_n$ em $p \in M$, onde M é uma variedade Riemanniana de dimensão n, temos a seguinte proposição.

Proposição 1.16 *Seja E_i, $i = 1,2,3\ldots,n = dim(M)$, um referencial ortonormal em $p \in M$. Então o divergente e o gradiente podem ser representados respectivamente por:*

$$divX(p) = \sum_{i=1}^{n} (E_i(f_i))(p), \ \ onde \ \ X = \sum_i f_i E_i,$$

$$gradf(p) = \sum_{i=1}^{n} (E_i(f))E_i(p).$$

Prova. Para o gradiente de f temos, tomando $v = E_i(p), i = 1,2,3,\ldots n$, que

$$\langle gradf(p), E_i(p)\rangle = df_p(E_i)(p) = E_i(f) = f_i.$$

Logo, como

$$gradf(p) = \sum_{j=1}^{n} a_j E_j(p),$$

temos que

$$\langle \sum_{j=1}^{n} a_j E_j(p), E_i(p)\rangle = a_i = f_i.$$

Assim

$$grad f(p) = \sum_{i=1}^{n} (E_i(f))E_i(p).$$

Para o divergente temos que

$$\begin{aligned}
divX &= \text{traço}(Y(p) \to \nabla_Y X(p)) \\
&= \sum_{i=1}^{n} \langle \nabla_{E_i} X, E_i \rangle \\
&= \sum_{i=1}^{n} \langle \nabla_{E_i} (\sum_{j=1}^{n} (f_j E_j), E_i \rangle \\
&= \sum_{i,j=1}^{n} \langle E_i(f_j)E_j + f_j \nabla_{E_i} E_j, E_i \rangle \\
&= \sum_{i,j=1}^{n} \langle f_{ij} E_j, E_i \rangle \\
&= \sum_{i}^{n} E_i(f_i).
\end{aligned}$$

□

1.2 Curvatura

Apresentaremos agora uma definição de curvatura que, intuitivamente, mede o quanto uma variedade deixa de ser Euclidiana.

Definição 1.17 *A curvatura R de uma variedade Riemanniana M é uma correspondência que associa a cada par X, $Y \in \mathfrak{X}(M)$ uma aplicação $R(X,Y) : \mathfrak{X}(M) \to \mathfrak{X}(M)$ dada por*

$$R(X,Y)Z = \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_X \nabla_Y Z + \nabla_{[X,Y]} Z, \quad Z \in \mathfrak{X}(M)$$

onde ∇ é a conexão Riemanniana de M.

Proposição 1.18 *A curvatura R de uma variedade Riemanniana goza das seguintes propriedades:*

i) R é bilinear em $\mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M)$, isto é,

$$\begin{aligned}
R(fX_1 + gX_2, Y_1) &= fR(X_1, Y_1)) + gR(X_2, Y_1), \\
R(X_1, fY_1 + gY_2) &= fR(X_1, Y_1)) + gR(X_1, Y_2),
\end{aligned}$$

f, $g \in \mathcal{D}(M)$, $X_1, X_2, Y_1, Y_2 \in \mathfrak{X}(M)$.

ii) Para todo par $X,Y \in \mathfrak{X}(M)$, o operador curvatura $R(X,Y) : \mathfrak{X}(M) \to \mathfrak{X}(M)$ é linear, isto é,

$$\begin{aligned} R(X,Y)(Z+W) &= R(X,Y)Z + R(X,Y)W, \\ R(X,Y)fZ &= fR(X,Y)Z, \end{aligned}$$

$f \in \mathcal{D}(M)$, $Z,W \in \mathfrak{X}(M)$.

Prova. A demonstração segue da definição 1.6 e 1.16 □

Definição 1.19 *Dado um ponto $p \in M$ e um subespaço bidimensional $\sigma \subset T_pM$ o número real*

$$K(x,y) = K(\sigma) = \frac{\langle R(x,y)x,y\rangle}{|x \wedge y|^2}$$

onde x,y é uma base qualquer de σ, é chamado curvatura seccional de σ em p.

Algumas combinações das curvaturas seccionais aparecerão com frequência no trabalho, elas merecem destaque, são a curvatura de Ricci e a curvatura escalar, que definiremos a seguir.

Definição 1.20 *Seja $x = z_n$ um vetor unitário em T_pM; tomando uma base ortonormal $\{z_1, z_2, z_3, \ldots, z_{n-1}\}$ do hiperplano de T_pM ortogonal a x, as médias abaixo:*

$$\begin{aligned} Ric_p(x) &= \frac{1}{n-1}\sum_i \langle R(x,z_i)x,z_i\rangle, \ \ i = 1,2,3,\ldots n-1, \\ K(p) &= \frac{1}{n}\sum_j Ric_p(z_j), \ \ j = 1,2,3,\ldots n-1. \end{aligned}$$

são denominadas curvatura de Ricci e curvatura escalar, respectivamente.

1.3 Imersões Isométricas

Seja $f : M^n \to \overline{M}^{n+m=k}$ uma imersão. Então, para cada $p \in M$, existe uma vizinhança $U \subset M$ de p tal que $f(U) \subset \overline{M}$ é uma subvariedade de $\overline{M}$. Isto quer dizer que existem uma vizinhança $\overline{U} \subset \overline{M}$ de $f(p)$ e um difeomorfismo $\varphi : \overline{U} \to V \subset \mathbb{R}^k$ em um aberto V do $\mathbb{R}^k$, tais que φ aplica difeomorficamente $f(U) \cap \overline{U}$ em um aberto do subespaço $\mathbb{R}^n \subset \mathbb{R}^k$. Para simplificar a notação, identificaremos U com $f(U)$ e cada vetor $v \in T_qM$, $q \in U$, com $df_q(v) \in T_{f(q)}\overline{M}$.

Para cada $p \in M$, o produto interno em $T_p\overline{M}$ decompõe $T_p\overline{M}$ na soma direta

$$T_p\overline{M} = T_pM \oplus (T_pM)^{\perp}$$

onde $(T_pM)^{\perp}$ é o complemento ortogonal de T_pM em $T_p\overline{M}$.

Se $v \in T_p\overline{M}$, $p \in M$, podemos escrever

$$v = v^T + v^N, \;\; v^T \in T_pM, \;\; v^N \in (T_pM)^{\perp}$$

onde denominaremos v^T a componente tangencial de v e v^N a componente normal de v.

Indicaremos a conexão Riemanniana de $\overline{M}$ por $\overline{\nabla}$. Se X e Y são campos locais de vetores em M, e $\overline{X}$, $\overline{Y}$ são extensões locais de $\overline{M}$, definiremos

$$\nabla_X Y = (\overline{\nabla}_{\overline{X}}\overline{Y})^{\perp}$$

Se X, Y são campos locais em M. Então

$$B(X,Y) = \overline{\nabla}_{\overline{X}}\overline{Y} - \nabla_X Y$$

é um campo local em $\overline{M}$ normal a M. Além disso, B não depende das extensões $\overline{X}$, $\overline{Y}$. Com efeito, se $\overline{X}_1$ é outra extensão de X, teremos

$$(\overline{\nabla}_{\overline{X}}\overline{Y} - \nabla_X Y) - (\overline{\nabla}_{\overline{X}_1}\overline{Y} - \nabla_X Y) = \overline{\nabla}_{\overline{X}-\overline{X}_1}\overline{Y}$$

que se anula em M, pois $\overline{X} - \overline{X}_1 = 0$ em M; além disso, se $\overline{Y}_1$ é outra extensão de Y temos que

$$(\overline{\nabla}_{\overline{X}}\overline{Y} - \nabla_X Y) - (\overline{\nabla}_{\overline{X}}\overline{Y}_1 - \nabla_X Y) = \overline{\nabla}_{\overline{X}}(\overline{Y} - \overline{Y}_1) = 0,$$

pois $\overline{Y} - \overline{Y}_1 = 0$ ao longo de uma tragetória de X. Portanto, $B(X,Y)$ está bem definida. No que se segue, indicaremos por $\mathfrak{X}(U)^{\perp}$ o campo de vetores diferenciáveis em U normais a $f(U) \approx U$

Proposição 1.21 *Se X, $Y \in \mathfrak{X}(U)$, a aplicação $B : \mathfrak{X}(U) \times \mathfrak{X}(U) \to \mathfrak{X}(U)^{\perp}$ dada por*

$$B(X,Y) = \overline{\nabla}_{\overline{X}}\overline{Y} - \nabla_X Y$$

é bilinear e simétrica.

Prova. A demonstração pode ser vista com detalhes em [9].

$\square$

Seja $p \in M$ e $\eta \in (T_pM)^{\perp}$. A aplicação $H_\eta : T_pM \times T_pM \to \mathbb{R}$ dada por

$$H_\eta(x,y) = \langle B(x,y), \eta \rangle, \;\; x,y \in T_pM,$$

é pela proposição 1.20, uma forma bilinear simétrica. Logo temos o seguinte definição

Definição 1.22 *(Segunda Forma Fundamental) A forma quadrática II_η definida em T_pM por*

$$II_\eta(x) = H_\eta(x,x)$$

é chamada a segunda forma fundamental da imersão f em p segundo o vetor normal η.

A essa aplicação bilinear H_η fica associado uma aplicação linear auto-adjunta $S_\eta : T_pM \to T_pM$ dada por

$$\langle S_\eta(x), y \rangle = H_\eta(x,y) = \langle B(x,y), \eta \rangle$$

frequentemente denominada de "operador forma"ou "operador de Weingartein".

A proposição seguinte nos dá uma expressão da aplicação linear associada a segunda forma fundamental em termos da derivada covariante.

Proposição 1.23 *Seja $p \in M$, $x \in T_pM$ e $\eta \in (T_pM)^{\perp}$. Seja N uma extensão local de η normal a M. Então*

$$S_\eta(x) = -(\overline{\nabla}_x N)^T$$

.

Prova. Seja $y \in T_pM$ e X, Y extensões locais de x, y, respectivamente, e tangentes a M. Assim, como $\langle N, Y \rangle = 0$, temos que

$$\begin{aligned}
\langle S_\eta(x), y \rangle &= \langle B(X,Y)(p), N \rangle \\
&= \langle \overline{\nabla}_{\overline{X}} \overline{Y} - \nabla_X Y, N \rangle(p) \\
&= \langle \overline{\nabla}_X Y, N \rangle(p) \\
&= -\langle Y, \overline{\nabla}_X N \rangle(p) \\
&= \langle -\overline{\nabla}_x N, y \rangle,
\end{aligned}$$

para todo $y \in T_pM$.

Além disso, como $\overline{\nabla}_x N = (\overline{\nabla}_x N)^T + (\overline{\nabla}_x N)^N$ e $y \in T_pM$, temos que,

$$\begin{aligned}
\langle S_\eta(x), y\rangle &= \langle B(X,Y)(p), N\rangle \\
&= \langle -\overline{\nabla}_x N, y\rangle \\
&= \langle -[(\overline{\nabla}_x N)^T + (\overline{\nabla}_x N)^N], y\rangle \\
&= \langle -(\overline{\nabla}_x N)^T, y\rangle,
\end{aligned}$$

para todo $y \in T_pM$.

□

Exemplo 1.1 *Consideremos o caso particular em que a codimensão da imersão é 1, isto é, $f : M^n \to \overline{M}^{n+1}$; $f(M) \subset \overline{M}$ é então denominada uma hipersuperfície. Tomando $p \in M$ e $\eta \in (T_pM)^\perp$, $|\eta| = 1$. Como $S_\eta : T_pM \to T_pM$ é simétrica, existe pelo teorema espectral da álgebra linear uma base ortonormal de vetores próprios $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ de T_pM com valores próprios reais $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$, isto é, $S_\eta(e_i) = \lambda_i e_i$, $1 \le i \le n$. Se M e $\overline{M}$ são ambas orientáveis e estão orientadas então o vetor η fica unicamente determinado. Nesse caso, denominamos os e_i direções principais e os $\lambda_i = k_i$ curvaturas principais de f. As funções simétricas de $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ são invariantes da imersão. Por exemplo: $\det(S_\eta) = \lambda_1 \ldots . \lambda_n$ é denominada curvatura de Gauss-Kronecker de f e $\frac{1}{n}(\lambda_1 + \cdots + \lambda_n)$ é denominada curvatura média.*

Relacionaremos agora a curvatura de M com a curvatura de $\overline{M}$ e as segundas formas fundamentais. Se x, $y \in T_pM \subset T_p\overline{M}$, são linearmente independentes, indicaremos por $K(x,y)$ e $\overline{K}(x,y)$ as curvaturas seccionais de M e $\overline{M}$, respectivamente, no plano gerado por x,y.

Teorema 1.24 *(Gauss)Sejam $p \in M$ e x, y vetores ortonormais de T_pM. Então*

$$K(x,y) - \overline{K}(x,y) = \langle B(x,x), B(y,y)\rangle - |B(x,y)|^2$$

Prova. Sejam X, Y extensões locais ortogonais de x, y, respectivamente, e tangentes a M; indicaremos por $\overline{X}$, $\overline{Y}$ as extensões locais de X, Y a $\overline{M}$. Então utilizando a definição de cuvatura dada em 1.16, temos

$$\begin{aligned}
K(x,y) - \overline{K}(x,y) = \langle \nabla_Y\nabla_X X - \nabla_X\nabla_Y X - (\overline{\nabla}_{\overline{Y}}\overline{\nabla}_{\overline{X}}\overline{X} - \overline{\nabla}_{\overline{X}}\overline{\nabla}_{\overline{Y}}\overline{X}), Y\rangle(p) + \\
+\langle \nabla_{[X,Y]}X - \overline{\nabla}_{[\overline{X},\overline{Y}]}\overline{X}, Y\rangle(p).
\end{aligned}$$

Agora, temos que o último termo se anula, pois

$$\langle \nabla_{[X,Y]}X - \overline{\nabla}_{[\overline{X},\overline{Y}]}\overline{X}, Y\rangle(p) = \langle (\overline{\nabla}_{[\overline{X},\overline{Y}]}\overline{X})^N, Y\rangle(p) = 0.$$

Por outro lado, se indicarmos por $E_1,\ldots,E_m$, $m = dim(\overline{M}) - dim(M)$, campos locais ortonormais e normais a M, teremos que

$$B(X,Y) = \sum_i H_i(X,Y)E_i, \quad H_i = H_{E_i}, \quad i = 1,\ldots,m.$$

Portanto, em p

$$\begin{aligned}\overline{\nabla}_{\overline{Y}}\overline{\nabla}_{\overline{X}}\overline{X} &= \overline{\nabla}_{\overline{Y}}(\sum_i H_i(X,X)E_i + \nabla_X X)\\ &= \sum_i \{H_i(X,X)\overline{\nabla}_{\overline{Y}}E_i + \overline{Y}H_i(X,X)E_i\} + \overline{\nabla}_{\overline{Y}}\nabla_X X.\end{aligned}$$

Logo, em p

(a) $\langle \overline{\nabla}_{\overline{Y}}\overline{\nabla}_{\overline{X}}\overline{X}, Y\rangle = -\sum_i H_i(X,X)H_i(Y,Y) + \langle \nabla_Y \nabla_X X, Y\rangle$,
(b) $\langle \overline{\nabla}_{\overline{X}}\overline{\nabla}_{\overline{Y}}\overline{X}, Y\rangle = -\sum_i H_i(X,Y)H_i(X,Y) + \langle \nabla_X \nabla_Y X, Y\rangle$,

Usando (a) e (b), obtemos o desejado.

□

No que se segue, usaremos as letras latinas X, Y, Z, etc., para indicar os campos diferenciáveis de vetores tangentes e as letras gregas ξ, η, ζ, etc., para indicar os campos diferenciáveis de vetores normais. Vimos que a componente tangente de $\overline{\nabla}_X\eta$ é dada por $(\overline{\nabla}_X\eta)^T = -S_\eta(X)$. Passaremos agora a descrever a componente normal de $\overline{\nabla}_X\eta$, que será chamado conexão normal $\nabla^\perp$ da imersão. Explicitamente,

$$\nabla^\perp_X\eta = (\overline{\nabla}_X\eta)^N = \overline{\nabla}_X\eta - (\overline{\nabla}_X\eta)^T = \overline{\nabla}_X\eta + S_\eta(X)$$

Dada a imersão $f : M^n \to \overline{M}^{n+m=k}$ podemos decompor o espaço tangente $T_{f(p)}\overline{M}$ em dois subespaços, o espaço normal e o espaço tangente. A esses subspaços podemos considerar duas geometrias, a geometria do fibrado tangente e do fibrado normal. Essas geometrias se relacionam com a segunda forma fundamental da imersão por meio de expressões que generalizam as clássicas equações de Gauss e Codazzi da teoria das superfícies. Passaremos a descrevê-las.

Proposição 1.25 *As seguintes equações se verificam:*

(a) Equação de Gauss.

$$\begin{aligned}\langle \overline{R}(X,Y)Z,T\rangle = \langle R(X,Y)Z,T\rangle - \langle B(Y,T),B(X,Z)\rangle\\ +\langle B(X,T),B(Y,Z)\rangle.\end{aligned}$$

(b) Equação de Ricci.

$$\langle \overline{R}(X,Y)\eta,\zeta\rangle - \langle R^{\perp}(X,Y)\eta,\zeta\rangle = \langle [S_\eta,S_\zeta]X,Y\rangle$$

onde $[S_\eta,S_\zeta]$ *indica o operador* $S_\eta \circ S_\zeta - S_\zeta \circ S_\eta$.

Prova. A demonstração pode ser vista em [9]. □

As equações de Gauss e Ricci são expressões algébricas que relacionam as curvaturas dos fibrados tangente e normal respectivamente, com a segunda forma fundamental da imersão. Uma relação não algébrica é dada pela equação de Codazzi, para a qual precisamos "derivar"a segunda forma fundamental considerada como um tensor.

Dada uma imersão isométrica, convém indicar por $\mathfrak{X}(M)^{\perp}$ o espaço dos campos de vetores normais a M de classe C^{∞}. Nesse caso podemos considerar a segunda forma fundamental da imersão como o tensor

$$B : \mathfrak{X}(M)\times\mathfrak{X}(M)\times\mathfrak{X}(M)^{\perp} \to \mathcal{D}(M)$$

definido por

$$B(X,Y,\eta) = \langle B(X,Y),\eta\rangle.$$

A definição de derivada covariante se estende a este tipo de tensor de maneira natural:

$$(\overline{\nabla}_X B)(Y,Z,\eta) = X(B(Y,Z,\eta)) - B(\nabla_X Y,Z,\eta) - B(Y,\nabla_X Z,\eta) - B(Y,Z,\nabla^{\perp}_X\eta) \quad (1\text{-}1)$$

Proposição 1.26 *(Equação de Codazzi)Com a notação acima temos que*

$$\langle \overline{R}(X,Y)Z,\eta\rangle = (\overline{\nabla}_Y B)(X,Z,\eta) - (\overline{\nabla}_X B)(Y,Z,\eta).$$

Prova. A demonstração pode ser vista em [9]. □

Observação 1.1 *Se o espaço ambiente* $\overline{M}$ *tem curvatura seccional constante, a equação de Codazzi se reduz a:*

$$(\overline{\nabla}_Y B)(X,Z,\eta) = (\overline{\nabla}_X B)(Y,Z,\eta)$$

pois, nesse caso $\overline{R} \equiv 0$.

Se, além disso, a codimensão da imersão é 1*, ou seja,* $f(M)$ *é uma hipersuperfície, temos que* $\nabla^{\perp}_X\eta = 0$*. Logo*

$$\begin{aligned}(\overline{\nabla}_Y B)(X,Z,\eta) &= X\langle S_\eta(Y),Z\rangle - \langle S_\eta(\nabla_X Y),Z\rangle - \langle S_\eta(Y),\nabla_X Z\rangle \\ &= \langle \nabla_X(S_\eta(Y)),Z\rangle - \langle S_\eta(\nabla_X Y),Z\rangle.\end{aligned}$$

Neste caso, como

$$(\overline{\nabla}_Y B)(X,Z,\eta) = (\overline{\nabla}_X B)(Y,Z,\eta),$$

temos que

$$\langle \nabla_X(S_\eta(Y)),Z\rangle - \langle S_\eta(\nabla_X Y),Z\rangle = \langle \nabla_Y(S_\eta(X)),Z\rangle - \langle S_\eta(\nabla_Y X),Z\rangle.$$

Logo

$$\nabla_X(S_\eta(Y)) - \nabla_Y(S_\eta(X)) = S_\eta([X,Y]).$$

Definição 1.27 *Seja $f : M \to \overline{M}$ um imersão, $p \in M$ e considere $\{E_1,\dots,E_n\}$ um referencial ortonormal do espaço $\mathfrak{X}(U)^\perp$, onde U é uma vizinhança de M do ponto p na qual f é um mergulho, então o vetor normal*

$$H = \frac{1}{n}\sum_i (\mathit{traço}\ S_{E_i})E_i$$

é dito vetor curvatura média de f em p.

1.4 O r-ésimo Tensor de Newton

Definição 1.28 *Uma função $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ é dita simétrica se, F é invariante por permutação de suas variáveis independentes, isto é*

$$F(x_1,x_2,\dots,x_n) = F(\sigma(x_1,x_2,\dots,x_n))$$

onde σ é uma permutação de $(x_1,x_2,\dots,x_n)$.

Exemplo 1.2 *As funções $F,G : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, dadas por,*

$$F(x_1,x_2,\dots,x_n) = \prod_{i=1}^n x_i,$$

$$G(x_1,x_2,\dots,x_n) = \sum_{1\le i\le j\le k\le n} x_i x_j x_k,$$

são exemplos de funções simétricas.

