Universidade Federal de Goiás
Instituto de Matemática e Estatística
Programa de Mestrado Profissional em
Matemática em Rede Nacional

Representações em Matemática: Observações para o Ensino e a Aprendizagem em Geometria

Charles Lourenço de Bastos

Goiânia

2016

sibi
sistema de bibliotecas ufg

UFG

TERMO DE CIÊNCIA E DE AUTORIZAÇÃO PARA DISPONIBILIZAR AS TESES E DISSERTAÇÕES ELETRÔNICAS (TEDE) NA BIBLIOTECA DIGITAL DA UFG

Na qualidade de titular dos direitos de autor, autorizo a Universidade Federal de Goiás (UFG) a disponibilizar, gratuitamente, por meio da Biblioteca Digital de Teses e Dissertações (BDTD/UFG), sem ressarcimento dos direitos autorais, de acordo com a Lei nº 9610/98, o documento conforme permissões assinaladas abaixo, para fins de leitura, impressão e/ou *download*, a título de divulgação da produção científica brasileira, a partir desta data.

1. Identificação do material bibliográfico: **Trabalho de Conclusão de Curso de Mestrado Profissional em Matemática.**

2. Identificação da Tese ou Dissertação

Autor (a):	Charles Lourenço de Bastos
E-mail:	xarlleslb@gmail.com
Seu e-mail pode ser disponibilizado na página? [x]Sim [ ] Não	
Vínculo empregatício do autor	Professor do Ensino Básico e Ensino Superior
Agência de fomento:	Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior — Sigla: CAPES
País:	Brasil — UF: DF — CNPJ: 00889834/0001-08
Título:	Representações em Matemática: Observações para o Ensino e a Aprendizagem em Geometria
Palavras-chave:	Geometria, Linguagem matemática, Práticas de ensino e aprendizagem, Representações.
Título em outra língua:	Representations in Mathematics: Notes for Teaching and Learning Geometry
Palavras-chave em outra língua:	Geometry, Math language, Representations, Teaching and learning practices.
Área de concentração:	Matemática do Ensino Básico
Data defesa: (25/04/2016)	
Programa de Pós-Graduação:	Mestrado Profissional em Matemática
Orientadora:	Profª. Drª. Ivonildes Ribeiro Martins Dias
E-mail:	ivonildes.ufg@gmail.com
Co-orientador (a):*	
E-mail:	

*Necessita do CPF quando não constar no SisPG

3. Informações de acesso ao documento:

Concorda com a liberação total do documento [x] SIM [ ] NÃO[1]

Havendo concordância com a disponibilização eletrônica, torna-se imprescindível o envio do(s) arquivo(s) em formato digital PDF ou DOC da tese ou dissertação.

O sistema da Biblioteca Digital de Teses e Dissertações garante aos autores, que os arquivos contendo eletronicamente as teses e ou dissertações, antes de sua disponibilização, receberão procedimentos de segurança, criptografia (para não permitir cópia e extração de conteúdo, permitindo apenas impressão fraca) usando o padrão do Acrobat.

Charles Lourenço de Bastos
Assinatura do autor

Data: 25 / 04 / 2016

[1] Neste caso o documento será embargado por até um ano a partir da data de defesa. A extensão deste prazo suscita justificativa junto à coordenação do curso. Os dados do documento não serão disponibilizados durante o período de embargo.

Charles Lourenço de Bastos

Representações em Matemática: Observações para o Ensino e a Aprendizagem em Geometria

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação do Instituto de Matemática e Estatística da Universidade Federal de Goiás, como requisito para obtenção do título de Mestre em Mestrado Profissional em Matemática.

Área de Concentração: Matemática do Ensino Básico.

Orientadora: Profª. Drª. Ivonildes Ribeiro Martins Dias.

Goiânia

2016

Ficha catalográfica elaborada automaticamente
com os dados fornecidos pelo(a) autor(a), sob orientação do Sibi/UFG.

Bastos, Charles Lourenço de
Representações em Matemática [manuscrito] : Observações para o Ensino e a Aprendizagem em Geometria / Charles Lourenço de Bastos. - 2016.
vi, 77 f.: il.

Orientador: Profa. Dra. Ivonildes Ribeiro Martins Dias.
Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal de Goiás, Instituto de Matemática e Estatística (IME) , Programa de Pós-Graduação em Ensino na Educação Básica (Profissional), Goiânia, 2016.
Bibliografia.
Inclui siglas, fotografias, abreviaturas, símbolos, lista de figuras.

1. Geometria. 2. Linguagem matemática. 3. Livro didático. 4. Práticas de ensino e aprendizagem. 5. Representações. I. Dias, Ivonildes Ribeiro Martins, orient. II. Título.

Universidade Federal de Goiás- UFG
Instituto de Matemática e
Estatística-IME
Mestrado profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT/UFG
Campus Samambaia – Caixa Postal 131 – CEP: 74.001-970 – Goiânia-GO.
Fones: (62) 3521-1208 e 3521-1137 www.ime.ufg.br

Ata da reunião da Banca Examinadora da Defesa de Trabalho de Conclusão de Curso do aluno Charles Lourenço de Bastos – Aos vinte e cinco dias do mês de abril do ano de dois mil e dezesseis (25/04/2016), às 10:00 horas, reuniram-se os componentes da Banca Examinadora: Profª. Drª. Ivonildes Ribeiro Martins Dias – Orientadora; Prof. Dr. Mário José de Souza e Profª. Drª. Eunice Cândida Pereira Rodrigues, para, sob a presidência da primeira, e em sessão pública realizada na sala de aula do IME, procederem a avaliação da defesa intitulada: **"Representações em Matemática: Observações para o Ensino e Aprendizagem em Geometria"**, em nível de Mestrado, área de concentração Matemática do Ensino Básico, de autoria de Charles Lourenço de Bastos discente do Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT da Universidade Federal de Goiás. A sessão foi aberta pela Presidente da banca, Profª. Drª. Ivonildes Ribeiro Martins Dias, que fez a apresentação formal dos membros da banca. A seguir, a palavra foi concedida ao autor do TCC que, em 30 minutos procedeu a apresentação de seu trabalho. Terminada a apresentação, cada membro da banca arguiu o examinando, tendo-se adotado o sistema de diálogo sequencial. Terminada a fase de arguição, procedeu-se a avaliação da defesa. Tendo-se em vista o que consta na Resolução nº. 1075/2012 do Conselho de Ensino, Pesquisa, Extensão e Cultura (CEPEC), que regulamenta os Programas de Pós-Graduação da UFG e procedidas as correções recomendadas, o Trabalho foi **APROVADO** por unanimidade, considerando-se integralmente cumprido este requisito para fins de obtenção do título de **MESTRE EM MATEMÁTICA**, na área de concentração Matemática do Ensino Básico pela Universidade Federal de Goiás. A conclusão do curso dar-se-á quando da entrega na secretaria do IME da versão definitiva do trabalho, com as devidas correções supervisionadas e aprovadas pelo orientador. Cumpridas as formalidades de pauta, às 11:00 horas a presidência da mesa encerrou a sessão e para constar, eu, Sonia Maria de Oliveira, secretária do PROFMAT/UFG, lavrei a presente Ata que, depois de lida e aprovada, foi assinada pelos membros da Banca Examinadora em quatro vias de igual teor.

Profª. Drª. Ivonildes Ribeiro Martins Dias
Presidente-IME/UFG

Prof. Dr. Mário José de Souza
Membro – IME/UFG

Profª. Drª. Eunice Cândida Pereira Rodrigues
Membro-UFMT

Charles Lourenço de Bastos graduou-se em Licenciatura em Matemática pela Universidade Federal de Goiás (Campus de Rialma) em 2005, especializou-se em Psicopedagogia Institucional pela Faculdade Noroeste de Minas em 2009 e em Mídias na Educação pela Universidade Federal de Goiás em 2013, atualmente é professor do Ensino Básico da Secretaria Municipal de Educação/Uruana e no Colégio Solar e do Ensino Superior na Associação Educativa Evangélica/Ceres e tutor de EaD no curso de licenciatura em Matemática/Catalão-UFG.

À minha mãe Nilva Maria de Jesus, por sua dedicação e carinho, tão importantes em minha formação.

Agradecimentos

À minha mãe, que faz de tudo a seu alcance em meu favor. Que está sempre presente me apoiando em tudo o que tenho conquistado.

Aos meus colegas de mestrado que pude conhecer, que me ajudaram compartilhando seus conhecimentos e que me acompanharam nestes quase dois anos.

Ao colega Humberto Alves de Castro, que esteve comigo em quase todas as viagens aos encontros do curso; pessoa com quem partilhei muito do que vivi e que soube me ouvir.

Aos idealizadores do PROFMAT, que me proporcionaram esta oportunidade de aperfeiçoamento, que muito acrescenta ao meu aprendizado e certamente à minha profissão.

À unidade escolar e secretaria municipal (Uruana), que me concederam quase dois anos de afastamento, e assim pude dispor maior tempo para os estudos.

À CAPES pela oferta da bolsa, que contribuiu para o custeio de viagens e materiais do curso.

A todos os professores que a seu modo colaboraram para o desenvolvimento do curso, transmitindo conhecimentos importantes à minha formação.

À professora Drª. Ivonildes Ribeiro Martins Dias, que me orientou durante o desenvolvimento desta dissertação.

Aos professores Dr. Mário José de Souza e Drª. Eunice Cândida Pereira Rodrigues, pela participação da Banca Examinadora e pelas pertinentes observações.

A todos que indiretamente contribuíram para o desenvolvimento deste trabalho.

Resumo

Neste trabalho são feitas observações sobre algumas formas em que se é possível ensinar e aprender geometria através das representações. Para isso, tratamos da linguagem matemática, do entendimento dos modos de representação e do ensino de geometria aliado a outras áreas da Matemática no Ensino Básico. A pesquisa bibliográfica contemplou um breve estudo sobre o ensino de geometria nas escolas públicas, explorando a presença em livros didáticos da história da matemática, da resolução de problemas e das representações. Indicamos também, algumas das minhas práticas de ensino que relacionam diferentes formas de representar e de representações através de objetos reais e de recursos computacionais.

Palavras-chave

Geometria. Linguagem matemática. Livro didático. Práticas de ensino e aprendizagem. Representações.

Abstract

This work observations are made about some ways in which it is possible to teach and learn geometry through the representations. For this, we treat the mathematical language, understanding of the modes of representation and the teaching of geometry combined with other areas of Mathematics in Basic Education. The literature search included a brief study of geometry teaching in the public schools, exploring the presence in textbooks of history of mathematics, problem solving and representations. We note also, some of my teaching practices that relate different ways of representing and representations through real objects and computing resources.

Keywords

Geometry. Mathematical language. Practices of teaching and learning. Representations. Textbook.

Lista de Figuras

Sumário

Introdução

As representações possuem significativa importância para o conhecimento, elas permitem que se possa sair do imaginário, do interior do ser, para o exterior, promovendo sua disseminação. Mesmo após anos como estudante e alguns anos como professor, apesar de utilizar e ter certa proximidade com as representações, não havia tomado ciência do quanto as representações estão presentes na matemática, e que elas são propícias à aprendizagem.

O despertar surgiu na oportunidade de novos e mais aprofundados estudos de algumas áreas da Matemática, principalmente a geometria. A percepção de que estas áreas se comunicavam e a procura por resolver o máximo de problemas e observá-los sob diferentes soluções, culminou neste trabalho.

No Capítulo 1, destacamos breves fatos históricos sobre geometria e representação, com objetivo de situar e evidenciar a presença das representações no desenvolvimento da Matemática. Discorreu-se sobre registros matemáticos em paredes, madeira, papiros etc. e a construção da Matemática baseada no cotidiano e na resolução de problemas, para então dispor sobre a estruturação do conhecimento matemático.

No Capítulo 2, seguem características do ensino em escolas públicas, observando o ensinar e aprender em geometria. Destacamos as políticas empregadas no ensino (PCNs, LDB e outros), os livros didáticos, a formação do professor e suas práticas.

As representações tiveram considerável destaque no terceiro capítulo; caracterizando o que são e algumas diferentes formas de representações, situamos estas formas de representação segundo objetos matemáticos, enfatizando a importância do tratamento e da conversão entre representações e indicando os modos de representação. Foram observados a língua, a linguagem matemática, algumas formas de representações, o ensino e a aprendizagem utilizando objetos educacionais e a necessidade de relacionar diferentes áreas da Matemática.

No penúltimo capítulo, estão indicados alguns exemplos que caracterizam e reforçam as observações sobre representações e sobre geometria presentes neste trabalho, inferindo algumas reflexões sobre os objetos principais deste estudo e sobre ensinar e aprender em Matemática.

Reforçamos, no capítulo 4, algumas considerações sobre o ensino e a aprendizagem na disciplina de matemática e ressaltamos a importância de ter nas representações uma possibilidade de ampliar as práticas do professor.

Capítulo 1

Notas sobre representações e geometria na história da matemática

Quem conta uma história procura fundamentá-la em documentos e fatos, inferindo interpretações sobre aquilo que toma como base e então amplia os registros acerca do assunto a que se propôs desenvolver. Baseado em referências bibliográficas, procurou-se descrever a respeito de fatos e registros de representações, mais especificamente em geometria na história da matemática.

> A geometria nasceu como uma ciência empírica ou experimental. Na "confrontação" com o seu meio ambiente o Homem da Antiga Idade da Pedra chegou aos primeiros conhecimentos geométricos. O processo da aquisição pelo trabalho de imagens abstratas das relações espaciais entre os objetos físicos e as suas partes decorreu, primeiro, de uma forma extremamente lenta. Depois de ter sido reunido suficiente material factual respeitante às formas espaciais mais simples, tornou-se possível, sob condições sociais especiais, como, por exemplo, no Egito antigo, Mesopotâmia e China, sistematizar consideravelmente o material factual recolhido. Com isso começou a transformação da geometria de uma ciência empírica numa ciência matemática (...). [14, Gerdes, p.29]

Nas referências sobre a história da matemática percebe-se a falta de registros que comprovem a origem de inúmeros conhecimentos, há também a busca por fundamentar e relacionar fatos ocorridos em várias partes do mundo. Os registros matemáticos do concreto ocorriam em diversos materiais (paredes, pedras, papiros, fibras de árvores, tábulas de argila etc.) e acredita-se que muito disso se perdeu justamente por conta da qualidade do material utilizado.

A matemática foi sendo construída em diversas partes do mundo, remetendo um longo período desde antes dos primeiros registros até a sua estrutura atual. Percebe-se que não há uma continuidade única de evolução; um determinado conhecimento para a matemática surgia entre vários povos com diferentes finalidades e por vezes, ao mesmo tempo.

É certo que quando vieram as primeiras representações, antes já haviam ao homem outros conhecimentos providos possivelmente pelo uso dos sentidos frente ao que lhe era próximo, como a associação a objetos reais, de conceitos e outras qualificações de uso, forma e tamanho. Tais associações apresentavam variações por conta, entre outros, de fatores ligados às características próprias dos diferentes povos.

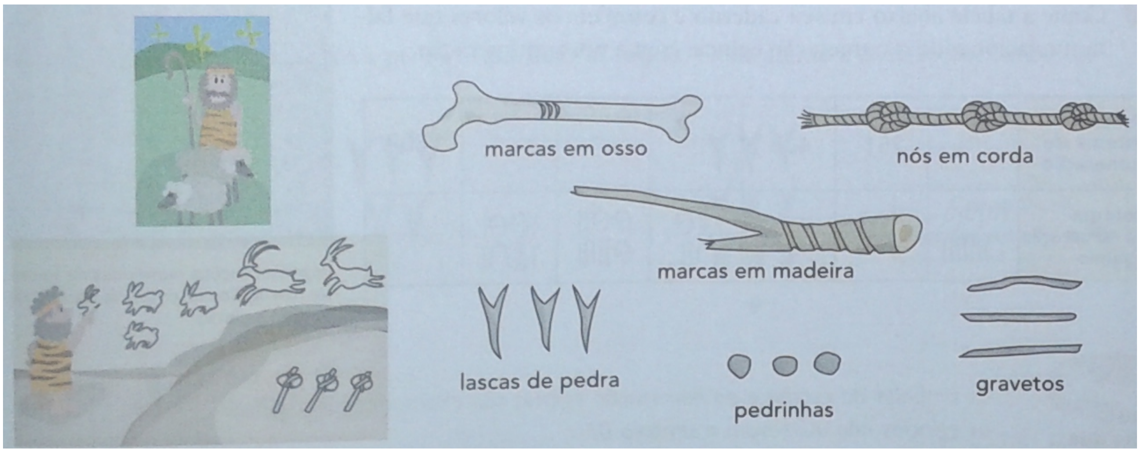


Figura 1.1: *Contagem e o registro de quantidades.*

Conta-se que a matemática e seus diversos campos foram surgindo devido às condições e necessidades humanas. Howard Eves, [12, p.1] relata que "inúmeras circunstâncias da vida, até mesmo do homem mais primitivo, levavam a um certo montante de descobertas geométricas subconscientes" e exemplifica uma série de outros conceitos possivelmente advindos da observação da natureza, de situações criadas ou da própria evolução humana, para este cenário nomeou-se "geometria subconsciente". No ensino de matemática, uma das referências históricas mais recorrentes é a de contagem com a associação 1 para 1 de um animal e alguma representação ou associação (seja com pedras, gravetos, marcas ou nós), como na Figura 1.1, presente em Dante [8, p.13], livro didático da 5ª série do Ensino Fundamental.

Um fato importante a respeito da evolução matemática, está ligado ao que destaca Mol [23, p.16], de que "o maior legado dessa civilização *[Mesopotâmia]* foi o desenvolvimento (...) da forma de comunicação escrita mais antiga da humanidade: a escrita cuneiforme". Representar através da escrita, em placas de argila, deu à humanidade a possibilidade de se reconhecer, de reconhecer e participar da evolução do conhecimento matemático.

Muito tempo depois, já com posse de maior conjunto de ferramentas percebe-se que as representações deixariam de ser apenas sobre o real, mas fruto de uma combinação entre o real e a imaginação. Não haviam mais apenas problemas soltos a respeito das necessidades humanas, mas um conjunto de características que permitiam estruturar conhecimentos gerais sobre geometria. A matemática tinha agora outro campo, com linguagem própria que tratava de medidas e formas, não deixando de atender e de se nutrir das percepções e vivências dos povos, mas, através destes conhecimentos, passando a inferir sobre o meio, em que Howard Eves [12, p.27] indica por "geometria científica".

Howard Eves [12, p.27], evidencia ainda que "Por volta do ano 600 a.C., os gregos começaram a introduzir dedução na geometria", originando a "geometria demonstrativa" e que por um longo período, considerava-se apenas uma geometria, em que o espaço era concebido "como um domínio ou lugar no qual os objetos podiam se deslocar livremente e ser comparados uns com os outros".

Não foi a primeira estruturação do conhecimento matemático em forma de livro, mas uma coleção matemática de grande importância foi *Elementos*, em que Euclides e certamente outros, contribuíram grandemente para a evolução do conhecimento matemático. Muniz Neto [26, p.2] diz que "A importância dos *Elementos* se deve ao fato de ser a primeira obra em que se considera um corpo de conhecimento matemático como parte de um sistema lógico dedutivo bem definido" e Mol [23, p.45-52] retrata, resumidamente, cada um dos livros que compunham a coleção:

> Os primeiros quatro livros tratam de geometria plana elementar e estudam propriedades de figuras retilíneas e do círculo, abordando problemas cuja solução se faz com régua e compasso. O livro V aborda a teoria de proporções e o livro VI aplica essa teoria ao estudo de geometria. Os livros VII, VIII e IX versam sobre a teoria dos números. O livro X trata dos incomensuráveis e os livros XI, XII e XIII discorrem sobre geometria sólida. [23, Mol, p.46]

Por um longo período, a geometria esteve baseada no livro *Os Elementos* de Euclides. Roque e Carvalho, [33, p.122-124] retratam sobre algumas das muitas traduções de *Elementos* e de que apenas em 2009 houve a primeira edição completa na língua portuguesa, por Irineu Bicudo. A Figura 5.5, uma foto da página 81 de livro didático do 9º ano refere-se a este fato da obra de Euclides (Complemento 5.3).

Mas, aos poucos a geometria ganhava conhecimentos e estudos voltados não só para o que se descreveu como "geometria primitiva", mas dentro de seu próprio campo de conhecimento; surgiam novas regras, novos modos de pensar sobre o espaço, e com o tempo, considerou-se a existência de mais de uma geometria. Por conta, por exemplo, do espaço agora ser "considerado uma coleção de pontos", as atenções se voltaram para "um grupo de transformações congruentes do espaço em si mesmo", a geometria se configura como "o estudo das propriedades das configurações de pontos que permanecem inalteradas quando o espaço circundante é sujeito a essas transformações". [12, Howard Eves, p.27]

Com o tempo, a geometria passou a ter outras definições, ou seja, ampliou-se em novos campos a ponto de propiciar novas geometrias, cada uma com linguagem própria e no final do século XIX, o conceito de axiomática formal permitiu que cada uma dessas geometrias se tornassem uma subárea específica da matemática. As representações em matemática, possibilitaram além da estruturação, uma nova forma de estudar o conhecimento, podendo ampliá-lo e até fundamentar, por exemplo, novas áreas em geometria.

As representações começam a ganhar espaço com o Renascimento. Flores indica que

> anteriormente o conhecimento do mundo e dos homens estava sob o poder das entidades religiosas, (...) com a descoberta da razão o sujeito do conhecimento passa a conhecer e a representar os objetos do conhecimento. A questão da representação passa, então, a ser problematizada enquanto expressão iconográfica da relação entre o sujeito do conhecimento e o objeto dado a conhecer, criando princípios da representação sob o aspecto de fundamento teórico, epistemológico. [13, Flores, p.116]

Há portanto, uma nova visão de mundo ao ponto que as ciências se propõem a construir mais conhecimentos sobre ele, a explicá-lo e então representar. A própria representação passa a ter maior ou novo destaque em várias áreas. Na matemática, deixa de ser a intuição geométrica e o discurso, referências para o conhecimento; o que se percebe é a presença de uma organização de signos que trás para o saber o que seria uma linguagem; os discursos e descrições em diferentes línguas (por conta de inúmeros povos e culturas) são traduzidos por uma uniformidade de símbolos e operações.

