



UNIVERSIDADE FEDERAL DE GOIÁS  
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA

WILLIAN ISAO TOKURA

**Desigualdade de  
Caffarelli-Kohn-Nirenberg e  
solitons de Yamabe gradiente**

Goiânia  
2019

**TERMO DE CIÊNCIA E DE AUTORIZAÇÃO PARA DISPONIBILIZAR  
VERSÕES ELETRÔNICAS DE TESES E DISSERTAÇÕES  
NA BIBLIOTECA DIGITAL DA UFG**

Na qualidade de titular dos direitos de autor, autorizo a Universidade Federal de Goiás (UFG) a disponibilizar, gratuitamente, por meio da Biblioteca Digital de Teses e Dissertações (BDTD/UFG), regulamentada pela Resolução CEPEC nº 832/2007, sem ressarcimento dos direitos autorais, de acordo com a Lei nº 9610/98, o documento conforme permissões assinaladas abaixo, para fins de leitura, impressão e/ou *download*, a título de divulgação da produção científica brasileira, a partir desta data.

1. Identificação do material bibliográfico:     Dissertação     Tese

2. Identificação da Tese ou Dissertação:

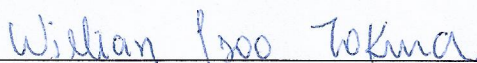
Nome completo do autor: Willian Isao Tokura

Título do trabalho: Desigualdade de Caffarelli-Kohn-Nirenberg e solitons de Yamabe gradiente

3. Informações de acesso ao documento:

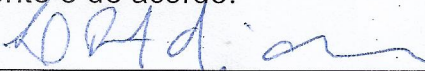
Concorda com a liberação total do documento  SIM     NÃO<sup>1</sup>

Havendo concordância com a disponibilização eletrônica, torna-se imprescindível o envio do(s) arquivo(s) em formato digital PDF da tese ou dissertação.



Assinatura do(a) autor(a)<sup>2</sup>

Ciente e de acordo:

  
Assinatura do(a) orientador(a)<sup>2</sup>

Data: 13 / 06 / 19

<sup>1</sup> Neste caso o documento será embargado por até um ano a partir da data de defesa. A extensão deste prazo suscita justificativa junto à coordenação do curso. Os dados do documento não serão disponibilizados durante o período de embargo.

Casos de embargo:

- Solicitação de registro de patente;
- Submissão de artigo em revista científica;
- Publicação como capítulo de livro;
- Publicação da dissertação/tese em livro.

<sup>2</sup> A assinatura deve ser escaneada.

WILLIAN ISAO TOKURA

# Desigualdade de Caffarelli-Kohn-Nirenberg e solitons de Yamabe gradiente

Tese apresentada ao Programa de Pós-Graduação do Instituto de Matemática e Estatística da Universidade Federal de Goiás como requisito parcial à obtenção do título de Doutor em Matemática.

**Área de concentração:** Geometria Diferencial

**Orientador:** Professor Dr. Levi Rosa Adriano

Goiânia  
2019

Ficha de identificação da obra elaborada pelo autor, através do Programa de Geração Automática do Sistema de Bibliotecas da UFG.

Tokura, Willian Isao

Desigualdade de Caffarelli-Kohn-Nirenberg e solitons de Yamabe gradiente [manuscrito] / Willian Isao Tokura. - 2019.

CIII, 103 f.

Orientador: Prof. Dr. Levi Rosa Adriano.

Tese (Doutorado) - Universidade Federal de Goiás, Instituto de Matemática e Estatística (IME), Programa de Pós-Graduação em Matemática, Goiânia, 2019.

Bibliografia.

Inclui gráfico.

1. Desigualdade de Caffarelli-Kohn-Nirenberg(CKN). 2. Solitons de Yamabe gradiente. 3. Rigidez. 4. Produto torcido. 5. Curvatura escalar. I. Adriano, Levi Rosa, orient. II. Título.