Definição 1.29 *Um polinômio s, com coeficientes em um corpo ou em um anel associativo e comutativo $\mathbb{K}$ com unidade, é simétrico, se s for uma função simétrica.*

Definição 1.30 *O r-ésimo polinômio simétrico elementar $s_r : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ é definido como*

$$s_r(x_1,x_2,\ldots,x_n) = \begin{cases} 1, & r=0 \\ \displaystyle\sum_{1\leq i_1\leq i_2\leq\cdots\leq i_r\leq n} x_{i_1}\ldots x_{i_r}, & r\in\{1,2,\ldots,n\} \\ 0, & r>n \end{cases}$$

onde chamaremos s_r de r-função simétrica de $(x_1,x_2,\ldots,x_n)$.

Definição 1.31 *Seja $k_1,\ldots,k_n$ os autovalores da matriz de Weingartein A. Definimos a r-curvatura média correspondente a imersão de M em $\mathbb{S}^{n+1}$ em um ponto $p\in M$ por*

$$H_r = \frac{1}{\binom{n}{r}}\sum_{i_1<\cdots<i_r} k_{i_1}\ldots k_{i_r} = \frac{1}{\binom{n}{r}}S_r.$$

onde S_r é uma r-função simétrica de $k_1,\ldots,k_n$. Para unificar a notação, vamos definir $H_0 = 1$ e $H_r = 0$, para todo $r \geq n+1$. Para $r = 1$, temos que $H_1 = H$ a curvatura média de M, no caso $r = 2$, temos que H_2 é a curvatura escalar de M e no caso $n = r$, temos que H_n é a curvatura de Gauss-Kronecker de M.

Definição 1.32 *Dado $p\in M$. Definimos o r-tensor de Newton como a aplicação P_r : $T_pM \to T_pM$ definida indutivamente por*

$$\begin{aligned} P_0 &= Id, \\ P_r &= S_rId - AP_{r-1}, r>1, \end{aligned}$$

Em [16], Reilly mostrou que P_r‘s satisfazem as condições dadas na seguinte proposição.

Proposição 1.33 *([16], veja também [1] lema 2.1)Seja $x : M^n \to N^{n+1}$ uma imersão isométrica entre duas variedades Riemannianas, e seja A o operador auto-adjunto associado a imersão x. Então o r- tensor de Newton P_r satisfaz:*

i) $tra(P_r) = (n-r)S_r$.

ii) $tra(AP_r) = (r+1)S_{r+1}$.

iii) $tra(A^2P_r) = S_1S_{r+1} - (r+2)S_{r+2}$.

Associado a cada r-tensor de Newton P_r, definimos o operador

$$\begin{aligned} L_r \ : \ & \mathcal{D}(M) \longrightarrow \mathcal{D}(M) \\ & f \longmapsto L_r(f) = \text{traço}(P_rHess(f)) \end{aligned}$$

Observação 1.2 *Para $r = 0$, temos que, o operador L_0 resume-se ao operador laplaciano e caso N^{n+1} tenha curvatura seccional constante, Rosenberg provou em [17], utilizando as equações de Codazzi, que*

$$L_r(f) = div_M(P_r grad f).$$

Proposição 1.34 *(**Desigualdade de Newton**)(veja [10] pg. 52, e [2] pg. 285) Seja $H_r = \frac{1}{\binom{n}{r}} S_r$, onde S_r é uma r-função simétrica de $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$. Então*

$$H_{i-1}H_{i+1} \leq H_i^2 \tag{1-2}$$

para todo i, tal que, $0 \leq i < n$. Além disso, a igualdade ocorre se, e somente se, $\lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_n$.

1.5 Espaços de Recobrimento

Dado um difeomorfismo local $f : M \to N$ entre dois espaços topológicos M, N, é natural perguntarmos quando esse difeomorfismo local é um difeomorfismo global. Convém colocar esta questão em um contexto mais geral e para isso precisamos da noção de Espaços de Recobrimento.

Definição 1.35 *Sejam $\overline{B}$ e B subconjuntos de $\mathbb{R}^n$. Dizemos que a aplicação $\pi : \overline{B} \to B$ é uma aplicação de recobrimento se*

(i) *π é contínua e $\pi(\overline{B}) = B$.*

(ii) *Para cada ponto $p \in B$ existe uma vizinhança U de B(chamada vizinhança distinguida de p) tal que*

$$\pi^{-1}(U) = \bigcup_{\alpha} V_\alpha$$

onde V_α‘s são abertos dois a dois disjuntos, tal que a restrição $\pi|_{V_\alpha} : V_\alpha \to U$ é um homeomorfismo.

Nessas condições, $\overline{B}$ é dito um espaço de recobrimento de B

Proposição 1.36 *Seja $\pi : \overline{B} \to B$ um homeomorfismo local, $\overline{B}$ compacta e B conexa. Então π é uma aplicação de recobrimento.*

Prova. Como π é um homeomorfismo local, temos que $\pi(\overline{B}) \subset B$ é aberto em B. Além disso, pela continuidade de π, temos que $\pi(\overline{B})$ é compacto, logo fechado em B. Como

$\pi(\overline{B}) \in B$ é aberto e fechado em um conjunto conexo B, temos $\pi(\overline{B}) = B$. Assim, a condição $i)$ da definição 3.1 está satisfeita.

Para verificar a condição $ii)$, seja $b \in B$. Então $\pi^{-1}(b) \subset \overline{B}$ é finito. Caso contrário $\pi^{-1}(b)$ teria um ponto de acumulação $\overline{q} \in \overline{B}$ e isto contradiz o fato de $\pi : \overline{B} \to B$ ser um homeomorfismo local. Logo, podemos escrever $\pi^{-1}(b) = \overline{b_1}, \ldots, \overline{b_k}$.

Seja W_i uma vizinhança de $\overline{b_i}$, $i = 1, \ldots, k$, tal que a restrição de π a W_i seja um homeomorfismo(π é um homeomorfismo local). Como $\pi^{-1}(b)$ é finito, é possível escolher os W_i suficientemente pequenos de forma que sejam dois a dois disjuntos. Como π é um homeomorfismo local, a imagem por π de um conjunto fechado em $\overline{B}$ é um conjunto fechado em B. Segue-se que existe uma vizinhança U de b tal que $U \subset \bigcap(\pi(W_i))$ e que $\pi^{-1}(U) \subset \bigcup_i W_i$. Fazendo $V_i = \pi^{-1}(U) \cap W_i$ temos que

$$\pi^{-1}(U) = \bigcup_i V_i$$

e que os V_i são dois a dois disjuntos. Além disso, é claro que a restrição de π a V_i é um homeomorfismo sobre U. Segue-se então que U é uma vizinhança distinguida de b. Como b é artitrário, temos que a condição $ii)$ é verificada. □

Uma propriedade importante da aplicação de recobrimento é a possibilidade de "levantar"curvas contínuas em B de forma a obter curvas contínuas em $\overline{B}$. Para formalizar, considere B e $\overline{B}$ subconjuntos de $\mathbb{R}^n$ e $\alpha : [0,l] \to B$ um caminho em B. Seja $\pi : \overline{B} \to B$ uma aplicação contínua. Se existir um caminho de $\overline{B}$

$$\overline{\alpha} : [0,l] \to \overline{B}$$

com $\pi \circ \overline{\alpha} = \alpha$, dizemos que $\overline{\alpha}$ é um levantamento de α com origem em $\overline{\alpha}(0) \in \overline{B}$.

Proposição 1.37 *Seja $\pi : \overline{B} \to B$ uma aplicação de recobrimento, $\alpha : [0,l] \to B$ um caminho em B, e $\overline{p}_0 \in \overline{B}$ tal que $\pi(\overline{p}_0) = \alpha(0) = p_0$. Então existe um único levantamento $\overline{\alpha} : [0,l] \to \overline{B}$ de α com origem em $\overline{p}_0$, isto é, com $\overline{\alpha}(0) = \overline{p}_0$.*

Prova. A demonstração pode ser vista com detalhes em [9]. □

Proposição 1.38 *Seja $\pi : \overline{B} \to B$ um homeomorfismo local com a propriedade de levantar caminhos. Seja $\overline{B}$ conexo por caminhos e B simplesmente conexo. Então π é um homeomorfismo.*

Prova. A demonstração pode ser vista com detalhes em [9]. □

O corolário abaixo segue da proposição 1.28.

Corolário 1.39 *Seja $\pi : \overline{B} \to B$ uma aplicação de recobrimento, $\overline{B}$ conexo por caminhos e B simplesmente conexo. Então π é um homeomorfismo.*

Definição 1.40 *B é localmente simplesmente conexa se qualquer vizinhança de cada ponto contém uma vizinhança simplesmente conexa. Em outras palavras, B é localmente simplesmente conexa se cada ponto tem vizinhanças simplesmente conexas arbitrariamente pequenas.*

Proposição 1.41 *Seja $\pi : \overline{B} \to B$ um homeomorfismo local com a propriedade de levantar caminhos. Suponha que B seja localmente simplesmente conexo e que $\overline{B}$ seja localmente conexo por caminhos. Então π é uma aplicação de recobrimento.*

Prova. A demonstração pode ser vista com detalhes em [9]. □

Proposição 1.42 *Sejam M uma variedade Riemanniana completa, conexa e $f : M \to N$ um difeomorfismo local sobre uma variedade Riemanniana N que possui a seguinte propriedade: para todo $p \in M$, e todo $v \in T_pM$, tem-se $|df_p(v)| \geq |v|$. Então f é uma aplicação de recobrimento.*

Prova. Como toda variedade diferenciável é localmente simplesmente conexa, temos pela proposição 1.31 que é suficiente mostrarmos que f possui a propriedade de levantar caminhos em N, isto é, dado uma curva diferenciável $c : [0,1] \to N$ e um ponto $q \in M$ com $f(q) = c(0)$, existe uma curva $\overline{c} : [0,1] \to M$ com $\overline{c}(0) = q$ e $f \circ \overline{c} = c$.

Primeiramente, como f é um difeomorfismo local em q, existe $\varepsilon > 0$ tal que é possível definir $\overline{c} : [0,\varepsilon] \to M$ com $\overline{c}(0) = q$ e $f \circ \overline{c} = c$, isto é, é possível levantar c em um intervalo pequeno a partir de q. Como f é um difeomorfismo local em todo M, o conjunto dos valores $A \subset [0,1]$, tais que c pode ser levantada em A a partir de q é um intervalo aberto à direita, isto é, $A = [0,t_0)$. Se mostrarmos que $t_0 \in A$, teremos que A é aberto e fechado em $[0,1]$, logo $A = [0,1]$ e c pode ser inteiramente levantada. Com efeito, seja $\{t_n\}_{n=1}^{\infty}$ uma sequência crescente em A com $\lim t_n = t_0$. Então a sequência $\{\overline{c}(t_n)\}$ está contida em um compacto $K \subset M$. De fato, do contrário, como M é completa, a distância entre $\overline{c}(t_n)$ e $\overline{c}(0)$ será arbitrariamente grande. Como por hipótese

$$
\begin{aligned}
l_{0,t_n}(c) = \int_0^{t_n} \left|\frac{dc}{dt}\right| dt &= \int_0^{t_n} \left|df_{\overline{c}(t)}\left(\frac{d\overline{c}}{dt}\right)\right| dt \\
&\geq \int_0^{t_n} \left|\frac{d\overline{c}}{dt}\right| dt \geq d(\overline{c}(t_n), \overline{c}(0))
\end{aligned}
$$

isso implica que o comprimento de c entre 0 e t_0 é arbitrariamente grande, o que é um absurdo, logo $\{\overline{c}(t_n)\}$ está contida em um compacto. Agora, como $\{\overline{c}(t_n)\} \in K$, $n = 1, \ldots,$

existe um ponto de acumulação $r \in M$ de $\{\bar{c}(t_n)\}$. Seja V uma vizinhança de r tal que $f \mid V$ é um difeomorfismo. Então $c(t_0) \in f(V)$ e, por continuidade, existe um intervalo $I \subset [0,1]$, $t_0 \in I$, tal que $c(I) \subset f(V)$. Tomando n tal que $\{\bar{c}(t_n)\} \in V$ e considerando o levantamento g de c em I passando por r, teremos que os levantamentos g e $\bar{c}$ coincidem em $[0,t_n) \cap I$, pois $f \mid V$ é biunívoca. Portanto, g é uma extensão de $\bar{c}$ em I, donde $\bar{c}$ está definido em t_0 e assim $t_0 \in A$. □

1.6 Outros Resultados

Seja M uma variedade Riemanniana n-dimensional conexa com fronteira ∂M diferenciável, mensurada e com densidade da medida sendo denotada por dA. Seja v um campo unitário normal e exterior a ∂M. Então, denotando $\langle , \rangle$ o produto interno em T_pM, $p \in M$ temos

Teorema 1.43 *(**Teorema da divergência**)Seja X um campo vetorial de classe $C^1(\overline{M})$ e com suporte compacto em $\overline{M}$. Então*

$$\int_M (divX)dV = \int_{\partial M} \langle X, v \rangle dA.$$

Prova. A demonstração pode ser vista com detalhes em [4]. □

O teorema abaixo segue como corolário do teorema da divergência.

Teorema 1.44 *(**Teorema de Green**)Sejam $h \in C^1(\overline{M})$ e $f \in C^2(\overline{M})$, tal que $h.grad(f)$ tem suporte compacto em $\overline{M}$. Então*

$$\int_M (h.\triangle(f) + \langle grad(h), grad(f) \rangle)dV = \int_{\partial M} h\frac{\partial f}{\partial v}dA.$$

Prova. Basta considerar o campo $X = h.grad(f)$ no Teorema da Divergência. □

O teorema a seguir pode ser conferido em [13].

Teorema 1.45 *(**Fórmula de Böchner**)Se M é uma variedade Riemanniana e $f \in C^\infty(M)$, então*

$$\frac{1}{2}\Delta(|grad(f)|^2) = |\nabla^2 f|^2 + \langle grad(f), grad(\Delta(f)) \rangle + Ric(graf(f), grad(f)).$$

Considere agora M^n uma Variedade Diferenciável n-dimensional (com fronteira possívelmente vazia). Vimos na seção 1.1 que o operador Laplaciano $\triangle$ atuando sobre funções $\mathcal{D}(M)$ foi definido como

$$\begin{aligned}\Delta f \quad : \quad & \mathcal{D}(M) \longrightarrow \mathcal{D}(M) \\ & f \longmapsto \Delta f = divgrad f, \qquad f \in \mathcal{D}(M)\end{aligned}$$

Vamos munir o espaço $\mathcal{D}(M)$ com a norma $\|.\|_1$ dada por

$$\|\varphi\|_1^2 = \int_M |grad\varphi|^2 + \int_M |\varphi|^2, \qquad \varphi \in \mathcal{D}(M)$$

e considerar o problema

$$\begin{cases} \triangle u + \lambda u = 0 \\ \partial M = \emptyset. \end{cases}$$

Denotando por λ_1 o primeiro autovalor não nulo do problema acima, podemos organizar os autovalores deste problema da seguinte maneira

$$0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \cdots \to +\infty$$

Vamos denotar por $H_1^2(M)$ o complemento de $\mathcal{D}(M)$ com respeito a norma $\|.\|_1$. Assim, definindo

$$H := \left\{ f \in H_1^2(M) | \int_M f = 0 \right\}$$

temos pelo princípio do Min-Máx que é possível encontrar uma base ortonormal $\{f_i\}$ enumerável, com $f_i \in \mathcal{D}(M)$ tal que

$$\lambda_1 = inf \left\{ \frac{\int_M |grad f|^2}{\int_M |f|^2} \quad | \quad f \in H \right\},$$

$$\lambda_i = inf \left\{ \frac{\int_M |grad f|^2}{\int_M |f|^2} \quad | \quad f \in H, \int_M f f_j = 0, j = 1, 2, \ldots, i-1 \right\}.$$

Em particular, temos a **Desigualdade de Poincaré**:

$$\int_M |grad f|^2 \geq \lambda_1 \int_M f^2, \qquad \forall f \in H. \tag{1-3}$$

CAPÍTULO 2

Teoremas de Rigidez em $\mathbb{R}^{n+1}$

Em 1974, Hersch provou a seguinte desigualdade isoperimétrica envolvendo o primeiro autovalor não nulo do problema do Laplaciano sobre uma esfera bidimensional $\mathbb{S}^2$.

Teorema 2.1 *([11])Para qualquer métrica Riemanniana em $\mathbb{S}^2$, o primeiro autovalor não nulo do problema do laplaciano satisfaz*

$$\lambda_1 \leq \frac{8\pi}{A(\mathbb{S}^2)}$$

onde $A(\mathbb{S}^2)$ denota a area da esfera.

Em 1976, Cheng utilizou o teorema de Hersch e obteve em [5] o seguinte Teorema de Rigidez

Teorema 2.2 *Seja M uma Variedade Diferenciável homeomorfa a esfera $\mathbb{S}^2$ e considere φ_1, φ_2 e φ_3 as três primeiras autofunções do problema do Laplaciano em M. Se a soma dos quadrados das funções φ_1, φ_2 e φ_3 é uma constante, isto é, $\sum_{i=1}^{3} \varphi_i^2 = c$, então M é isometrica a esfera $\mathbb{S}^2$ com curvatura seccional constante.*

Recentemente, Qiaoling Wang e Changyu Xia, obtiveram em [19] um resultado de rigidez para hipersuperfície baseando-se somente em informações globais sobre M e informação sobre o primeiro autovalor não trivial do problema do Laplaciano em M. Tal resultado estabelece que

Teorema 2.3 *([19])Seja M uma hipersuperfície fechada conexa mergulhada em $\mathbb{R}^n (n \geq 3)$. Seja Ω a região limitada de M e denote por V e A o volume de Ω e a area de M, respectivamente. Então o primeiro autovalor não trivial do problema do Laplaciano agindo sobre funções em M, satisfaz*

$$\lambda_1 \leq \frac{(n-1)A}{nV}\left(\frac{\omega_n}{V}\right)^{\frac{1}{n}}, \qquad \text{onde } \omega_n = \text{volume da esfera } S(0,1)).$$

A igualdade ocorre se, e somente se, M é uma esfera $(n-1)$-dimensional.

Tais resultados mostram que conceitos como o primeiro autovalor do Laplaciano atuando em M, que a priori parecem não influenciar em conceitos geométricos da variedade, de fato influenciam. Ou seja, informação sobre o primeiro autovalor não trivial em M traz ricas informações geométricas de M.

Neste capítulo, vamos provar um resultado apresentado pelos autores Qiaoling Wang e Changyu Xia em [20], onde os autores utilizam uma hipótese sobre o primeiro autovalor não nulo λ_1, para caracterizar uma esfera n-dimensional no espaço Euclidiano.

Primeiramente, se partindo de uma esfera $\mathbb{S}^n(c) \hookrightarrow \mathbb{R}^{n+1}$, no espaço Euclidiano, de curvatura seccional c, podemos destacar duas informações métrica deste objeto, são elas:

$$\begin{cases} Ric_{\mathbb{S}^n(c)} > 0 \\ K = (n-1)\lambda_1 \end{cases}$$

onde λ_1 denota o primeiro autovalor não nulo do Laplaciano atuando sobre funções C^∞ da esfera.

Uma conjectura interessante baseada no primeiro autovalor não nulo do Laplaciano, é pensar que, se partimos de uma hipersuperfície do espaço Euclidiano fechada, conexa e orientada, munido das duas informações métricas da esfera destacadas acima, que são, $Ric_M > 0$ e $K = (n-1)\lambda_1$, onde λ_1 é agora o primeiro autovalor não nulo do Laplaciano atuando sobre funções C^∞ de M, obteremos uma esfera novamente. Ou seja, será que a seguinte conjectura é verdadeira:

Conjectura 2.4 *Seja $M^n (n \geq 2)$ uma hipersuperfície fechada, conexa e orientada imersa em $\mathbb{R}^{n+1}$. Se $Ric_M > 0$ e a curvatura escalar de M é dada por $K = n(n-1)\lambda_1$, então M é isometrica a esfera n-dimensional $\mathbb{S}^n(c)$, para algum c.*

A resposta para essa conjectura foi dada por Deshmukh em 1998. Ele mostrou que:

Teorema 2.5 *(Deshmukh,[8])Seja $M^n (n \geq 2)$ uma hipersuperfície n-dimensional fechada, conexa, orientada imersa em $\mathbb{R}^{n+1}$ com curvatura de Ricci positiva. Se a curvatura escalar K de M e o primeiro autovalor não nulo do Laplaciano λ_1 satisfazem $K \leq \lambda_1(n-1)$. Então M é isométrica a $\mathbb{S}^n(c)$, para algum c.*

Dando um passo a mais na conjectura inicial, mostrando que a hipótese de igualdade na curvatura seccional poderia ser enfraquecida para uma limitação.

Em [20], os autores Qiaoling Wang e Changyu Xia, se propõe a obter uma caracterização para esfera no espaço Euclidiano, e obtem um resultado de generalização para o teorema proposto por Deshmukh, enfraquecendo a hipótese de positividade para o Ricci, por uma hipótese de não negatividade, ou seja, obtem-se o seguinte resultado:

Teorema 2.6 *Seja M^n uma hipersuperfície de dimensão n, orientada, fechada ,imersa em $\mathbb{R}^{n+1}$ e denote por λ_1 o primeiro autovalor não nulo do Laplaciano atuando sobre funções $f : M \to \mathbb{R}$. Assuma que M tem curvatura de Ricci não negativa e curvatura escalar de M limitada por $(n-1)\lambda_1$. Então M é uma esfera n-dimensional.*

Prova. Primeiramente, considere a imersão $i : M^n \to \mathbb{R}^{n+1}$ de M em $\mathbb{R}^{n+1}$. Podemos munir M^n da métrica induzida pela imersão em $\mathbb{R}^n$. Assim, a imersão $f : M^n \to \mathbb{R}^{n+1}$ pode ser vista como uma imersão isométrica.