Capítulo 2

O ensino de geometria em escolas públicas

Ao nascer, a criança passa a ter suas primeiras interações com o espaço. Tudo ainda é desconhecido, em nada há significado. As primeiras sensações, as repetições, as experiências, são inúmeros estímulos que aos poucos dão ao sujeito um sentido de espaço. O livro de Kobayashi [18] - *"A construção da geometria pela criança"*, apresenta características relevantes sobre a geometria infantil, que não é assunto desta dissertação, mas que contribui para o entendimento da construção do conhecimento (em específico, a geometria) pelo sujeito em seus primeiros 7 anos.

Nos Parâmetros Curriculares Nacionais - PCN [5, p.47], ao serem descritos os objetivos propostos no documento, há um destaque para as "capacidades que devem ser desenvolvidas pelos alunos ao longo da escolaridade" e a respeito da capacidade cognitiva, indicam que ela

> tem grande influência na postura do indivíduo em relação às metas que quer atingir nas mais diversas situações da vida, vinculando-se diretamente ao uso de formas de representação e de comunicação, envolvendo a resolução de problemas, de maneira consciente ou não. A aquisição progressiva de códigos de representação e a possibilidade de operar com eles interfere diretamente na aprendizagem da língua, da matemática, da representação espacial, temporal e gráfica e na leitura de imagens. [5, PCN, p.47]

Os primeiros anos de uma criança são carregados de novas experiências, que mais tarde se tornam determinantes para o modo como ela se perceberá e perceberá o que está a sua volta. Este período inicial, em que os sentidos, as formas, os conceitos e tudo mais são vivenciados e vão dando significado às coisas, é explorado por Kobayashi [18], que propõe ainda um apanhado sobre o ensino de geometria às crianças. Baseadas em Del Grande [9], Passos e Nacarato dizem que:

> a natureza das atividades matemáticas relacionadas com a geometria na escola básica permite a aquisição de experiências de percepção visual dando aos professores oportunidade de observar e detectar, desde cedo, como o pensamento geométrico das crianças vai sendo construído. (...) essa percepção inicial das habilidades de percepção visual será fundamental para o planejamento de tarefas de geometria a serem propostas pelo professor. [29, Passos, p.1149]

Limitar-se-á a descrever algumas características do ensino de geometria no Ensino Básico, observadas em referências que vão do Ensino Fundamental I (1º ao 5º ano), passando pelo Ensino Fundamental II (6º ao 9º ano) até o Ensino Médio; principalmente a partir da reforma do ensino de Matemática, que segundo Ávila [1, p.3-6] ficou conhecida como "Matemática Moderna". Pavanello [30, p.13], diz que a ideia central do movimento (Matemática Moderna) "é adaptar o ensino da matemática às novas concepções surgidas com a evolução deste ramo do conhecimento."

No Brasil, de acordo com Dutra Júnior [16, p.14-15], o ensino de geometria teve pouco destaque até o século XVIII, por conta de falta de qualificação e por ser considerado de pouca necessidade à formação. Inicialmente, por conta de finalidades militares, a Geometria e o Desenho Geométrico surgem em algumas escolas; mas só quando a geometria foi tomada como pré-requisito de ingresso em cursos superiores é que o seu ensino foi formalizado e passou a ser permanente no ensino secundário.

A reforma, entre outros, alterou o currículo de matemática adicionando novos conteúdos, modificou também a linguagem e a notação empregada passou a ser a de conjuntos. Muitos propuseram uma redução do currículo de geometria ou mesmo que ela não fizesse parte do ensino de matemática. Especificamente a respeito da geometria em livros didáticos, por conta da Matemática Moderna, Pavanello indica que:

> opta-se, num primeiro momento, por acentuar nesses livros as noções de figura geométrica e de intersecção de figuras como conjuntos de pontos do plano, adotando-se, para sua representação, a linguagem da teoria dos conjuntos. Procura-se trabalhá-la segundo uma abordagem "intuitiva" que se concretiza, nos livros didáticos, pela utilização dos teoremas como postulados, mediante os quais pode-se resolver alguns problemas. Não existe qualquer preocupação com a construção de uma sistematização a partir das noções primitivas e empiricamente elaboradas. [30, Pavanello, p.13]

Pavanello [30, p.7] aponta dois motivos para o abandono do ensino de geometria no Brasil: a insegurança dos professores de matemática em trabalhar com geometria e principalmente, o modo como se procedeu a educação no Brasil; indicando ainda que o desenvolvimento da matemática não foi motivo para que a geometria cedesse espaço para outras áreas. Passos e Nacarato [29, p.1148] citam que a geometria não é "assumida como prioridade frente aos demais conteúdos de matemática, pois ninguém ensina aquilo que não tem domínio conceitual".

Esta mesma autora traça um perfil da educação no Brasil, no século XX, ressaltando vários pontos: situação econômica e social da população, ensino voltado para necessidades práticas da vida, necessidade de formação dos professores, quantidade excessiva de conteúdos em relação ao tempo disponível para ser desenvolvido, a geometria não ser ministrada em algumas séries, a falta de professores para atender à demanda crescente pela busca do ensino, má condição de trabalho, falta de 'unidade' nas disciplinas dos cursos de licenciatura, implantação das "licenciaturas curtas", superlotação das classes, aumento da carga de trabalho dos professores, entre outros, concluindo que:

> O abandono do ensino de geometria deve, portanto, ser caracterizado como uma decisão equivalente às medidas governamentais, em seus vários níveis, com relação à educação. Pode-se questionar as verdadeiras intenções e compromissos que elas revelam em relação ao oferecimento de condições que implique em reais oportunidades educacionais a todos os segmentos da população brasileira. [30, Pavanello, p.16]

Por muito tempo, o ensino de geometria foi organizado entre os últimos itens do currículo e de livros didáticos, sempre com divisórias entre os conteúdos que pouco ou nada se relacionavam. Nos últimos anos percebe-se que os conteúdos têm sido organizados de modo que as áreas em que a matemática é divida para o ensino nas escolas estão separadas em blocos; a geometria não mais aparece no final, mas em cada um dos períodos/trimestres aos quais as escolas organizam seu calendário.

No Brasil, houve um período em que o Desenho vigorou como disciplina no que hoje é o Ensino Fundamental II, e sua base era o **desenho geométrico**. Já na etapa do Ensino Básico designada por Ensino Médio, o predomínio da disciplina era a **geometria descritiva**; mas ela, deixou de ser currículo base e foi amplamente retirada do ensino público poucos anos após sua obrigatoriedade por lei. E a partir da LDB 5.692/71 o Desenho foi substituído por Educação Artística.

Para o Ensino Médio, há que destacar o conteúdo dos documentos complementares aos PCNs. Nele é traçado um perfil desta etapa do Ensino Básico, seja apontando características sociais e econômicas ou referenciando a legislação a respeito do ensino no Brasil, para posteriormente discorrer sobre cada disciplina; ponto em que colocamos por evidência as orientações quanto a representação na matemática - que terá maior destaque no próximo capítulo.

> O novo ensino médio, (...) deixa de ser, portanto, simplesmente preparatório para o ensino superior ou estritamente profissionalizante, para assumir necessariamente a responsabilidade de complementar a educação básica. [4, Brasil, p.08]

As inúmeras dificuldades relacionadas ao ensinar ainda no nível fundamental, infelizmente refletem maiores dificuldades para os estudantes do Ensino Médio, em sua maioria adolescentes. É percebido o apontamento do Ensino Médio, principalmente, como preparatório para o 'vestibular' e há a busca por resgatar o ensino profissionalizante e técnico concomitante à etapa de ensino.

Os componentes curriculares voltaram ao debate nestes últimos anos, com a proposta de aproximar o que é ensinado nas escolas em todo o território brasileiro. A Sociedade Brasileira de Matemática - SBM, elaborou documentos que procuram contribuir para o debate sobre o currículo. No que se refere a disciplina matemática, são apresentados os conteúdos presentes na Figura 2.1, organizados por série em quatro áreas. Estas áreas são detalhadas, especificando-se os conteúdos, as habilidades e algumas observações; procurando ainda, explorar a geometria durante o ano letivo e intercalando com outros conteúdos.

Uma das quatro áreas é a geometria, e para ela há o apontamento para a necessidade de recordar e aprofundar conceitos que deveriam ter sido apresentados no Ensino Fundamental II. É indicado que o ensino e a aprendizagem nesta faixa era pautado em propriedades percebidas nas figuras e que no Ensino Médio; tais propriedades podem ser demonstradas sem exagero ao rigor da escrita procurando privilegiar algumas informações com notação simples. Recomenda a abordagem intuitiva ao conceito de limite, a apresentação de axiomas, a demonstração de alguns teoremas e indicação de definições relacionadas a exemplos; além de relacionar figuras, ilustrações e construções de poliedros e corpos redondos com objetos concretos.

Nas contribuições da SBM [35, *Ensino Fundamental II*, p.05], há a proposta de incluir no Ensino Fundamental II a geometria espacial, conteúdo presente em vários livros didáticos desta etapa de ensino, mas que pouco ou nada é explorado. E ainda, há a recomendação de que se manipule materiais concretos, observe formas 3D presentes no mundo e utilize algum *software* de geometria dinâmica. Tais recomendações, não são novidade, mas são pouco exploradas.

Séries	Números e Funções	Geometria	Matemática Discreta	Tratamento da Informação
1º	• Conjuntos e noções de lógica. • Conjuntos Numéricos. • Proporcionalidade. • Funções: aspectos gerais. • Funções Afim e Quadrática.	• Geometria Plana: congruência, semelhança e áreas. • Trigonometria do triângulo.	• Conjuntos e Contagem. • Aritmética.	• Noções de amostragem. • Organização de dados: distribuições de frequências e gráficos.
2º	• Sequências. • Outras funções reais. • Funções Exponenciais e Logarítmicas. • Equações e Sistemas Lineares.	• Perímetro e área de figuras semelhantes. • Círculo. • Geometria Espacial de Posição.	• Matemática Financeira. • Técnicas de Contagem.	• Medidas resumo e distribuição de dados.
3º	• Funções Trigonométricas. • Desigualdades e médias.	• Poliedros. • Áreas e Volumes. • Geometria Analítica.	• Probabilidade.	• Noções de Estatística bivariada.
Temas Suplementares	• Taxas de variação. • Outras funções trigonométricas. • Números Complexos. • Noções sobre matrizes e transformações elementares no plano e no espaço.	• Áreas de figuras planas: outras abordagens. • Vetores no plano. • Transformações geométricas e simetria.	• Grafos. • Aritmética. • Outros métodos de contagem.	

Figura 2.1: *Tabela descritiva dos conteúdos de matemática no Ensino Médio.*

Os professores, ao planejarem suas aulas, seguiam as diretrizes e a organização dos livros didáticos, e assim quase sempre o conteúdo de geometria era o último a ser estudado, quando era estudado e quase nunca estava relacionado com outras áreas. O ensino de geometria ainda é mínimo e superficial, e isso se repete série após série; são vários conceitos repetidos e quase sempre sem fundamentação; os estudantes terminam o Ensino Básico com inúmeras deficiências de aprendizagem. Kobayashi [18], refere-se a Araújo afirmando que

> ...os livros didáticos de Matemática para o ensino fundamental (...) na sua maioria, enfatizam temas aritméticos em detrimento dos geométricos, que são tratados de forma abstrata, descritiva e desarticulada, nas últimas páginas de cada volume. [Araújo p.12-16 *apud* Kobayashi, p.13-14]

Os livros didáticos atuais têm fugido das características apontadas por Araújo. São várias as discussões e propostas de organização curricular, procurando alterar o modo como os conteúdos são dispostos nos livros didáticos e são ensinados (transmitidos) nas escolas. No Ensino Básico, os conteúdos, série após série, são organizados em blocos temáticos, em que a cada série são acrescidos novos conceitos, mas há uma tendência dos professores ainda priorizarem, por exemplo, conteúdos algébricos, deixando de lado conteúdos geométricos; os problemas envolvendo geometria ou são ignorados ou não têm a devida atenção do professor em sua prática pedagógica.

Percebe-se maior atenção aos livros didáticos de matemática, por eles estarem melhor estruturados, conteúdos recheados de diferentes formas de representações, ênfase no tratamento e conversão entre as representações; mas a distinção entre objeto matemático e a representação deste objeto não é evidenciada. Nem mesmo o professor possui conhecimento a respeito para propor práticas que permitam ao(à) estudante melhor compreensão em geometria. Conhece-se basicamente a figura e a ela atribui o objeto geométrico, mas pouco se sabe das características do objeto geométrico presentes em sua representação.

É preciso que ao planejar o professor procure não se prender à sequência apresentada nos livros, mas associar uma série de competências para o alcance dos objetivos estipulados. O uso de problemas tem sido uma proposta que busca inserir conteúdos de geometria entre os blocos específicos de álgebra ou aritmética, por exemplo; e é algo que é percebido nos livros didáticos atualmente, como os da coleção: A conquista da Matemática de Giovanni Júnior e Castrucci, São Paulo: FTD, 2009. Mas ainda, falta até mesmo aos professores, conhecimento teórico e didático para, ao ensinar, lidar com melhor fundamentação da geometria.

As escolhas dos livros didáticos pelos professores, parecem ser por aqueles livros de pouca fundamentação, com fórmulas prontas, boa diagramação, muitos exemplos (modelos) e exercícios. Terem uma boa aparência e organização, serem bem ilustrados, terem vários exemplos, problemas e exercícios são requisitos necessários para ensinar e aprender, mas é importante também que se atentem para a base à qual a matemática tem sido construída; que os professores não abandonem esta parte do ensino por desculpa de que assim é mais ‘fácil’ e de que é preciso ensinar para a vida (ensinar o cotidiano). A matemática precisa ser ensinada para além do palpável, há que compreender sua representação axiomática.

Os livros de matemática da coleção projeto Teláris, editora ática, PNLD 2014-2016, de Luiz Roberto Dante exemplificam bem a preocupação de buscar durante todo o ano letivo, retomar vários conceitos e de dar um tratamento crescente de conteúdos para cada ano do Ensino Fundamental II, valorizando o ensino de geometria. No livro do 9º ano, a geometria está presente em suas quatro unidades, com destaque para o tratamento quanto ao conteúdo de funções, em que estão conectados vários outros conteúdos: proporcionalidade, semelhança (segmentos, capacidade, triângulos e outros polígonos), transformações (translação, reflexão e rotação), relações métricas (triângulos e circunferências), Teorema de Pitágoras, Teorema de Tales. Neste mesmo livro, há a preocupação em referenciar a história da matemática, em realizar algumas demonstrações sem muito formalismo, em apresentar várias ilustrações de objetos e locais reais relacionados ao conteúdo em estudo, além de propor a resolução de vários problemas.

> Por que as coisas mudaram tanto e hoje em dia vários livros abandonaram as demonstrações, limitando-se tão somente ao enunciar teoremas e definições, num receituário monótono de enunciados e fórmulas sem a menor justificativa? [1, Ávila, p.3-8]

> Um dos fatores que contribuem para que a Matemática seja considerada difícil vem da forma como é ensinada, fazendo uso, muitas vezes, da mesma ordem de exposição presente nos textos matemáticos, ou seja, ao invés de partirmos do modo como um conceito matemático foi desenvolvido e exibirmos as perguntas às quais ele responde, tomamos este conceito como algo pronto. [33, Roque e Carvalho, XI]

É costume utilizar as ferramentas prontas (conceitos, definições, proposições, teoremas etc.) sem bem compreendê-las, sem demonstrá-las ou sem associar a elas o devido valor e assim este uso pode ser incorreto ou incompleto, dificultando procedimentos por falta de um raciocínio típico daqueles que se apropriaram das características pertinentes a estas ferramentas. Vários livros didáticos retomaram melhor fundamentação aos conteúdos matemáticos; mas, por vivência e investigação (conversa informal) em um dos ambientes que trabalho, muitos professores parecem ainda estarem inertes, acomodados com um mesmo molde para ensinar; recorrem diretamente aos resumos, fórmulas, exemplos e procuram indicar procedimentos e “macetes” sem a explicação de como e porque eles são válidos.

A imaginação é instrumento importante que deve ser estimulado para associar conceitos abstratos com projeções reais de situações ou objetos em que a teoria pode ser aplicada. Cabe ao professor explorar tal capacidade e propor problemas que levem o(a) estudante a deter um pensamento que associe teoria, visão e imaginação, tornando mais próximo deste o entendimento daquilo que se propõe ensinar; e mais, um conceito pode ser representado de diferentes formas, e isso proporciona que um maior número de estudantes compreenda mais facilmente tal conceito, além de disponibilizar diferentes alternativas para se deter determinado conhecimento.

Saravali [34, p.218], apoiada em Montoya [24], discorre sobre “a importância dos aspectos figurativos, além dos operativos, como instrumentos importantes na formação e desenvolvimento do pensamento”. Ora, a visão nem sempre está ao alcance, seja pela ausência ou inexistência real do objeto que represente determinada situação ou por deficiência do sujeito; imaginar para estes casos é ainda mais necessário. Deter conceitos e saber associá-los de modo a criar uma imagem mental é algo necessário, segundo Montoya (em Saravali [34], p.219), ao nascimento e ao acabamento da representação conceitual ou da inteligência representativa.

O ensino e a aprendizagem em Matemática carecem maior atenção quanto a formação do professor, nas licenciaturas, sobre as práticas de ensino e aprendizagem no nível básico, principalmente nas primeiras séries do Ensino Fundamental. Muitos professores não possuem formação específica em matemática e lhes falta, por exemplo, conhecimento sobre geometria; muito disso, por conta do ‘abandono’ desta área por certo período do ensino no Brasil. A formação não se basta na licenciatura ou em uma área específica (pedagogia, matemática, leitura, escrita, inclusão, tecnologia na educação etc.), ela é contínua, com o sujeito se permitindo estudar tudo quanto possível. Não se chega em um ponto e pronto, é preciso acompanhar as mudanças externas, se arriscar, se permitir à autoria e mudar a si e o que o cerca.

Em um dos documentos da SBM [35, *licenciatura*, p.83] que trata de contribuições para o currículo de matemática, há a sugestão de uma proposta de disciplinas para o Curso de Licenciatura em Matemática dividido em oito períodos, em que na formação científica aparecem, entre outras: Geometria Analítica e Geometria I no 1º período e Geometria II no 2º período; e da prática como componente curricular no 3º período, a disciplina 'O Ensino de Geometria' (ensino e história da matemática).

No mesmo documento, há uma descrição pertinente que trata da representação de algumas situações dadas por licenciandos em matemática, observadas por Ball. Aos estudantes é proposto que procurem desenvolver uma representação para a divisão envolvendo frações; da análise dos resultados a autora indica que a dificuldade em apresentar representações adequadas se deve principalmente à "concepção de que a Matemática a ser trabalhada no Ensino Básico é 'simples demais' para se constituir em objeto de cursos universitários". [35, *licenciatura*, p.09]

A deficiência na formação do professor é um dos fatores que contribui para o ensino e consequente aprendizagem, superficiais de geometria. O professor prioriza conteúdos de outras áreas, repete os mesmos conteúdos de geometria por várias séries, não relaciona as áreas de ensino da matemática, raramente apresenta algo para além do livro didático, prioriza o 'decorar' de fórmulas sem que o(a) estudante compreenda sua origem ou como interpretar e inferir propostas para resolver problemas.

O documento que trata sobre a reformulação do Ensino Médio e as áreas do conhecimento [4], aponta para a competência '**representação e comunicação**' como uma das metas que precisam ser alcançadas, no sentido de complementar o Ensino Fundamental. Indica uma série de expectativas e capacidades necessárias aos estudantes nas disciplinas; especificamente, quanto aos objetivos para que o ensino de Matemática no nível médio resulte em aprendizagem real e significativa, estabelece que uma das finalidades é “reconhecer representações equivalentes de um mesmo conceito, relacionando procedimentos associados às diferentes representações”. [5, Brasil, p.42]

A palavra ‘representação’ e outras derivações com mesmo significado geral ou aproximação, aparecem constantemente em documentos escolares: planos de aula, componentes curriculares, orientações de ensino, PCN, e outros; mas o entendimento e aplicação adequados de representações em Matemática, e em específico na geometria, estão distantes da compreensão necessária para melhor explorar as práticas de ensino e de aprendizagem.

Capítulo 3

Representações

O direcionamento deste trabalho está para as representações (semióticas) de objetos matemáticos, em observações sobre estas representações como meio para alcançar os objetos matemáticos e em como utilizar as diversas formas de representar para aprender Matemática. Duval indica que:

> As representações **mentais** recobrem o conjunto de imagens e, mais globalmente, as conceitualizações que um indivíduo pode ter sobre um objeto, sobre uma situação e sobre o que lhe é associado. As representações **semióticas** são produções constituídas pelo emprego de signos pertencentes a um sistema de representações que tem inconvenientes próprios de significação e de funcionamento. [11, Duval, p.269]

As representações estão em tudo em que nossos sentidos podem alcançar, com elas e nelas associamos conceitos, características, informações, opiniões e mais. Somos capazes de conhecer e mostrar características de objetos matemáticos, indicar propriedades sobre determinado conhecimento, de qualificar e quantificar objetos e estruturar novos conhecimentos e assim elencar novas representações. As representações semióticas, segundo Duval [11, p.269], são "um meio de exteriorização de representações mentais para fins de comunicação", e mais, são "essenciais à atividade cognitiva do pensamento". Ora, então representações semióticas e representações mentais servem-se uma à outra, pois são dependentes entre si.

São inúmeras as formas de representações semióticas, e em cada uma podem ser tomados diferentes tratamentos. Por ilustração, baseado em Duval, alguns destes tipos de representações estão em registros de descrição, definição, explicação, dedução, figura geométrica, gráfico, construção de instrumentos, modelagem, sistemas de escrita (simbólica, algébrica, numérica), cálculos e tantos outros.

Uma representação não é uma mera imagem desenhada, nela estão características próprias de um objeto matemático. Passos e Nacarato [29, p.1153 - *grifo nosso*] dizem - a partir de Fischbein, que "uma **figura geométrica** é uma imagem virtual, que (...) inclui a representação mental da propriedade do espaço". E continuam indicando que a figura geométrica é "a ideia correspondente da entidade figural idealizada, abstrata, estritamente determinada por sua definição" [29, p.1155].

Não basta ao(à) estudante desenhar a representação de um objeto geométrico, é preciso que ele compreenda aquilo que irá desenhar. Deve exportar uma representação mental, a partir do que leu e interpretou de um problema e passar à uma representação figural.

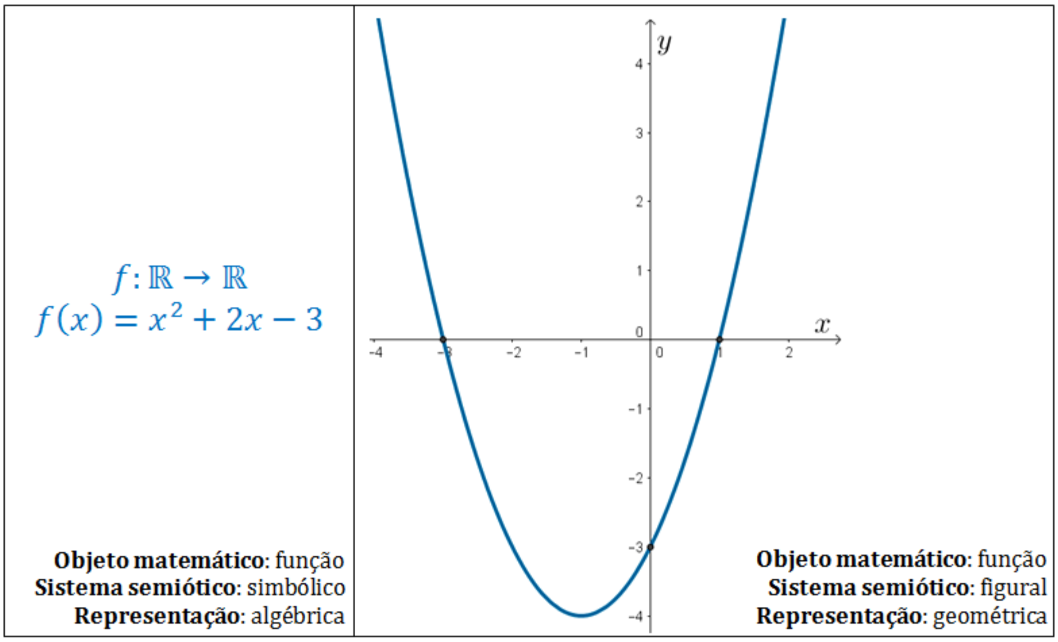


Figura 3.1: *Representação algébrica e representação geométrica de uma função.*

No estudo em questão, tomamos como referência as representações semióticas (notação, escrita, símbolo, traço, esboço, desenho, construção, gráfico, imagem etc.) de objetos matemáticos (ponto, reta, retângulo, número, função etc.). A Figura 3.1 ilustra duas formas de representar um mesmo objeto matemático, observe que em cada forma é possível perceber diferentes propriedades (representações distintas, diferentes sentidos) do objeto matemático: **função**.

Existem vários procedimentos para, partindo da representação algébrica da função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 + 2x - 3$ chegar-se à representação geométrica indicada nesta mesma figura, ou proceder pelo caminho inverso. As características e propriedades necessárias para isto fazem parte do conhecimento a ser aprendido, que também é carregado de diferentes representações; o mais importante está justamente no modo como se lida na transformação (tratamento ou conversão) de uma representação, e ainda, que cada estudo envolva em no mínimo duas diferentes representações. Duval, ao descrever sobre "as condições de uma aprendizagem que leva em conta a semiose", afirma que:

> Se a conceitualização implica coordenação de registros de representação, o principal caminho das aprendizagens de base matemática não pode ser somente a automatização de certos tratamentos ou a compreensão de noções, mas deve ser a coordenação de diferentes registros de representação, necessariamente mobilizados por estes tratamentos ou por esta compreensão. [11, Duval, p.284]

O **tratamento** de uma representação é entendido por sua manipulação, sem alterar a forma de representação, de modo a obter informações para alguma finalidade, por exemplo, tomando a função na Figura 3.1, fazemos $f(x) = 0$, escolhemos e aplicamos algum procedimento e encontramos suas raízes $x_1 = -3$ e $x_2 = 1$, mantendo a representação algébrica. A **conversão** consiste em passar de uma para outra forma de representação; observe as duas representações indicadas na Figura 3.1, em que por algumas transformações, partimos de uma representação algébrica e chegamos em uma representação geométrica, conservando o objeto matemático (função).

Os procedimentos tomados na conversão de uma para outra forma de representação, é um momento que merece maior atenção, por conta de sua contribuição para a aprendizagem. Quais são as observações feitas para decidir por um ou outro procedimento? Qual foi o procedimento adotado? Este procedimento é compreendido por quem o utiliza? As informações colhidas são suficientes para garantir características mínimas do objeto matemático? Atentar-se para este momento de associar características de determinado objeto para diferentes representações e destas características manterem relações suficientes para se converter de uma para outra representação por meio de transformações.

Exemplo similar ao tomado para o objeto matemático função, consta no Complemento 5.4, quando é apresentado parte do conteúdo de equações do 1º grau em um livro didático, por meio de alguns modos de representação. O conteúdo é apresentado gradativamente, propondo uma sequência transitória entre as formas de representação.

Analisar os registros de representações escolhidos pelos estudantes, permite ao professor perceber o nível de compreensão em que estes se encontram, e mais, criar outras práticas de ensino que possibilitem tomar diferentes procedimentos para não só a solução correta, mas a aprendizagem de fato. Estas e outras observações estão presentes no artigo de Ziemer *et al.* [38], em que a partir das soluções retornadas de um problema aplicado para estudantes do 1º ano do Ensino Médio, explicitam diferentes registros de representações.

> Um taxi começa uma corrida com o taxímetro marcando R\$ $4,00$. Cada quilômetro rodado custa R\$ $1,50$. Se ao final de uma corrida, o passageiro pagou R\$ $37,00$, a quantidade de quilômetros percorridos foi? a) 22 b) 11 c) 33 d) 26 e) 32 [38, Ziemer *et al.*, p.5]

Os autores observaram diferentes representações na solução deste problema, pelos estudantes. Os procedimentos utilizados incluem representações do tipo **algébrico** pela resolução da equação: $37 = 4 + 1,5 \cdot x$; **registro numérico** por meio de operações inversas: $(37 - 4) \div 1,5 = 22$; **procedimento exaustivo** expressando o valor a cada quilômetro rodado: $4; 5,5; 7; \cdots; 35,5; 37$ e depois, contando quantas vezes foi utilizado o valor $1,5$; e próximo ao procedimento anterior, mas **organizando as informações em tabela ou lista**.

O modo de representar a matemática como se conhece atualmente é relativamente novo, quando comparado ao longo período de desenvolvimento desta ciência; antes praticamente não havia uma forma específica de representação, elas foram surgindo por situações mencionadas anteriormente. As primeiras formas estruturadas de representação em matemática eram baseadas em palavras.

Uma configuração do século XX sobre a geometria é de que ela é

> um *ponto de vista* - uma maneira particular de observar o assunto. Além de a linguagem da geometria frequentemente ser muito mais simples e elegante do que a linguagem da álgebra e da análise, às vezes é possível levar a cabo linhas de raciocínio rigorosas em termos geométricos sem traduzi-las para a álgebra e a análise. Disso resulta uma economia considerável, tanto de reflexões como de comunicações de reflexões. Além disso, (...) as imagens geométricas sugeridas frequentemente levam a resultados e estudos adicionais, dotando-nos de um instrumento poderoso de raciocínio indutivo ou criativa. [12, Howard Eves, p.28]

E mais,

> Grande parte da análise moderna tornou-se singularmente compacta e unificada através do emprego da linguagem e das imagens geométricas. Parece não haver dúvida de que isto se infiltrará nos cursos elementares de análise, e os atuais textos de cálculo, supervolumosos, deverão se tornar mais exíguos e também mais compreensíveis para os alunos, graças ao uso do ponto de vista geométrico. [12, Howard Eves, p.29]

Ora, percebe-se novamente a importância em valorizar o ensino e a aprendizagem de geometria em Matemática, com destaque para o “emprego da linguagem e das imagens geométricas” quanto a ampliação de possibilidades de conhecimento e na aproximação destes conhecimentos do entendimento dos estudantes.

> Para Platão, os objetos sensíveis são suscetíveis a mutações enquanto seus modelos abstratos são imutáveis, eternos e universais. Na matemática, interesse está nas figuras abstratas e não em suas representações reais. [23, Mol, p.38]
> Para Aristóteles, as formas geométricas não existem como entidades independentes do mundo real. Os objetos matemáticos existem como abstração dos objetos reais, mas sua existência depende da existência do próprio objeto. [23, Mol, p.41]

Não é o ponto de vista de Platão que quer-se enfatizar, tratar-se-á tanto de modelos abstratos quanto de representações reais. Ora, muito da matemática foi construído por meio de moldes, de modelagens daquilo que é real, tornando-se regra, padrão e então podendo ser adequado a incontáveis situações reais, ou é, permite-se a aplicação na percepção da teoria e da prática. Quer-se, discutir o uso de diferentes formas de representações semióticas no ensino e aprendizagem de matemática.

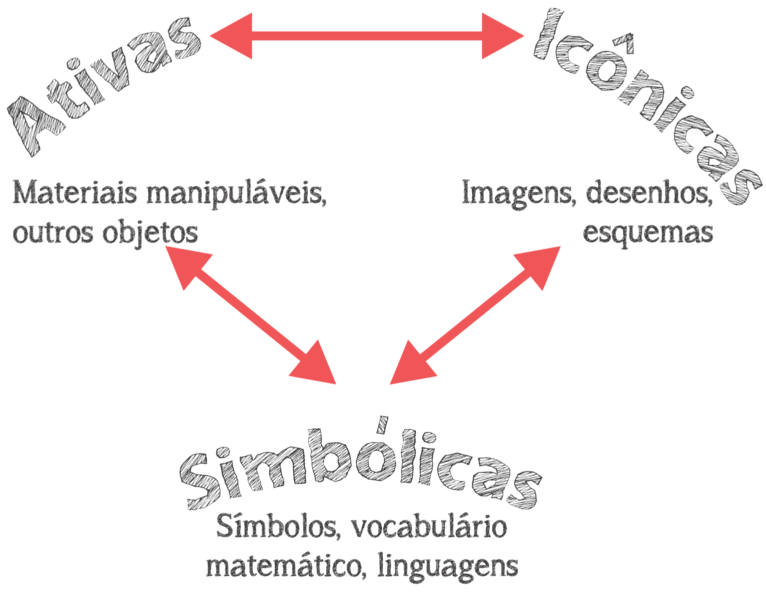


Figura 3.2: *Modos de representação, [3, Boavida, p.72].*

Os recursos visuais e palpáveis permitem ampliar a comunicação entre os sujeitos a respeito daquilo que eles referenciam. As condições destes recursos e o modo como eles são trabalhados devem ser considerados do planejamento aos resultados obtidos após o desenvolvimento das aulas. Com o acelerar de avanços tecnológicos, surgiram inúmeras possibilidades de recursos visuais; para estes estudos, serão referenciadas algumas formas de representações e como elas podem ser exploradas no ensino e aprendizagem em geometria.

Boavida *et al.* [3, p.71-75], baseando-se em Jerome Bruner, descreve e exemplifica três modos de representação, conforme o esquema da Figura 3.2 [*tradução nossa*]. As representações ativas, referem-se àquelas em que há a manipulação de objetos e a simulação de situações criando modelos ilustrativos. As representações icônicas são visuais e ilustram conceitos, procedimentos ou relações entre eles. Simbólicas são as representações referentes à experiência em termos da linguagem simbólica.

São inúmeras as formas de representações em matemática, priorizou-se abranger algumas delas, quando se trata principalmente de práticas de ensino e de aprendizagem em geometria. E quanto as práticas, enfatizaremos situações da presença destas representações em livros didáticos, nos meus planejamentos de aula, em reproduções e criações de estudantes do Ensino Fundamental dos quais já fui professor. Para tanto, consideramos representações que vão da simbologia própria da linguagem matemática, da construção de conjuntos numéricos, da linguagem algébrica, das relações entre diferentes representações, da transformação de representações, da conversão, do explorar dos sentidos e da imaginação.

3.1 Língua e linguagem

O ensino e a aprendizagem em matemática dependem de uma série de atribuições ao sujeito, para que se efetivem satisfatoriamente. A compreensão e o uso correto da língua e da linguagem são duas destas atribuições; e elas estão presentes nas formas de representação. Passos e Nacarato [29, p.1155] alertam para a "importância de um trabalho sistemático e intencional com o vocabulário, com as palavras relativas à geometria", para elas "a linguagem e, em especial, a palavra é central ao processo de elaboração conceitual". No contexto da Linguística de Ferdinand de Saussure, Milani caracteriza língua e linguagem:

> A língua é o produto social e forma concretizada da capacidade de linguagem, que caracteriza os seres humanos. Ela é formada no interior do indivíduo e estabelecida na coletividade e é aceita por todos os participantes. (...)
> A linguagem é uma habilidade inata aos seres humanos. (...) uma capacidade da inteligência, conglomerar tudo o que podem ser a língua e a fala. (...) não pode ser ensinada a um ser, deve estar dada como parte de sua estrutura mental. [22, Milani, p.33]

Seria então o nível de proximidade da língua e da linguagem que o sujeito possui, um fator determinante para o desenvolvimento do seu aprendizado; e mais, é uma condição presente na justificativa de cada sujeito utilizar de diferentes formas de representação. Kenski [17, p.22] diz que "É por meio da linguagem que o homem representa simbolicamente suas crenças, seus valores e toda a realidade que o cerca" e em Milani [22, p.36], "a língua não é nada mais do que um sistema de signos, semelhante aos sinais de trânsito, aos códigos particulares etc. (...) é o sistema principal que antecede e permite todos os outros".

> A linguagem matemática pode ser definida como um sistema simbólico, com símbolos próprios que se relacionam segundo determinadas regras. Esse conjunto de símbolos e regras deve ser entendido pela comunidade que o utiliza. A apropriação desse conhecimento é indissociável do processo de construção do conhecimento matemático. [20, Lorensatti, p.90]

Tomando a **Língua Portuguesa** e a **linguagem matemática**, como está definida em Lorensatti, percebe-se que é necessário que elas se relacionem para processar representações que culminem na aprendizagem. Por exemplo, ao realizar a leitura de algum conteúdo matemático, o(a) estudante, necessita ao mesmo tempo da Língua Portuguesa e da linguagem matemática. Lorensatti, indica que do leitor é exigida uma leitura interpretativa, que

> Para interpretar, o aluno precisa de um referencial linguístico e, para decifrar os códigos matemáticos, de um referencial de linguagem matemática. [20, Lorensatti, p.92]

Passos e Nacarato, sinalizam que:

> na prática pedagógica, a compreensão das palavras presentes nas definições geométricas precisa ser cuidadosamente trabalhada. Seus significados precisam ser ampliados à medida que a escolarização avança. A identificação de uma figura, por si só, não garante que já ocorreu a elaboração conceitual, é preciso que as definições acompanhem suas representações. [29, Passos, p.1156]

Ora, ao(à) estudante de geometria cabem - entre outros, a leitura e a escrita, e para realizar estas atividades ele precisa compreender as diferentes representações típicas do conteúdo matemático. Conhecer conceitos, lidar com símbolos e seus significados, escolher e expressar representações que melhor se adequam a cada situação, partir de uma forma de representação para outra, são características que perpassam pela língua e pela linguagem.

3.2 Formas de representações

Uma representação semiótica, tem sido considerada neste trabalho como o resultado de um conjunto de signos providos de determinado sistema, que inseridos em uma superfície (comumente o papel ou a interface de uma máquina computável), carregam qualidades daquilo (no caso, objeto matemático) que eles referenciam.

As formas de representação expressas neste item são designadas abstratas no sentido de serem criações de símbolos visíveis, que são carregados de significados, possibilitando ao sujeito ampliar interpretações, retornar e criar informações a respeito daquilo que os símbolos referenciam, e com isso, desenvolver novos símbolos e raciocínio capazes de apresentar uma proposta de solução ou solução para o problema em questão.

A **escrita** é, segundo Milani [22, p.40], "um sistema distinto (de outros) de signos que tem por objetivo representar a língua". O ato de escrever tem sido reduzido nas escolas; os recursos tecnológicos e a busca por aproveitar o tempo de uma aula com outras atividades são duas justificativas para isso. E mais, aquilo que se escreve, por vezes é mera cópia, o professor não dá ênfase aos significados. Escrever faz com que aquilo que se escreve seja apreendido mais facilmente que ouvir ou falar.

No estudo de geometria, não são raras as demonstrações, as argumentações, a descrição de procedimentos, o desenvolvimento de solução para um problema; a escrita, impressão da língua e da linguagem, precisa ser específica para cada situação (o conteúdo desenvolvido e as diferentes formas de representações). Seria, entre outros, o pouco uso da escrita em favorecimento de procedimentos práticos e repetitivos de resolução ou de valorizar mais o cálculo, fatores que contribuem para menos ensinar geometria nas escolas públicas.

Ler e compreender aquilo que se escreve em matemática demanda treino, atenção, relacionar o real, a representação e o abstrato. Um texto matemático precisa ser interpretado tendo-se conhecimento da linguagem matemática, ou os símbolos não terão seus significados reconhecidos e então não fará sentido ao(à) estudante, sendo um entrave para a aprendizagem.

Representações como tabelas e gráficos, são carregadas de dados e de informações e estão presentes em diversos conteúdos matemáticos; seja na álgebra, na aritmética, na matemática discreta ou na geometria, a interpretação depende da leitura destas representações, e mais, de organizar dados e informações em representações capazes de contemplar o que se está estudando.

O **desenho geométrico** faz parte da geometria plana e trata de todas as figuras geométricas planas que podem ser construídas basicamente com o compasso e a régua, além de papel e lapiseira. Ao criar um desenho geométrico procura-se reproduzir as formas geométricas planas de modo a atender critérios de forma e medidas estabelecidos, por exemplo, num problema.

Ao se obter um desenho geométrico, as características de forma e medidas devem estar com o máximo de precisão possível, o que exige entendimento de conceitos associados à geometria, mesmo que desenho geométrico nunca será ideal a ponto de representar exatamente o que se descreve em uma situação, já que lidamos com instrumentos e escalas. Infelizmente, muitos estudantes terminam o Ensino Fundamental apresentando dificuldade em utilizar instrumentos como a régua, o compasso, o transferidor e o esquadro; por vezes nem conhecem alguns destes instrumentos.

Quanto as **construções geométricas** referimo-nos ao conjunto de procedimentos tomados e os instrumentos utilizados para se obter o desenho geométrico. A "Cápsula 1" do livro de Howard Eves [12] indica que comumente os instrumentos utilizados são apenas a régua e o compasso, podendo haver limitações quanto ao modo de como eles devem ser utilizados. As construções geométricas são representações gerais de algum objeto geométrico (ponto, segmento, ângulo, círculo), não se deve confundir uma construção com o objeto que ela representa.

Existem vários exemplos em que o Complemento de um desenho geométrico pelo sujeito permite relacionar definições e propriedades pertinentes ao desenho que vão colaborar para o desenvolvimento de uma demonstração ou a solução de determinado problema proposto.

O documento da SBM [35, p.3] indica que, no Ensino Fundamental II, cabe valorizar as construções com régua e compasso, dando maior ênfase à geometria espacial. Transformar em traços as propriedades, definições, conceitos não é tarefa fácil ao(à) estudante, tal atividade exige uma série de habilidades; mas é preciso que se estude o desenho geométrico, pois ele amplia as possibilidades de representações e portanto, o entendimento a respeito do que é estudado.

O **esboço** é uma representação geométrica sem o rigor de medidas e propriedades próprias ao que se quer representar; não há uma preocupação com a precisão, mas nas ideias sobre a forma e as relações matemáticas. Costuma ser empregado não somente à geometria, mas nas várias áreas da matemática e em outras ciências.

3.3 Ensino e aprendizagem com objetos educacionais

Os objetos educacionais incluem: imagem, vídeo, animação, manipulador, experimento prático, simulador, *software*, maquete, instrumento e outros. O uso de muitos destes objetos permite sair do registro no papel ou do imaginário e observar, manipular, manusear, construir.

Vários destes objetos permitem ao sujeito maior interação com que é proposto; não se trata apenas de um conjunto de símbolos, mas de ampliar o sentido da visão e explorar o sentido do tato, de vivenciar, aplicar e comprovar conceitos com os objetos.

Figura 3.3: *Estudantes do 7º ano (2013), em uma aula sobre poliedros.*

A Figura 3.3 ilustra uma aula sobre poliedros que planejei e desenvolvi com estudantes do 7º ano do Ensino Fundamental; nesta aula e nas que seguiram, exploramos associações entre os objetos criados, os conceitos sobre o objeto matemático 'poliedro convexo' e representações. Por exemplo, observar e contar o número de arestas, faces e vértices no objeto e posteriormente constatar a Relação de Euler ($V + F = A + 2$) ou observar e reproduzir em papel o poliedro construído além de sua planificação, verificando algumas perspectivas sobre a composição do poliedro (polígonos, face, aresta, vértice, áreas, perímetros) e ainda, perceber a diferença entre uma figura plana e sua composição em um objeto no espaço.

A visão é um fator muito importante para a aprendizagem, é por ela que muitas imagens são formadas e associadas aos conceitos e propriedades adquiridos pelo sujeito;

mas quando este não possui tal sentido, outros sentidos precisam ser melhor explorados para que se permita mais condições de aprendizagem. O uso de objetos educacionais palpáveis, é uma estratégia que possibilita em especial ao cego ou aquele que possui baixa visão a aproximação entre o real, os conceitos, as formas, a formação da imagem mental.

Os objetos em 3D que são manipuláveis estão ainda mais próximos do mundo real, quando não são parte dele, e isso certamente promove a qualquer sujeito melhor aprendizagem, pois várias propriedades e conceitos estarão em maior evidência que com a representação apenas em 2D. No Complemento 5.2 constam algumas Figuras (5.2 e 5.3) de construções criadas em um *software* matemático e sugestões de atividades que podem estar associadas às aulas de construções de poliedros citadas acima e registradas na Figura 3.3.

Com objetos educacionais, além de outras práticas e ganhos para o ensino e a aprendizagem, é possível ampliar as possibilidades de se ter representações. Os *softwares* educacionais, são um claro exemplo de recursos que disponibilizam ferramentas que permitem criar e manipular representações.

3.4 *GeoGebra*: exemplo de recurso computacional

A tecnologia tem se alterado com maior velocidade e a cada vez em menor tempo; surgem novas formas de representação. O recurso tecnológico no ensino e na aprendizagem não pode ser apenas como um facilitador das mesmas atividades, rotinas já feitas sem o recurso. É preciso se apropriar deste conjunto de novas formas de representação. Há que explorar, criar novas ferramentas, compreender matematicamente os símbolos, os objetos, os passos de uma construção.