Considere agora $p \in M$ e $\overline{\nabla}$, ∇ as conexões de $\mathbb{R}^n$ e M, respectivamente e seja $(y_1, \ldots, y_n)$ coordenadas locais de uma vizinhança U de $\mathbb{R}^n$ e X o vetor posição de $\mathbb{R}^{n+1}$ definido por

$$X = (x_1(y_1, \ldots, y_n), \ldots, x_{n+1}(y_1, \ldots, y_n)).$$

Assim, temos

$$\Delta X := (\Delta x_1, \ldots, \Delta x_{n+1}) = n\overrightarrow{H} \tag{2-1}$$

onde $\overrightarrow{H}$ é o vetor curvatura média. De fato, tomando a base ortonormal $\{\frac{\partial}{\partial y_i}\}_{i=1}^n$ de T_pM, temos

$$\begin{aligned} n\overrightarrow{H}_p &= \sum_{i=1}^n B(\frac{\partial}{\partial y_i}, \frac{\partial}{\partial y_i})_p \\ &= \sum_{i=1}^n (\overline{\nabla}_{\frac{\partial}{\partial y_i}} \frac{\partial}{\partial y_i} - \nabla_{\frac{\partial}{\partial y_i}} \frac{\partial}{\partial y_i})_p \\ &= \sum_{i=1}^n (\overline{\nabla}_{\frac{\partial}{\partial y_i}} \frac{\partial}{\partial y_i})_p \\ &= \sum_{i=1}^n (X_{\frac{\partial}{\partial y_i}\frac{\partial}{\partial y_i}})_p. \end{aligned} \tag{2-2}$$

Mas,

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n X_{\frac{\partial}{\partial y_i}\frac{\partial}{\partial y_i}} &= \Big(\sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial y_i}(\frac{\partial}{\partial y_i}(x_1)), \frac{\partial}{\partial y_i}(\frac{\partial}{\partial y_i}(x_2)), \ldots, \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial y_i}(\frac{\partial}{\partial y_i}(x_{n+1}))\Big) \\ &= (\Delta x_1, \ldots, \Delta x_{n+1}). \end{aligned} \tag{2-3}$$

Assim, temos

$$n\overrightarrow{H}_p = (\Delta x_1, \ldots, \Delta x_{n+1})_p \tag{2-4}$$

Agora, como M está imersa isometricamente em $\mathbb{R}^{n+1}$, temos que

$$
\begin{aligned}
g_{ij} &= g\Big(\frac{\partial}{\partial y_i},\frac{\partial}{\partial y_j}\Big)\\
&= \Big\langle \sum_{\alpha=1}^{n+1}\frac{\partial x_\alpha}{\partial y_i}\frac{\partial}{\partial x_\alpha},\sum_{\beta=1}^{n+1}\frac{\partial x_\beta}{\partial y_j}\frac{\partial}{\partial x_\beta}\Big\rangle\\
&= \sum_{\alpha,\beta=1}^{n+1}\frac{\partial x_\alpha}{\partial y_i}\frac{\partial x_\beta}{\partial y_j}\Big\langle\frac{\partial}{\partial x_\alpha},\frac{\partial}{\partial x_\beta}\Big\rangle\\
&= \sum_{\alpha,\beta=1}^{n+1}\frac{\partial x_\alpha}{\partial y_i}\frac{\partial x_\beta}{\partial y_j}\delta_{\alpha\beta}\\
&= \sum_{\alpha=1}^{n+1}\frac{\partial x_\alpha}{\partial y_i}\frac{\partial x_\alpha}{\partial y_j},
\end{aligned}
\tag{2-5}
$$

e, denotando $gradx_\alpha = \sum_i a_i \frac{\partial}{\partial y_i}$, temos que

$$
\langle gradx_\alpha, \frac{\partial}{\partial y_j}\rangle = \sum_i a_i g_{ij}. \tag{2-6}
$$

Fazendo a multiplicação dos coeficientes da métrica inversa g^{ij} em ambos os lados de (2-6) e somando em j temos

$$
\begin{aligned}
\sum_j g^{jk}\langle gradx_\alpha, \frac{\partial}{\partial y_j}\rangle &= \sum_j g^{jk}\sum_i a_i g_{ij}\\
&= \sum_{i,j} a_i g_{ij} g^{jk}\\
&= a_i\delta_{ik}\\
&= a_k.
\end{aligned}
$$

Desta forma, o gradiente de x_α pode ser escrito como

$$
\begin{aligned}
gradx_\alpha &= \sum_i a_i\frac{\partial}{\partial y_i}\\
&= \sum_{i,j} g^{ij}\langle gradx_\alpha,\frac{\partial}{\partial y_j}\rangle\frac{\partial}{\partial y_i}\\
&= \sum_{i,j} g^{ij}\frac{\partial x_\alpha}{\partial y_j}\frac{\partial}{\partial y_i}.
\end{aligned}
$$

Logo

$$\begin{aligned}
\sum_{\alpha=1}^{n+1} g\Big(gradx_\alpha, gradx_\alpha\Big) &= \sum_{\alpha=1}^{n+1}\left\langle \sum_{i,j} g^{ij}\frac{\partial x_\alpha}{\partial y_j}\frac{\partial}{\partial y_i}, \sum_{l,m} g^{lm}\frac{\partial x_\alpha}{\partial y_m}\frac{\partial}{\partial y_l}\right\rangle \\
&= \sum_{\alpha=1}^{n+1}\sum_{i,j,l,m}\frac{\partial x_\alpha}{\partial y_j}\frac{\partial x_\alpha}{\partial y_m} g^{ij} g_{il} g^{lm} \\
&= \sum_{\alpha=1}^{n+1}\sum_{i,j,m}\frac{\partial x_\alpha}{\partial y_j}\frac{\partial x_\alpha}{\partial y_m} g^{ij}\delta_{im} \\
&= \sum_{\alpha=1}^{n+1}\sum_{i,j}\frac{\partial x_\alpha}{\partial y_j}\frac{\partial x_\alpha}{\partial y_i} g^{ij} \\
&= \sum_{\alpha=1}^{n+1}\sum_{i,j=1}^{n}\frac{\partial x_\alpha}{\partial y_i}\frac{\partial x_\alpha}{\partial y_j} g^{ij} \\
&= \sum_{i,j=1}^{n}\sum_{\alpha=1}^{n+1}\frac{\partial x_\alpha}{\partial y_i}\frac{\partial x_\alpha}{\partial y_j} g^{ij} \\
&= \sum_{i,j=1}^{n} g_{ij} g^{ij} \\
&= \sum_{i=1}^{n} 1 \\
&= n. \qquad (2\text{-}7)
\end{aligned}$$

Escolhendo um sistema de coordenadas adequado, podemos assumir que

$$\int_M x_i = 0, \quad i = 1, \ldots, n+1 \qquad (2\text{-}8)$$

pois, a priori, se o sistema de coordenadas não satisfaz (2-8) então podemos fazer a seguinte mudança de coordenada

$$z_i = x_i - \frac{a_i}{vol(M)},$$

onde, $a_i := \int_M x_i$, e teremos

$$\int_M z_i = \int_M \Big(x_i - \frac{a_i}{vol(M)}\Big) = \int_M x_i - \int_M \frac{a_i}{vol(M)} = 0, \qquad i = 1, \ldots, n+1$$

Visto que M é fechada, temos que M não pode estar contida em um hiperplano de $\mathbb{R}^{n+1}$. Isso implica que cada função x_i não é constante, para $i = 1, \ldots, n+1$. Assim, utilizando a desigualdade de Poincaré, temos que

$$\lambda_1 \int_M x_i^2 \leq \int_M |gradx_i|^2, \quad i = 1, \ldots, n+1, \qquad (2\text{-}9)$$

onde a igualdade ocorre se, e somente se, $\Delta x_i = -\lambda_i x_i$. Somando de $i = 1$ até $n+1$ ambos os lados da equação (2-9), temos

$$\lambda_1 \leq \frac{\sum_{i=1}^{n+1} \int_M |gradx_i|^2}{\sum_{i=1}^{n+1} \int_M x_i^2} = \frac{\sum_{i=1}^{n+1} \int_M |gradx_i|^2}{\int_M |X|^2} = \frac{n.volume(M^n)}{\sum_{i=1}^{n+1} \int_M x_i^2}. \tag{2-10}$$

Na última passagem utilizamos a expressão (2-7). Temos assim, que a igualdade em (2-10) ocorre se, e somente se, $\Delta X = \lambda_1 X$

Agora, considere a função $f = |X|^2 : M^n \to \mathbb{R}$. Pela fórmula de Bochner(Teorema 1.36) temos que

$$\frac{1}{2}\Delta|gradf|^2 = |\nabla^2 f|^2 + \langle grad(\Delta f), gradf\rangle + Ric(gradf, gradf), \tag{2-11}$$

e como

$$div(\Delta f.gradf) = \langle gradf, grad(\Delta f)\rangle + \Delta f.div(gradf).$$

Temos pelo teorema da divergência que

$$\begin{aligned} 0 &= \int_M div(\Delta f.gradf) \\ &= \int_M \langle gradf, grad(\Delta f)\rangle + \Delta f.div(gradf) \\ &= \int_M \langle gradf, grad(\Delta f)\rangle + \int_M \Delta f.div(gradf). \end{aligned} \tag{2-12}$$

Logo

$$\begin{aligned} \int_M \langle gradf, grad(\Delta f)\rangle &= -\int_M \Delta f.div(gradf) \\ &= -\int_M \Delta f.\Delta f \\ &= -\int_M (\Delta f)^2. \end{aligned} \tag{2-13}$$

Assim, utilizando o teorema da divergência novamente, temos utilizando a equação (2-11) que

$$\begin{aligned} 0 &= \int_M \frac{1}{2}\Delta|gradf|^2 \\ &= \int_M \Big(|\nabla^2 f|^2 - (\Delta f)^2 + Ric(gradf, gradf)\Big) \end{aligned} \tag{2-14}$$

onde Ric denota o tensor de Ricci de M.

Tomando um referencial ortonormal tangente $\{e_i\}_{i=1}^n$ localmente definido sobre M e considerando $B(e_i,e_j)=B_{ij}$, $1\leq i,j\leq n$, temos que

$$
\begin{aligned}
\nabla^2 f(e_i,e_j) &= \langle \overline{\nabla}_{e_i} grad f, e_j\rangle \\
&= \langle \overline{\nabla}_{e_i} \sum_{k=1}^{n} e_k(\langle X,X\rangle)e_k, e_j\rangle \\
&= \langle \overline{\nabla}_{e_i} \sum_{k=1}^{n} 2(\langle \nabla_{e_k}X,X\rangle)e_k, e_j\rangle \\
&= \langle \sum_{k=1}^{n} (2\langle \nabla_{e_k}X,X\rangle)\overline{\nabla}_{e_i}e_k + \overline{e}_i(2\langle \nabla_{e_k}X,X\rangle)e_k, e_j\rangle \\
&= \langle \sum_{k=1}^{n} (2\langle \nabla_{e_k}X,X\rangle)(B_{ik}+\nabla_{e_i}e_k) + \overline{e}_i(2\langle \nabla_{e_k}X,X\rangle)e_k, e_j\rangle \\
&= \langle \sum_{k=1}^{n} (2\langle \nabla_{e_k}X,X\rangle)B_{ik} + \overline{e}_i(2\langle \nabla_{e_k}X,X\rangle)e_k, e_j\rangle \\
&= \sum_{k=1}^{n} (2\langle \nabla_{e_k}X,X\rangle)\langle B_{ik}, e_j\rangle + \sum_{k=1}^{n} \overline{e}_i(2\langle \nabla_{e_k}X,X\rangle)\langle e_k, e_j\rangle \\
&= \sum_{k=1}^{n} \overline{e}_i(2\langle \nabla_{e_k}X,X\rangle)\langle e_k, e_j\rangle \\
&= \overline{e}_i(2\langle e_j,X\rangle) \\
&= 2(\langle \overline{\nabla}_{e_i}e_j,X\rangle + \langle \overline{\nabla}_{e_i}X,e_j\rangle) \\
&= 2(B_{ij}\langle N,X\rangle + \langle e_i,e_j\rangle). \qquad (2\text{-}15)
\end{aligned}
$$

Assim, obtemos

$$
\begin{aligned}
\Delta f &= \sum_{i=1}^{n} \nabla^2 f(e_i,e_i) \\
&= \sum_{i=1}^{n} 2(B_{ii}\langle N,X\rangle + \langle e_i,e_i\rangle) \\
&= 2n(1+H\langle N,X\rangle), \qquad (2\text{-}16)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
|\nabla^2 f|^2 &= \sum_{i,j} |\nabla^2 f(e_i,e_j)|^2 \\
&= \sum_{i,j=1}^{n} \Big(2(B_{ij}\langle N,X\rangle + \langle e_i,e_j\rangle)\Big)^2 \\
&= 4\Big(n + 2nH\langle N,X\rangle + \sum_{i,j} B_{ij}^2\langle N,X\rangle^2\Big), \qquad (2\text{-}17)
\end{aligned}
$$

onde $H=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} B_{ii}$ é a curvatura média de M.

Integrando (2-16) e usando o teorema da divergência , temos que

$$\int_M (1 + H\langle N, X\rangle) = 0. \tag{2-18}$$

Com isso, obtemos por (2-16) e (2-17) que

$$\begin{aligned}
\int_M (\Delta f)^2 &= \int_M \Big(4n^2(1 + 2H\langle N, X\rangle + H^2\langle N, X\rangle^2)\Big) \\
&= \int_M \Big(4n^2(-1 + 2 + 2H\langle N, X\rangle + H^2\langle N, X\rangle^2)\Big) \\
&= \int_M \Big(4n^2(-1 + H^2\langle N, X\rangle^2)\Big),
\end{aligned} \tag{2-19}$$

e

$$\begin{aligned}
\int_M |\nabla^2 f|^2 &= \int_M 4\Big(n + 2nH\langle N, X\rangle + \sum_{i,j} B_{ij}^2\langle N, X\rangle^2\Big) \\
&= \int_M 4\Big(-n + 2n + 2nH\langle N, X\rangle + \sum_{i,j} B_{ij}^2\langle N, X\rangle^2\Big) \\
&= 4\int_M \Big(-n + \sum_{i,j} B_{ij}^2\langle N, X\rangle^2\Big).
\end{aligned} \tag{2-20}$$

Substituindo (2-19) e (2-20) em (2-14) temos

$$\begin{aligned}
\int_M Ric(grad f, grad f) &= \int_M (\Delta f)^2 - |\nabla^2 f|^2 \\
&= \int_M 4\Big(-n + \sum_{i,j} B_{ij}^2\langle N, X\rangle^2\Big) - \int_M 4\Big(-n + \sum_{i,j} B_{ij}^2\langle N, X\rangle^2\Big) \\
&= -4n^2\int_M 1 + \int_M 4n^2H^2\langle N, X\rangle^2 + 4n\int_M 1 - \int_M \sum_{i,j} B_{ij}^2\langle N, X\rangle^2 \\
&= -4n(n-1)volume(M) + 4\int_M \Big(n^2H^2 - \sum_{i,j} B_{ij}^2\Big)\langle N, X\rangle
\end{aligned}$$

e usando o fato da curvatura de Ricci ser não negativa, temos que

$$n(n-1)volume(M) \leq \int_M \Big(n^2H^2 - \sum_{i,j} B_{ij}^2\Big)\langle N, X\rangle. \tag{2-21}$$

Seja K a curvatura escalar de M. Então, pela fórmula de Gauss(proposição 1.24), temos

$$K = n^2H^2 - \sum_{ij} B_{ij}^2. \tag{2-22}$$

Como, por hipótese $K \leq (n-1)\lambda_1$, segue-se que

$$n(n-1)volume(M) \leq (n-1)\lambda_1 \int_M \langle N, X\rangle^2 \leq (n-1)\lambda_1 \int_M |X|^2. \tag{2-23}$$

Combinando (2-10) e (2-23), concluímos que

$$\lambda_1 = \frac{n.volume(M)}{\int_M |X|^2}. \tag{2-24}$$

Assim, temos que a igualdade

$$\Delta X = \lambda_1 X$$

ocorre.

Portanto, por (2-1), segue que

$$X = -\frac{n}{\lambda_1}\overrightarrow{H} \tag{2-25}$$

observando que $\overrightarrow{H}$ é normal a M, concluímos que

$$e_i(f) = 2\langle e_i, X\rangle = 0, \qquad i = 1, \dots, n$$

e então f é uma função constante. Portanto, M é uma esfera n-dimensional, e isso completa a prova do teorema. $\square$

CAPÍTULO 3

Teoremas de Rigidez em $\mathbb{S}^{n+1}$

Em [9], do Carmo apresenta o seguinte resultado clássico de rigidez na teoria das hipersuperfícies;

Teorema 3.1 *Seja $M^n(n \geq 2)$ uma hipersuperfície fechada conexa orientada imersa em $\mathbb{R}^{n+1}$ com curvatura de Gauss-Kronecker não nula em M, então M é difeomorfa a esfera n-dimensional $\mathbb{S}^n$.*

do Carmo o demonstra baseando-se na Teoria de Espaços de Recobrimento. Primeiramente, visto que a curvatura de Gauss-Kronecker é não nula, temos que a aplicação normal de Gauss $N : M \to \mathbb{S}^n$ é um difeomorfismo local. Mas, como M é compacta, conexa e $\mathbb{S}^n$ é simplesmente conexa temos pela proposição 1.35 e corolário 1.38 da seção Espaços de Recobrimento, que $N : M \to \mathbb{S}^n$ é um difeomorfismo global. Assim, fica estabelecido um difeomorfismo da hipersuperfície com a esfera n-dimensional.

Uma pergunta natural a se fazer, é se o Teorema 3.1 é válido se trocarmos apenas a hipótese de imersão em $\mathbb{R}^{n+1}$, pela imersão no espaço $\mathbb{S}^{n+1}$. Ou seja, será que podemos extender o Teorema 3.1 de maneira direta pro espaço $\mathbb{S}^{n+1}$, com isso, podemos conjecturar que

Conjectura 3.2 *Seja $M^n(n \geq 2)$ uma hipersuperfície fechada conexa orientada imersa em $\mathbb{S}^{n+1}$ com curvatura de Gauss-Kronecker não nula em M, então M é difeomorfa a esfera n-dimensional $\mathbb{S}^n$.*

Infelizmente a resposta é negativa, pois, para todo $r_1 > 0$, $r_2 > 0$, com $r_1 + r_2 = 1$ e todo $k \in \{1, \ldots, n-1\}$ a hipersuperfície orientada, fechada

$$\mathbb{S}^k(r_1) \times \mathbb{S}^{n-k}(r_2) := \{(x,y) \in \mathbb{R}^{k+1} \times \mathbb{R}^{n-k+1}; |x|^2 = r_1, |y|^2 = r_2\} \subset \mathbb{S}^{n+1}$$

tem curvatura de Gauss-Kronecker não nula em $\mathbb{S}^{n+1}$, porém, não é difeomorfo a esfera $\mathbb{S}^n$. Com isso, é natural encontrar condições para uma hipersuperfície fechada seja difeomorfa a esfera $\mathbb{S}^n$.

Recentemente, os autores Qiaoling Wang e Changyu Xia estudaram hipersuperfícies fechadas em $\mathbb{S}^{n+1}$ e obtiveram em [21] alguns teoremas de rigidez topológica a qual se obtem um difeomorfismo entre a hipersuperfície e a esfera n-dimensional. As técnicas utilizadas pelos autores são baseadas em Espaços de Recobrimento, onde o fazem estabelecendo um difeomorfismo local entre a hipersuperfície e a esfera $\mathbb{S}^n$, e juntamente com uma hipótese topológica ou global para M se obtém o difeomorfismo global sobre $\mathbb{S}^n$.

Na primeira parte deste capítulo provaremos dois resultados de rigidez topológica apresentado por Qiaoling Wang e Changyu Xia em [21], onde os autores acrescentam uma hipótese sobre a aplicação normal de Gauss e uma hipótese sobre a imersão em $\mathbb{S}^{n+1}$ e obtem resultados similares ao Teorema 3.1.

Na segunda parte, provaremos dois resultados de [20] e [21], ambos de rigidez métrica para hipersuperfícies em $\mathbb{S}^{n+1}$ e curvatura escalar constante em M como hipótese. Teoremas de Rigidez de hipersuperfícies com curvatura escalar constante em $\mathbb{S}^{n+1}$ tiveram bastante fluxo de estudos nos últimos anos.

Em [6], Cheng e Yau provaram que:

Teorema 3.3 *([6])Seja M^n uma hipersuperfície compacta de dimensão n imersa em $\mathbb{S}^{n+1}$ com curvatura escalar constante igual a $n(n-1)r$. Se*

i) $r \geq 1$
ii) A curvatura seccional de M é não negativa

Então, ou M é totalmente umbílica, ou M é o produto Riemanniano

$$\mathbb{S}^k(a) \times \mathbb{S}^{n-k}(\sqrt{1-a^2}), \quad 1 \leq k \leq n-1$$

onde $\mathbb{S}^k(a)$ é a esfera de raio a.