> A necessidade, portanto, não é a de usar o meio para continuar fazendo o mesmo. É preciso mudar as práticas e os hábitos docentes e aprender a trabalhar pedagogicamente de forma dinâmica e desafiadora, (...). Em princípio, devemos compreender e nos apropriar das especificidades das inovações tecnológicas, adequando-as como inovações pedagógicas. [17, Kenski, p.97]

Não há mais volta, a cada dia surgem novas ferramentas tecnológicas construídas especificamente para o ensino de matemática. Estas criações estão espalhadas por inúmeros ambientes virtuais e grande parte disponível gratuitamente para uso. Os recursos computacionais pensados para o ensino e aprendizagem em matemática, têm características e finalidades específicas para cada contexto; existem *softwares*, simuladores, aplicativos, planilhas eletrônicas, animações, vídeos, imagens, hipertextos e tantos outros objetos de aprendizagem, todos focando alguma área da matemática e com potencialidade para serem estudados, ampliados, adaptados para o uso no ensino.

Muitos recursos computacionais têm sido pensados e estruturados de modo a atender especificidades de ensino e aprendizagem em matemática; alguns deles apresentam uma enormidade de ferramentas capazes de representar conceitos e objetos próprios de cada área da matemática, assim como é impresso no papel (bidimensional). É possível ir mais além e modelar objetos reais em 3D (modelagem computacional), chegando a uma precisão incrível.

Trataremos em específico do *software GeoGebra*, que se destaca por disponibilizar inúmeras ferramentas (elementos e objetos geométricos) em uma interface amigável, relacionando a Álgebra e a Geometria de forma dinâmica. O *GeoGebra* permite que sejam feitas construções geométricas, respeitando conceitos próprios da geometria e ainda manipular estes objetos de modo a verificar características e propriedades dos elementos que compõem a construção.

Com este *software* é possível criar um *Applet*, que nada mais é um pequeno *software* que funciona dentro de um *software* maior; no caso do *GeoGebra*, as construções que permitem ao usuário manipular algum elemento e verificar as alterações geométricas ou algébricas relacionadas a estas construções são os *Applets* e o *GeoGebra* seria o *software* maior. Três destes *Applets* estão representados pelas Figuras 4.13, 4.16 e 4.18. A maioria das representações utilizadas neste trabalho foram originadas com o *GeoGebra*.

No item 4.8 de Exemplos e problemas, em que tratamos da interpretação geométrica de uma raiz quadrada, estão indicados os procedimentos tomados no *GeoGebra* para se construir um desenho geométrico; trata-se de um *Applet* que expressa a raiz quadrada de um número positivo qualquer. Na Figura 4.18, deste mesmo item, constam as janelas de Álgebra e de Visualização, em que é possível perceber os objetos utilizados na construção e o desenho geométrico. Há neste *software* a possibilidade de aliar Álgebra e Geometria trabalhando com ferramentas que expressam exatamente os objetos (em visualização 2D e 3D) com os quais lidamos ao ensinar e aprender Matemática.

Os desenvolvedores deste *software*, construíram um ambiente (https://geogebra.org) para *download* gratuito e instalação em várias plataformas. Este ambiente tem a propriedade de gerenciar *logins* e de permitir que qualquer usuário possa guardar e compartilhar seus arquivos. Tenho algumas contribuições no ambiente GeoGebra.org e em outro espaço de registro *online* (blog: www.ticsnamatematica.com) no qual constam sugestões de práticas de ensino e aprendizagem, construções e *Applets*, referenciando este *software*.

É importante lembrar que um recurso computacional não deve substituir a prática; Dell'Isola [10] lembra que o hábito de utilizar a tecnologia como muleta ao contrário de uma ferramenta para o desenvolvimento humano, colabora para que tornemo-nos menos capazes de pensar. Ao utilizar o recurso para criar uma representação geométrica, é preciso que seja capaz de reproduzir em mente a mesma representação e compreender os conceitos associados a ela. O *GeoGebra* é bastante intuitivo, ao dispor de uma interface em que as representações de suas ferramentas remetem aos símbolos, elementos e objetos da geometria; implica que sem o conhecimento matemático sobre eles pouco se constrói.

3.5 Conexões entre as áreas da disciplina Matemática

Historicamente, percebe-se que a matemática foi sendo estruturada através da relação de inúmeros conhecimentos de diversas áreas; aos poucos, foi se desdobrando em vários segmentos, originando novas áreas de estudo e dentro de determinada área vieram subáreas. Muitas destas áreas têm estudos independentes e ao mesmo tempo estão relacionadas umas as outras. O ensino e a aprendizagem precisam ser desenvolvidos de modo a valorizar relações entre as diversas áreas da matemática.

Lorenzato, afirma que

> a geometria é a mais eficiente conexão didático-pedagógica da Matemática. Interliga-se com a aritmética e com a álgebra, porque os objetos e relações dela correspondem aos das outras; assim sendo, conceitos, propriedades e questões aritméticas ou algébricas podem ser classificados pela geometria, que realiza uma verdadeira tradução para o aprendiz. [21, Lorenzato, p.07]

Muitos livros didáticos apresentam capítulos ou unidades específicos a cada conteúdo. O que mais se faz é dividir os conteúdos específicos da álgebra, aritmética ou geometria (por exemplo) em várias unidades e a cada bimestre (etapa) é ensinado parte de cada uma destas áreas. Mesmo assim, os conteúdos não estão mesclados, não há uma relação direta entre eles, é mais uma fragmentação de conteúdos, justificada pela necessidade do(a) estudante aprender um pouco dos conteúdos de várias áreas durante um período letivo.

Ocorre que não há uma continuidade destes estudos por conta das práticas de ensino e aprendizagem tomadas pelos professores; por vezes, a cada novo período letivo, volta-se ao ponto inicial, repetindo os mesmos conteúdos sem que relacione as várias áreas de estudo em matemática. Abre-se uma lacuna de conhecimentos não estudados e grupos de conteúdos que pouco se entremeiam.

Tomando o livro didático do 9º ano (Ensino Fundamental) da coleção "Matemática: teoria e contexto" de Centurión e Jacubovic (Figura 3.4) como exemplo, os capítulos 1 (Geometria: ampliação e reduções), 5 (Geometria e medidas: comprimentos) e 6

(Geometria e medidas: áreas e volumes) são específicos à geometria, tendo ainda no capítulo 3 (Reunindo geometria e álgebra) duas unidades tratando sobre 'representação geométrica de uma equação' e 'resolução gráfica de sistemas de equações'.

Figura 3.4: *Capa do livro Matemática: teoria e contexto.*

Neste mesmo livro, percebe-se que não só nos capítulos citados, mas aos demais, há a preocupação por representar objetos matemáticos e de relacionar características destes objetos em suas representações. O livro didático (versão do professor) apresenta ainda uma série de recomendações a respeito da prática e destaca sobre [6, p.12, *manual do professor*] "o valor da visualização e da representação espaciais que colaboram para o desenvolvimento do pensamento geométrico".

Algo interessante no livro didático do 9º ano, do projeto Velear: Matemática de Antonio J. L. Bigode, é a presença da unidade 2 nomeada "Geometria e argumentação" (Figura 3.5) em que se destacam demonstrações, construções, cuidados ao usar representações, a prova visual do Teorema de Pitágoras (tratada detalhadamente no subitem 4.1 deste trabalho) e enfoque histórico e matemático do livro *Os Elementos*

(Figura 5.5). Apesar deste enfoque especial na unidade 2, o livro possui características que evidenciam relações entre as áreas da matemática, presentes nas apresentações dos conteúdos e nos problemas propostos.

UNIDADE 2
GEOMETRIA E ARGUMENTAÇÃO

Figura 3.5: *Capa e sumário de uma das unidades do livro do Projeto Velear.*

Alguns momentos em que se percebe que no Ensino Fundamental e no Ensino Médio há a aproximação entre áreas da matemática é no uso de problemas como estratégias de ensino e aprendizagem; algo crescente nos livros didáticos e nos instrumentos de avaliação do ensino no Brasil, mas pouco explorado pelos professores. Comumente, nas aulas, o que se vê é um roteiro a cumprir: conceitos, exemplos específicos e listas de exercícios (fechadas, específicas, maçantes); basicamente através de algum livro didático. Não são criadas situações que permitam ao(à) estudante, por exemplo associar áreas da matemática, perceber a origem de determinado conceito, propor aplicações em outros campos da Matemática, de outras disciplinas ou em situações reais.

> estimular, em sala de aula, a utilização de diferentes registros de representação, e principalmente, a mobilização de um tipo de representação para outro, auxiliará na compreensão dos conceitos matemáticos, por parte dos estudantes. (...) a aprendizagem de um objeto matemático não está apenas associada aos conteúdos presentes nos conceitos estudados, mas especificamente, ao estabelecimento de relações com as diversas formas de representação. [36, Silva, p.21-22]

Quer-se enfatizar não somente o uso de representações, mas também como relacionar suas diferentes formas; o(à) estudante que consegue partir de uma e chegar a outras representações, demonstra ter compreendido determinados conceitos ali empregados e mais, apresenta novas características a respeito do objeto de estudo. Para a maioria das áreas da Matemática, é visível o uso de diferentes formas de representação em sua estrutura. A geometria é organizada e estudada sob diversas divisões, e mesmo assim, é necessário o emprego de mais de uma forma de representação.

Ensinar matemática demanda relacionar diversas áreas (geometria, aritmética, álgebra) de modo a não se prender somente em procedimentos repetitivos, mas procurando despertar e ampliar algumas habilidades nos estudantes. Uma atividade importante que permite tal relação é o criar e resolver problemas. De início, nas séries finais do Ensino Fundamental I, propõe-se que sejam criados problemas livres, quando necessário o professor orienta e organiza o problema com seu aluno e então distribui a lista de problemas para que toda turma possa resolvê-los. No Ensino Fundamental II, já com posse de mais conceitos e propriedades, começam a haver direcionamentos de elementos mínimos aos problemas que serão criados e a atividade deve ser repetida e ganhar novos elementos progressivamente.

Rogenski e Pedroso, destacam que a dificuldade e o não entendimento dos estudantes do Ensino Médio em geometria espacial e com relação a cálculos de áreas e volumes deve-se

> à defasagem existente no Ensino Fundamental, em que a geometria nem sempre é apresentada ao aluno inter-relacionada com os demais conteúdos estruturantes, como a álgebra e números, torna-se mera ilustração e exemplificação, sem entendimento de conceitos e propriedades. [32, Rogenski e Pedroso, p.02]

> a geometria promove o entendimento de diferentes conteúdos matemáticos, é por isso que precisa ser trabalhada em conjunto com cada conteúdo, pois dessa forma os alunos entenderão melhor até mesmo o cálculo algébrico, que, muitas vezes, parece ser abstrato. [32, Rogenski e Pedroso, p.06]

Portanto, é importante e necessário, associar as diversas áreas da Matemática. Álgebra, aritmética, geometria, e outras áreas precisam ser estudadas e aprendidas de modo que sejam relacionadas; mesmo que numa proposta de ensino específico de cada uma, dentro de determinada área cabe enfatizar como ela está relacionada com outras. Os livros didáticos de matemática são cada vez melhor estruturados, exploram as representações geométricas e buscam relacionar diversos conteúdos de modo a evidenciar que não devem existir blocos isolados da Matemática, que cada um destes blocos possuem representações específicas, mas contribuem um com o outro.

Capítulo 4

Exemplos e problemas

Acreditando que resolver problemas matemáticos contribui para melhor aprendizagem de geometria e álgebra, e que esta deve ser uma prática valorizada pelos professores e estudantes, destacamos algumas observações que procuram auxiliar em tal atividade.

A representação pode ser um detalhe na solução de um problema, ou até mesmo a solução deste problema. Pode contribuir para a interpretação e o entendimento do que foi proposto para se resolver e também ser parte necessária à solução. Cabe observar algumas estratégias para a resolução de problemas, descritas detalhadamente por Tao [37, p.2-11] e que se encontram a seguir, de forma resumida:

- Perceber o tipo de problema (para proceder à resolução numa abordagem algébrica ou geométrica);
- Entender os dados (quais são os objetos e suas propriedades);
- Entender o objetivo do problema;
- Escolher uma boa notação (como representar, de forma eficiente, os dados e os objetivos);
- Escrever o que se sabe, usando a notação escolhida (fazer um diagrama);
- Modificar ligeiramente o problema, procurando tornar o problema original mais acessível;

- Modificar profundamente o problema (omitir dados, ampliar o problema, trocar dados com objetivo);
- Estabelecer resultados para o problema (manipular);
- Simplificar, explorar os dados, atingir metas parciais;

Oliveira e Fernández [27, p.15], ao indicarem "algumas dicas para resolver problemas", destacam entre outras regras a possibilidade de "mudar a representação do problema" e de se "usar a imaginação pesquisando caminhos alternativos".

Percebe-se a importância das diferentes formas de representações (algo enfatizado por Duval) na busca de apresentar uma solução correta para um problema. A interpretação do problema passa pelo i) entendimento do tipo, dos dados e do objetivo e pela ii) reorganização do que se sabe do problema a partir da escolha de uma notação; são processos que envolvem o entendimento e representação da linguagem matemática (sinais, símbolos e significados). O modo como se lida com tudo isso é o mais importante, pois é aí que se aprende e que se resolve corretamente um problema.

Foram referenciados alguns problemas e exemplos a fim de que se perceba o uso de diferentes formas de representações no corpo das soluções ou discussões propostas. Tais soluções/discussões apresentam: a construção geométrica como uma forma alternativa e ampliativa de ensino e de aprendizagem de algum conceito que comumente é estudado por outros procedimentos; a imagem como forma de simplificar algum discurso ou desenvolvimento teórico e a simbologia aplicada em várias áreas da matemática.

4.1 O teorema pitagórico

Um teorema muito conhecido e explorado no Ensino Básico e também no Ensino Superior é o Teorema de Pitágoras.

Historicamente, existem fatos que indicam o conhecimento de tal teorema muito antes de Pitágoras. São inúmeras as formas de se demonstrar este teorema. Reproduz-se a seguir, o teorema e sua demonstração dada por Euclides e presente em Howard

Eves [12, p. 53, 55-56]:

Teorema 4.1.1. *O quadrado sobre a hipotenusa de um triângulo retângulo é igual à soma dos quadrados sobre os catetos.*

Demonstração. Suponhamos que o $\angle BAC$ (ângulo) da Figura 4.1 seja o ângulo reto do $\triangle ABC$ (triângulo). Os quadrados $BCDE$, $ABFG$ e $ACHK$ são construídos sobre os respectivos lados do $\triangle ABC$. Seja AL o segmento traçado paralelo a BE (ou identicamente, CD). Mostra-se que os pontos C, A, G assim como os pontos B, A, K são colineares ($G\widehat{A}C = G\widehat{A}B + B\widehat{A}C = 180^{\circ}$ e $B\widehat{A}K = B\widehat{A}C + C\widehat{A}K = 180^{\circ}$).

Então se prova que o $\triangle ABE$ é congruente ao $\triangle FBC$ (caso $L.A.L.$ de congruência: $AB \equiv BF$; $A\widehat{B}E = C\widehat{B}E + C\widehat{B}A = 90^{\circ} + C\widehat{B}A$, $F\widehat{B}C = F\widehat{B}A + C\widehat{B}A = 90^{\circ} + C\widehat{B}A$ implica que $A\widehat{B}E \equiv F\widehat{B}C$; $BC \equiv BE$). O paralelogramo $BELM$ é o dobro (tem o dobro da medida da área) do $\triangle ABE$ e o quadrado $ABFG$ é o dobro (tem o dobro da medida da área) do $\triangle BCF$, portanto o paralelogramo $BELM$ é igual (mesma medida de área) ao quadrado $ABFG$.

Analogamente, prova-se que o paralelogramo $CDLM$ é igual (mesma medida de área) ao quadrado $ACHK$. Por conseguinte o quadrado $BCDE$, formado pelos dos paralelogramos $BELM$ e $CDLM$, é igual (mesma medida de área) aos dois quadrados $ABFG$ e $ACHK$. Conforme se queria demonstrar.

□

Historicamente, algumas representações foram tomadas como demonstração de propriedades ou teoremas, como no caso descrito mais abaixo e indicado nas Figuras 4.2 e 4.3. Ao planejar aulas e aplicá-las, o professor pode utilizar de tal recurso, pois a representação colabora para melhor entendimento de uma demonstração. Cabe apenas cuidar para que o(a) estudante não se apoie fielmente em todas as reproduções que são indicadas nos problemas, pois algumas delas são meros esboços e estes não têm a obrigação de fidelidade com propriedades, conceitos e outros relacionados aos objetos matemáticos, e isso pode induzir ao erro.

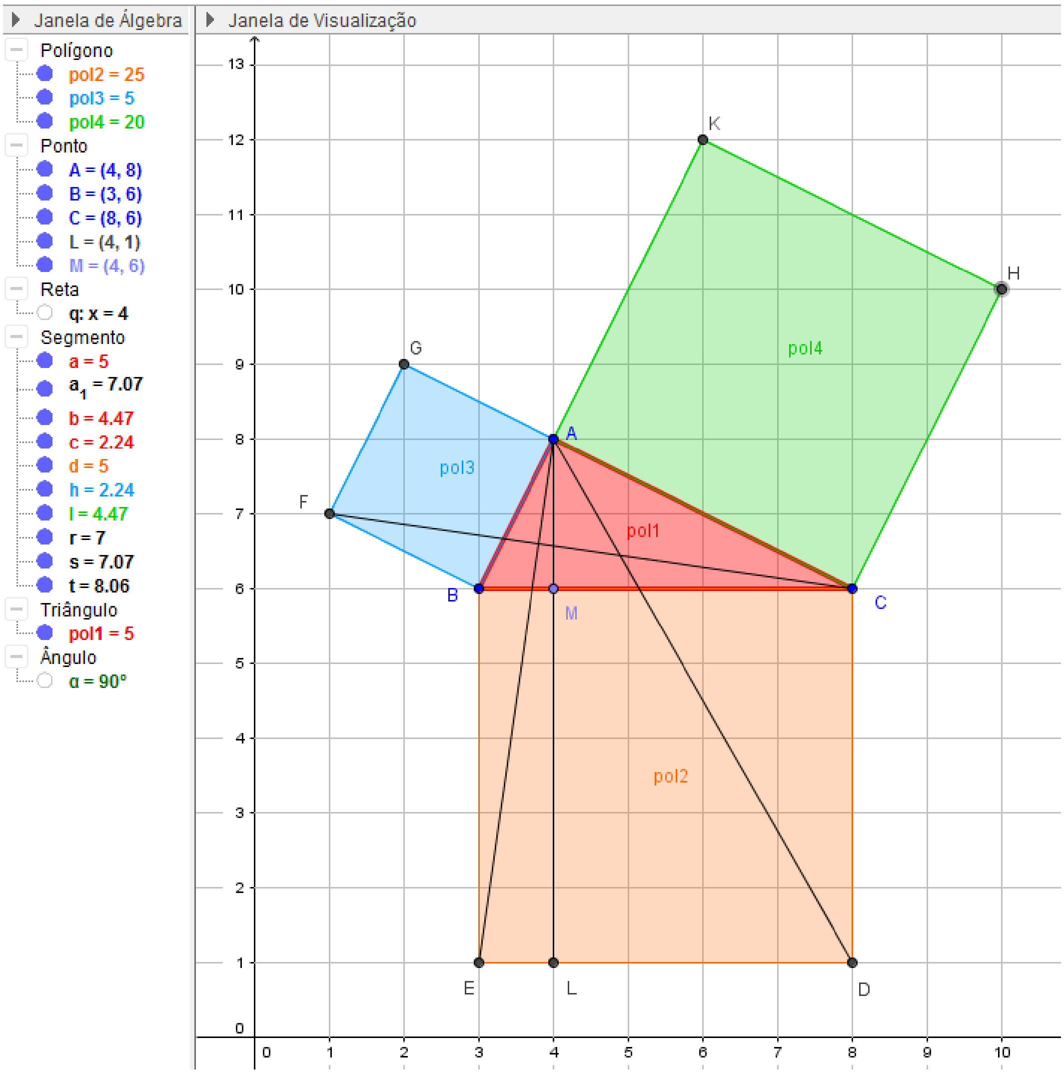


Figura 4.1: *Demonstração do teorema pitagórico, segundo Euclides (Cálculo de áreas).*

Esta mesma demonstração aparece mais detalhada, apontando as proposições utilizadas e discussão sobre como poderia ter sido desenvolvida, em Roque e Carvalho [33, p.88-96]. Algumas demonstrações não apresentam símbolos detalhando passo a passo, cada decisão tomada rumo ao objetivo do problema; neste caso, há uma demonstração sugerida em Howard Eves [12, p.56], atribuída a Bhaskara, em que é apresentado apenas um diagrama (Figura 4.2) e a expressão "Veja!".

No Ensino Fundamental II (8º ou 9º ano), quando é ensinado sobre o Teorema de Pitágoras, entre outras estratégias, uma boa sugestão de demonstração é a de Bhaskara

(Figura 4.3); usando papelão colorido ou mesmo a borracha EVA (*Etil Vinil Acetato*), é possível estruturar esboços conforme mostra a Figura 4.3. E mais, pode ser sugerido que eles procurem encontrar uma forma de reposicionar as peças do quadrado de lado a de modo a obter dois quadrados menores de lados b e c e então serem questionados quanto as áreas destes quadrados; seria uma forma de procurarem chegar à proposição do teorema sem que ele lhes tenha sido apresentado anteriormente. Para tal forma de demonstração, o(a) estudante utiliza de testes e da visualização para partir de uma representação estabelecida e chegar a outra.

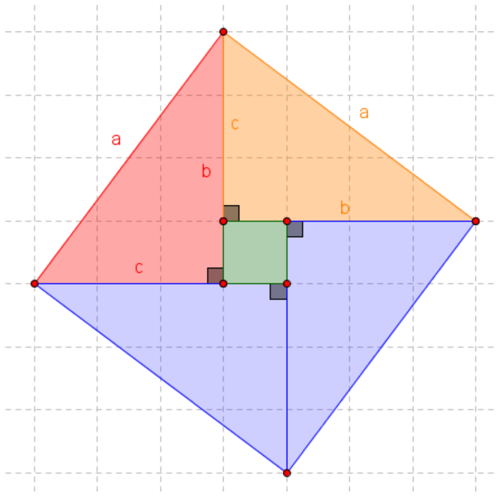


Figura 4.2: *Demonstração do teorema pitagórico, segundo Bhaskara.*

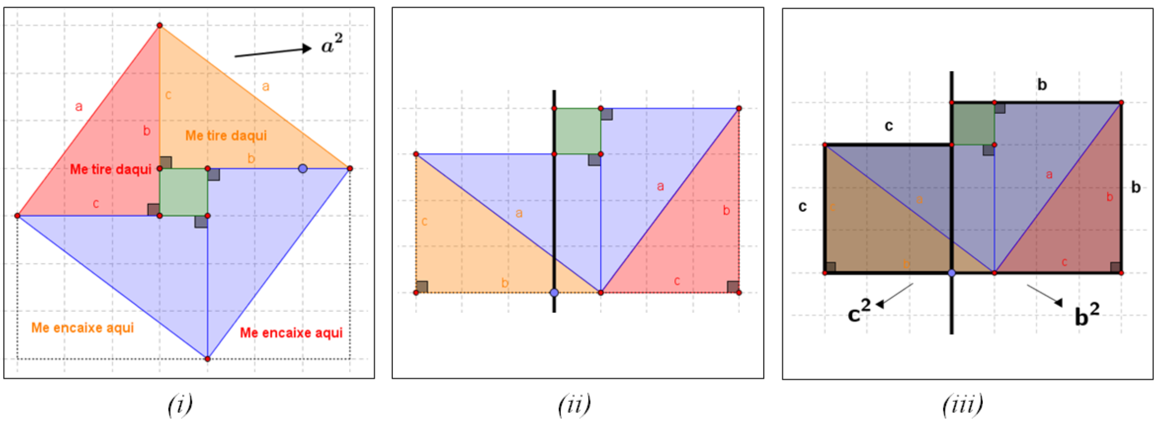


Figura 4.3: *Demonstração do teorema pitagórico, segundo Bhaskara - passos da decomposição.*

O livro Projeto Teláris: Matemática [7, Dante, p.180-183], apresenta quatro demonstrações do Teorema de Pitágoras, três delas diferentes das duas apresentadas neste trabalho. A primeira demonstração recorre à semelhança de triângulos observando algumas relações em triângulos retângulos. A segunda remete à demonstração dada por James Garfield, que compara a área de um trapézio com a área de três regiões triangulares obtidas da decomposição do mesmo trapézio. A terceira demonstração é similar à apresentada na Figura 4.2, mas utilizando álgebra e sem decomposição da figura original, como apresentado na Figura 4.3. E por fim, uma demonstração atribuída semelhantemente à de Pitágoras.

4.2 Representações de alguns conceitos algébricos

4.2.1 Algumas propriedades

As propriedades 4.2.1, 4.2.2, 4.2.3 e 4.2.4 estão demonstradas em [19, Lima, p. 31-33]. As figuras, são esboços que procuram representar as propriedades de modo geométrico, tomadas para elucidar algumas discussões.

Propriedade 4.2.1. ***Associatividade da adição:*** *Para quaisquer números naturais* m, n, p, *tem-se*

$$m + (n + p) = (m + n) + p.$$

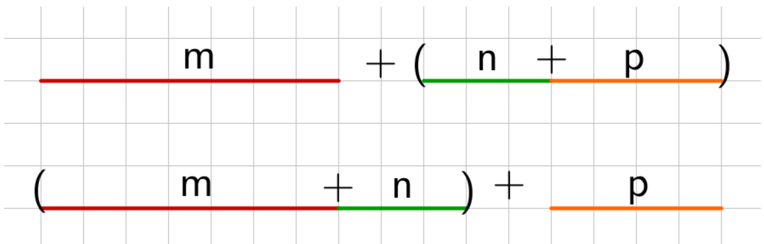


Figura 4.4: *Propriedade associativa da adição.*

Propriedade 4.2.2. ***Comutatividade da adição:*** *Para quaisquer* m, $n \in \mathbb{N}$ *tem-se*

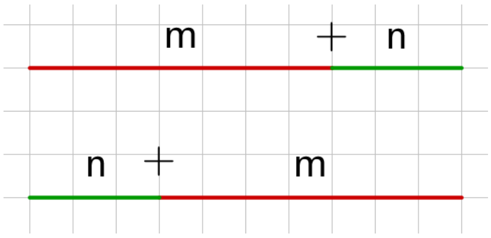


Figura 4.5: *Propriedade comutativa da adição.*

$$m + n = n + m.$$

Evidenciar geometricamente algumas propriedades algébricas como as descritas a seguir, implica em alguns cuidados, pois deixamos de lidar com símbolos que, nas propriedades, representam apenas quantidade (números) para uma representação de objeto no quadro ou papel, e a noção de espaço ocupado pode causar confusão, já que visualmente, por exemplo, a Figura 4.4 apresenta dois segmentos de mesmo comprimento, mas os objetos que compõem cada segmento estão em posições diferentes.

Neste caso, o uso de um objeto real (barbante, fitas de EVA, palitinhos) em cores e tamanhos diferentes, e a explicação de que devem ser verificados os resultados das operações (comprimento da união dos dois objetos de diferentes comprimentos - segmentos consecutivos), expressa praticamente o mesmo procedimento descrito no papel ou quadro; a diferença está no palpável, que poderá permitir melhor compreensão.

Aqui sugeriu-se, não só o uso de símbolos, desenhos ou esquemas para representar as propriedades, mas usar o objeto como representação de contagem (quantidades) ou conceito (conjuntos e operações). O objeto em si, não está diretamente relacionado com o problema, mas a sua representação é válida para se aplicar.

Propriedade 4.2.3. ***Distributividade:*** *Para quaisquer* m, n, $p \in \mathbb{N}$ *tem-se*

$$m \cdot (n + p) = m \cdot n + m \cdot p.$$

Propriedade 4.2.4. ***Comutatividade de Multiplicação:*** *Para quaisquer* m, $n \in \mathbb{N}$ *tem-se*

$$m \cdot n = n \cdot m.$$

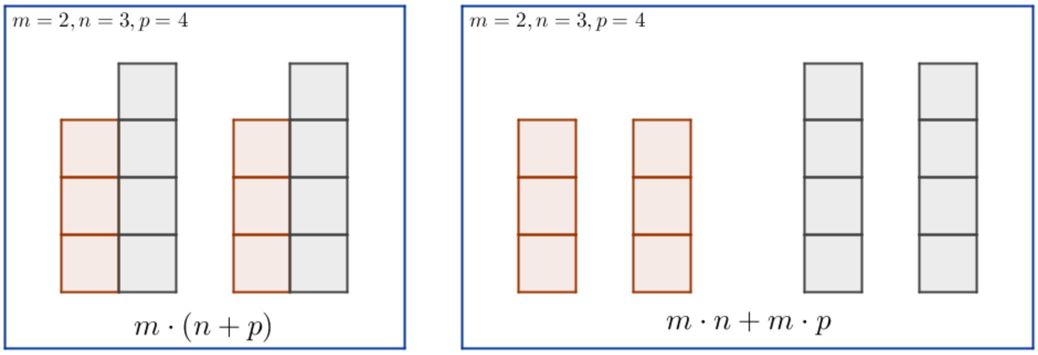


Figura 4.6: *Propriedade distributiva.*

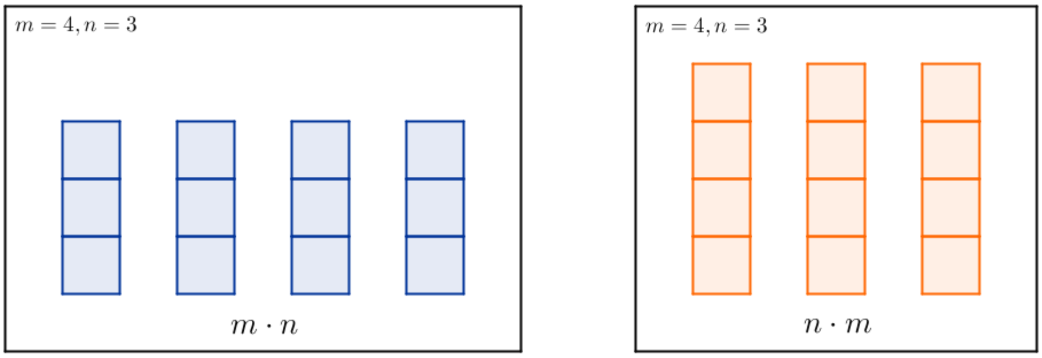


Figura 4.7: *Propriedade comutativa de multiplicação*

Nas Figuras 4.6 e 4.7, observe que são usadas representações de conjuntos, em que cada quadradinho representa uma unidade (princípio da contagem), cada coluna um número e que cada grupo de colunas uma soma (união). Estas representações são amplamente requisitadas nas séries inicias do Ensino Fundamental (1^o ao 4^o ano), com o uso de símbolos ou objetos (riscos, bolinhas, dedos das mãos, tampinhas, material dourado) basicamente para representar os números, contar as quantidades e indicar o resultado da operação envolvida; torna-se uma atividade mecânica, uma sequência a ser seguida, sem o entendimento do por que proceder daquele modo; tal fato colabora também para não evidenciar a transição de uma para outra representação.

Certa vez (fevereiro de 2014), houve um fato que é pertinente lembrar e que ocorreu com um estudante do 4^o ano do Ensino Fundamental -, percebi o procedimento que este tomou para resolver uma adição com duas parcelas na ordem das centenas simples; não recordo os números, mas sei que riscar vários “pauzinhos” - assim ele dizia, para indicar tais números, não era tarefa fácil. Ele representava cada uma das parcelas e depois contava novamente desde o início da primeira parcela, sem sequer assumir o valor que o primeiro grupo de "pauzinhos" representava; agrupando tudo num só conjunto chegava ao resultado que, quando não se perdia na contagem, sempre estava correto.

Um processo cansativo e desnecessário, que não pude identificar ao certo o porque deste estudante assim proceder. O que pareceu mais provável, foi a insegurança em utilizar de outras formas de representação e de procedimentos mais adequados à situação, ou mais agravante, o desconhecimento disto. Este se via preso em um procedimento muito utilizado quando os estudantes têm os primeiros contatos com a adição - juntar, agrupar, noções de conjunto. É um exemplo que permite perceber a importância das representações na matemática, quais são mais adequadas em cada momento, e que uma única não basta, pois ela não é capaz de lidar com um todo de determinado tema; que quanto mais representa-se de diferentes modos e por diferentes representações, mais claro e próximo estará o aprender para o(a) estudante.

São práticas comuns e necessárias para a aprendizagem, mas a noção destas propriedades pode ser aos poucos evidenciada e estas estratégias irem sendo substituídas para que não se prenda a uma única forma de ensino e aprendizagem, o(a) estudante possa ser estimulado a desenvolver suas próprias estratégias e o professor perceba que ele tenha, por exemplo, compreendido determinada propriedade.

Não é que seja necessária alguma demonstração destas propriedades nestas séries, nem é recomendado. O estudante ainda não possui base mínima para abstrações e compreensão de demonstrações. Mesmo em séries posteriores, não cabe ensinar procurando construir toda uma fundamentação teórica; é interessante que proponha atividades em que o(a) estudante procure compreender determinado problema, registrando e explicando estratégias pensadas para resolvê-lo e posteriormente, apresentar determinado conceito ou fórmula com devidas justificativas de sua validade. Aos poucos as demonstrações vão sendo construídas, sem a necessidade de um decoreba de linhas ditadas ou de todo rigor lógico, como ressalta Ávila [1, p.7-8].

4.2.2 Produtos notáveis: $(a+b)^2$ e $(a-b)^2$

Produtos notáveis são identidades algébricas mais frequentes ao se realizar cálculos com expressões algébricas. Uma identidade algébrica é uma equação em que os dois membros são expressões algébricas e que é verdadeira se, e somente se, a igualdade é verdadeira para quaisquer valores que se atribua às variáveis envolvidas [28, Parente].

Os procedimentos tomados a seguir para tratar de produtos notáveis, é evidenciado no livro de Bigode [2, p.48-51], e tratado através de alguns procedimentos e diferentes representações. Partindo do particular, escolhe o trinômio $x^2 + 6x + 8$, e através de transformações em representações algébricas e geométricas, torna-o um trinômio quadrado perfeito. Posteriormente, enfatiza alguns casos específicos generalizando-os por meio da representação geométrica e sugerindo o uso de materiais manipuláveis para acompanhar as representações.

A) Quadrado da soma de dois termos

$$(a+b)^2 = (a+b)(a+b) = a^2 + 2ab + b^2$$

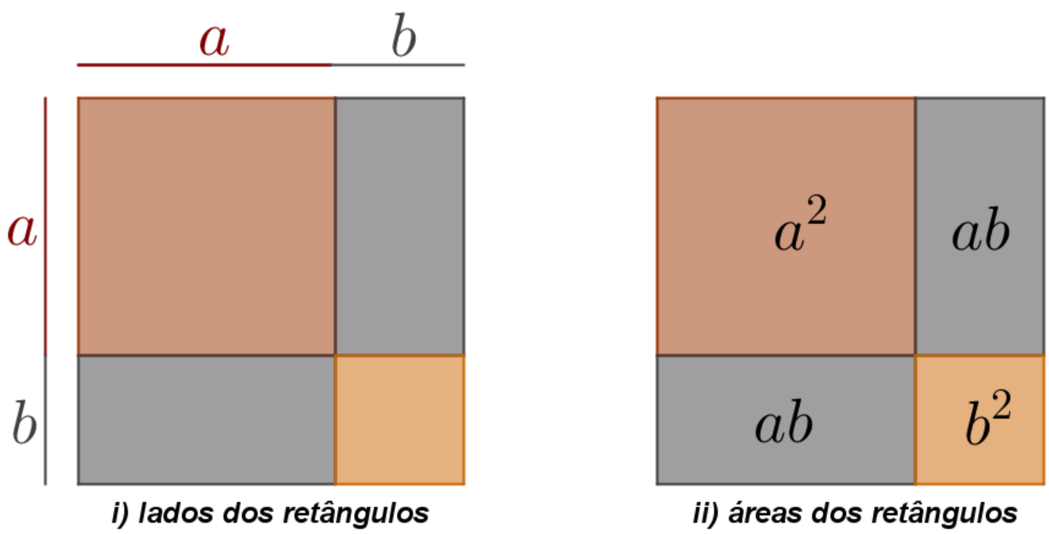


Figura 4.8: *Quadrado da soma de dois termos.*

Geometricamente construímos um quadrado de lado a e marcamos a medida do segmento que representa o termo b a partir de um dos extremos do lado a (segmentos consecutivos); com isso, o lado do novo quadrado quadrado terá medida $a+b$, sendo dividido em dois segmentos de medidas a e b. Neste ponto procedemos de modo a decompor o quadrado de lado $a+b$ em retângulos; na vertical traçamos o segmento paralelo aos lados verticais $a+b$, cujos extremos são os encontros dos segmentos que representam os termos a e b. Fazemos o mesmo procedimento na horizontal.

Em seguida, calculamos as áreas dos retângulos originados na decomposição e obtemos: $S_1 = a^2$, $S_2 = S_3 = ab$ e $S_4 = b^2$. A soma destas áreas é igual à área S_T do quadrado de lado $(a+b)$, e assim temos

$S_T = S_1 + S_2 + S_3 + S_4$

$(a+b)^2 = a^2 + ab + ab + b^2$

$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2.$

B) Quadrado da diferença de dois termos

$$(a-b)^2 = (a-b)(a-b) = a^2 - 2ab + b^2$$

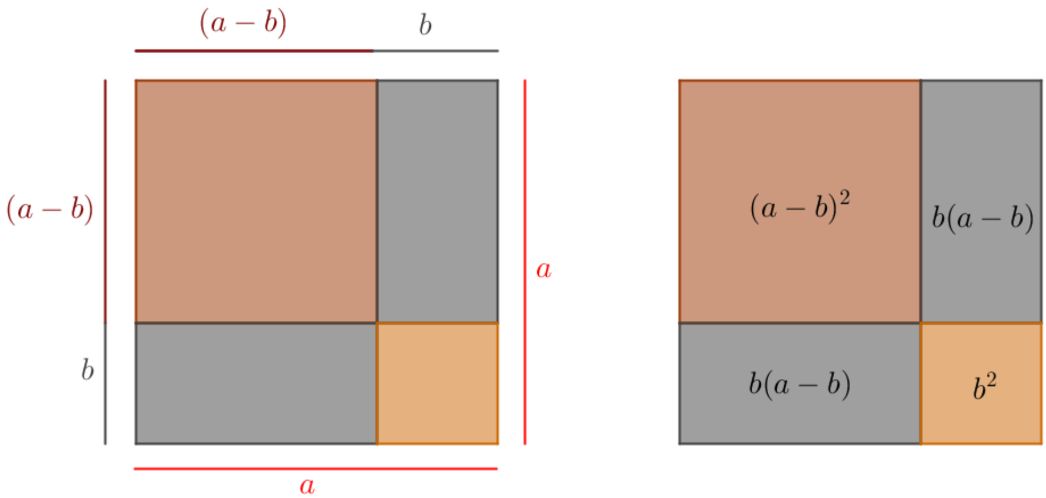


Figura 4.9: *Quadrado da diferença de dois termos.*

Geometricamente construímos um quadrado de lado medindo a e marcamos os encontros dos segmentos que representam os termos de medidas $(a-b)$ e b nos lados deste quadrado. Em seguida decompomos o quadrado de lado medindo a em retângulos; para isso, na vertical traçamos o segmento paralelo aos lados verticais de medida

$a = (a-b) + b$, cujos extremos são os encontros dos segmentos que representam os termos de medida $(a-b)$ e b. Fazemos o mesmo procedimento na horizontal.

Calculamos as áreas dos retângulos originados na decomposição do quadrado de lado a e obtemos: $S_1 = (a-b)^2$, $S_2 = S_3 = b(a-b)$ e $S_4 = b^2$. A soma destas áreas é igual a área S_T do quadrado de lado a, segue que:

$S_T = S_1 + S_2 + S_3 + S_4$

$a^2 = (a-b)^2 + b(a-b) + b(a-b) + b^2$

$a^2 = (a-b)^2 + ba - b^2 + ba - b^2 + b^2$

$a^2 = (a-b)^2 + 2ba - b^2$

$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$.

4.3 Quatro retângulos de papel

O problema apresentado a seguir, foi proposto na prova de nível 1, na segunda fase da OBMEP 2005 (http://www.obmep.org.br/provas.htm). Este problema foi retomado em uma turma (39 estudantes) do 9º ano do Ensino Fundamental, procurando verificar alguns modos de representação na solução apresentada pelos estudantes.

(*Adaptado*) Tia Anastácia uniu quatro retângulos de papel de 3 cm de comprimento por 1 cm de largura, formando a Figura 4.10.

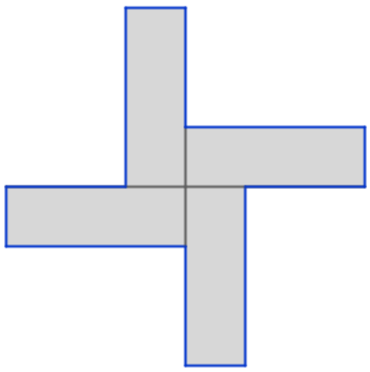


Figura 4.10: *Os quatro retângulos.*

A) Qual é o perímetro da figura?

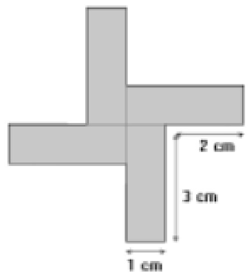
B) Qual é o menor número de retângulos de 3 cm de comprimento por 1 cm de largura que é necessário juntar a essa figura para se obter um quadrado? Faça um desenho ilustrando sua resposta.

C) Qual é a área do quadrado obtido no item anterior?

Solução:

A) *Solução 1:* Ao juntar os retângulos, cada um "perdeu" um lado de 1 cm e mais 1 cm em um lado de comprimento 3 cm, ou seja, 2 cm no total. Como o perímetro de cada retângulo é 8 cm, o perímetro da figura é $4 \times 8 - 4 \times 2 = 24$ cm.

Solução 2: A figura tem 4 lados de 3 cm, 4 lados de 2 cm e 4 lados de 1 cm, logo seu perímetro é $4 \times 3 + 4 \times 2 + 4 \times 1 = 24$ cm.



B) A resposta está na figura ao lado, onde vemos que basta juntar 8 retângulos à figura original para formar o quadrado.

C) *Solução 1*: Cada retângulo tem área igual a $3 \times 1 = 3$ cm^2. Como o quadrado é composto de 12 retângulos, a sua área é igual a $12 \times 3 = 36$ cm^2.

Solução 2: Observando a figura, vemos que cada lado do quadrado tem comprimento igual a $3 \times 1 + 3 = 6$ cm. Portanto, sua área é $6 \times 6 = 36$ cm^2.

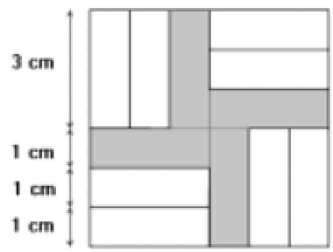


Figura 4.11: *Solução - Quatro retângulos de papel (versão OBMEP).*

Após a aplicação deste problema, juntamente com outros em uma atividade para estudantes do 9º ano, poucos indicaram resolução correta para o exercício e não surgiu qualquer representação relevante ou que apresentasse algo diferente da sugerida na solução (Figura 4.11).

Na Figura 4.11, observe que, segundo referência de Boavida na Figura 3.2, aparecem as representações de modos: icônica e simbólica. Nos itens A) e C) são apresentadas soluções com diferentes procedimentos; a solução do item B) poderia se dar basicamente com a representação icônica. O modo de representação ativa não cabia para o momento de aplicação da prova, mas é perfeitamente possível em sala de aula.

4.4 Teorema Fundamental da Proporcionalidade

Teorema 4.4.1. ***Teorema Fundamental da Proporcionalidade:*** *Seja* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *uma função crescente. As seguintes afirmações são equivalentes:*

(1) $f(nx) = nf(x)$ *para todo* $n \in \mathbb{Z}$ *e todo* $x \in \mathbb{R}$.

(2) Pondo $a = f(1)$, *tem-se* $f(x) = ax$ *para todo* $x \in \mathbb{R}$.

(Logo $f(cx) = cf(x)$ *para quaisquer* $c, x \in \mathbb{R}$.*)*

(3) $f(x + y) = f(x) + f(y)$ *para quaisquer* $x, y \in \mathbb{R}$.