De maneira similar, Li em [12] trocou a hipótese da curvatura seccional no teorema proposto por Cheng e Yau acima por uma limitação sob a segunda forma fundamental de M e obteve o seguinte resultado.

Teorema 3.4 *([12])Seja M^n uma hipersuperfície compacta de dimensão n imersa em $\mathbb{S}^{n+1}$ com curvatura escalar constante igual a $n(n-1)r$. Se*

i) $r \geq 1$
ii) $S \leq (n-1)\frac{n(r-1)+2}{n-2} + \frac{n-2}{n(r-1)+2}$

Então, ou M é totalmente umbílica, ou M é o produto Riemanniano

$$\mathbb{S}^{n-1}(a) \times \mathbb{S}^1(\sqrt{1-a^2}),$$

com $a^2 \leq \frac{n-2}{nr}$.

Recentemente, Cheng observou que tomando $a \in (0,1)$ e considerando as imersões pela inclusão de $\mathbb{S}^{n-1}(a) \subset \mathbb{R}^n$ e $\mathbb{S}^1(\sqrt{1-a^2}) \subset \mathbb{R}^2$ e considerando a imersão pela inclusão de $\mathbb{S}^{n-1}(a) \times \mathbb{S}^1(\sqrt{1-a^2}) \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^2$ obtemos uma hypersuperfície fechada $\mathbb{S}^{n-1}(a) \times \mathbb{S}^1(\sqrt{1-a^2})$ de $\mathbb{S}^{n+1}$ com curvatura escalar constante $n(n-1)r$, onde $r > 1 - \frac{2}{n}$. Assim, os teoremas acima não englobam todos os produtos Riemannianos $\mathbb{S}^{n-1}(a) \times \mathbb{S}^1(\sqrt{1-a^2})$, existindo produtos $\mathbb{S}^{n-1}(a) \times \mathbb{S}^1(\sqrt{1-a^2})$ com $1 > r > 0$.

Pensando nisso, Cheng obteve em [7] a seguinte caracterização para o produto de esferas $\mathbb{S}^{n-1}(c) \times \mathbb{S}^1(\sqrt{1-c^2})$

Teorema 3.5 *([7])Seja M^n uma hipersuperfície completa de dimensão n imersa em $\mathbb{S}^{n+1}$ com curvatura escalar constante igual a $n(n-1)r$ e duas curvaturas principais distintas, onde uma é simples. Então $r \geq 1 - \frac{2}{n}$, e se*

i) $r \neq \frac{n-2}{n-1}$
ii) $S \leq (n-1)\frac{n(r-1)+2}{n-2} + \frac{n-2}{n(r-1)+2}$

Então, M é isométrica ao produto Riemanniano

$$\mathbb{S}^1(\sqrt{1-c^2}) \times \mathbb{S}^{n-1}(c)$$

Em [20], Qiaoling Wang e Changyu Xia obtiveram uma outra caracterização para o produto de esferas $\mathbb{S}^1(\sqrt{1-c^2}) \times \mathbb{S}^{n-1}(c)$. Diferentemente dos teoremas 3.3 e 3.4 os autores trabalham com uma hipóteses sobre as curvaturas principais para obter:

Teorema 3.6 *Seja M^n $(n \geq 3)$ uma hipersuperfície fechada, conexa e orientada imersa em $\mathbb{S}^{n+1}$ com curvatura escalar constante igual a $n(n-1)r$, onde r é constante e assuma que λ e μ são as curvaturas principais de M de multiplicidade $n-1$ e 1, respectivamente. Assuma também que, $\lambda\mu \leq -1$ em M. Então M é isométrica ao produto Riemanniano $\mathbb{S}^1\left(\sqrt{1-\frac{n-2}{nr}}\right) \times \mathbb{S}^{n-1}\left(\sqrt{\frac{n-2}{nr}}\right)$.*

Nesta segunda parte apresentaremos uma prova para este resultado. Além disso, provaremos um teorema de caracterização de hipersuperfícies totalmente umbílicas em termos da curvatura escalar e da aplicação normal de Gauss. Tal resultado estabelece que:

Teorema 3.7 *Seja M^n $(n \geq 2)$ uma hipersuperfície fechada, conexa e orientada imersa em $\mathbb{S}^{n+1}$ com curvatura escalar constante igual a $n(n-1)r$, onde $r > 1$. Seja N o campo unitário normal definido globalmente sobre M e assuma que imagem da aplicação normal de Gauss $N(M)$ de M esteja contida em um hemisferio aberto de $\mathbb{S}^{n+1}$. Então M é totalmente umbílica.*

Por fim, apresentaremos uma generalização para o teorema 3.5 proposto por Guoxin Wei e Young Jin Suh em [23], onde os autores assumem que a hipersuperfície seja apenas completa e não fechada. Além disso, apresentaremos uma prova alternativa para o teorema 3.6, apresentada por Harold Rosenberg, Hilário Alencar e Walcy Santos em [18], que o fizeram de maneira independente e o provaram de forma algébrica.

3.1 Teoremas de Rigidez topológica

Teorema 3.8 *Seja M^n $(n \geq 2)$ uma hipersuperfície fechada, conexa e orientada imersa em $\mathbb{S}^{n+1}$ com curvatura de Gauss-Kronecker não nula em M. Se M estiver contida em um hemisfério aberto de $\mathbb{S}^{n+1}$, então M é difeomorfa a esfera n-dimensional.*

Prova. Primeiramente fixaremos algumas notações. Denotaremos por N o campo unitário globalmente definido sobre M, onde M é uma hipersuperfície de $\mathbb{S}^{n+1} \subset \mathbb{R}^{n+2}$. $\langle , \rangle$ denotará a métrica Riemanniana de $\mathbb{R}^{n+2}$ bem como as métricas induzidas em $\mathbb{S}^{n+1}$ e M. Assuma que $\widetilde{\nabla}$, $\overline{\nabla}$ e ∇ são as conexões Riemannianas de $\mathbb{R}^{n+2}$, $\mathbb{S}^{n+1}$ e M, respectivamente.

Seja A o operador forma, ou seja, a matriz auto-adjunta determinada pela imersão de M em $\mathbb{S}^{n+1}$ associada a N, então

$$\widetilde{\nabla}_X Y = (Xy_1, \ldots, Xy_{n+2})$$

para $X = (x_1, \ldots, x_{n+2})$, $Y = (y_1, \ldots, y_{n+2}) \in \mathfrak{X}(\mathbb{R}^{n+2})$.

Além disso, utilizando a definição do operador simétrico B dado pela proposição 1.19, temos que

$$\widetilde{\nabla}_X Y = \overline{\nabla}_X Y - \langle X, Y \rangle x = \nabla_X Y + \langle AX, Y \rangle N - \langle X, Y \rangle x,$$

e

$$A(X) = -\widetilde{\nabla}_X N = -\overline{\nabla}_X N,$$

para todo $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$.

Vamos agora à demonstração do teorema. Seja $a \in \mathbb{S}^{n+1}$ e assuma que M está contida no hemisfério superior aberto determinado por a, ou seja,

$$M \subset \{y \in \mathbb{S}^{n+1} | \langle y, a \rangle > 0\}. \tag{3-1}$$

Seja

$$\mathbb{S}^n_a = \{x \in \mathbb{S}^{n+1} | \langle x, a \rangle = 0\},$$

o equador de $\mathbb{S}^{n+1}$ determinado por a e defina a aplicação

$$\begin{aligned}\psi \ : \ & M \to \mathbb{S}^n_a \\ & x \to \psi(x) = \frac{N(x) - \langle N(x), a\rangle a}{\sqrt{1-\langle N(x), a\rangle^2}}.\end{aligned}$$

Para cada $x \in M$ temos que $x \in \mathbb{S}^{n+1}$, pois, por hipótese M está imersa em $\mathbb{S}^{n+1}$. Assim, como $x \in \mathbb{S}^{n+1}$ e $N(x) \in T_x\mathbb{S}^{n+1}$, temos que $\langle N(x), x\rangle = 0$. Segue-se de (3-1) que $N(x) \neq \pm a$, para todo $x \in M$, pois, caso contrário, teriamos que $\langle N(x), x\rangle = \pm\langle a, x\rangle = 0$. Logo $x \in \mathbb{S}^n_a$, o que constitui um absurdo por (3-1). Então ψ está bem definida. Vamos mostrar que ψ é um difeomorfismo global. Para provarmos isso, vamos calcular a diferencial $d\psi$ de ψ. Tomando $x \in M$ e $v \in T_xM$, onde $v = \alpha'(0)$ e $\alpha : (-\varepsilon, \varepsilon) \to M$, temos que

$$\begin{aligned} d\psi_x(v) &= \lim_{t\to 0} \frac{\psi\circ\alpha(t) - \psi\circ\alpha(0)}{t} \\ &= \lim_{t\to 0} \frac{\frac{N\circ\alpha(t) - \langle N\circ\alpha(t), a\rangle a}{\sqrt{1-\langle N\circ\alpha(t), a\rangle^2}} - \frac{N\circ\alpha(0) - \langle N\circ\alpha(0), a\rangle a}{\sqrt{1-\langle N\circ\alpha(0), a\rangle^2}}}{t}. \end{aligned}$$

Utilizando a regra da cadeia, ficamos com

$$d\psi_x(v) = \frac{\overline{\nabla}_v N - \langle \overline{\nabla}_v N, a\rangle a}{\sqrt{1-\langle N(x), a\rangle^2}} + \frac{\langle N(x), a\rangle\langle \overline{\nabla}_v N, a\rangle}{\{1-\langle N(x), a\rangle^2\}^{3/2}}(N(x) - \langle N(x), a\rangle a).$$

Ou seja,

$$d\psi_x(v) = \frac{-Av + \langle Av, a\rangle a}{\sqrt{1-\langle N(x), a\rangle^2}} - \frac{\langle N(x), a\rangle\langle Av, a\rangle}{\{1-\langle N(x), a\rangle^2\}^{3/2}}(N(x) - \langle N(x), a\rangle a).$$

Como, $\langle Av, N(x)\rangle = 0$, temos que

$$\langle d\psi_x(v), d\psi_x(v)\rangle = \frac{|Av|^2(1-\langle N(x), a\rangle^2) - \langle Av, a\rangle^2}{(1-\langle N(x), a\rangle^2)^2}.$$

Decompondo $a \in \mathbb{S}^{n+1}$ em uma parcela normal a M e uma parcela tangente a M, temos que, $a = a^T + a^N$. Pela desigualdade de Cauchy-Schwarz temos

$$\langle Av, a\rangle^2 = \langle Av, a^T + a^N\rangle^2 = \langle Av, a^T\rangle^2 \leq |Av|^2|a^T|^2.$$

Logo, como x, $N(x)$ pertencem ao espaço normal de M, temos projetando a ao espaço gerado por x e $N(x)$, que

$$a^N = \langle a, x\rangle x + \langle a, N(x)\rangle N(x).$$

Assim

$$\begin{aligned}
1 &= \langle a,a\rangle \\
&= \langle a,a^T+a^N\rangle \\
&= \langle a,a^T\rangle+\langle a,a^N\rangle \\
&= \langle a,a^T\rangle+\langle a,x\rangle^2+\langle a,N(x)\rangle^2 \\
&= \langle a^N+a^T,a^T\rangle+\langle a,x\rangle^2+\langle a,N(x)\rangle^2 \\
&= \langle a^T,a^T\rangle+\langle a,x\rangle^2+\langle a,N(x)\rangle^2 \\
&= |a^T|^2+\langle a,x\rangle^2+\langle a,N(x)\rangle^2.
\end{aligned}$$

Logo

$$\begin{aligned}
\langle d\psi_x(v),d\psi_x(v)\rangle &= \frac{|Av|^2(1-\langle N(x),a\rangle^2)-\langle Av,a\rangle^2}{(1-\langle N(x),a\rangle^2)^2} \\
&\geq \frac{|Av|^2(1-\langle N(x),a\rangle^2-|a^T|^2)}{(1-\langle N(x),a\rangle^2)^2} \\
&\geq \frac{|Av|^2\langle a,x\rangle^2}{(1-\langle N(x),a\rangle^2)^2}.
\end{aligned}$$

Como $\langle x,a\rangle \neq 0$ e $|Av| \neq 0$ para todo $x \in M$ e $v \neq 0$ temos que

$$\langle d\psi_x(v),d\psi_x(v)\rangle \neq 0.$$

Assim, pelo teorema da função inversa, ψ é um difeomorfismo local. Como todo difeomorfismo local é um homeomorfismo local e M é compacta por hipótese, temos pela proposição 1.27 que ψ é uma aplicação de recobrimento. Agora, M sendo compacta, temos pelo teorema do Ropf-Rinow que M é completa. Logo, para cada dois pontos em M podemos traçar um caminho mínimo ligando estes dois pontos em M. Assim M é conexa por caminhos, e então, pelo corolário 1.30, temos que ψ é um homeomorfismo. Logo, ψ é um homeomorfismo e um difeomorfismo local, com isso, ψ^{-1} é diferenciável. Isso conclui que ψ é um difeomorfismo global. □

Agora, retiraremos a hipótese de M ser compacta, que é relativamente forte, e trocaremos por uma hipótese mais fraca, que é M ser completa. Com isso, temos o seguinte teorema.

Teorema 3.9 *Seja M^n $(n \geq 2)$ uma hipersuperfície completa, conexa e orientada imersa em $\mathbb{S}^{n+1}$ e denote por N o campo unitário normal definido globalmente sobre M. Se a imagem da aplicação normal de Gauss $N(M)$ de M estiver contida em uma bola* *geodésica fechada de raio inferior a $\frac{\pi}{2}$ em $\mathbb{S}^{n+1}$, então M é difeomorfa a esfera n-dimensional.*

Prova. Para demonstração deste teorema faremos uso da mesma notação utilizada no teorema anterior. Fixaremos $p \in \mathbb{S}^{n+1}$, $r \in (0, \frac{\pi}{2})$ e denotaremos por d a função distância em $\mathbb{S}^{n+1}$. Assuma agora que $N(M)$ está contida na bola geodésica

$$B(p,r) = \{x \in \mathbb{S}^{n+1} | d(x,p) \leq r\}.$$

Seja

$$S_p^n = \{x \in \mathbb{S}^{n+1} | \langle x, p \rangle = 0\},$$

o equador de $\mathbb{S}^{n+1}$ determinado por p e defina a aplicação

$$\begin{aligned} \phi \ : \ & M \to S_p^n \\ & x \to \phi(x) = \frac{x - \langle x, p \rangle p}{\sqrt{1 - \langle x, p \rangle^2}}. \end{aligned}$$

Para cada $x \in M$ temos que $x \in \mathbb{S}^{n+1}$, pois, por hipótese, M está imersa em $\mathbb{S}^{n+1}$. Assim, como $x \in \mathbb{S}^{n+1}$ e $N(x) \in T_x\mathbb{S}^{n+1}$ temos que $\langle N(x), x \rangle = 0$. A condição $N(M) \subset B(p,r)$ implica em $x \neq \pm p$ para todo $x \in M$. Caso contrário, se $x = \pm p$ teremos que $\pm \langle N(x), p \rangle = 0$, ou seja, $N(x) \in \mathbb{S}_p^n$. Um absurdo, visto que, por hipótese $N(M) \subset B(p,r)$. Logo, ϕ está bem definida. Vamos agora, mostrar que ψ é um difeomorfismo global. Para provarmos isso, vamos calcular a diferencial $d\phi$ de ϕ. Tomando $x \in M$ e $v \in T_xM$, onde $v = \alpha'(0)$ e $\alpha : (-\varepsilon, \varepsilon) \to M$, temos que

$$\begin{aligned} d\phi_x(v) &= \lim_{t \to 0} \frac{\phi \circ \alpha(t) - \phi \circ \alpha(0)}{t} \\ &= \lim_{t \to 0} \frac{\frac{\alpha(t) - \langle \alpha(t), p \rangle p}{\sqrt{1 - \langle \alpha(t), p \rangle^2}} - \frac{\alpha(0) - \langle \alpha(0), p \rangle p}{\sqrt{1 - \langle \alpha(0), p \rangle^2}}}{t}. \end{aligned}$$

Utilizando a regra da cadeia, ficamos com

$$d\phi_x(v) = \frac{v - \langle v, p \rangle p}{\sqrt{1 - \langle x, p \rangle^2}} + \frac{\langle x, p \rangle \langle v, p \rangle}{\{1 - \langle x, p \rangle^2\}^{3/2}} (x - \langle x, p \rangle p).$$

Como, $\langle v, x \rangle = 0$, temos que

$$\langle d\phi_x(v), d\phi_x(v) \rangle = \frac{1}{(1 - \langle x, p \rangle^2)^2} ((1 - \langle x, p \rangle^2)|v|^2 - \langle v, p \rangle^2).$$

Decompondo $p \in \mathbb{S}^{n+1}$ em uma parcela normal a M e uma parcela tangente a M, temos que, $p = p^T + p^N$. Pela desigualdade de Cauchy-Schwarz temos

$$\langle v, p\rangle^2 = \langle v, p^T + p^N\rangle^2 = \langle v, a^T\rangle^2 \leq |v|^2|p^T|^2.$$

Logo, como x, $N(x)$ pertencem ao espaço normal de M, temos projetando p ao espaço gerado por x e $N(x)$ que

$$p^N = \langle p,x\rangle x + \langle p,N(x)\rangle N(x).$$

Assim

$$\begin{aligned}
1 &= \langle p, p\rangle \\
&= \langle p, p^T + p^N\rangle \\
&= \langle p, p^T\rangle + \langle p, p^N\rangle \\
&= \langle p, p^T\rangle + \langle p,x\rangle^2 + \langle p,N(x)\rangle^2 \\
&= \langle p^N + p^T, p^T\rangle + \langle p,x\rangle^2 + \langle p,N(x)\rangle^2 \\
&= \langle p^T, p^T\rangle + \langle p,x\rangle^2 + \langle p,N(x)\rangle^2 \\
&= |p^T|^2 + \langle p,x\rangle^2 + \langle p,N(x)\rangle^2.
\end{aligned}$$

Logo

$$\begin{aligned}
\langle d\phi_x(v), d\phi_x(v)\rangle &= \frac{|v|^2(1-\langle x,p\rangle^2) - \langle v,p\rangle^2}{(1-\langle x,p\rangle^2)^2} \\
&\geq \frac{|v|^2(1-\langle x,p\rangle^2 - |p^T|^2)}{(1-\langle x,p\rangle^2)^2} \\
&\geq \frac{|v|^2\langle p,N(x)\rangle^2}{(1-\langle x,p\rangle^2)^2}.
\end{aligned} \tag{3-2}$$

Visto que

$$\langle x, p\rangle = |x||p|.\cos\theta = 1.1.\cos\theta = \cos\theta$$

e

$$-1 < \cos\theta < 1,$$

temos que, $0 < \langle x, p\rangle^2 < 1$. Logo $0 < 1 - \langle x, p\rangle^2 < 1$, então $\frac{1}{(1-\langle x,p\rangle^2)^2} > 1$. Com isso, a expressão (3-2) fica

$$\langle d\phi_x(v), d\phi_x(v)\rangle \geq |v|^2\langle p,N(x)\rangle^2. \tag{3-3}$$

Agora, como

$$\langle N(x),p\rangle = |N(x)||p|.\cos\theta = 1.1.\cos\theta_1 = \cos\theta_1,$$

e $\angle(N(x),p) = d(N(x),p) \leq r$, temos que

$$\langle N(x),p\rangle^2 \geq \cos^2 r.$$

Assim, (3-3) pode ser escrito como

$$\langle d\phi_x(v), d\phi_x(v)\rangle \quad \geq \quad |v|^2\cos^2 r \tag{3-4}$$

Como $v \neq 0$ e $0 < \cos^2 r$, temos que, $|d\phi_x(v)| \neq 0$. Logo, ϕ é um difeomorfismo local. Além disso, como a métrica $\langle,\rangle$ é completa, o mesmo é verdadeiro para a métrica $\widetilde{\langle,\rangle} = \cos^2 r\langle,\rangle$.

A equação (3-4) significa que a aplicação

$$\phi : (M,\widetilde{\langle,\rangle}) \to (\mathbb{S}^n_p, \langle,\rangle_{\mathbb{S}^n_p})$$

aumenta distância. Logo pela proposição 1.33, ϕ é uma aplicação de recobrimento. Agora, M sendo completa, temos que, para cada dois pontos em M pode-se traçar um caminho mínimo ligando estes dois pontos em M. Assim M é conexa por caminhos, e então pelo corolário 1.30 temos que ϕ é um homeomorfismo. Logo, ϕ é um homeomorfismo e um difeomorfismo local, com isso, ϕ^{-1} é diferenciável. Isso conclui que ϕ é um difeomorfismo global. □

3.2 Teoremas de Rigidez Métrica

Teorema 3.10 *Seja M^n $(n \geq 2)$ uma hipersuperfície fechada, conexa e orientada imersa em $\mathbb{S}^{n+1}$ com curvatura escalar constante igual a $n(n-1)r$ onde $r > 1$. Seja N o campo unitário normal definido globalmente sobre M e assuma que imagem da aplicação normal de Gauss $N(M)$ de M esteja contida em um hemisferio aberto de $\mathbb{S}^{n+1}$. Então M é totalmente umbílica.*

Prova. Seja $a \in \mathbb{S}^{n+1}$ e assuma que $N(M)$ está contida no hemisfério aberto determinado por a, ou seja,

$$N(M) \subset \{y \in \mathbb{S}^{n+1} | \langle y,a\rangle > 0\}.$$

Seja Δ o operador Laplaciano atuando sobre funções $C^\infty(M)$ e considere as funções $\langle x,a\rangle$ e $\langle N,a\rangle$ definidas em M. Pela proposição 1.14, temos que

$$grad\langle x,a\rangle = \sum_{i=1}^{n} E_i(\langle x,a\rangle)E_i(x),$$

e

$$grad\langle N,a\rangle = \sum_{i=1}^{n} E_i(\langle N,a\rangle)E_i(x).$$

Logo, como $E_i(\langle a,x\rangle) = \langle a,E_i(x)\rangle$ e $E_i(\langle N,a\rangle) = \langle a,\nabla_{E_i}N\rangle = \langle a,-A(E_i)\rangle = -\langle a^T,A(E_i)\rangle = -\langle A(a^T),(E_i)\rangle$, temos que $grad\langle x,a\rangle = \sum_{i=1}^{n}\langle a,E_i(x)\rangle E_i(x) = a^T$ e $grad\langle N,a\rangle = \sum_{i=1}^{n} -\langle A(a^T),(E_i)\rangle E_i(x) = -A(a^T)$, onde

$$a^T = a - \langle a,N\rangle N - \langle a,x\rangle x \tag{3-5}$$

e A é o operador forma correspondente a imersão de M em $\mathbb{S}^{n+1}$.