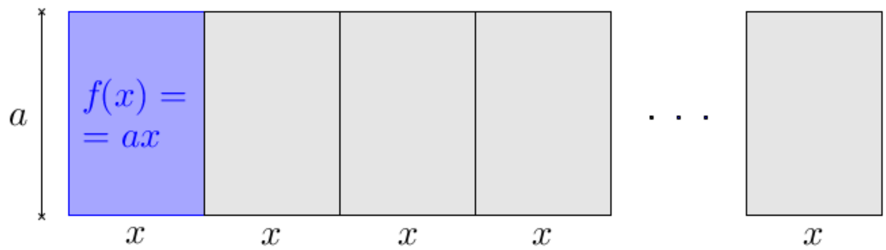


Figura 4.12: *Teorema Fundamental da Proporcionalidade, aplicado em* $f(x) = ax$.

O teorema 4.4.1 [19, Lima, p.98] é utilizado no exemplo a seguir e é uma referência presente em Lima [19, p.100]:

Exemplo 4.4.2. *Euclides dizia: "dois retângulos de mesma altura estão entre si como suas bases".*

Isto quer dizer que, se a altura de um retângulo é fixada, a área desse retângulo é proporcional à base. Ou ainda: a área de um retângulo de altura a *e base* x *é uma função linear de* x. *É claro que esta afirmação é uma consequência super-óbvia da fórmula de área do retângulo. O ponto, todavia, é que ela é o argumento crucial para a dedução daquela fórmula, logo não pode ser deduzida como sua consequência. Para estabelecer sua veracidade, seja* $f(x)$ *a área do retângulo de altura* a *e base* x. *É claro que* f *é uma função crescente de* x.

Além disso, é claro que um retângulo de altura a *e base* nx *pode ser decomposto em* n *retângulos de mesma altura* a, *cada um com base* x, *logo* $f(nx) = nf(x)$. *Segue-se,* *então, do teorema 4.4.1 que $f(x) = A \cdot x$, onde $A = f(1)$ é a área de um retângulo de altura a e base 1. Vamos mostrar que $A = a$.*

O mesmo argumento, aplicado aos retângulos de mesma base 1 e altura variável, mostra que $A = a \cdot U$, onde U é a área do retângulo de base e altura iguais a 1. Mas este é o quadrado de lado 1 o qual é, por definição, a unidade de área. Portanto $U = 1$ e $A = a$.

Conclusão: a área de um retângulo de altura a e base x é igual a ax.

4.5 Raízes da equação $x^2 - Sx + P = 0$

O exemplo explanado a seguir é baseado em uma discussão que consta em Lima [19, p. 122-124] a respeito do estudo das funções quadráticas. Conhecendo-se a soma S e o produto P de dois números m e n (positivos), expressa-se a equação $\phi : x^2 - Sx + P = 0$, cujas raízes são x_1 e x_2 e satisfazem $S = x_1 + x_2$ e $P = x_1 \cdot x_2$; ou seja, x_1 e x_2 são os números m e n. Nestas condições, havia uma regra para achar as raízes (os dois números m e n) da equação ϕ:

> *Eleve ao quadrado a metade da soma, subtraia o produto e extraia a raiz quadrada da diferença. Some ao resultado a metade da soma. Isso dará o maior dos números procurados. Subtraia-o da soma para obter o outro número.* [19, Lima, p. 123]

A partir da regra indicada, supondo $m > n$, teríamos as raízes:

$$x_1 = m = \frac{S}{2} + \sqrt{\left(\frac{S}{2}\right)^2 - P} \quad \text{e} \quad x_2 = S - m = \frac{S}{2} - \sqrt{\left(\frac{S}{2}\right)^2 - P},$$

mas a ideia aqui é propor uma construção que, tendo S e P, seja possível encontrar as raízes da equação ϕ.

Discussão similar sobre encontrar dois números tendo a soma e o produto é apresentada por meio de um exemplo baseado num procedimento de Diofanto em Roque e Carvalho [33, p.168-171]. Diofanto, no livro *Aritmética*, contribuiu com a introdução de "uma forma de representar o valor desconhecido em um problema". O procedimento não utiliza construção geométrica e ao mesmo tempo lida com valores conhecidos e desconhecidos (álgebra). Tem-se uma resolução baseada no discurso que é abreviada pelo uso de símbolos.

A Figura 4.13, representa uma construção estruturada no *software GeoGebra* e permite encontrar as raízes de uma equação polinomial do 2º grau para o caso específico em que $\phi : x^2 - Sx + P = x^2 - sx + p^2 = 0$, com $S = x_1 + x_2$ (soma das raízes), $P = x_1 \cdot x_2$ (produto das raízes) e $s > 2p$, sendo x_1, x_2 (sempre positivos) as raízes desta equação.

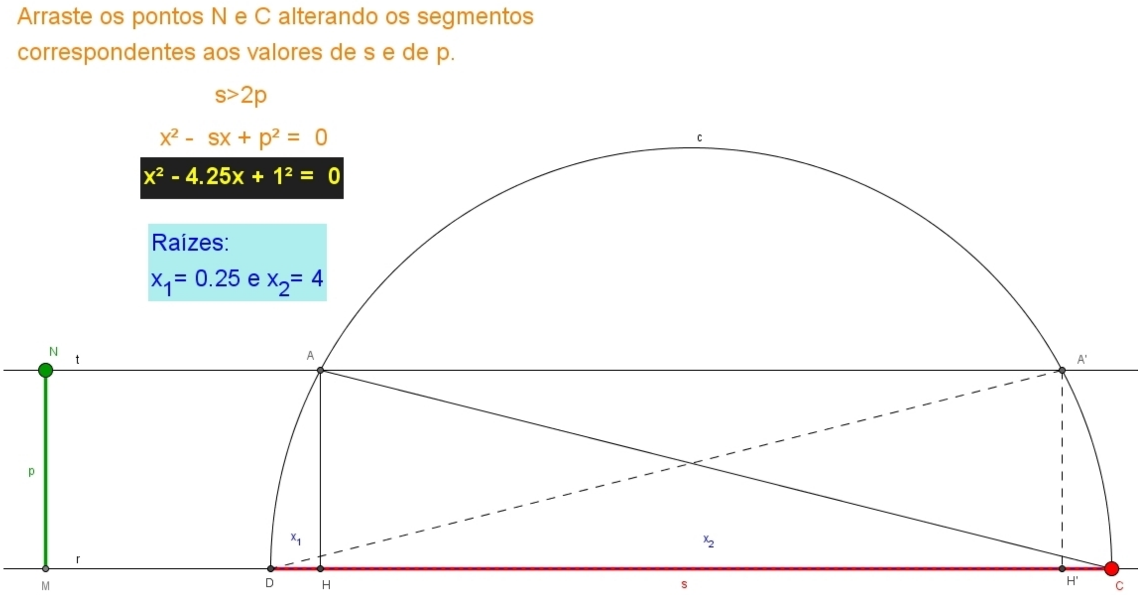


Figura 4.13: *Raízes da equação do tipo* $x^2 - sx + p^2 = 0$, *com* $s > 2p$.

Na construção indicada na Figura 4.13, é possível observar que:

- c é o semicírculo de diâmetro $d(D, C) = \overline{DC}$ (distância do ponto D ao ponto C);
- $r \parallel t$ e r dista $\overline{MN}$ de t;
- $\overline{AH} = \overline{A'H'} = \overline{MN} = p$, sendo AH e $A'H'$ segmentos perpendiculares às retas r e t. H e H' pontos de r e A e A' pontos de t;
- $\triangle AHC \equiv \triangle A'H'D$, por LAL: $\overline{HC} = \overline{H'D}$, $A\widehat{H}C = A'\widehat{H'}D$ e $\overline{AH} = \overline{A'H'}$;
- $d(D, H) = \overline{DH}$ e $d(H, C) = \overline{HC}$ são as raízes x_1 e x_2 da equação ϕ;

- Na equação $\phi : x^2 - sx + p^2 = 0$, temos os coeficientes $a = 1$, $b = -s$ e $c = p^2$, então a soma S e o produto P das raízes de ϕ são, respectivamente:
  $S = -\frac{b}{a} = -\frac{(-s)}{1} = s$ e $P = \frac{c}{a} = \frac{p^2}{1} = p^2$;

- $d(D, C) = \overline{DC} = \overline{DH} + \overline{HC} = s = x_1 + x_2$;

- $d(M, N) = \overline{MN} = \overline{AH} = p$; mas como $\overline{AH}$ é a altura do $\triangle DAC$, segue que $\overline{AH}^2 = \overline{DH} \cdot \overline{HC} \Rightarrow p^2 = \overline{DH} \cdot \overline{HC} = x_1 \cdot x_2$.

4.6 Máximo divisor comum (mdc) e mínimo múltiplo comum (mmc)

Definição 4.6.1. ***Máximo Divisor Comum:*** *Sejam a e b inteiros diferentes de zero. O máximo divisor comum, resumidamente mdc, entre a e b é o número d que satisfaz as seguintes condições:*
(i) d é um divisor comum de a e b, isto é, $d|a$ e $d|b$;
(ii) d é o maior inteiro positivo com a propriedade (i).
Neste caso, denotamos o mdc entre a e b por $d = mdc(a, b)$ ou por $d = (a, b)$. Se $(a, b) = 1$, então dizemos que a e b são primos entre si.

Definição 4.6.2. ***Mínimo Múltiplo Comum:*** *Sejam a e b inteiros diferentes de zero. O mínimo múltiplo comum, resumidamente mmc, entre a e b é o inteiro positivo m que satisfaz as seguintes condições:*
(i) m é um múltiplo comum de a e b, isto é, $a|m$ e $b|m$; (ii) m é o menor inteiro positivo com a propriedade (i).
Neste caso, denotamos o mmc entre a e b por $m = mmc(a, b)$ ou por $m = [a, b]$.

O método indicado a seguir é uma referência de Polezzi [31, p.80-82] para a obtenção geométrica do *mdc* e *mmc* entre dois números (definições 4.6.1 e 4.6.2 retiradas de Oliveira [27, p.106-107, 115]).

- Considere um retângulo $\mathcal{R}$ de lados, com medidas inteiras a e b, dividido em quadradinhos unitários.

- Trace uma das diagonais do retângulo $\mathcal{R}$, marcando-a nos pontos que são vértices de algum quadradinho unitário.

- Conte quantas partes esses pontos dividem a diagonal: esse número $\boldsymbol{d}$ é o $mdc(a, b)$.

- Trace linhas verticais (horizontais), passando por cada um dos pontos que foram marcados antes, unindo dois lados opostos do retângulo $\mathcal{R}$. Conte o número $\boldsymbol{m}$ de quadradinhos unitários existentes em qualquer um dos $\boldsymbol{d}$ retângulos $(\mathcal{R}_1, \mathcal{R}_2, \cdots, \mathcal{R}_n)$ determinados por essas linhas verticais (horizontais): esse número $\boldsymbol{m}$ é o $mmc(a, b)$.

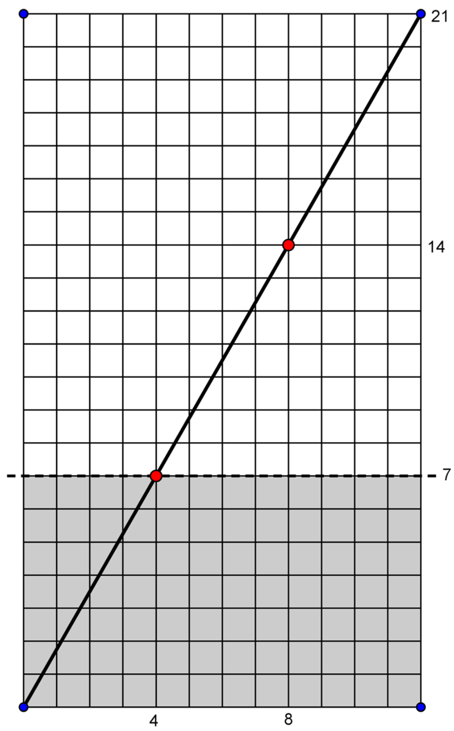


Figura 4.14: *Retângulo $\mathcal{R}$, que expressa o mdc e o mmc entre dois números.*

A Figura 4.14 representa os procedimentos do método para $a = 12$ e $b = 21$. A diagonal está dividida em três partes iguais; logo, $3 = mdc(12, 21)$. O número de quadradinhos existentes em qualquer um dos três retângulos é 7×12; logo, $84 = mmc(12, 21)$.

Ora, o método é justificado tomando que se $d = mdc(a, b)$, existem inteiros u e v tais que $a = du$ e $b = dv$, com u e v primos entre si.

Considerando um sistema de eixos ortogonais com a origem num dos vértices do retângulo, a equação da reta que contém a diagonal considerada é $y = \frac{b}{a}x$. Logo, pertencem à diagonal os pontos $(0, 0)$; (u, v); $(2u, 2v)$; $\cdots$; (du, dv), pois

$$\frac{b}{a} = \frac{v}{u} = \frac{2v}{2u} = \cdots = \frac{dv}{du},$$

ou seja, são $d + 1$ pontos de coordenadas inteiras, igualmente espaçados.

Para verificar que são apenas esses os pontos da diagonal com coordenadas inteiras, suponha que (p, q) pertença à diagonal e tenha coordenadas inteiras. Então,

$$q = \frac{b}{a} \cdot p = \frac{v}{u} \cdot p,$$

o que implica $qu = vp$ e, sendo $mdc(u, v) = 1$, vem que $q = rv$ e $p = ru$, com $0 \leq r \leq d$.

Logo, a diagonal fica dividida em $\boldsymbol{d}$ pedaços iguais. Como os $d + 1$ pontos são igualmente espaçados, os d retângulos obtidos no último item do procedimento têm a mesma área $\boldsymbol{m}$. Assim, $\boldsymbol{md}$=$\boldsymbol{ab}$, o que mostra que $\boldsymbol{m} = mdc(a, b)$, e $\boldsymbol{m}$ é também o número de quadradinhos contido nos retângulos.

Este método parece não ser ideal para valores de a e b arbitrariamente grandes. Outro procedimento para encontrar o mdc de dois números é ilustrado num exemplo em Roque e Carvalho [33, p.108-109], usaremos este procedimento, que em Hefez [15, p.89] é designado como *Algoritmo de Euclides*, para encontrar o $mdc(12, 21)$, seguindo a mesma estrutura.

Comece por retirar 12 uma vez de 21, obtendo $r_1 = 9$ como resto. Em seguida, retire 9 uma vez de 12, obtendo $r_2 = 3$ como resto. Agora retire 3 três vezes de 9, obtendo 0. Logo 3 é o maior divisor de 12 e 21. Tal procedimento pode ser expresso da seguinte maneira:

$$(21, 12) \Rightarrow (9, 12) \Rightarrow (3, 9) \Rightarrow (3, 0).$$

Existem ainda outros métodos (procedimentos) para se encontrar o *mmc* e o *mdc* de dois e até mais números. Comumente, os procedimentos conforme indicados antes não são práticas entre professores e estudantes do Ensino Básico, nem mesmo estão expressos nos livros didáticos, o mais utilizado está próximo ao que ilustra a Figura 4.15, conforme Dante [8, p.119, 123-124].

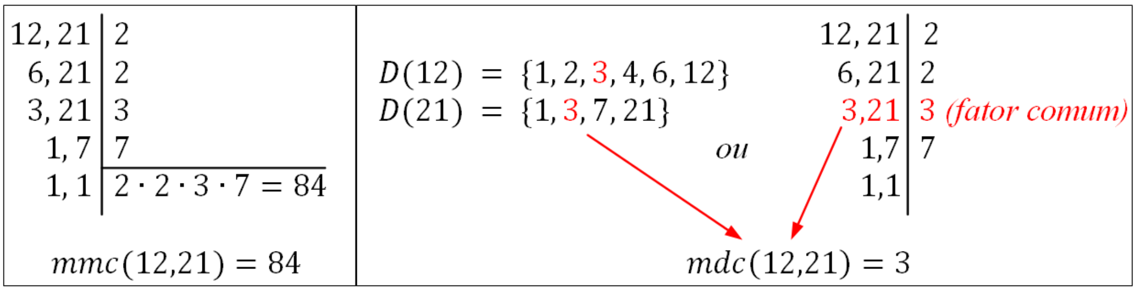


Figura 4.15: *Procedimento para encontrar o mdc e o mmc, amplamente utilizado no Ensino Básico.*

Tal livro não apresenta as definições para o *mmc* ou *mdc*, parte de exemplos de problemas, alguns exercícios que exploram o mesmo raciocínio aplicado na solução dos problemas e então apresenta o que chama de ‘processo prático’.

Ora, todos estes procedimentos trazem em si diferentes representações, mas que tratam de uma mesma estrutura. Na verdade, eles são bem próximos, o que realmente os difere é justamente a forma como cada procedimento é representado.

4.7 Médias entre dois números

Média é entendida como o valor que substitui todos os elementos da lista de números sem alterar uma certa característica desta lista. É importante entender a relação entre as médias aritmética, geométrica, harmônica e quadrática, pois o uso destas relações permite resolver problemas que por vezes parecem não ter qualquer relação com elas, e seu uso simplifica a resolução.

A relação entre estas médias é dada por: Se $x_1, x_2, x_3, \cdots, x_n$ são números positivos e M_q, M_a, M_g e M_h são suas médias quadrática, aritmética, geométrica e harmônica, respectivamente, então $M_q \geq M_a \geq M_g \geq M_h$. Além disso, duas quaisquer dessas médias são iguais se, e somente se, os números da lista são todos iguais, $x_1 = x_2 = x_3 = \cdots = x_n$.

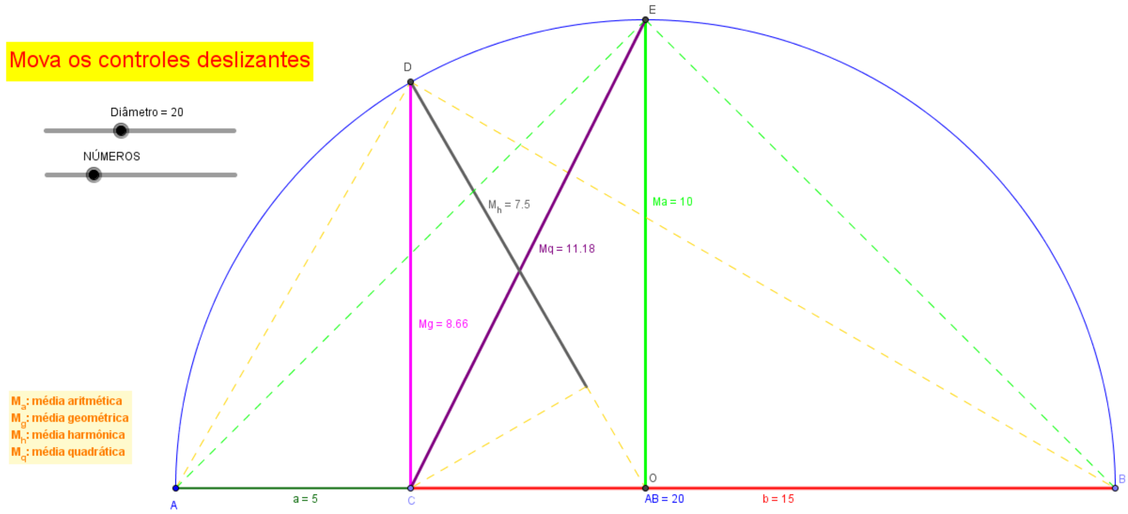


Figura 4.16: *Construção que expressa em segmentos algumas médias entre dois números.*

As definições das médias aritmética, geométrica, harmônica e quadrática indicadas a seguir, estão generalizadas para uma lista de n números; de acordo com Morgado e Carvalho [25, p.171-175]:

Definição 4.7.1. *A média aritmética (simples) da lista de n números $x_1, x_2, \cdots, x_n$ é definida por* $M_a = \dfrac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n}$.

Definição 4.7.2. *A média geométrica (simples) dos n números positivos $x_1, x_2, \cdots, x_n$ é definida por* $M_g = \sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdots x_n}$.

Definição 4.7.3. *A média harmônica (simples) dos n números positivos $x_1, x_2, \cdots, x_n$ é definida por* $M_h = \dfrac{n}{\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \cdots + \frac{1}{x_n}}$.

Definição 4.7.4. *A média quadrática dos números $x_1, x_2, \cdots, x_n$ é definida por* $M_q = \sqrt{\frac{{x_1}^2 + {x_2}^2 + \cdots + {x_n}^2}{n}}$, *isto é, a média quadrática é a raiz quadrada da média aritmética dos quadrados dos números.*

A Figura 4.16 é um esboço construído no *GeoGebra* e que pode ser também facilmente construído com régua, compasso, lápis e papel. Os segmentos que representam as quatro medidas indicadas nesta figura (M_g, M_h, M_q e M_a) evidenciam as relações de desigualdades entre as médias de quaisquer dois valores reais não negativos utilizando o *software*. A atribuição das médias às medidas dos segmentos podem ser justificadas através de argumentos de relações geométricas visíveis na construção, tais como os indicados para duas destas médias:

- **Média Aritmética**:

Observe o $\triangle AEB$, nele temos que $\overline{AB} = a + b = 2r$ (base do triângulo), $\overline{OE} = r$ (altura do triângulo) e r é o raio da semicircunferência que circunscreve este triângulo.

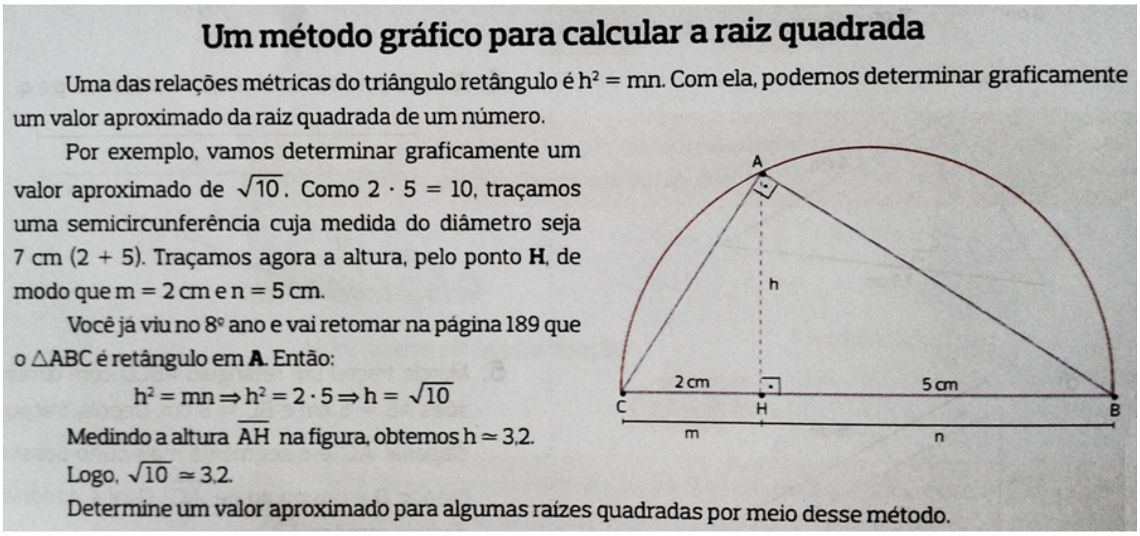
Ora, a média aritmética $M_a = \dfrac{a+b}{2} = \dfrac{\overline{AB}}{2} = \dfrac{2r}{2} = r$, mas $r = \overline{OE}$, assim, $M_a = \overline{OE}$ é a altura relativa à hipotenusa $(a + b)$ do $\triangle AEB$, ou é, o raio da semicircunferência que circunscreve este triângulo.

- **Média Geométrica**:

Considere os $\triangle ACD$ e $\triangle BCD$, eles são semelhantes pois $A\widehat{C}D = B\widehat{C}D = 90^o$ ($\overline{CD}$ é altura do $\triangle ABD$) e $C\widehat{A}D = B\widehat{D}C$ (pois são ângulos inscritos com arcos de mesma medida $\widehat{BD}$). Assim, valem as relações:
$\dfrac{\overline{AC}}{\overline{CD}} = \dfrac{\overline{CD}}{\overline{BC}} \Rightarrow \dfrac{a}{\overline{CD}} = \dfrac{\overline{CD}}{b} \Rightarrow \overline{CD}^2 = a \cdot b \Rightarrow \overline{CD} = \sqrt{a \cdot b}$; o que mostra que a altura relativa à hipotenusa é a média geométrica de a e b ($a + b$ é a hipotenusa ou base do $\triangle ABD$).

4.8 Interpretação geométrica de uma raiz quadrada

O livro didático Projeto Teláris: Matemática do 9º ano, referencia a interpretação geométrica de uma raiz quadrada por meio do texto e representação apresentados na Figura 4.17 [7, Dante, p.186], mostrando a validade do método por meio de uma relação métrica no triângulo retângulo.



Um método gráfico para calcular a raiz quadrada

Uma das relações métricas do triângulo retângulo é $h^2 = mn$. Com ela, podemos determinar graficamente um valor aproximado da raiz quadrada de um número.

Por exemplo, vamos determinar graficamente um valor aproximado de $\sqrt{10}$. Como $2 \cdot 5 = 10$, traçamos uma semicircunferência cuja medida do diâmetro seja 7 cm (2 + 5). Traçamos agora a altura, pelo ponto **H**, de modo que m = 2 cm e n = 5 cm.

Você já viu no 8º ano e vai retomar na página 189 que o $\triangle ABC$ é retângulo em **A**. Então:

$$h^2 = mn \Rightarrow h^2 = 2 \cdot 5 \Rightarrow h = \sqrt{10}$$

Medindo a altura $\overline{AH}$ na figura, obtemos $h \simeq 3{,}2$.

Logo, $\sqrt{10} \simeq 3{,}2$.

Determine um valor aproximado para algumas raízes quadradas por meio desse método.

Figura 4.17: *Método gráfico para calcular a raiz quadrada.*

Tal método pode ser reproduzido facilmente pelos estudantes no caderno ou com o auxílio, por exemplo, do *software GeoGebra*. Sua construção envolve poucos passos e todos eles envolvem conceitos matemáticos que já devem ser conhecidos; a atividade de construir o *Applet* neste *software* proporciona rememorar propriedades, associar álgebra e geometria e verificar a validade de cálculos realizados no caderno.

Os passos tomados no *GeoGebra* para construir o desenho geométrico que aparece na Figura 4.18 seguem descritos a seguir. Há também o protocolo de construção deste mesmo desenho na Figura 5.1 do Complemento 5.1.

- criar dois controles deslizantes, aqui nomeado X e Y e variando de 1 a 50. O produto dos valores indicados por estes dois controles é o número n para o qual se deseja obter a raiz quadrada;
- criar os pontos $A(0,0)$, $B(X,0)$ e $C(X+Y,0)$;
- criar os segmentos AC, AB e BC;
- criar o semicírculo de diâmetro AC;
- criar a reta perpendicular a AC no ponto B;

- criar o ponto D, interseção do semicírculo com a reta;

- ocultar a reta e criar o segmento BD (a medida deste segmento é $\sqrt{n} = \sqrt{X \cdot Y}$);

- organizar os rótulos e fixar alguns objetos.

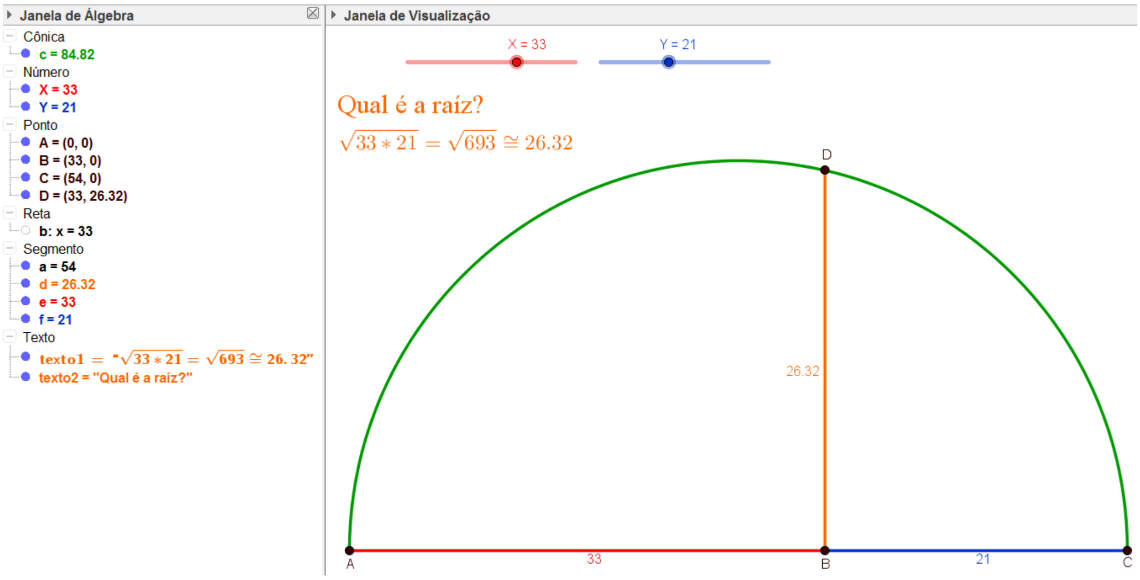


Figura 4.18: *Construção geométrica para obter a raiz quadrada de um número (Applet Raiz Quadrada).*

Capítulo 5

Complementos

5.1 Exemplo de um protocolo de construção

N.	Nome	Ícone da Barra de Ferramentas	Definição	Valor	Comando
1	Número X	a = 2		X = 33	
2	Ponto A	A		A = (0, 0)	
3	Número Y	a = 2		Y = 21	
4	Ponto B		(X, 0)	B = (33, 0)	(X, 0)
5	Ponto C		(Y + X, 0)	C = (54, 0)	(Y + X, 0)
6	Segmento a		Segmento [A, C]	a = 54	Segmento[A, C]
7	Arco c		Semicírculo passando por A e C	c = 84.82	Semicírculo[A, C]
8	Reta b		Reta passando por B e perpendicular a a	b: x = 33	Perpendicular[B, a]
9	Ponto D		Ponto de interseção de c, b	D = (33, 26.32)	Interseção[c, b]
10	Segmento d		Segmento [B, D]	d = 26.32	Segmento[B, D]
11	Segmento e		Segmento [A, B]	e = 33	Segmento[A, B]
12	Segmento f		Segmento [B, C]	f = 21	Segmento[B, C]
13	Texto texto2	ABC		Qual é a raíz?	
14	Texto texto1	ABC	"\sqrt{" + (LaTeX[X]) + "*" + (LaTeX[Y]) + "}=\sqrt{" + (LaTeX[X Y]) + "}≅" + (LaTeX[d]) + ""	\sqrt{33*21}=\sqrt{693} ≅26.32	"\sqrt{" + (LaTeX[X]) + "*" + (LaTeX[Y]) + "}=\sqrt{" + (LaTeX[X Y]) + "}≅" + (LaTeX[d]) + ""

criado com o GeoGebra

Figura 5.1: *Protocolo de construção do Applet Raiz Quadrada, gerado no GeoGebra.*

O protocolo indicado na Figura 5.1 foi gerado a partir do software *GeoGebra*, seguindo os procedimentos: no menu clique **Exibir** $<$ clique **Protocolo de Construção**. Com este protocolo é possível perceber quais ícones, entradas ou comandos foram utilizados durante a estruturação do *Applet* e mais, reproduzir cada um dos passos, percebendo os objetos sendo inseridos na Janela de Visualização.

5.2 Construções no *GeoGebra* com visualização 3D

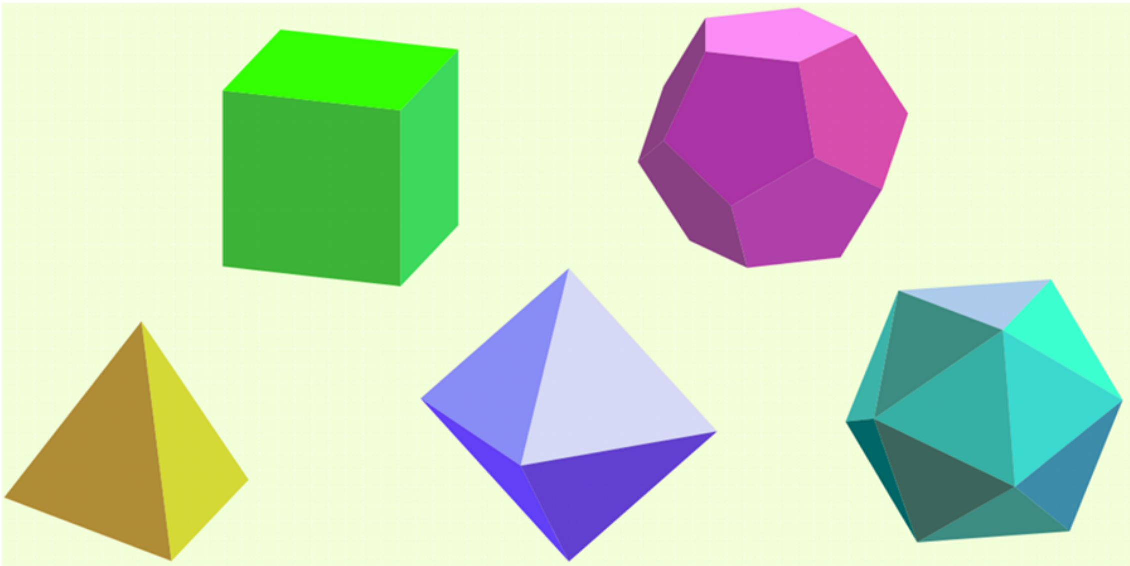


Figura 5.2: *Poliedros: Tetraedro, Hexaedro, Octaedro, Dodecaedro e Icosaedro.*

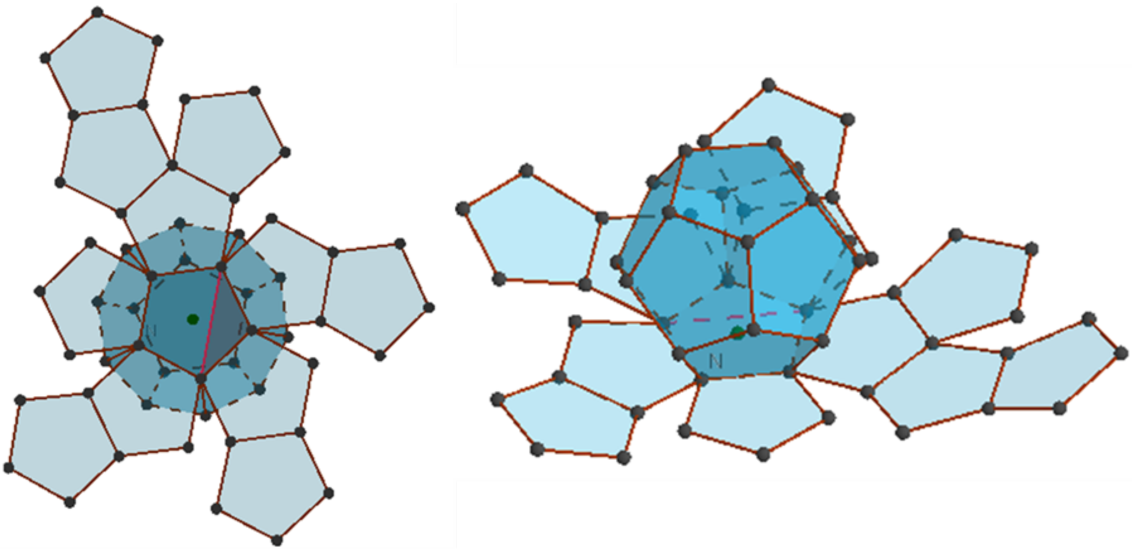


Figura 5.3: *Poliedro dodecaedro e sua planificação em duas vistas.*

As Figuras 5.2, 5.3 e 5.4 foram elaboradas a partir de construções feitas no *software* *GeoGebra*. O ato de construir já é importante para a aprendizagem e mais com posse das construções neste *software* é possível realizar várias manipulações e propor práticas, tais como:

- observar visões através da rotação de cada objeto geométrico criado;
- perceber noção de ampliação e redução (semelhança);
- criar planificações;
- perceber noções de paralelismo e perpendicularismo;
- identificar elementos: pontos, segmentos, vértices, arestas, faces;

Há ainda a possibilidade de estruturar regiões e superfícies limitadas por curvas como na Figura 5.4.

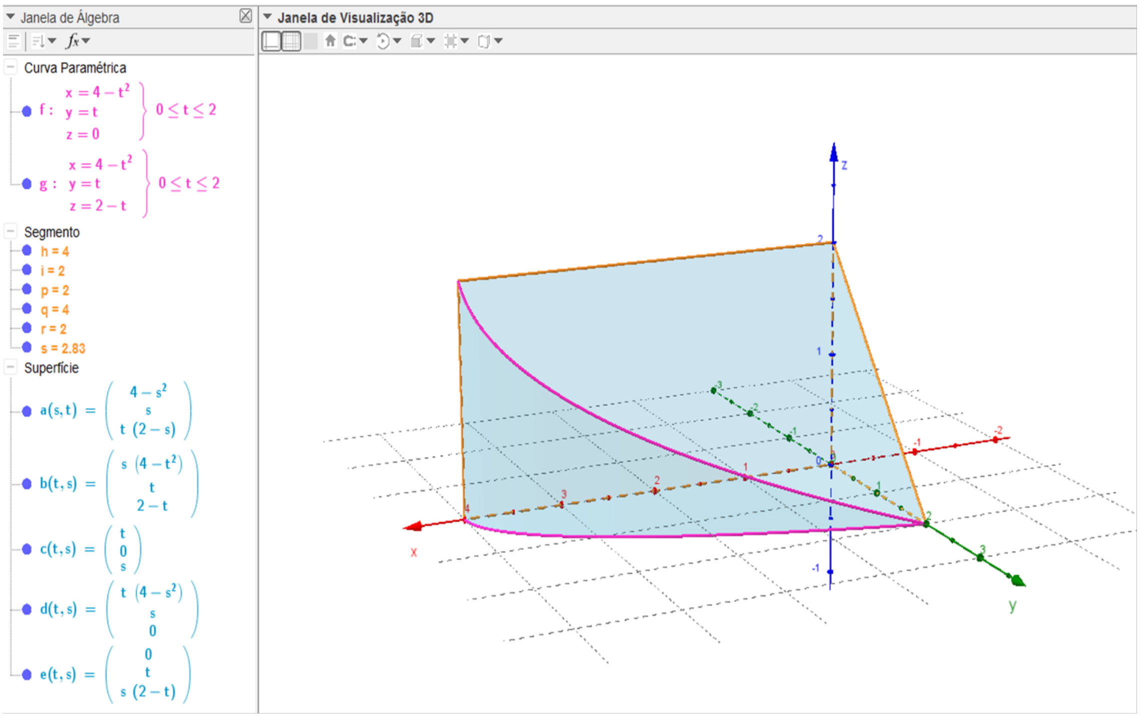
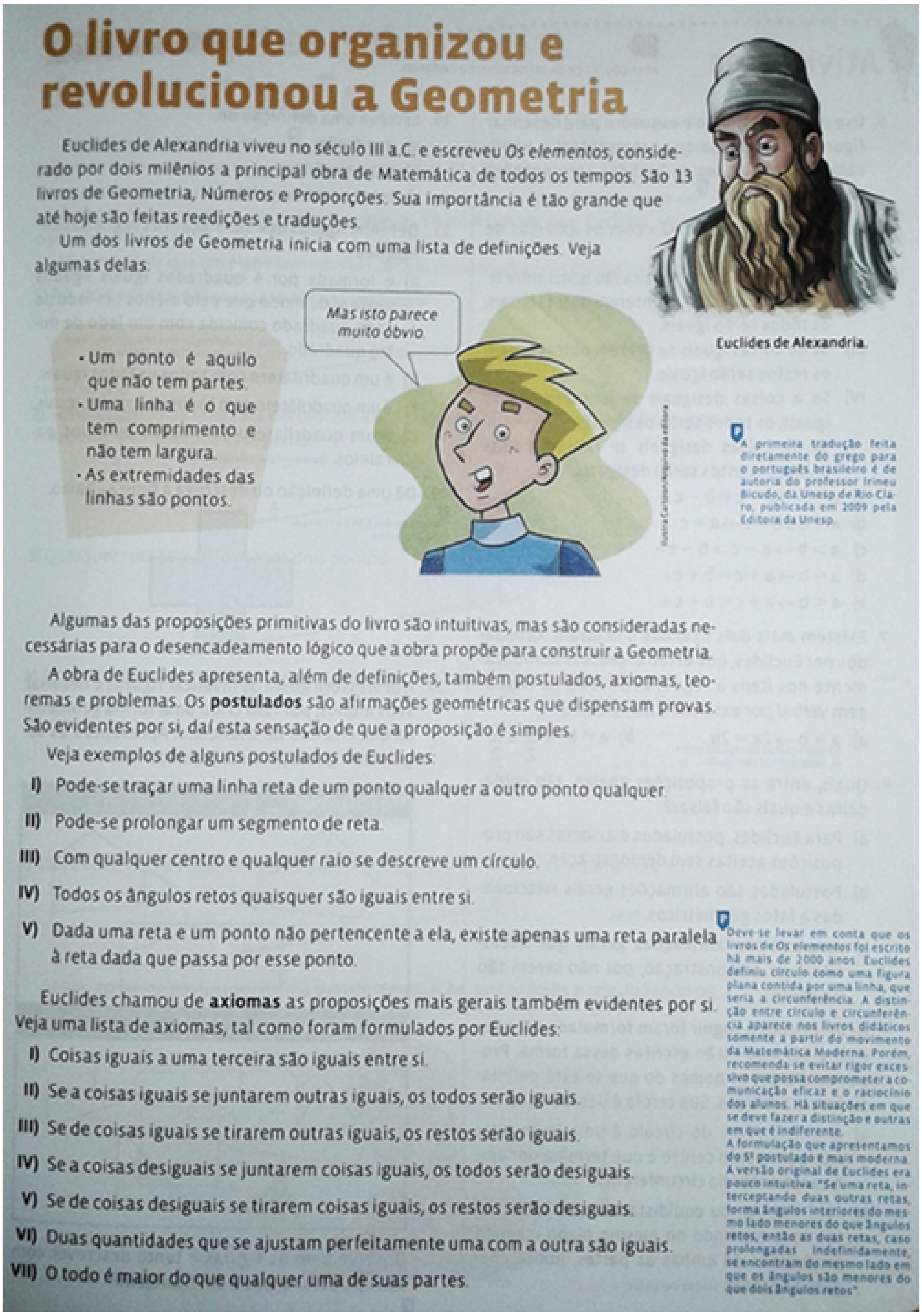


Figura 5.4: *Região entre curvas e segmentos.*

5.3 *Os Elementos* de Euclides de Alexandria



O livro que organizou e revolucionou a Geometria

Euclides de Alexandria viveu no século III a.C. e escreveu *Os elementos*, considerado por dois milênios a principal obra de Matemática de todos os tempos. São 13 livros de Geometria, Números e Proporções. Sua importância é tão grande que até hoje são feitas reedições e traduções.

Um dos livros de Geometria inicia com uma lista de definições. Veja algumas delas:

- Um ponto é aquilo que não tem partes.
- Uma linha é o que tem comprimento e não tem largura.
- As extremidades das linhas são pontos.

A primeira tradução feita diretamente do grego para o português brasileiro é de autoria do professor Irineu Bicudo, da Unesp de Rio Claro, publicada em 2009 pela Editora da Unesp.

Algumas das proposições primitivas do livro são intuitivas, mas são consideradas necessárias para o desencadeamento lógico que a obra propõe para construir a Geometria.

A obra de Euclides apresenta, além de definições, também postulados, axiomas, teoremas e problemas. Os **postulados** são afirmações geométricas que dispensam provas. São evidentes por si, daí esta sensação de que a proposição é simples.

Veja exemplos de alguns postulados de Euclides:

I) Pode-se traçar uma linha reta de um ponto qualquer a outro ponto qualquer.

II) Pode-se prolongar um segmento de reta.

III) Com qualquer centro e qualquer raio se descreve um círculo.

IV) Todos os ângulos retos quaisquer são iguais entre si.

V) Dada uma reta e um ponto não pertencente a ela, existe apenas uma reta paralela à reta dada que passa por esse ponto.

Euclides chamou de **axiomas** as proposições mais gerais também evidentes por si. Veja uma lista de axiomas, tal como foram formulados por Euclides:

I) Coisas iguais a uma terceira são iguais entre si.

II) Se a coisas iguais se juntarem outras iguais, os todos serão iguais.

III) Se de coisas iguais se tirarem outras iguais, os restos serão iguais.

IV) Se a coisas desiguais se juntarem coisas iguais, os todos serão desiguais.

V) Se de coisas desiguais se tirarem coisas iguais, os restos serão desiguais.

VI) Duas quantidades que se ajustam perfeitamente uma com a outra são iguais.