Agora, considere $X(x) \in T_xM$ e $\alpha : (-\varepsilon,\varepsilon) \to M$ tal que $\alpha(0) = x$ e $\alpha'(0) = X(x)$. Logo

$$\widetilde{\nabla}_X a^T = \lim_{t\to 0}\frac{a^T(\alpha(t)) - a^T(\alpha(0))}{t}.$$

Por (3-5), temos que

$$\widetilde{\nabla}_X a^T = -\langle a,N\rangle\nabla_X N - \langle a,\nabla_X N\rangle N - \langle a,X\rangle x - \langle a,x\rangle X,$$

onde $\widetilde{\nabla}$ é a conexão de $\mathbb{R}^{n+2}$. Assim, denotando por ∇ a conexão de M, temos que

$$\nabla_X a^T = (\widetilde{\nabla}_X a^T)^T = -\langle a,N\rangle\nabla_X N - \langle a,x\rangle X, \tag{3-6}$$

Utilizando a definição 1.14, podemos escrever o Hessiano de $\langle a,x\rangle$ como

$$\nabla^2\langle a,x\rangle(X,Y) = \langle\nabla_X a^T,Y\rangle = \langle a,N\rangle\langle AX,Y\rangle - \langle a,x\rangle\langle X,Y\rangle,$$

onde $X,Y \in \mathfrak{X}(M)$.

Já o Laplaciano de $\langle a,x\rangle$ pode ser escrito como

$$\Delta\langle a,x\rangle = div.grad\langle a,x\rangle = \sum_{i=1}^{n}\langle\nabla_{E_i}grad\langle a,x\rangle,E_i\rangle = \sum_{i=1}^{n}\langle\nabla_{E_i}a^T,E_i\rangle,$$

onde $\{E_i\}_{i=1}^n$ é um referencial geodésico. E então por (3-6) temos que

$$
\begin{aligned}
\Delta\langle a,x\rangle &= \sum_{i=1}^{n}\langle\langle a,N\rangle A(E_i)-\langle a,x\rangle E_i,E_i\rangle\\
&= \sum_{i=1}^{n}\langle a,N\rangle\langle A(E_i),E_i\rangle-\langle a,x\rangle\langle E_i,E_i\rangle\\
&= nH\langle a,N\rangle-n\langle a,x\rangle, \qquad (3\text{-}7)
\end{aligned}
$$

onde $H=\frac{1}{n}tra(A)$ é a função curvatura média de M.

Para o cálculo da Hessiana de $\langle a,N\rangle$ utilizaremos a definição de derivada covariante de um tensor, dado por (1-1). Assim, juntamente com a observação (1.1), temos que

$$
\begin{aligned}
\nabla^2\langle a,N\rangle(X,Y) &= -\langle\nabla_X(Aa^T),Y\rangle\\
&= -\nabla_X B(a^T,Y,N)-\langle A(\nabla_X a^T),Y\rangle\\
&= -\nabla_X B(a^T,Y,N)-\langle a,N\rangle\langle AX,AY\rangle+\langle a,x\rangle\langle AX,Y\rangle. \qquad (3\text{-}8)
\end{aligned}
$$

Pela equação de Codazzi, temos que

$$
\nabla_X B(a^T,Y,N)=\nabla_{a^T}B(X,Y,N), \qquad (3\text{-}9)
$$

e então, por (3-7) e (3-8), temos que o Laplaciano de $\langle a,N\rangle$ fica

$$
\begin{aligned}
\Delta\langle a,N\rangle &= tra(Hess\langle a,N\rangle)\\
&= \sum_{i=1}^{n}\{-\nabla_{E_i}B(a^T,E_i,N)-\langle a,N\rangle\langle AE_i,AE_i\rangle+\langle a,x\rangle\langle AE_i,E_i\rangle\}\\
&= n\langle gradH,a\rangle-\langle a,N\rangle|A|^2+nH\langle a,x\rangle, \qquad (3\text{-}10)
\end{aligned}
$$

onde denotaremos $|A|^2=\sum_i^n\langle AE_i,AE_i\rangle$

Agora, considere o campo $Z=A(grad\langle a,N\rangle)$. Tomando uma base ortonormal $\{e\}_{i=1}^n$ em M, então o divergente do campo Z é dado por

$$
\begin{aligned}
divZ &= \sum_i\langle\nabla_{e_i}(A(grad\langle a,N\rangle)),e_i\rangle\\
&= \sum_i(\langle A(\nabla_{e_i}grad\langle a,N\rangle),e_i\rangle+\nabla_{e_i}B(grad\langle a,N\rangle,e_i,N))\\
&= \sum_i(\langle Ae_i,\nabla_{e_i}grad\langle a,N\rangle\rangle+\nabla_{grad\langle a,N\rangle}B(e_i,e_i,N))\\
&= \sum_i\nabla^2\langle a,N\rangle(e_i,Ae_i)+n\langle grad\langle a,N\rangle,gradH\rangle. \qquad (3\text{-}11)
\end{aligned}
$$

Na primeira e terceira passagem utilizamos (1-1). Já na segunda utilizamos as equações de Codazzi. Integrando (3-11) em M e usando o teorema da divergência e (3-10) juntamente com as identidades de Green, temos que

$$\begin{aligned}
0 &= \int_M (\sum_i \nabla^2\langle a,N\rangle(e_i,Ae_i) + n\langle grad\langle a,N\rangle, gradH\rangle) \\
&= \int_M (\sum_i \nabla^2\langle a,N\rangle(e_i,Ae_i) - nH\Delta\langle a,N\rangle) \\
&= \int_M \sum_i \nabla^2\langle a,N\rangle(e_i,Ae_i) - \int_M nH(-n\langle\nabla H,a\rangle - \langle a,N\rangle|A|^2 + nH\langle a,x\rangle) \\
&= \int_M \sum_i \nabla^2\langle a,N\rangle(e_i,Ae_i) + \int_M (n^2H\langle\nabla H,a\rangle + nH\langle a,N\rangle|A|^2 - n^2H^2\langle a,x\rangle) \\
&= \int_M \sum_i \nabla^2\langle a,N\rangle(e_i,Ae_i) + \int_M (n^2Ha^T(H) + nH\langle a,N\rangle|A|^2 - n^2H^2\langle a,x\rangle) \qquad (3\text{-}12)
\end{aligned}$$

Agora, assuma que $\{e_i\}_{i=1}^n$ é uma base ortonormal que corresponde às curvaturas principais $\lambda_1,\ldots,\lambda_n$. Então, $Ae_i = \lambda_i$, $i = 1,\ldots,n$. Assim, usando (3-8), temos que

$$\begin{aligned}
\sum_i \nabla^2\langle a,N\rangle(e_i,Ae_i) &= \sum_i \lambda_i\nabla^2\langle a,N\rangle(e_i,e_i) \\
&= \sum_i \lambda_i(-\nabla_{e_i}B(a^T,e_i,N) - \langle a,N\rangle\langle Ae_i,Ae_i\rangle + \langle a,x\rangle\langle Ae_i,e_i\rangle) \\
&= \sum_i \lambda_i(-\nabla_{a^T}B(e_i,e_i,N) - \langle a,N\rangle\lambda_i^2) + \langle a,x\rangle\langle Ae_i,Ae_i\rangle \\
&= \sum_i \lambda_i(-\nabla_{a^T}B(e_i,e_i,N) - \langle a,N\rangle\lambda_i^2) + \langle a,x\rangle|A|^2 \\
&= \sum_i(-\nabla_{a^T}B(e_i,Ae_i,N)) - \sum_i\langle a,N\rangle\lambda_i^3 + \langle a,x\rangle|A|^2 \\
&= -\sum_i\langle\nabla_{a^T}(Ae_i),Ae_i\rangle - \sum_i\langle a,N\rangle\lambda_i^3 + \langle a,x\rangle|A|^2 \\
&= -\frac{1}{2}a^T(\sum_i\langle Ae_i,Ae_i\rangle) - \sum_i\langle a,N\rangle\lambda_i^3 + \langle a,x\rangle|A|^2 \\
&= -\frac{1}{2}a^T(|A|^2) - \sum_i\langle a,N\rangle\lambda_i^3 + \langle a,x\rangle|A|^2. \qquad (3\text{-}13)
\end{aligned}$$

Agora, utilizando a equação de Gauss dada na proposição 1.24, e a definição de curvatura escalar, temos que

$$n(n-1)(r-1) = n^2H^2 - |A|^2. \qquad (3\text{-}14)$$

Como r é constante, temos

$$a^T((nH)^2 - |A|^2) = 0. \qquad (3\text{-}15)$$

Substituindo (3-13) e (3-15) em (3-12), temos que

$$\begin{aligned} 0 &= \int_M \left(\frac{1}{2}a^T(|A|^2) - \sum_i \langle a,N\rangle\lambda_i^3 + \langle a,x\rangle|A|^2 + n^2Ha^T(H) + nH\langle a,N\rangle|A|^2 - n^2H^2\langle a,x\rangle\right) \\ &= \int_M \left((|A|^2 - n^2H^2)\langle a,x\rangle + (|A|^2nH - \sum_i \lambda_i^3)\langle a,N\rangle + \frac{1}{2}(2n^2Ha^T(H) + a^T(|A|^2))\right) \\ &= \int_M \left((|A|^2 - n^2H^2)\langle a,x\rangle + (|A|^2nH - \sum_i \lambda_i^3)\langle a,N\rangle\right). \qquad (3\text{-}16) \end{aligned}$$

Visto que, $n^2H^2 - |A|^2$ é constante, temos, utilizando o teorema da divergência juntamente com (3-7), que

$$\begin{aligned} 0 &= \int_M \Delta\langle a,x\rangle \\ &= \int_M nH\langle a,N\rangle - n\langle a,x\rangle \\ &= \int_M H\langle a,N\rangle - \langle a,x\rangle. \qquad (3\text{-}17) \end{aligned}$$

Assim sendo, temos que

$$\int_M (|A|^2 - n^2H^2)\langle a,x\rangle = \int_M H(|A|^2 - n^2H^2)\langle a,N\rangle. \qquad (3\text{-}18)$$

Consequentemente (3-16) fica

$$\int_M \left(H(|A|^2 - n^2H^2) + nH|A|^2 - \sum_i \lambda_i^3\right)\langle a,N\rangle = 0. \qquad (3\text{-}19)$$

Seja $S = |A|^2 - nH^2$. Então, expandindo $\sum_i(\lambda_i - H)^3$, temos

$$\sum_i \lambda_i^3 = nH^3 + 3HS + \sum_i(\lambda_i - H)^3. \qquad (3\text{-}20)$$

Segue-se combinando (3-19) e (3-20) que

$$\int_M \left((n-2)HS - \sum_i(\lambda_i - H)^3\right)\langle a,N\rangle = 0 \qquad (3\text{-}21)$$

Para finalizar o teorema, precisamos do seguinte lema, que permite estimar informações sobre $\sum_i a_i^3$, sabendo que $\sum_i a_i^2 = S$ e $\sum_i a_i = 0$.

Lema 3.11 *(ver[12])Sejam a_i, $i = 1, \ldots, n$, números reais satisfazendo $\sum_i a_i = 0$ e $\sum_i a_i^2 =$*

S. Então

$$-\frac{n-2}{\sqrt{n(n-1)}}S^{3/2} \leq \sum_i a_i^3 \leq \frac{n-2}{\sqrt{n(n-1)}}S^{3/2}$$

e uma das igualdades ocorre se, e somente se, pelo menos $(n-1)$ *termos de* $a_1, a_2, \ldots, a_n$ *são iguais.*

Como $r > 0$, temos por (3-14) que $H(x) \neq 0$, para todo $x \in M$. Assim, ou $H > 0$ em M, ou $H < 0$ em M, visto que M é conexa e H é contínua.

Considere o caso $H > 0$. Usando o fato de que $r > 0$ em (3-14), temos que,

$$n(n-1)(r-1) = n^2H^2 - |A|^2 > 0. \tag{3-22}$$

Logo,

$$\begin{aligned}
n^2H^2 &> |A|^2 \\
n^2H^2 - nH^2 &> |A|^2 - nH^2 \\
n(n-1)H^2 &> |A|^2 - nH^2 \\
H^2 &> \frac{|A|^2 - nH^2}{n(n-1)} \\
H &> \sqrt{\frac{|A|^2 - nH^2}{n(n-1)}} \\
H &> \sqrt{\frac{S}{n(n-1)}}.
\end{aligned} \tag{3-23}$$

Agora, como $\sum_i(\lambda_i - H) = 0$ e $\sum_i(\lambda_i - H)^2 = S$, temos pelo lema 3.11 que

$$\begin{aligned}
(n-2)HS - \sum_i(\lambda_i - H)^3 &\geq (n-2)HS - \frac{n-2}{\sqrt{n(n-1)}}S^{3/2} \\
&\geq (n-2)HS - (n-2)S\sqrt{\frac{S}{n(n-1)}} \\
&\geq (n-2)S\left(H - \sqrt{\frac{S}{n(n-1)}}\right) \geq 0.
\end{aligned} \tag{3-24}$$

Assim, como $\langle a, N\rangle > 0$ em M, (3-21) implica que $S = \sum_i(\lambda_i - H)^2 \equiv 0$. Logo $\lambda_i = H$, $i = 1, \ldots, n$. Ou seja, M é totalmente umbílica. O caso $H < 0$ é inteiramente análogo. Assim, fica estabelicido que M é totalmente umbílica. $\square$

Como foi dito no inicío do capítulo, apresentaremos agora um teorema de caracterização do produto Riemanniano $\mathbb{S}^1\left(\sqrt{1-\frac{n-2}{nr}}\right)\times\mathbb{S}^{n-1}\left(\sqrt{\frac{n-2}{nr}}\right)$. Tal resultado estabelece que

Teorema 3.12 *Seja M^n $(n\geq 3)$ uma hipersuperfície fechada, conexa e orientada imersa em $\mathbb{S}^{n+1}$ com curvatura escalar constante igual a $n(n-1)r$, onde r é constante e assuma que λ e μ são as curvaturas principais de M de multiplicidade $n-1$ e 1, respectivamente. Assuma também que, $\lambda\mu\leq -1$ em M. Então M é isométrica ao produto Riemanniano $\mathbb{S}^1\left(\sqrt{1-\frac{n-2}{nr}}\right)\times\mathbb{S}^{n-1}\left(\sqrt{\frac{n-2}{nr}}\right)$.*

Prova. Para a demonstração deste teorema faremos uso da mesma notação utilizada no teorema 3.1. Considere $\lambda_1,\ldots,\lambda_n$, os autovalores do operador forma auto-adjunto A correspondente à imersão de M em $\mathbb{S}^{n+1}$. Assim, λ_i são as curvaturas principais de M. Como por hipótese temos que M possui duas curvaturas principais distintas, λ, μ, onde uma é simples, podemos assumir sem perda de generalidade que,

$$\lambda_1=\lambda_2=\cdots=\lambda_{n-1}=\lambda \qquad \lambda_n=\mu \tag{3-25}$$

Utilizando a informação (3-25), temos que a curvatura media é dada por

$$H=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\lambda_i=\frac{1}{n}\big((n-1)\lambda+\mu\big). \tag{3-26}$$

Agora, considere $S=\sum_{i=1}^{n}\lambda_i^2$. Então temos

$$S=\sum_{i=1}^{n}\lambda_i^2=(n-1)\lambda^2+\mu^2. \tag{3-27}$$

Com isso, combinando (3-25) e (3-26) juntamente com a equação de Gauss(Proposição 1.24), temos que a curvatura escalar é dada por

$$\begin{aligned}K=n(n-1)r &= n(n-1)+n^2H^2-S\\ &= n(n-1)+n^2\Big(\frac{1}{n^2}\big((n-1)\lambda+\mu\big)^2\Big)-(n-1)\lambda^2-\mu^2\\ &= n(n-1)+\big((n-1)\lambda+\mu\big)^2-(n-1)\lambda^2-\mu^2\\ &= n(n-1)+(n-1)^2\lambda^2+2(n-1)\lambda\mu+\mu^2-(n-1)\lambda^2-\mu^2\\ &= n(n-1)+(n-1)^2\lambda^2+2(n-1)\lambda\mu-(n-1)\lambda^2. \end{aligned} \tag{3-28}$$

Logo

$$n(n-1)r=n(n-1)+(n-1)^2\lambda^2+2(n-1)\lambda\mu-(n-1)\lambda^2, \tag{3-29}$$

e, então,

$$n(r-1) = (n-2)\lambda^2 + 2\lambda\mu. \tag{3-30}$$

Agora, como $\lambda \neq \mu$, vamos mostrar que $\lambda \neq 0$ e $\lambda^2 - (r-1) > 0$.

Para isso, precisaremos do seguinte resultado apresentado por Cheng e Yau em [6]

Teorema 3.13 *([6])Seja M^n uma hipersuperfície compacta de dimensão n imersa em $\mathbb{S}^{n+1}$ com curvatura escalar constante igual a $n(n-1)r$. Se*

i) $r \geq 1$

ii) A curvatura seccional de M é não negativa

Então, ou M é totalmente umbílica, ou M é o produto Riemanniano

$$\mathbb{S}^k(a) \times \mathbb{S}^{n-k}(\sqrt{1-a^2}), \quad 1 \leq k \leq n-1$$

onde $\mathbb{S}^k(a)$ é a esfera de raio a.

Mostraremos primeiramente que $\lambda \neq 0$ em M. Suponha por absurdo que $\lambda(p) = 0$ para algum $p \in M$. Então temos por (3-30) que $r = 1$. Como a curvatura escalar é constante, obtemos $r \equiv 1$ em M. Novamente por (3-30), teremos $\lambda((n-2)\lambda + 2\mu) \equiv 0$. Isso implica que $\lambda \equiv 0$ em M. De fato, sejam $N = \{x \in M | \lambda(x) \neq 0\}$ e $Q = \{y \in M | \lambda((n-2)\lambda(y) + 2\mu(y)) = 0\}$. Como as funções curvaturas principais λ, μ são contínuas em M, temos que N é aberto em M, Q é fechado em M e $N \neq Q$, pois $\lambda(p) = 0$.

Agora, se $x \in N$, então $\lambda(x) \neq 0$. Por $\lambda((n-2)\lambda + 2\mu) \equiv 0$ obtemos que $((n-2)\lambda(x) + 2\mu(x)) = 0$. Logo $x \in Q$. Com isso, temos a inclusão $N \subset Q$. Por outro lado, se $x \in Q$, então $((n-2)\lambda(x) + 2\mu(x)) = 0$. Como λ e μ são duas curvaturas principais distintas, temos que $\lambda(y) \neq \mu(y)$. Assim, por $((n-2)\lambda(x) + 2\mu(x)) = 0$ temos que $\lambda(y) \neq 0$. De fato, se $\lambda(y) = 0$, então $\lambda(y) = 0 = \mu(y)$, um absurdo. Com isso, temos que $y \in N$, e então $Q \subset N$. Portanto $N = Q$. Como N é aberto e $N = Q$, temos que N é simultanemente aberto e fechado. Mas, como M é conexa e $M \neq N$, temos que $N = \emptyset$, segue-se assim que $\lambda \equiv 0$ em M.

Agora, como $r = 1$ e a curvatura seccional de M é dada por $K(e_i, e_j) = 1 + \langle B(e_i, e_i), B(e_j, e_j) \rangle \geq 0$, temos utilizando o teorema 4.5, que M ou é totalmente umbílica, ou

$$M = \mathbb{S}^k(a) \times \mathbb{S}^{n-k}(\sqrt{1-a^2}), \quad 1 \leq k \leq n-1.$$

Em todo caso teremos um absurdo. Logo, $\lambda \neq 0$ em M.

Agora, por (3-30), temos que

$$\mu = \frac{n(r-1)}{2\lambda} - \frac{n-2}{2}\lambda, \qquad \lambda - \mu = n\frac{\lambda^2-(r-1)}{2\lambda} \neq 0. \tag{3-31}$$

Decorre daí que, $\lambda^2-(r-1)\neq 0$. Se $\lambda^2-(r-1)<0$, temos por (3-31) que

$$r>1, \qquad \lambda^2-\lambda\mu = \frac{n}{2}[\lambda^2-(r-1)]<0. \tag{3-32}$$

Assim, $\lambda\mu>\lambda^2$, e então obtemos que a curvatura seccional de M é maior igual a 1. Com isso, pelo teorema 3.5 temos que M ou é totalmente umbílica, ou

$$M=\mathbb{S}^k(a)\times\mathbb{S}^{n-k}(\sqrt{1-a^2}), \quad 1\leq k\leq n-1.$$

Em todo caso teremos um absurdo. Logo, $\lambda^2-(r-1)>0$.