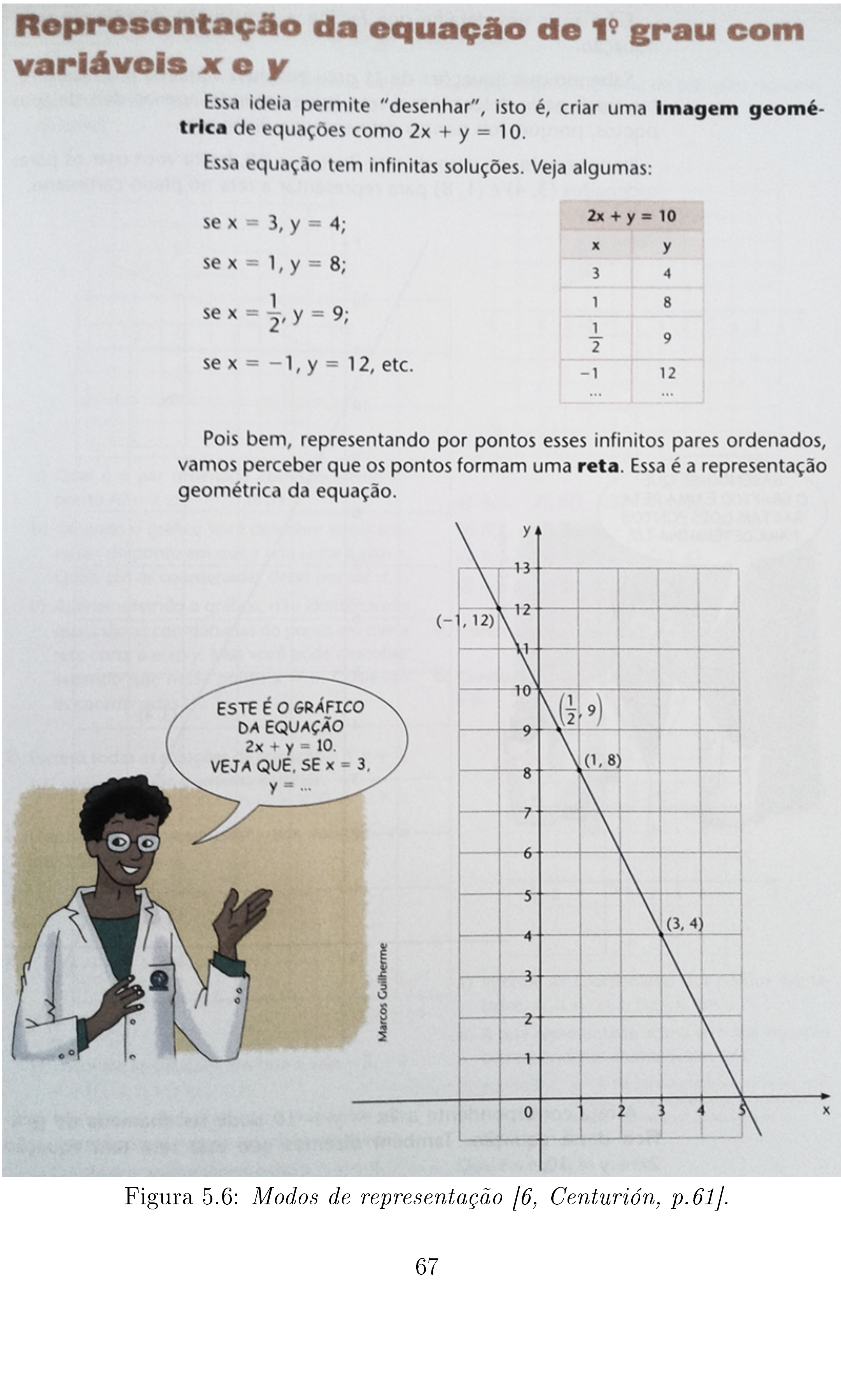
VII) O todo é maior do que qualquer uma de suas partes.

Deve-se levar em conta que os livros de Os elementos foi escrito há mais de 2000 anos. Euclides definiu círculo como uma figura plana contida por uma linha, que seria a circunferência. A distinção entre círculo e circunferência aparece nos livros didáticos somente a partir do movimento da Matemática Moderna. Porém, recomenda-se evitar rigor excessivo que possa comprometer a comunicação eficaz e o raciocínio dos alunos. Há situações em que se deve fazer a distinção e outras em que é indiferente.

A formulação que apresentamos do 5º postulado é mais moderna. A versão original de Euclides era pouco intuitiva: "Se uma reta, interceptando duas outras retas, forma ângulos interiores do mesmo lado menores do que ângulos retos, então as duas retas, caso prolongadas indefinidamente, se encontram do mesmo lado em que os ângulos são menores do que dois ângulos retos".

Figura 5.5: *Referência à obra Os Elementos, de Euclides [2, Bigode, p.81].*

5.4 Exemplo de representações em um livro didático



Representação da equação de 1º grau com variáveis x e y

Essa ideia permite "desenhar", isto é, criar uma **imagem geométrica** de equações como $2x + y = 10$.

Essa equação tem infinitas soluções. Veja algumas:

se $x = 3$, $y = 4$;

se $x = 1$, $y = 8$;

se $x = \frac{1}{2}$, $y = 9$;

se $x = -1$, $y = 12$, etc.

$2x + y = 10$	
x	y
3	4
1	8
$\frac{1}{2}$	9
−1	12
...	...

Pois bem, representando por pontos esses infinitos pares ordenados, vamos perceber que os pontos formam uma **reta**. Essa é a representação geométrica da equação.

Figura 5.6: *Modos de representação [6, Centurión, p.61].*

A Figura 5.6 é uma foto de uma página do livro didático de Matemática do 9º ano em que é possível perceber algumas representações para o conteúdo de equação do 1º grau. O livro possui vários outros exemplos em que demonstra a preocupação com o uso de vários modos de representação.

Observe que, para o objeto matemático **equação**, são feitas três diferentes representações:

- a presença da representação algébrica (modo simbólico) da equação $2x + y = 10$,
- a representação em tabela (modos icônico e simbólico), na coleção dos valores que assumem as variáveis x e y;
- e o desenho da **reta** (modo icônico) no plano cartesiano, dita no texto do conteúdo como "representação geométrica da equação".

5.5 A Geometria como tendência atual no ensino de Matemática

Dois momentos que constam no livro didático Matemática: teoria e contexto [6] referem-se em específico à geometria e cabe reprodução para este trabalho:

> A Geometria é um tema apresentado por currículos de Matemática do mundo inteiro. Isso porque ela é, reconhecidamente, um assunto importante para a formação matemática dos indivíduos. Mas, apesar disso, cada vez mais os professores deixam de abordar esse importante conteúdo em suas classes. Isso se deve, principalmente, à má formação dos professores que, não tendo um bom reconhecimento do assunto, preferem preterir ou suprimir de suas aulas o ensino da Geometria.
> Atualmente há uma preocupação mundial em termos de retomada da Geometria nas aulas de matemática. O NCSM [a] diz que os alunos deverão compreender alguns conceitos geométricos básicos para atuarem efetivamente no mundo tridimensional. Assim sendo, deverão compreender conceitos como: paralelismo, perpendicularidade, congruência, semelhança e simetria, bem como as propriedades básicas das figuras planas e dos corpos sólidos simples. O NCSM recomenda ainda que os conceitos geométricos seja explorados de modo a envolver resolução de problemas e medidas. [6, Centurión e Jakubovic, *manual do professor, p.11*]
>
> [a]NCSM - National Council of Supervisors of Mathematics - site: http://www.mathedleadership.org.

> ... reconhece-se o valor da visualização e representação espaciais que colaboram para o desenvolvimento do pensamento geométrico. Este também pode ser estimulado por propostas em que a imaginação amplia as representações concretas utilizadas. Assim, descrever, desenhar e classificar figuras; investigar e predizer o resultado de combinar, subdividir e transformar figuras; desenvolver a percepção espacial; relacionar ideias geométricas com ideias numéricas e de medição; reconhecer e apreciar a Geometria dentro do mundo são atividades que concorrem para a formação e o desenvolvimento desse modo de pensar. Se possível, os alunos devem ter contato com atividades geométricas durante todo o ano letivo, e não somente num intervalo de tempo determinado do ano. [6, Centurión e Jakubovic, *manual do professor, p.12*]

Considerações finais

Ensinar e aprender são funções presentes em todos os sujeitos, alguns deles têm a função de ensinar definida na figura do(a) professor(a); tanto professor(a) como estudante precisam sempre aprender; por vezes o(a) estudante ensina. Ao proceder pela delimitação de um tema, culminou-se em representações possivelmente por exemplos percebidos no desenvolvimento de estudos autônomos no PROFMAT. A persistência em compreender simbologias e procedimentos em determinadas resoluções, me fez observar que para muitos problemas as diferentes formas de representações contribuíam para o entendimento do conteúdo e consequente solução do que era proposto. Aliando isso, às leituras de uma proposta inicial, chegou-se em algumas observações sobre representações em Matemática, como uma forma de ensinar e aprender.

Nas várias leituras para desenvolvimento deste trabalho, verificou-se os diferentes tratamentos (notações, procedimentos, estruturas) tomados para se lidar com um mesmo assunto, que em sua maioria convergiam. Isso foi parte da discussão que instaurou-se sobre as representações no ensino e na aprendizagem de Matemática. Como procurar melhorar a forma em que se ensina e que se aprende através do reconhecimento da importância das representações; algo que pareceu bem desenvolvido e claro nos textos dos autores de referência, mas que está distante dos licenciados e de suas práticas enquanto professores.

Esta pesquisa teve como propósito enfatizar a necessidade de se dar maior destaque às práticas de ensino em geometria, com ênfase para as diferentes formas de representação favorecendo a aprendizagem. O ensino de geometria precisa ser melhor estruturado durante toda a educação básica, de modo que o(a) estudante possa progressivamente aprender a relacionar as abstrações com o real, a utilizar representações e outros recursos geométricos para solucionar problemas de Álgebra ou de Aritmética, percebendo que aprender determinado conteúdo não se trata de memorizar uma receita, mas de ampliar as possibilidades do pensamento a respeito daquilo que se observa.

Para isso, é preciso mudanças que não fiquem presas no pensamento, que se tornem prática. O professor deve compreender que estudar nunca basta, que não cabe se prender sempre às mesmas práticas; as gestões devem ser estruturadas e crescentes, e não ter em seus argumentos apenas campanhas periódicas; tantas outras questões básicas precisam ser resolvidas para que não sejam sempre a desculpa ao que não se fez e à má qualidade do ensino.

Ao pensar e desenvolver sua prática, o professor deve promover variadas formas de usar a linguagem matemática, explorar ao máximo as diferentes representações para uma mesma situação, relacionar conteúdos de diversas áreas (geometria, álgebra, trigonometria, aritmética) incentivar a leitura e a escrita, propor situações que não sejam sempre rotineiras e que exijam interpretação. A escolha do livro didático e seu efetivo uso possuem cada vez mais valor quanto a melhoria da qualidade e ampliação das práticas de ensino e de aprendizagem, pois estes estão cada vez melhor estruturados e apresentam as observações indicadas neste trabalho (indicação presente no Complemento 5.5).

É preciso ensinar conceitos, propriedades (representações simbólicas), associá-los com outras representações, conhecer instrumentos de desenho, desenhar (representações icônicas), criar objetos 3D (representações ativas), identificar formas geométricas no real, construir representações a partir de descrições, descrever e associar propriedades às representações icônicas; ou seja, realizar tratamento e propor transformações entre as várias formas de representar. Quando se faz isso, se ensina e aprende não só geometria, mas também outras áreas da Matemática.

Não é raro encontrarmos estudantes que estão nas últimas séries do Ensino Fundamental com dificuldade para utilizar instrumentos como a régua, o compasso e o transferidor. Alguns deles alegam nunca terem utilizado um transferidor, outros medem, por exemplo, um segmento de $4cm$ a partir do 1 na régua e ao chegarem ao final do segmento em 5 para a escala, assumem que $5cm$ é a medida do segmento. Se até mesmo algo primário é dificuldade para quem está terminando o Ensino Fundamental, praticamente não se ensinou, nem se aprendeu geometria.

Ora, muitos vão às escolas, quando vão, recorrentemente sob as mesmas condições - imposição, lei, obrigação, 'garantia de futuro'. Gastamos nosso tempo ouvindo ou fazendo ouvir quase sempre os mesmos conteúdos e raramente produzimos algo notório. Vivemos acumulando ferramentas, muitas vezes com pouco ou nenhum sentido; e assim não sabemos a/em que se aplica o aglomerado de conceitos, definições, cálculos etc. As perguntas deviam desafiar e uma resposta não seria o principal objetivo, mas o que se produz a respeito das perguntas. Nossas escolas vivem amarradas em uma enormidade de situações políticas, organizacionais, estruturais e os estudantes recebem mais e mais conteúdos para finalidades que não deviam se sobressair frente a tantas outras possibilidades. Ditamos caminhos, condenamo-los a coordenadas e eles pouco fogem; na maioria desistem ou continuam trilhando - mesmo que a contragosto - os rastros que já estão gastos, mas seguem.

Não se pode permanecer pessimista, mesmo diante deste quadro. Caminhos para modificar tal condição, passam pela formação continuada e a busca de novas práticas de ensino e de aprendizagem. Tais considerações refletem um modo de pensar e não devem ser tomadas como prontas; são observações que podem contribuir para novas discussões, buscando o alcance da melhor qualidade no ensino e na aprendizagem em geometria.

Referências Bibliográficas

[1] ÁVILA, GERALDO., *Reflexões sobre o ensino de Geometria*, Revista do Professor de Matemática (RPM nº 71) - SBM. São Paulo: Alciléa Augusto, (2010), pp. 62.

[2] BIGODE, ANTONIO JOSÉ LOPES., *Projeto Velear: matemática*, livro didático. Editora Scipione, São Paulo, (2012), pp. 280.

[3] BOAVIDA, ANA MARIA ROQUE. [*et al.*] *A experiência Matemática no ensino básico*, Lisboa (Portugal), (2008), pp. 71-78. Disponível em: <http://comum.rcaap.pt//handle/10400.26/5566>, acesso em 29 ago 2015.

[4] BRASIL., *A reformulação do ensino médio e as áreas do conhecimento*, Orientações Educacionais Complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais. Disponível em: <http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/CienciasNatureza.pdf>, acesso em 10 dez 2015.

[5] BRASIL., *Parâmetros Curriculares Nacionais: introdução aos parâmetros curriculares nacionais*, Secretaria de Educação Fundamental. MEC/SEF, Brasília, (1997).

[6] CENTURIÓN, MARÍLIA; JAKUBOVIC, JOSÉ., *Matemática: teoria e contexto*, 9º ano. Saraiva, 1ª edição, São Paulo (2012).

[7] DANTE, LUIZ ROBERTO., *Projeto Teláris: Matemática*, Ensino Fundamental. Ática, 1ª edição, São Paulo, (2012), pp. 328.

[8] Dante, Luiz Roberto., *Tudo é matemática*, Ensino Fundamental. Ática, volume 1, São Paulo, (2005), pp. 296.

[9] Del Grande, J. J., *Percepção espacial e geometria primária*, In Lindquist, M. M. e Shulte A. P. Aprendendo e Pensando Geometria. Trad. Hygino H. Domingues. Editora Atual. São Paulo, (1994).

[10] Dell'Isola, Alberto., *Mentes Brilhantes: como desenvolver todo o potencial do seu cérebro*, Editora: Universo dos Livros. São Paulo, (2013), pp. 16.

[11] Duval, Raymond., *Registros de representação semiótica e funcionamento cognitivo do pensamento*, Tradução: Méricles Thadeu Moretti. Revista Eletrônica de Educação Matemática (REVEMAT UFSC/MTM/PPGECT v.7 n.2), p.266-297. Santa Catarina, (2012). Disponível em: <http://dx.doi.org/10.5007/1981-1322.2012v7n2p266>, acesso em 20 dez 2015.

[12] Eves, Howard., *Tópicos de História da Matemática para uso em sala de aula. Geometria*, Tradução de Hygino H. Domingues. São Paulo: Atual. Volume 3, (2014), pp. 75.

[13] Flores, Cláudia Regina., *Olhar, Saber, Representar: Ensaios sobre a representação em perspectiva*, Tese de doutorado. Santa Catarina, (2003), pp. 189.

[14] Gerdes, Paulus, *Etnogeometria: Cultura e o Despertar do Pensamento Geométrico*, Reedição, Instituto Superior de Tecnologias e de Gestão (ISTEG), Moçambique, (2012), pp. 238.

[15] Hefez, Abramo., *Aritmética*, Coleção PROFMAT, SBM, 1ª Edição, Rio de Janeiro, (2013), pp.338.

[16] Júnior, Fernando Dutra, *Desenho Geométrico como Ferramenta de Aprendizagem de Geometria*, artigo. Rio Grande do Sul (2010), pp. 10-24. Disponível em:

<http://www.lume.ufrgs.br/bitstream/handle/10183/29154/000775883.pdf>, acesso em 20 dez 2015.

[17] Kenski, Vani Moreira., *Tecnologias e tempo docente*, Coleção Papirus Educação, São Paulo, (2013), pp.171.

[18] Kobayashi, Maria do Carmo Monteiro., *A construção da geometria pela criança*, Editora da Universidade do Sagrado Coração, Cadernos de divulgação Cultural; 74, (dissertação de mestrado em Educação) Bauru: EDUSC, SP. (2001), pp. 201.

[19] Lima, Elon Lages., *Números e Funções Reais*, SBM, Coleção PROFMAT, Volume único, 1ª Edição, Rio de Janeiro, (2013), pp. 297.

[20] Lorensatti, Edi Jussara Candido., *Linguagem matemática e Língua Portuguesa: diálogo necessário na resolução de problemas matemáticos*, artigo, Revista: CONJECTURA: filosofia e educação (v.14 n. 2 maio/ago. 2009). Disponível em: <http://www.ucs.br/etc/revistas/index.php/conjectura/article/view/17>, acesso em 03 jan 2016.

[21] Lorenzato, Sergio Apparecido., *Para aprender Matemática*, Autores Associados, coleção: formação de professores, Vol 1. 1ª Edição, Campinas, (2006), pp. 139.

[22] Milani, Sebastião Elias., *Historiografia - Linguística de Ferdinand de Saussure*, Editora Kelps, Coleção Grupo Imago - nº 1, Goiânia (2011), pp. 128.

[23] Mol, Rogério Santos., *Introdução à História da Matemática*, Coleção EAD-MATEMÁTICA, Belo Horizonte, CAED-UFMG (2013), pp. 138.

[24] Montoya, Adrián Oscar Dongo., *PIAGET: imagem mental e construção do conhecimento.*, Editora Unesp. São Paulo, (2005). pp. 151.

[25] Morgado, A.C.; Carvalho, P.C.P., *Matemática Discreta*, SBM, Coleção PROFMAT, Volume único, 1ª Edição, Rio de Janeiro, (2014), pp. 80-82.

[26] Muniz Neto, Antonio Caminha., *Geometria*, SBM, Coleção PROFMAT, Volume único, 1ª Edição, Rio de Janeiro, (2013), pp. 502.

[27] Oliveira, Krerley I. M.; Fernández, Adán J. C., *Iniciação à Matemática: um curso com problemas e soluções*, Coleção Olimpíadas de Matemática, SBM, 2ª Edição, Rio de Janeiro, (2010), pp. 295.

[28] Parente, Ulisses Lima., *Produtos Notáveis*, Portal da Matemática, Oitavo Ano. Disponível em: <http://matematica.obmep.org.br/index.php/modulo/ver?modulo=14>, acesso em 06 jan 2016.

[29] Passos, Cármen Lúcia Brancaglion; Nacarato, Adair Menes., *O ensino de geometria no ciclo de alfabetização: um olhar a partir da provinha Brasil*, artigo, v16 n.4, São Paulo, (2014), pp. 1147-1168. Disponível em: <http://revistas.pucsp.br/index.php/emp/article/view/22016>, acesso em 20 dez. 2015.

[30] Pavanello, Regina Maria., *O abandono do ensino da geometria no Brasil: causas e consequências*, artigo, Revista de Educação Matemática (V.1 n.1 1993). Disponível em: <https://www.fe.unicamp.br/revistas/ged/zetetike/article/view/2611/2353>, acesso em 06 jan 2016.

[31] Polezzi, Marcelo., *Como obter o MDC e o MMC sem fazer contas?*, Explorando o Ensino da Matemática, SBM, Atividades Volume 2, Brasília, (2004), pp. 136.

[32] Rogenski, Maria Lucia Cordeiro; Pedroso, Sandra Mara Dias., *O Ensino da Geometria na Educação Básica: Realidade e Possibilidades*, artigo. pp. 16. Disponível em: <http://www.diaadiaeducacao.pr.gov.br/portals/pde/arquivos/44-4.pdf>, acesso em 17 jul. 2015.

[33] ROQUE, T.; CARVALHO, J. B. P., *Tópicos de História da Matemática*, Coleção PROFMAT, SBM, 1ª Edição, Rio de Janeiro, (2012), pp. 450.

[34] SARAVALI, ELIANE GIACHETTO., *PIAGET: Imagem mental e construção do conhecimento*, APRENDER - Caderno de Filosofia e Psicologia da Educação, ano IV - nº 6,(2006), pp. 217-220.

[35] SBM., *Contribuição da SBM para discussão sobre o currículo de matemática*, - Sociedade Brasileira de Matemática. Ensino Fundamental II, Ensino Médio, Licenciatura, (2015). Disponível em: <http://www.sbm.org.br/destaque/contribuicao-da-sbm-para-a-discussao-sobre-curriculo-de-matematica>, acesso em 20 dez 2015.

[36] SILVA, DAYSE BIVAR DA., *Analisando a transformação entre gráficos e tabelas por alunos do 3º e 5º ano do Ensino Fundamental*, Dissertação (Mestrado), Recife, (2012), pp. 125. Disponível em: <http://repositorio.ufpe.br/handle/123456789/12605>, acesso em 06 jan 2016.

[37] TAO, TERENCE., *Como resolver problemas matemáticos - Uma perspectiva pessoal*, SBM; tradução: Paulo Ventura, Coleção do Professor de Matemática, 1ª Edição, Rio de Janeiro, (2013), pp. 2-11.

[38] ZIEMER, NADIÉGI ESTEICI. [*et al.*] *A utilização de registros de representação semiótica para o ensino de matemática na educação básica*, artigo, I Semana da Matemática da UTFPR, (2013). Disponível em: <http://www2.td.utfpr.edu.br/semat/I_semat/Artigos/CO08372213909.pdf>, acesso em 29 ago 2015.