Agora, seja

$$\mathcal{D}_p(\lambda) := \{X\in T_pM|AX=\lambda(p)X\} \tag{3-33}$$

e considere $D(\lambda)$ a aplicacão definida em M tal que, $\mathcal{D}_p(\lambda)=\{X\in T_pM|AX=\lambda(p)X\}$. Segue-se de [15], [7] que a distribuição $D(\lambda)$ sobre M é totalmente integrável e λ é constante ao longo de cada folha de $\mathcal{D}_p$. Assim, podemos tomar uma base ortonormal $\{e_1,\ldots,e_n\}$ tangente a M tal que

$$Ae_i=\lambda e_i, \quad Ae_n=\mu e_n, \quad e_i\lambda=0, \quad i=1,\ldots,n-1. \tag{3-34}$$

Observe que $\lambda\neq 0$ em M. Assim, podemos assumir sem perda de generalidade que $\lambda>0$. Logo a função $\ln\lambda$ sobre M está bem definida. Assim, temos que

$$\begin{aligned}
\Delta(\ln\lambda) &= \sum_{i=1}^{n}\langle\nabla_{e_i} grad(\ln\lambda), e_i\rangle \\
&= \sum_{i=1}^{n}\Big\langle\nabla_{e_i}\Big(\sum_{j=1}^{n}\frac{e_j(\lambda)}{\lambda}e_j\Big), e_i\Big\rangle \\
&= \sum_{i=1}^{n}\Big\langle\nabla_{e_i}\Big(\frac{e_n(\lambda)}{\lambda}e_n\Big), e_i\Big\rangle \\
&= \sum_{i=1}^{n}\Big\langle e_i\Big(\frac{e_n(\lambda)}{\lambda}\Big)e_n+\frac{e_n(\lambda)}{\lambda}\nabla_{e_i}e_n, e_i\Big\rangle \\
&= \sum_{i=1}^{n}\Big\langle e_i\Big(\frac{e_n(\lambda)}{\lambda}\Big)e_n, e_i\Big\rangle+\sum_{i=1}^{n}\Big\langle\frac{e_n(\lambda)}{\lambda}\nabla_{e_i}e_n, e_i\Big\rangle \\
&= e_n\Big(\frac{e_n(\lambda)}{\lambda}\Big)+\sum_{i=1}^{n-1}\Big\langle\frac{e_n(\lambda)}{\lambda}\nabla_{e_i}e_n, e_i\Big\rangle+\Big\langle\frac{e_n(\lambda)}{\lambda}\nabla_{e_n}e_n, e_n\Big\rangle \\
&= e_n\Big(\frac{e_n(\lambda)}{\lambda}\Big)+\sum_{i=1}^{n-1}\Big\langle\frac{e_n(\lambda)}{\lambda}\nabla_{e_i}e_n, e_i\Big\rangle. \qquad (3\text{-}35)
\end{aligned}$$

Considerando a segunda forma fundamental da imersão de M em $\mathbb{S}^{n+1}$ como o tensor

$$B:\mathfrak{X}(M)\times\mathfrak{X}(M)\times\mathfrak{X}(M)^{\perp}\to\mathcal{D}(M)$$

definido por

$$B(X,Y,N)=\langle B(X,Y),N\rangle$$

com a derivação

$$(\overline{\nabla}_X B)(Y,Z,N)=X(B(Y,Z,N))-B(\nabla_X Y,Z,N)-B(Y,\nabla_X Z,N), \qquad (3\text{-}36)$$

temos por Codazzi(Proposição 1.25) e pelo fato que $\mathbb{S}^{n+1}$ tem curvatura seccional constante que

$$(\overline{\nabla}_Y B)(X,Z,N)=(\overline{\nabla}_X B)(Y,Z,N).$$

Além disso, temos que

$$\begin{aligned}
(\overline{\nabla}_X B)(Y,Z,N) &= X(B(Y,Z,N))-B(\nabla_X Y,Z,N)-B(Y,\nabla_X Z,N) \\
&= X(B(Z,Y,N))-B(\nabla_X Z,Y,N)-B(Z,\nabla_X Y,N) \\
&= (\overline{\nabla}_X B)(Z,Y,N), \qquad (3\text{-}37)
\end{aligned}$$

visto que B é bilinear pela proposição 1.20. Assim,

$$(\overline{\nabla}_X B)(Y,Z,N) = (\overline{\nabla}_X B)(Z,Y,N) = (\overline{\nabla}_Z B)(X,Y,N). \tag{3-38}$$

Para $i = 1,\dots,n-1$, temos por (3-34) que

$$\begin{aligned}
(\overline{\nabla}_{e_i} B)(e_i,e_n,N) &= e_i(B(e_i,e_n,N)) - B(\nabla_{e_i}e_i,e_n,N) - B(e_i,\nabla_{e_i}e_n,N) \\
&= -\langle A(\nabla_{e_i}e_i),e_n\rangle - \langle Ae_i,\nabla_{e_i}e_n\rangle \\
&= -\langle \nabla_{e_i}e_i,Ae_n\rangle - \langle Ae_i,\nabla_{e_i}e_n\rangle \\
&= -\mu\langle \nabla_{e_i}e_i,e_n\rangle - \lambda\langle e_i,\nabla_{e_i}e_n\rangle \\
&= \mu\langle \nabla_{e_i}e_n,e_i\rangle - \lambda\langle e_i,\nabla_{e_i}e_n\rangle \\
&= (\mu-\lambda)\langle \nabla_{e_i}e_n,e_i\rangle,
\end{aligned} \tag{3-39}$$

e

$$\begin{aligned}
(\overline{\nabla}_{e_n} B)(e_i,e_i,N) &= e_n(B(e_i,e_i,N)) - B(\nabla_{e_n}e_i,e_i,N) - B(e_i,\nabla_{e_n}e_i,N) \\
&= e_n\langle Ae_i,e_i\rangle - \langle A(\nabla_{e_n}e_i),e_i\rangle - \langle Ae_i,\nabla_{e_n}e_i\rangle \\
&= e_n(\lambda) - 2\lambda\langle \nabla_{e_n}e_i,e_i\rangle \\
&= e_n(\lambda).
\end{aligned} \tag{3-40}$$

Então, por (3-38), temos

$$\langle \nabla_{e_i}e_n,e_i\rangle = \frac{e_n(\lambda)}{\mu-\lambda}. \tag{3-41}$$

Considere agora, $w = \{\lambda^2-(r-1)\}^{-\frac{1}{n}}$. Cheng mostrou em [7] que w é solução da equação diferencial

$$e_ne_nw - w\Big(\frac{n-2}{2w^n} - r\Big) = 0.$$

Utilizando a expressão $w = \{\lambda^2-(r-1)\}^{-\frac{1}{n}}$, temos que a última equação é equivalente a

$$\begin{aligned}
e_ne_n\lambda = \frac{(n+2)\lambda^2+n(r-1)}{n(\lambda^2-(r-1))\lambda}(e_n\lambda)^2 - \\
-\frac{n}{2\lambda}(\lambda^2-(r-1))\Big(\frac{n-2}{2}(\lambda^2-(r-1))-r\Big).
\end{aligned} \tag{3-42}$$

Segue-se da equação (3-30), que

$$\lambda - \mu = \frac{n(\lambda^2 - (r-1))}{2\mu}. \tag{3-43}$$

Como, $\lambda\mu \leq -1$, temos por (3-30) que

$$\begin{aligned} -\lambda\mu &\geq 1 \\ -2\lambda\mu &\geq 2 \\ nr - n - 2\lambda\mu &\geq 2 + nr - n \\ n(r-1) - 2\lambda\mu &\geq nr - (n-2) \\ (n-2)\lambda^2 &\geq nr - (n-2) \\ \lambda^2 &\geq \frac{nr - (n-2)}{n-2} \\ \lambda^2 &\geq \frac{nr}{n-2} - 1. \end{aligned} \tag{3-44}$$

Substituindo (3-41), (3-42) e (3-43) em (3-35), temos

$$\begin{aligned} \Delta(\ln\lambda) &= \frac{e_n e_n \lambda}{\lambda} - \frac{(e_n\lambda)^2}{\lambda^2} - \frac{(n-1)(e_n\lambda)^2}{\lambda(\lambda-\mu)} \\ &= \left(\frac{(n+2)\lambda^2 + n(r-1)}{n\lambda^2(\lambda^2-(r-1))} - \frac{1}{\lambda^2} - \frac{2(n-1)}{n(\lambda^2-(r-1))}\right)(e_n\lambda)^2 - \\ &- \frac{n}{2\lambda}(\lambda^2-(r-1))\left(\frac{n-2}{2}(\lambda^2-(r-1)) - r\right) \\ &= \frac{2((2-n)\lambda^2 + n(r-1))}{n\lambda^2(\lambda^2-(r-1))}(e_n\lambda)^2 \\ &- \frac{n}{2\lambda}(\lambda^2-(r-1))\left(\frac{n-2}{2}(\lambda^2-(r-1)) - r\right). \end{aligned} \tag{3-45}$$

Por (3-44), concluímos que

$$\frac{n-2}{2}(\lambda^2 - (r-1)) - r \geq 0 \tag{3-46}$$

e

$$(2-n)\lambda^2 + n(r-1) \leq 0. \tag{3-47}$$

Portanto , de (3-45), segue que $\Delta(\ln\lambda) \leq 0$. Assim, pelo teorema de E. Hopf, temos que λ é constante em M. Novamente por (3-45), temos que $\Delta(\ln\lambda) = 0$ em M, e então

$$\frac{n-2}{2}(\lambda^2 - (r-1)) - r = 0 \tag{3-48}$$

em M, que é equivalente a

$$\lambda^2 = \frac{nr}{n-2} - 1 \tag{3-49}$$

em M.

Segue-se de (3-31) e (3-49) que

$$\begin{aligned}
\mu &= \frac{n(r-1)}{2\lambda} - \frac{(n-2)}{2\lambda}\lambda^2 \\
\mu &= \frac{n(r-1)}{2\lambda} - \frac{(n-2)}{2\lambda}\left(\frac{nr}{n-2} - 1\right) \\
\mu &= \frac{nr-n}{2\lambda} - \frac{nr}{2\lambda} + \frac{n-2}{2\lambda} \\
\mu &= -\frac{n}{2\lambda} + \frac{n-2}{2\lambda} \\
\mu &= -\frac{1}{\lambda}.
\end{aligned} \tag{3-50}$$

Isso conclui que as curvaturas principais de M são

$$\lambda, \ldots, \lambda, -\frac{1}{\lambda}.$$

Agora, diremos que uma hipersuperfície M em uma forma espacial $\overline{M}(c)$ de curvatura seccional constante c é uma hiperfície isoparamétrica, se M tiver curvaturas principais constantes. E. Cartan, classificou em [3] as hipersuperfícies isoparamétricas de $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{H}^n$ e $\mathbb{S}^n$ com o número de curvaturas principais $g \leq 3$; obtendo para o caso em que $g = 2$, M é hipersuperfície de $\mathbb{S}^{n+1}$ e $\lambda, \ldots, \lambda, -\frac{1}{\lambda}$ sendo as curvaturas principais de M, que

$$M = \mathbb{S}^1(\sqrt{1-k^2}) \times \mathbb{S}^{n-1}(k),$$

onde $k \in (0,1)$.

Visto que as curvaturas principais de $M = \mathbb{S}^1(\sqrt{1-k^2}) \times \mathbb{S}^{n-1}(k)$ são $k_1 = \cdots = k_{n-1} = \sqrt{\frac{1}{k^2} - 1}$, $k_n = -\sqrt{\frac{k^2}{1-k^2}}$ e $k_1 = \cdots = k_{n-1} = \lambda$, onde $\lambda^2 = \frac{nr}{n-2} - 1$, temos que $k^2 = \frac{n-2}{nr}$. Consequentemente, temos que

$$M = \mathbb{S}^1\left(\sqrt{1 - \frac{n-2}{nr}}\right) \times \mathbb{S}^{n-1}\left(\sqrt{\frac{n-2}{nr}}\right)$$

e isso completa a prova do teorema.

□

3.3 Resultados adicionais

3.3.1 Uma prova alternativa para o teorema 3.9

Nesta seção apresentaremos uma prova alternativa para o teorema 3.9. A demonstração que será apresentada foi dada por Hilário Alencar, Harold Rosenberg e Walcy Santos em [18]. Em [18] os autores se propõem a estudar hipersuperfícies fechadas orientadas imersas em $\mathbb{S}^{n+1}$ com r-curvatura média constante e não negativa. Como caso particular, tem-se resultados sobre a curvatura escalar constante. Neste caso, se toma $r = 2$ na r-curvatura média. A técnica utilizada pelos autores é mostrar que sob as hipóteses do teorema 3.9, a desigualdade de Newton(Proposição 1.33) ocorre. Logo, obtem-se via desigualdade de Newton que as funções $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ que compõem as r- funções simétricas são todas iguais, ou seja, M é totalmente umbílica.

Primeiramente, fixaremos algumas notações. Denotaremos por N o campo unitário globalmente definido sobre M, onde M é uma hipersuperfície de $\mathbb{S}^{n+1} \subset \mathbb{R}^{n+2}$. $\langle , \rangle$ denotará a métrica Riemanniana de $\mathbb{R}^{n+2}$ bem como as métricas induzidas em $\mathbb{S}^{n+1}$ e M. Assuma que $\widetilde{\nabla}$, $\overline{\nabla}$ e ∇ são as conexões Riemannianas de $\mathbb{R}^{n+2}$, $\mathbb{S}^{n+1}$ e M, respectivamente.

Seja A o operador forma, ou seja, a matriz auto-adjunta determinada pela imersão de M em $\mathbb{S}^{n+1}$ associada a N, então

$$\widetilde{\nabla}_X Y = (Xy_1, \ldots, Xy_{n+2})$$

para $X = (x_1, \ldots, x_{n+2})$, $Y = (y_1, \ldots, y_{n+2}) \in \mathfrak{X}(\mathbb{R}^{n+2})$.

Além disso, utilizando a definição do operador simetrico B dado pela proposição 1.19, temos que

$$\widetilde{\nabla}_X Y = \overline{\nabla}_X Y - \langle X, Y \rangle x = \nabla_X Y + \langle AX, Y \rangle N - \langle X, Y \rangle x,$$

e

$$A(X) = -\widetilde{\nabla}_X N = -\overline{\nabla}_X N,$$

para todo $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$.

Agora, considerando as notações apresentadas na seção 1.4 e tomando as funções $f, g : M \to \mathbb{R}$, definidas por

$$f(P) = \langle x(P), a \rangle$$

e

$$g(P) = \langle N(P), a \rangle$$

onde a é um vetor fixo de $\mathbb{R}^{n+2}$, temos que essas funções satisfazem (ver [1], lema 5.2):

$$\begin{aligned} L_r(f) &= -(S_1S_{r+1}-(r+2)S_{r+2})f-(r+1)S_{r+1}g, & (3\text{-}51)\\ L_r(g) &= -(r+1)S_{r+1}f-(n-r)S_rg. & (3\text{-}52)\end{aligned}$$

Em particular, para $r=0$, ficamos com

$$\begin{aligned} \Delta(f) &= -(S_1^2-2S_2)f-S_1g=-|A|^2f-S_1g,\\ \Delta(g) &= -S_1f-ng. \qquad (3\text{-}53)\end{aligned}$$

Como hipótese temos que a aplicação normal de Gauss $N(M)$ está contida em um hemisfério aberto de $\mathbb{S}^{n+1}$, assim sendo, temos que,

$$f(P)=\langle a,N(P)\rangle>0, \qquad (3\text{-}54)$$

para todo $P\in M$.

Por outro lado, pela desigualdade de Newton temos que a relação $H_{i-1}H_{i+1}\leq H_i^2$ ocorre para todo i, tal que, $0\leq i<n$. Em particular, para $i=1$, $H_0H_2\leq H_1^2$. Esta última relação implica que $H_3\leq H_1H_2$. De fato, pela relação (1-2), temos

$$H_1H_3\leq H_2^2\leq H_1^2H_2. \qquad (3\text{-}55)$$

Observe que $H_1\neq 0$; caso contrário, por (3-55), teriamos $H_2=0$. Mas, como $H_2=K=n(n-1)r>0$, temos um absurdo. Assim, $H_1\neq 0$. Logo, ou $H_1=H>0$ em M, ou $H_1=H<0$ em M, visto que M é conexa e H é contínua.

CASO I:($H_1=H<0$) Nesse caso temos por (3-55) que

$$H_3\geq H_1H_2. \qquad (3\text{-}56)$$

Como

$$H_i=\frac{S_i}{\binom{n}{i}}$$

por (3-56), temos que

$$\frac{S_3}{\binom{n}{3}}\geq\frac{S_1}{\binom{n}{1}}\frac{S_2}{\binom{n}{2}}. \qquad (3\text{-}57)$$

Desenvolvendo os binômios na expressão (3-57) ficamos com

$$(n-2)S_1S_2-3nS_3\leq 0. \qquad (3\text{-}58)$$

Combinando (3-54) e (3-58), temos

$$[(n-2)S_1S_2 - 3nS_3]f \leq 0. \tag{3-59}$$

Agora, utilizando a expressão (3-51) com $r = 1$ e (3-53), temos que

$$\begin{aligned} L_1 f - \frac{2}{n}S_2\Delta g &= -(S_1S_2 - 3S_3)f - 2S_2 g + \frac{2}{n}S_2S_1 f + \frac{2}{n}S_2 n g \\ &= -S_1S_2 f + 3S_3 f + \frac{2}{n}S_2S_1 f \\ &= \frac{1}{n}[-nS_1S_2 f + 3nS_3 f + 2S_2S_1 f] \\ &= \frac{1}{n}[(-n+2)S_1S_2 f + 3nS_3 f] \\ &= -\frac{1}{n}[(n-2)S_1S_2 - 3nS_3]f. \end{aligned} \tag{3-60}$$

Pelo teorema da divergência e pelo fato de $\partial M = \emptyset$, temos que

$$\int_M L_1 f - \frac{2}{n}S_2\Delta g = \int_M L_1 f - \int_M \frac{2}{n}S_2\Delta g = 0. \tag{3-61}$$

Assim, por (3-60),

$$\begin{aligned} 0 &= \int_M -\frac{1}{n}[(n-2)S_1S_2 - 3nS_3]f \\ 0 &= \int_M \frac{1}{n}[(n-2)S_1S_2 - 3nS_3]f \\ 0 &= \int_M [(n-2)S_1S_2 - 3nS_3]f. \end{aligned} \tag{3-62}$$

De (3-59) e (3-62), temos que $[(n-2)S_1S_2 - 3nS_3]f = 0$. Observe que f não é identicamente nula, pois, caso contrário $\langle a, N(P)\rangle = 0$, para todo $P \in M$. Logo, M é totalmente geodésica, ou seja, em cada ponto $P \in M$ e $N \in (T_P M)^{\perp}$, temos que a segunda forma fundamental é nula(Ver teorema 1 de [14]). Assim, teremos $H_1 = H = 0$, um absurdo. Logo, $[(n-2)S_1S_2 - 3nS_3] = 0$. Assim, equivalentemente

$$\frac{S_3}{\binom{n}{3}} = \frac{S_1}{\binom{n}{1}}\frac{S_2}{\binom{n}{2}}$$

e, então,

$$H_3 = H_1H_2.$$

Logo, pela proposição 3.8, temos que $\lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_n$, ou seja, M é totalmente umbílica.

CASO II:($H_1 = H > 0$) Nesse caso temos por (3-55) que

$$H_3 \leq H_1 H_2. \tag{3-63}$$

Como

$$H_i = \frac{S_i}{\binom{n}{i}},$$

por (3-63), temos que

$$\frac{S_3}{\binom{n}{3}} \leq \frac{S_1}{\binom{n}{1}} \frac{S_2}{\binom{n}{2}}. \tag{3-64}$$

Desenvolvendo os binômios na expressão (3-64) ficamos com

$$(n-2)S_1 S_2 - 3nS_3 \geq 0. \tag{3-65}$$

Combinando (3-54) e (3-64), temos

$$[(n-2)S_1 S_2 - 3nS_3] f \geq 0. \tag{3-66}$$

Agora, utilizando a expressão (3-51) com $r = 1$ e (3-53), temos que

$$\begin{aligned} L_1 f - \frac{2}{n} S_2 \Delta g &= -(S_1 S_2 - 3S_3) f - 2S_2 g + \frac{2}{n} S_2 S_1 f + \frac{2}{n} S_2 n g \\ &= -S_1 S_2 f + 3S_3 f + \frac{2}{n} S_2 S_1 f \\ &= \frac{1}{n}[-nS_1 S_2 f + 3nS_3 f + 2S_2 S_1 f] \\ &= \frac{1}{n}[(-n+2) S_1 S_2 f + 3nS_3 f] \\ &= -\frac{1}{n}[(n-2)S_1 S_2 - 3nS_3] f. \end{aligned} \tag{3-67}$$

Pelo teorema da divergência, e pelo fato de $\partial M = \emptyset$, temos que

$$\int_M L_1 f - \frac{2}{n} S_2 \Delta g = \int_M L_1 f - \int_M \frac{2}{n} S_2 \Delta g = 0. \tag{3-68}$$

Assim, por (3-67),

$$\begin{aligned} 0 &= \int_M -\frac{1}{n}[(n-2)S_1 S_2 - 3nS_3] f \\ 0 &= \int_M \frac{1}{n}[(n-2)S_1 S_2 - 3nS_3] f \\ 0 &= \int_M [(n-2)S_1 S_2 - 3nS_3] f. \end{aligned} \tag{3-69}$$

De (3-66) e (3-69), temos que $[(n-2)S_1S_2 - 3nS_3]f = 0$. Observe que f não é identicamente nula, pois, caso contrário $\langle a, N(P)\rangle = 0$, para todo $P \in M$. Logo, M é totalmente geodésica, ou seja, em cada ponto $P \in M$ e $N \in (T_PM)^{\perp}$, temos que a segunda forma fundamental é nula(Ver teorema 1 de [14]). Assim, teremos $H_1 = H = 0$, um absurdo. Logo, $[(n-2)S_1S_2 - 3nS_3] = 0$. Assim, equivalentemente

$$\frac{S_3}{\binom{n}{3}} = \frac{S_1}{\binom{n}{1}}\frac{S_2}{\binom{n}{2}}$$

e, então,

$$H_3 = H_1H_2.$$

Assim, pela proposição 3.8, temos que $\lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_n$, ou seja, M é totalmente umbílica.

Em todo caso, teremos M totalmente umbílica.

3.3.2 Generalização do Teorema 3.11

Apresentaremos agora um teorema que generaliza o teorema 3.11. A demonstração a ser apresentada foi dada por Quoxin Wei e Young Jin Suh em [23]. Em [23] os autores se propõem a obter uma caracterização para $\mathbb{S}^1\left(\sqrt{1-\frac{n-2}{nr}}\right) \times \mathbb{S}^{n-1}\left(\sqrt{\frac{n-2}{nr}}\right)$ e $\mathbb{S}^m(c) \times \mathbb{S}^{n-m}(2 \leq m \leq n-2, 0 < c^2 < 1)$ imersos na esfera unitária $\mathbb{S}^{n+1}(1)$. Os resultados apresentado pelos autores generalizam teoremas dados por Cheng e Yau em [6] e Wang e Xia em [20], onde trocam uma hipótese de compacidade por uma hipótese mais fraca, que é a completude da hipersuperfície. A técnica de prova do teorema 3.11 dada pelos autores é mostrar que as curvaturas principais da hipersuperfície referente à imersão em $\mathbb{S}^{n+1}$ são funções constantes e dadas por $\lambda = k_1 = \cdots = k_{n-1} = \sqrt{\frac{1}{k^2} - 1}$, $\mu = k_n = -\sqrt{\frac{k^2}{1-k^2}}$. Ou seja, é uma hipersuperfície isoparamétrica. Assim, juntamente com o trabalho de E. Cartan em [3], na qual classifica as hipersuperfícies isoparamétricas em $\mathbb{S}^{n+1}$, tem-se o resultado do teorema a seguir

Teorema 3.14 *([23])Seja M^n $(n \geq 3)$ uma hipersuperfície completa, conexa e orientada imersa em $\mathbb{S}^{n+1}$ com curvatura escalar constante igual a $n(n-1)r$, onde r é constante e assuma que λ e μ são as curvaturas principais de M, de multiplicidade $n-1$ e 1, respectivamente. Assuma também que, $\lambda\mu \leq -1$ em M. Então M é isométrica ao produto Riemanniano $\mathbb{S}^1\left(\sqrt{1-\frac{n-2}{nr}}\right) \times \mathbb{S}^{n-1}\left(\sqrt{\frac{n-2}{nr}}\right)$.*

Considere $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$, os autovalores do operador forma auto-adjunto A correspondente a imersão de M em $\mathbb{S}^{n+1}$. Assim, λ_i são as curvaturas principais de M. Como por hipótese temos que M possui duas curvaturas principais distintas, λ, μ, onde uma é simples, podemos assumir sem perda de generalidade que,

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_{n-1} = \lambda \quad e \quad \lambda_n = \mu. \tag{3-70}$$

Utilizando a informação (3-70), temos que a curvatura media é dada por

$$H = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\lambda_i = \frac{1}{n}\big((n-1)\lambda+\mu\big). \tag{3-71}$$

Agora, considere $S = \sum_{i=1}^{n}\lambda_i^2$. Temos então que

$$S = \sum_{i=1}^{n}\lambda_i^2 = (n-1)\lambda^2+\mu^2. \tag{3-72}$$

Com isso, combinando (3-71) e (3-72) juntamente com a equação de Gauss(Proposição 1.24), temos que a curvatura escalar é dada por

$$\begin{aligned} K = n(n-1)r &= n(n-1)+n^2H^2-S \\ &= n(n-1)+n^2\Big(\frac{1}{n^2}\big((n-1)\lambda+\mu\big)^2\Big)-(n-1)\lambda^2-\mu^2 \\ &= n(n-1)+\big((n-1)\lambda+\mu\big)^2-(n-1)\lambda^2-\mu^2 \\ &= n(n-1)+(n-1)^2\lambda^2+2(n-1)\lambda\mu+\mu^2-(n-1)\lambda^2-\mu^2 \\ &= n(n-1)+(n-1)^2\lambda^2+2(n-1)\lambda\mu-(n-1)\lambda^2. \end{aligned} \tag{3-73}$$

Logo

$$n(n-1)r = n(n-1)+(n-1)^2\lambda^2+2(n-1)\lambda\mu-(n-1)\lambda^2 \tag{3-74}$$

e, então,

$$n(r-1) = (n-2)\lambda^2+2\lambda\mu. \tag{3-75}$$

Como $\lambda \neq \mu$, mostramos no teorema anterior que $\lambda \neq 0$ e $\lambda^2-(r-1) > 0$.

Pela equação (3-75), temos que

$$\mu = \frac{n(r-1)}{2\lambda}-\frac{n-2}{2}\lambda. \tag{3-76}$$

Segue-se de (3-76) que

$$1+\lambda\mu = 1+\frac{n(r-1)}{2}-\frac{n-2}{2}\lambda^2. \tag{3-77}$$

Definindo $w := \{\lambda^2 - (r-1)\}^{-\frac{1}{n}}$, Cheng mostrou em [7] o seguinte teorema:

Teorema 3.15 *(Teorema 2.1 de [7])Suponha que $n \geq 3$ e Seja M^n é uma hipersuperfície n-dimensional em $\mathbb{S}^{n+1}$ com curvatura escalar constante igual a $n(n-1)r$ e com duas curvaturas principais distíntas. Se o espaço dos vetores principais de M correspondente a uma das cuvaturas principais é de dimensão 1, então M é o lugar geométrico de uma subvariedade $M_1^{n-1}(s)$, de dimensão $n-1$, a curvatura principal λ de multiplicidade $n-1$ é constante ao longo de M_1^{n-1} e $M_1^{n-1}(s)$ é localmente isométrica a esfera $(n-1)$-dimensional $\mathbb{S}^{n-1}(c(s)) = E^n(s) \cap \mathbb{S}^{n+1}$ de curvatura constante. Além disso, $w = [\lambda^2 - (r-1)]^{-\frac{1}{n}}$ satisfaz a seguinte equação diferencial de segunda ordem*

$$\frac{d^2w}{ds^2} - w\Big(\frac{n-2}{2}\frac{1}{w^n} - r\Big) = 0 \tag{3-78}$$

onde $E^n(s)$ é um espaço vetorial de dimensão n em $\mathbb{R}^{n+2}$ que é paralelo a um espaço vetorial n-dimensional E^n e s é o parâmetro comprimento de arco da curva integral correspondente aos vetores principais μ.

Lema 3.16 *A equação (3-78) é equivalente a equação de primeira ordem*

$$\Big(\frac{dw}{ds}\Big)^2 + rw^2 + \frac{1}{w^{n-2}} = C, \tag{3-79}$$

onde C é uma constante. Para uma solução constante w_0, temos que $r > 0$, $w_0^n = \frac{n-2}{2r}$ e, então,

$$C_0 = \frac{n}{2}\Big(\frac{2r}{n-2}\Big)^{\frac{n-2}{n}}. \tag{3-80}$$

Além disso, a solução constante de (3-78) corresponde ao produto Riemanniano $\mathbb{S}^1(\sqrt{\frac{nr+2-n}{nr}}) \times \mathbb{S}^{n-1}(\sqrt{\frac{n-2}{nr}})$

Prova. Primeiramente, denotaremos as curvaturas principais de M por

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_{n-1} = \lambda\ ,\ \ \lambda_n = \mu \text{ e } Ae_i = \lambda_i e_i.$$

Utilizando os resultados apresentados na seção 2 de [7], é possível mostrar que $\nabla_{e_n}e_n = 0$. Assim, pela definição de geodésica concluímos que a curva integral do campo de vetores principal correspondente a μ é uma geodésica. Logo, podemos assumir que $w(s) = [\lambda^2(s) - (r-1)]^{-\frac{1}{n}}$ está definida para $s \in (-\infty, \infty)$, visto que M é completa.

Agora, multiplicando a equação (3-78) por $2\frac{dw}{ds}$, temos que

$$\begin{aligned}
2\frac{dw}{ds}\Big(\frac{d^2w}{ds^2}-w\Big(\frac{n-2}{2w}\frac{1}{w^n}-r\Big)\Big) &= 0 \Longleftrightarrow \\
2\frac{dw}{ds}\frac{d^2w}{ds^2}-2\frac{dw}{ds}w\Big(\frac{n-2}{2}\frac{1}{w^n}-r\Big) &= 0 \Longleftrightarrow \\
2\frac{dw}{ds}\frac{d^2w}{ds^2}+2\frac{dw}{ds}wr-2\frac{dw}{ds}w\Big(\frac{n-2}{2}\frac{1}{w^n}\Big) &= 0 \Longleftrightarrow \\
2\frac{dw}{ds}\frac{d^2w}{ds^2}+2\frac{dw}{ds}wr-(n-2)\frac{dw}{ds}\frac{1}{w^{n-1}} &= 0. \qquad (3\text{-}81)
\end{aligned}$$

A equação (3-79) segue-se da integração de (3-81)

Considere $w(s)=w_0$ uma solução constante de (3-79). Temos por (3-78) que

$$w_0^n=\frac{n-2}{2r} \qquad (3\text{-}82)$$

e substituindo (3-82) em (3-79) obtemos

$$C_0=\frac{n}{2}\Big(\frac{2r}{n-2}\Big)^{\frac{n-2}{n}}. \qquad (3\text{-}83)$$

Combinando $w_0^n=\frac{n-2}{2r}$ com $w=\{\lambda^2-(r-1)\}^{-\frac{1}{n}}$, encontramos

$$\lambda^2=\frac{n(r-1)+2}{n-2} \qquad (3\text{-}84)$$

e combinando (3-76) com $\lambda^2=\frac{n(r-1)+2}{n-2}$, obtemos que

$$\mu^2=\frac{n-2}{n(r-1)+2}. \qquad (3\text{-}85)$$

Assim, temos que as curvaturas principais da hipersuperfície M são constantes, ou seja, M é uma hipersuperfície isoparamétrica, e então, pelo trabalho de E.Cartan em [3] de classificação das hipersuperfícies isoparamétricas, temos que

$$M=\mathbb{S}^1(\sqrt{1-k^2})\times\mathbb{S}^{n-1}(k),$$

onde $k\in(0,1)$,

Visto que as curvaturas principais de $M=\mathbb{S}^1(\sqrt{1-k^2})\times\mathbb{S}^{n-1}(k)$ são

$$k_1=\cdots=k_{n-1}=\sqrt{\frac{1}{k^2}-1}\ ,\ \ k_n=-\sqrt{\frac{k^2}{1-k^2}},$$

e as curvaturas principais de M são

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_{n-1} = \lambda\,,\ \ \lambda_n = \mu,$$

temos que,

$$\lambda^2 = \frac{1}{k^2} - 1,$$

$$\mu^2 = \frac{k^2}{1-k^2}.$$

Agora, utilizando (3-84), obtemos

$$\frac{1}{k^2} - 1 = \frac{n(r-1)+2}{n-2}.$$

Logo,

$$k^2 = \frac{n-2}{nr}.$$

Consequentemente, temos que

$$M = \mathbb{S}^1(\sqrt{1-\frac{n-2}{nr}}) \times \mathbb{S}^{n-1}(\sqrt{\frac{n-2}{nr}})$$

e isso completa a demonstração do lemma. □

Agora, vamos a demonstração do Teorema 3.14. Para isso, vamos mostrar que cada curva integral correspondente a curvatura principal μ é constante, ou seja, vamos mostrar que as curvas integrais correspondentes a curvatura principal μ satisfazem $\frac{dw}{ds} = 0$.

Assim, pelo Lema 4.8 temos que

$$M = \mathbb{S}^1(\sqrt{1-\frac{n-2}{nr}}) \times \mathbb{S}^{n-1}(\sqrt{\frac{n-2}{nr}}).$$

Prova. Com efeito, combinando (3-77) com $\lambda\mu \leq -1$, deduzimos que

$$\frac{n-2}{2}[\lambda^2 - (r-1)] \geq r. \tag{3-86}$$

Segue-se daí que

$$\frac{n-2}{2}\frac{1}{w^n} - r \geq 0. \tag{3-87}$$

Como

$$\frac{d^2w}{ds^2} - w\Big(\frac{n-2}{2}\frac{1}{w^n} - r\Big) = 0, \tag{3-88}$$

temos que

$$\frac{d^2w}{ds^2} \geq 0. \tag{3-89}$$

Assim

$$\frac{dw}{ds} \text{ é monótona}$$

Vemos por (3-78) que a função positiva $w(s)$ é limitada. De fato, caso não fosse teríamos

$$\lim_{s\to\infty}\left(\left(\frac{dw(s)}{ds}\right)^2 + rw^2(s) + \frac{1}{w^{n-2}(s)}\right) = \pm\infty = C, \tag{3-90}$$

um absurdo. Logo, $w(s)$ é limitada.

Como $w(s)$ é limitada e monótona quando $s \to \infty$, temos que ambos os limites existem

$$\lim_{s\to-\infty}\frac{dw(s)}{ds} = \lim_{s\to+\infty}\frac{dw(s)}{ds} = 0. \tag{3-91}$$

Agora, pela monotonicidade de $\frac{dw}{ds}$, temos que $\frac{dw}{ds} \equiv 0$. Logo, w é constante. Temos, então, pelo Lema 4.8 que

$$M = \mathbb{S}^1(\sqrt{1-\frac{n-2}{nr}}) \times \mathbb{S}^{n-1}(\sqrt{\frac{n-2}{nr}})$$

e isso conclui a prova do teorema. $\square$

CAPÍTULO 4

Teoremas de Rigidez em $\mathbb{H}^{n+1}$

No capítulo 3, apresentamos resultados de Rigidez topológica proposto por Qiaoling Wang e Changyu Xia em [21] para hipersuperfícies fechadas imersas em $\mathbb{S}^{n+1}$, sendo que tais resultados foram provados baseando-se em recursos de Espaços de Recobrimento. Neste capítulo, vamos apresentar teoremas de rigidez topológica de hipersuperfícies fechadas propostos pelos mesmos autores em [21], porém, trocaremos a hipótese de imersão em $\mathbb{S}^{n+1}$ pela imersão no espaço hiperbólico $\mathbb{H}^{n+1}$. Tais resultados serão provados utilizando as mesmas técnicas de Espaços de Recobrimento apresentada no capítulo 3.

Teorema 4.1 *Seja M^n $(n \geq 2)$ uma hipersuperfície fechada, conexa e orientada imersa em $\mathbb{H}^{n+1}$ com curvatura de Gauss-Kronecker não nula em M. Então M é difeomorfa a esfera n-dimensional.*

Primeiramente fixaremos algumas notações. Seja $\mathbb{L}^{n+2}$ o espaço de Lorentz-Minkowski, que é o espaço $\mathbb{R}^{n+2}$ munido da métrica

$$\langle x,y\rangle = -x_0y_0 + \sum_{i=1}^{n+1} x_iy_i,$$

para $x = (x_1,\ldots,x_{n+1})$ e $y = (y_1,\ldots,y_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+2}$. Vamos considerar também o espaço $\mathbb{S}_1^{n+1} \subset \mathbb{L}^{n+2}$, dado por

$$\mathbb{S}_1^{n+1} = \{x \in \mathbb{L}^{n+2} | \langle x,x\rangle = 1\}$$

.

Para cada $a \in \mathbb{R}^{n+2}$, o hiperplano $a^{\perp} = \{x \in \mathbb{L}^{n+2} | \langle x,a\rangle = 0\}$ divide o espaço $\mathbb{L}^{n+2}$ em duas componentes conexas que chamaremos hemisférios abertos determinados por a.

No decorrer do trabalho usaremos o modelo de Minkowski para o espaço $\mathbb{H}^{n+1}$, ou seja,

$$\mathbb{H}^{n+1} = \{x \in \mathbb{L}^{n+2} | \langle x,x\rangle = -1, x_0 > 0\},$$

com a métrica $\langle,\rangle$ induzida de $\mathbb{L}^{n+2}$.

Seja M uma hypersuperfície orientada imersa em $\mathbb{H}^{n+1}$. Denote por N o campo normal unitário definido globalmente sobre M, ou seja, $N : M \to \mathbb{S}_1^{n+1}$. Chamaremos N a aplicação normal de Gauss e $N(M)$ a imagem de Gauss de M. Denotaremos por $\langle , \rangle$ a métrica Riemanniana de $\mathbb{L}^{n+2}$ bem como as métricas induzidas em $\mathbb{H}^{n+1}$ e M, assumiremos que $\widetilde{\nabla}$, $\overline{\nabla}$ e ∇ são as conexões Riemannianas de $\mathbb{L}^{n+2}$, $\mathbb{H}^{n+1}$ e M, respectivamente.

Seja A o operador forma, ou seja, a matriz auto-adjunta determinada pela imersão de M em $\mathbb{H}^{n+1}$ associada a N. Então

$$\widetilde{\nabla}_X Y = (Xy_1, \ldots, Xy_{n+2}),$$

para $X = (x_1, \ldots, x_{n+2})$, $Y = (y_1, \ldots, y_{n+2}) \in \mathfrak{X}(\mathbb{L}^{n+2})$.

Além disso, utilizando a definição do operador simétrico B dado pela proposição 1.19, temos que

$$\widetilde{\nabla}_X Y = \overline{\nabla}_X Y - \langle X, Y \rangle x = \nabla_X Y + \langle AX, Y \rangle N - \langle X, Y \rangle x,$$

e

$$A(X) = -\widetilde{\nabla}_X N = -\overline{\nabla}_X N,$$

para todo $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$.

Prova. Vamos agora a prova do teorema 4.1. Fixando um ponto $a \in \mathbb{S}_1^{n+1}$ e considerando a interseção do conjunto $a^{\perp}$,, definido anteriormente com o conjunto $\mathbb{S}_1^{n+1}$ temos

$$\mathbb{S}_a^n := a^{\perp} \cap \mathbb{S}_1^{n+1} = \{x \in \mathbb{S}_1^{n+1} | \langle a, x \rangle = 0\}.$$

Observe que $\mathbb{S}_a^n$ define uma esfera n-dimensional em $\mathbb{S}_1^{n+1}$, que chamaremos equador de $\mathbb{S}_1^{n+1}$ determinado por a.

Vamos mostrar que M é difeomorfa a esfera $\mathbb{S}_a^n$. Para isso, definiremos a aplicação

$$\begin{aligned} \psi \ : \ & M \to \mathbb{S}_a^n \\ & x \to \psi(x) = \frac{N(x) + \langle N(x), a \rangle a}{\sqrt{1 + \langle N(x), a \rangle^2}}. \end{aligned}$$

Vamos mostrar que ψ é um difeomorfismo global. Para isso, calcularemos a diferencial de ψ. Tomando $x \in M$, $v \in T_xM$ e considerando uma curva $\alpha : (-\varepsilon, \varepsilon) \to M$, tal que $\alpha(0) = x$ e $v = \alpha'(0)$, temos que

$$\begin{aligned} d\psi_x(v) &= \lim_{t \to 0} \frac{\psi \circ \alpha(t) - \psi \circ \alpha(0)}{t} \\ &= \lim_{t \to 0} \frac{\frac{N \circ \alpha(t) + \langle N \circ \alpha(t), a \rangle a}{\sqrt{1 + \langle N \circ \alpha(t), a \rangle^2}} - \frac{N \circ \alpha(0) + \langle N \circ \alpha(0), a \rangle a}{\sqrt{1 - + \langle N \circ \alpha(0), a \rangle^2}}}{t}. \end{aligned}$$

Utilizando a regra da cadeia, ficamos com

$$d\psi_x(v) = \frac{\overline{\nabla}_v N + \langle \overline{\nabla}_v N, a\rangle a}{\sqrt{1+\langle N(x),a\rangle^2}} - \frac{\langle N(x),a\rangle\langle \overline{\nabla}_v N, a\rangle}{\{1+\langle N(x),a\rangle^2\}^{3/2}}(N(x)+\langle N(x),a\rangle a).$$

Ou seja,

$$d\psi_x(v) = \frac{-Av - \langle Av, a\rangle a}{\sqrt{1+\langle N(x),a\rangle^2}} + \frac{\langle N(x),a\rangle\langle Av, a\rangle}{\{1+\langle N(x),a\rangle^2\}^{3/2}}(N(x)+\langle N(x),a\rangle a).$$

Como, $\langle Av, N(x)\rangle = 0$, temos que

$$\begin{aligned}
\langle d\psi_x(v), d\psi_x(v)\rangle &= \frac{|Av|^2(1+\langle N(x),a\rangle^2)+\langle Av,a\rangle^2}{(1+\langle N(x),a\rangle^2)^2} \\
&= \frac{|Av|^2}{1+\langle N(x),a\rangle^2} + \frac{\langle Av,a\rangle^2}{(1+\langle N(x),a\rangle^2)^2} \\
&\geq \frac{|Av|^2}{1+\langle N(x),a\rangle^2}. \qquad (4\text{-}1)
\end{aligned}$$

Como M tem curvatura de Gauss-Kronecker não nula em M, temos que $Av \neq 0$, para todo $v \neq 0$ em T_xM. Concluímos por (4-1) que, se $v \neq 0$, então $d\psi_x(v) \neq 0$. Assim, pelo teorema da função inversa, concluímos que, ψ é um difeomorfismo local. Visto que M é compacta, temos pela proposição 1.27 que ψ é uma aplicação de recobrimento, e como M é conexa por caminhos e $\mathbb{S}^n_a$ é simplesmente conexa, concluímos pelo corolário 1.30 que ψ é um homeomorfismo. Logo, ψ é um homeomorfismo e um difeomorfismo local, com isso, ψ^{-1} é diferenciável. Isso conclui que ψ é um difeomorfismo global. □

Para demonstração deste teorema faremos uso da mesma notação utilizada no teorema anterior.

Teorema 4.2 *Seja M^n $(n \geq 2)$ uma hipersuperfície fechada, conexa e orientada imersa em $\mathbb{H}^{n+1}$. Se existe um ponto $a \in \mathbb{S}^{n+1}_1$, tal que a imagem da aplicação normal de Gauss esteja contída em um semi-espaço aberto determinado por a, então M é difeomorfa a esfera n-dimensional.*

Prova. Primeiramente, consideraremos a aplicação

$$\begin{aligned}
\varphi \ : \ & M \to a^{\perp} \cap \mathbb{H}^{n+1} \\
& x \to \varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{1+\langle a,x\rangle^2}}(x - \langle a,x\rangle a).
\end{aligned}$$

Tomando $x \in M$ e $v \in T_xM$, temos que

$$d\varphi_x(v) = \frac{1}{\sqrt{1+\langle a,x\rangle^2}}(v - \langle a,v\rangle a) - \frac{\langle a,v\rangle\langle a,x\rangle}{(1+\langle a,x\rangle^2)^{3/2}}(x - \langle a,x\rangle a). \tag{4-2}$$

Com isso,

$$\langle d\varphi_x(v), d\varphi_x(v)\rangle = \frac{1}{(1+\langle a,x\rangle^2)^2}(|v|^2(1+\langle a,x\rangle^2) - \langle a,v\rangle^2). \tag{4-3}$$

Temos que, $a \in \mathbb{S}_1^{n+1}$, pode ser expresso como $a = a^T + a^N$, onde a^T é tangente a M e a^N é normal a M. Assim, Pela desigualdade de Cauchy-Schwarz temos

$$\langle v,a\rangle^2 = \langle v, a^T + a^N\rangle^2 = \langle v, a^T\rangle^2 \leq |v|^2|a^T|^2.$$

Logo, como x, $N(x)$ pertencem ao espaço normal de M, projetando a no espaço gerado por x e $N(x)$, temos que

$$a^N = \frac{\langle a,x\rangle}{\langle x,x\rangle}x + \frac{\langle a,N(x)\rangle}{\langle N(x),N(x)\rangle}N(x),$$

$$a^N = -\langle a,x\rangle x + \langle a,N(x)\rangle N(x).$$

Assim,

$$\begin{aligned}
1 &= \langle a,a\rangle \\
&= \langle a, a^T + a^N\rangle \\
&= \langle a,a^T\rangle + \langle a,a^N\rangle \\
&= \langle a,a^T\rangle - \langle a,x\rangle^2 + \langle a,N(x)\rangle^2 \\
&= \langle a^N + a^T, a^T\rangle - \langle a,x\rangle^2 + \langle a,N(x)\rangle^2 \\
&= \langle a^T, a^T\rangle - \langle a,x\rangle^2 + \langle a,N(x)\rangle^2 \\
&= |a^T|^2 - \langle a,x\rangle^2 + \langle a,N(x)\rangle^2.
\end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned}
\langle d\varphi_x(v), d\varphi_x(v)\rangle &= \frac{1}{(1+\langle a,x\rangle^2)^2}(|v|^2(1+\langle a,x\rangle^2) - \langle a,v\rangle^2) \\
&\geq \frac{|v|^2(1+\langle a,x\rangle^2 - |a^T|^2)}{(1+\langle a,x\rangle^2)^2} \\
&= \frac{|v|^2\langle a,N(x)\rangle^2}{(1+\langle a,x\rangle^2)^2}.
\end{aligned} \tag{4-4}$$

Como, por hipótese, a imagem da aplicação normal de Gauss está contída em um semi-espaço aberto determinado por a, temos que, $\langle N(x),a\rangle \neq 0$, para todo $x \in M$. Assim, temos por (4-4) que, se $v \neq 0$, então $d\varphi_x(v) \neq 0$.

Seja $a = (a_0,\ldots,a_{n+1})$. Para todo $x = (x_0,\ldots,x_{n+1}) \in a^{\perp} \cap \mathbb{H}^{n+1}$, temos que

$$0 = \langle x,x\rangle + 2\langle x,a\rangle + \langle a,a\rangle = \langle x+a,x+a\rangle = -(x_0+a)^2 + \sum_{i=1}^{n+1}(x_i+a_i)^2, \tag{4-5}$$

o que implica que $x_0 + a_0 \neq 0$, pois, do contrário, teriamos que $x = a$, mas, isso é um absurdo visto que $x \in a^{\perp}$. Assim, podemos definir a aplicação

$$\begin{aligned} \tilde{\varphi} \ : \ & a^{\perp} \cap \mathbb{H}^{n+1} \to \mathbb{S}^n(1) \\ & x \to \tilde{\varphi}(x) = \frac{1}{x_0+a_0}(x_1+a_1,\ldots,x_{n+1}+a_{n+1}), \end{aligned}$$

onde $x = (x_0,\ldots,x_{n+1})$ e $\mathbb{S}^{n+1}(1)$ é a esfera Euclidiana unitária.

Considere agora, $z = (z_0,\ldots,z_{n+1}) \in a^{\perp \cap \mathbb{H}^{n+1}}$ e um vetor $u = (u_0,\ldots,u_{n+1}) \in T_z(a^{\perp} \cap \mathbb{H}^{n+1})$. Temos então que u é tangente a alguma curva diferenciável

$$\begin{aligned} \gamma \ : \ & (-\varepsilon,\varepsilon) \to a^{\perp} \cap \mathbb{H}^{n+1} \\ & t \to \gamma(t) = (z_0(t),\ldots,z_{n+1}(t)) \end{aligned}$$

satisfazendo $\gamma(0) = z$ e $\gamma'(0) = u$. Assim, pela definição de $\tilde{\varphi}$, temos que

$$\begin{aligned} d\tilde{\varphi}_z(u) &= \frac{d(\tilde{\varphi}\circ\gamma)}{dt}(0) \\ &= \frac{-u_0}{(z_0+a_0)^2}(z_1+a_1,\ldots,z_{n+1}+a_{n+1}) + \frac{1}{z_0+a_0}(u_1,\ldots,u_{n+1}), \end{aligned}$$

e então

$$\begin{aligned} &\langle d\tilde{\varphi}_z(u), d\tilde{\varphi}_z(u)\rangle = \\ &= \frac{1}{(z_0+a_0)^4}\left(u_0^2\sum_{i=1}^{n+1}(z_i+a_i)^2 + (z_0+a_0)^2\sum_{i=1}^{n+1}u_i^2 - 2u_0(z_0+a_0)\sum_{i=1}^{n+1}u_i(z_i+a_i)\right). \end{aligned} \tag{4-6}$$

Observe que a função $f : a^{\perp} \cap \mathbb{H}^{n+1} \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(y) = \langle y+a, y+a\rangle$$

é identicamente nula, pois, para todo $y \in a^{\perp} \cap \mathbb{H}^{n+1}$, temos que

$$\langle y+a,y+a\rangle = \langle y,y\rangle + 2\langle y,a\rangle + \langle a,a\rangle = -1 + 2.(0) + 1 = 0.$$

Assim

$$0=\frac{1}{2}df_y(u)=\langle y+a,u\rangle=-u_0(z_0+a_0)+\sum_{i=1}^{n+1}u_i(z_i+a_i)$$

e então

$$u_0(z_0+a_0)=\sum_{i=1}^{n+1}u_i(z_i+a_i). \tag{4-7}$$

Substituindo (4-7) e

$$(z_0+a_0)^2=\sum_{i=1}^{n+1}(z_i+a_i)^2 \tag{4-8}$$

em (4-6), ficamos com

$$\langle d\tilde{\varphi}_z(u),d\tilde{\varphi}_z(u)\rangle=\frac{1}{(z_0+a_0)^2}\left(\sum_{i=1}^{n+1}u_i^2-u_0^2\right)=\frac{|u|^2}{(z_0+a_0)^2}. \tag{4-9}$$

Assim, se $u\neq 0$, então $d\tilde{\varphi}_z(u)\neq 0$.

Agora, definindo a aplicação

$$\Phi=\tilde{\varphi}\circ\varphi : M\to\mathbb{S}^n(1)$$

temos que, se $x\in M$ e $w\in T_xM$ é não nulo, então $d\varphi_x(w)\neq 0$. Com isso, $d\Phi_x(w)=d\tilde{\varphi}_{\varphi(x)}(d\varphi_x(w))\neq 0$, e, então, $d\Phi_x$ é injetiva. Como $dim(T_xM)=dim(T_{\Phi(x)}\mathbb{S}^n(1))=n$, concluímos que $d\Phi$ é um isomorfismo. Assim, pelo teorema da função inversa, Φ é um difeomorfismo local. Como todo difeomorfismo local é um homeomorfismo local e M é compacta por hipótese, temos pela proposição 1.27 que Φ é uma aplicação de recobrimento. Sendo M compacta, pelo teorema de Ropf-Rinow M é completa. Logo, para cada dois pontos em M podemos traçar um caminho mínimo ligando estes dois pontos em M, o que mostra que M é conexa por caminhos. Pelo corolário 1.30, temos que Φ é um homeomorfismo. Logo, Φ é um homeomorfismo e um difeomorfismo local, com isso, Φ^{-1} é diferenciável. Isso conclui que ψ é um difeomorfismo global. E isso completa a demonstração do teorema. □

Novamente, para a demonstração deste teorema faremos uso da mesma notação utilizada no teorema 3.1.

Teorema 4.3 *Seja M^n $(n\geq 2)$ uma hipersuperfície fechada, conexa e orientada imersa em $\mathbb{H}^{n+1}$ e denote por $\lambda_1,\ldots,\lambda_n$ as curvaturas principais de M. Se uma das funções, $F=\prod_{i=1}^n(1-\lambda_i)$, ou $G=\prod_{i=1}^n(1+\lambda_i)$ definidas em M, não é identicamente nula, então M é difeomorfa a esfera n-dimensional.*

Prova. Primeiramente, se $x \in \mathbb{H}^{n+1}$, então $T_p\mathbb{H}^{n+1} = \{v \in \mathbb{L}^{n+2} | \langle x, v\rangle = 0\}$. Assim, como $N(x)$ é o vetor normal a M no espaço $\mathbb{H}^{n+1}$, temos que $N(x) \in T_p\mathbb{H}^{n+1}$. Com isso,

$$\langle x,x\rangle = -1, \qquad \langle N(x),x\rangle = 0 \; e \; \langle N(x),N(x)\rangle = 1. \tag{4-10}$$

Logo,

$$0 = \langle x \pm N(x), x \pm N(x)\rangle = -(x_0 \pm N_0(x))^2 + \sum_{i=1}^{n+1}(x_i \pm N_i(x))^2, \tag{4-11}$$

o que implica que $x_0 \pm N_0(x) \neq 0$, pois, caso contrário teremos que $x = N(x)$, o que é um absurdo por (4-10). Assim, podemos definir duas aplicações $W^+, W^- : M \to \mathbb{S}^n$ dadas por

$$W^+(x_0,\ldots,x_{n+1}) = \frac{1}{x_0 + N_0(x)}(x_1 + N_1(x),\ldots,x_{n+1} + N_{n+1}(x))$$

e

$$W^-(x_0,\ldots,x_{n+1}) = \frac{1}{x_0 - N_0(x)}(x_1 - N_1(x),\ldots,x_{n+1} - N_{n+1}(x)),$$

onde $x = (x_0,\ldots,x_{n+1})$.

Primeiro, consideraremos

$$F(x) = \prod_{i=1}^{n}(1 - \lambda_i(x)) \neq 0,$$

para todo $x \in M$. Assim, utilizaremos a aplicação W^+ definida anteriormente. Caso considerássemos $G(x) = \prod_{i=1}^{n}(1 + \lambda_i(x)) \neq 0$, para todo $x \in M$, utilizariamos a aplicação W^-. Nos dois caso chegaremos ao resultado desejado.

Considere então, $x = (x_0,\ldots,x_{n+1}) \in M$ e um vetor $v = (v_0,\ldots,v_{n+1}) \in T_xM$. Temos que v é tangente a alguma curva diferenciável

$$\begin{aligned}\gamma \; : \; & (-\varepsilon,\varepsilon) \to M \\ & t \to \gamma(t) = (x_0(t),\ldots,x_{n+1}(t))\end{aligned}$$

satisfazendo $\gamma(0) = x$ e $\gamma'(0) = v$. Assim, pela definição de W^+, temos que

$$\begin{aligned} dW_x^+(v) &= \frac{d(W^+ \circ \gamma)}{dt}(0) \\ &= \frac{1}{(x_0 + N_0(x))^2}\big(-(v_0 + v(N_0))(x_1 + N_1(x),\ldots,x_{n+1} + N_{n+1}(x)) + \\ &\qquad + (x_0 + N_0(x))(v_1 + v(N_1),\ldots,v_{n+1} + v(N_{n+1}))\big), \end{aligned} \tag{4-12}$$

e

$$\langle dW_x^+(v), dW_x^+(v)\rangle = \frac{1}{(x_0+N_0(x))^4}\Big((v_0+v(N_0))^2\sum_{i=1}^{n+1}(x_i+N_i(x))^2 -$$
$$-2(v_0+v(N_0))(x_0+N_0(x))\sum_{i=1}^{n+1}(x_i+N_i(x))(v_i+v(N_i)) +$$
$$+(x_0+N_0(x))^2\sum_{i=1}^{n+1}(v_i+v(N_i))^2\Big), \qquad (4\text{-}13)$$

onde denotamos $v(N_i)$ a derivada de N_i na direção v.

Agora, por (4-10), temos que a função $f : M \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(y) = \langle y+N(y), y+N(y)\rangle$$

é identicamente nula. Assim,

$$0 = \frac{1}{2}df_x(v) = \langle x+N(x), v+v(N)\rangle = -(x_0+N_0(x))(v_0+v(N_0)) + \sum_{i=1}^{n+1}(x_i+N_i(x))(v_i+v(N_i))$$

e, então,

$$(x_0+N_0(x))(v_0+v(N_0)) = \sum_{i=1}^{n+1}(x_i+N_i(x))(v_i+v(N_i)). \qquad (4\text{-}14)$$

Substituindo (4-11) e (4-14) em (4-13), teremos

$$\langle dW_x^+(v), dW_x^+(v)\rangle = \frac{1}{(x_0+N_0(x))^2}\Big(\sum_{i=1}^{n+1}(v_i+v(N_i))^2 - (v_0+v(N_0))^2\Big). \qquad (4\text{-}15)$$

Agora, visto que

$$\widetilde{\nabla}_X Y = (Xy_1, \ldots, Xy_{n+2})$$

para $X = (x_1, \ldots, x_{n+2})$, $Y = (y_1, \ldots, y_{n+2}) \in \mathfrak{X}(\mathbb{L}^{n+2})$ e

$$\widetilde{\nabla}_X Y = \overline{\nabla}_X Y - \langle X, Y\rangle x = \nabla_X Y + \langle AX, Y\rangle N - \langle X, Y\rangle x$$

$$A(X) = -\widetilde{\nabla}_X N = -\overline{\nabla}_X N,$$

para todo $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$, temos que

$$-A(v) = \widetilde{\nabla}_X Y = \overline{\nabla}_X Y = (v(N_0), \ldots, v(N_{n+1})). \qquad (4\text{-}16)$$

Combinando (4-15) e (4-16), ficamos com

$$\langle dW_x^+(v), dW_x^+(v)\rangle = \frac{1}{(x_0+N_0(x))^2}\langle v-Av, v-Av\rangle. \tag{4-17}$$

Como $F(x)=\prod_i(1-\lambda_i(x))\neq 0$, para todo $x\in M$, temos que $\lambda_i(x)\neq 1$, $i=1,\ldots,n$. Assim, se $v\neq 0$, então $v-Av\neq 0$, o que implica, por (4-17), que $dW_x^+(v)\neq 0$, acarretando que dW_x^+ é injetiva. Como $dim(T_xM)=dim(T_{W_x^+}\mathbb{S}^n(1))=n$, temos que dW_x^+ é um isomorfismo. Assim, pelo teorema da função inversa, W^+ é um difeomorfismo local. Como todo difeomorfismo local é um homeomorfismo local e M é compacta, por hipótese, pela proposição 1.27 temos que W^+ é uma aplicação de recobrimento. Sendo M compacta, pelo teorema de Ropf-Rinow M é completa. Logo, para cada dois pontos em M podemos traçar um caminho mínimo ligando estes dois pontos em M e então M é conexa por caminhos. Pelo corolário 1.30, temos que W^+ é um homeomorfismo. Logo, W^+ é um homeomorfismo e um difeomorfismo local, com isso, $(W^+)^{-1}$ é diferenciável. Isso conclui que W^+ é um difeomorfismo global.

$\square$

Referências Bibliográficas

[1] BARBOSA, J.L. e COLARES, A., Stability of hypersurfaces with constant r-mean curvature, *Annals of Global Analysis and Geometry*, **15**, págs. 277-297, 1997.

[2] BULLEN, P.S., MITRINOVIC, D.S. e VASIC, P.M., Handbook of Means and Their Inequalities, Translated and revised from the Serbo-Croatian, *Mathematics and its Applications (East European Series)*, **31**,D. Reidel Publishing Co., Dordrecht, 1988.

[3] CARTAN, E., Familles de surfaces isoparametriques dans les espaces a curvatura constante, *Annali di Mat.*, **17**, págs.177–191, 1938.

[4] CHAVEL, I., Eigenvalues in Riemannian geometry, *Academic press*, 1984.

[5] CHENG, S. Y., A characterization of the 2-sphere by eigenfunctions, Proc. Amer. Math. Soc. 55(1976), 379-381.

[6] CHENG, S. Y., YAU, S. T., Hypersurfaces with constant scalar curvature, *Math. Ann.*, **225**, págs.195–204, 1977.

[7] CHENG, Q. M., Hypersurfaces in a unit sphere with constant scalar curvature, *J.London Math. Soc.*, **64**, págs.755–768, 2001.

[8] DESHMUKH S., Compact hypersurfaces in a Euclidean space, Quart. J. Math.49(1998), 35–41.

[9] DO CARMO, M. P., Riemannian geometry, *Birkhäuser*, Boston, MA, 1993.

[10] HARDY, G., LITLEWOOD, J. e POLYA, G., Inequalities, *2nd Ed.*,Cambridge Univ. Press, 1989.

[11] HERSCH, J.Sur la fréquence fondementale d'une membrane vibrante: évaluations par défaunt et principé de maximum, ZAMP. 11 (1960), 387-413.

[12] LI, H. Z., Hypersurfaces with constant scalar curvature in space forms, *Math. Ann.*, **305**, págs. 665–672, 1996.

[13] LI, P., Lectures notes on geometry analysis, *Department of mathematics university of california*, revised edition, 2009.

[14] NOMIZU, K., SMYTH, B., On the Gauss mapping for hypersurfaces of constant mean curvature in the sphere, *Comment. Math. Helv.*, **44**, págs.484-490, 1969.

[15] OTSUKI, T., Minimal hypersurfaces in a Riemannian manifold of constant curvature, *Amer. J. Math.*, **92**, págs.145–173, 1970.

[16] REILLY, R.C., Variational properties of functions of the mean curvatures for hypersurfaces in space forms, *J. Diff. Geom.*, **8**, págs. 465-477, 1973.

[17] ROSENBERG, H., Hypersurfaces of constant curvature in space forms, *Bull. Sci. Math.*, **117**, págs.211-239, 1993.

[18] ROSENBERG, H., ALENCAR, H., SANTOS, W., On the Gauss map of hypersurfaces of constant scalar curvature in spheres, *Proc. Am. Math. Soc.*, **132**, págs.3731–3739, 2004.

[19] WANG, Q., XIA, C. Isoperimetric bounds for the first eigenvalue of the Laplacian, ZAMP. 61(2010), 171-175.

[20] WANG, Q., XIA, C. Rigidity theorems for closed hypersurfaces in space forms , Quart. J. Math. 56(2005), 101–110.

[21] WANG, Q., XIA, C. Rigidity of hypersurfaces in a Euclidian sphere, Proceedings of the Edinburgh Mathematical Society (2006)49, 241–249

[22] WANG, Q., XIA, C. Topological and metric rigidity teorems for hypersurfaces in a hyperbolic space, Czechoslovak Mathematical Journal, Vol. 57 (2007), No. 1, 435–445

[23] WEI, Q., SUH, Y. J. Rigidity theorems for hypersurfaces with constant scalar curvature in a unit sphere, *Glasgow Mathematical Journal Trust.*, **49**, págs.235–241, 2007.