CDU 514.77




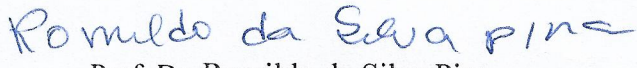
UNIVERSIDADE FEDERAL DE GOIÁS  
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA


Campus Samambaia – Caixa Postal 131 – CEP: 74.001-970 – Goiânia-GO.  
Fones: (62) 3521-1208 e 3521-1137 [www.ime.ufg.br](http://www.ime.ufg.br)

**ATA DA REUNIÃO DA BANCA EXAMINADORA DA DEFESA DE TESE DE WILLIAN ISAO TOKURA** – Ao trigésimo primeiro dia do mês de maio do ano de dois mil e dezenove (31/05/2019), às 12:30 horas, reuniram-se os componentes da Banca Examinadora: Prof. Levi Rosa Adriano - Orientador, Prof. Edcarlos Domingos da Silva, Prof. Romildo da Silva Pina, Prof. Paulo Alexandre Araújo Sousa e Prof. Ernani de Sousa Ribeiro Junior, sob a presidência do primeiro, e em sessão pública realizada no auditório do Instituto de Matemática e Estatística, procederem a avaliação da defesa de tese intitulada: “**Desigualdade de Caffarelli-Kohn-Nirenberg e solitons de Yamabe gradiente**”, em nível de Doutorado, área de concentração em Geometria, de autoria de Willian Isao Tokura, discente do Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal de Goiás. A sessão foi aberta pelo Presidente da Banca, Prof. Levi Rosa Adriano que fez a apresentação formal dos membros da Banca. A seguir, a palavra foi concedida ao autor da tese que, em 45 minutos procedeu a apresentação de seu trabalho. Terminada a apresentação, cada membro da Banca arguiu o examinando, tendo-se adotado o sistema de diálogo sequencial. Terminada a fase de arguição, procedeu-se a avaliação da defesa. Tendo-se em vista o que consta na Resolução nº. 1513 do Conselho de Ensino, Pesquisa, Extensão e Cultura (CEPEC), que regulamenta o Programa de Pós-Graduação em Matemática e procedidas às correções recomendadas, a tese foi **APROVADA** por unanimidade, considerando-se integralmente cumprido este requisito para fins de obtenção do título de **DOCTOR EM MATEMÁTICA**, na área de concentração em Geometria pela Universidade Federal de Goiás. A conclusão do curso dar-se-á quando da entrega na secretaria do PPGM da versão definitiva da tese, com as devidas correções supervisionadas e aprovadas pelo orientador. Cumpridas as formalidades de pauta, às 14:00 horas a presidência da mesa encerrou esta sessão de defesa de tese e para constar eu, Flávia Magalhães Freire, secretária do PPGM, lavrei a presente Ata que, depois de lida e aprovada, será assinada pelos membros da Banca Examinadora em quatro vias de igual teor.

  
Prof. Dr. Levi Rosa Adriano  
Presidente - IME/UFG

  
Prof. Dr. Edcarlos Domingos da Silva  
Membro – IME/UFG

  
Prof. Dr. Romildo da Silva Pina  
Membro – IME/UFG

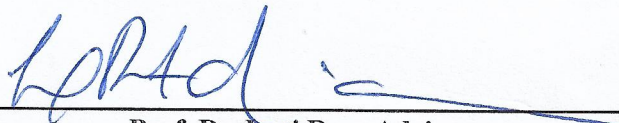
  
Prof. Dr. Paulo Alexandre Araújo Sousa  
Membro – MAT/UFPI

  
Prof. Dr. Ernani de Sousa Ribeiro Junior  
Membro – MAT/UFG

WILLIAN ISAO TOKURA

**DESIGUALDADE DE CAFFARELLI-KOHN-  
NIRENBERG E SOLITONS DE YAMABE  
GRADIENTE**

Tese defendida no Programa de Pós-Graduação do Instituto de Matemática e Estatística da Universidade Federal de Goiás como requisito parcial para obtenção do título de doutor(a) em Matemática, aprovada em 31 de maio de 2019, pela Banca Examinadora constituída pelos professores:



---

**Prof. Dr. Levi Rosa Adriano**  
Instituto de Matemática e Estatística - UFG  
Presidente da Banca



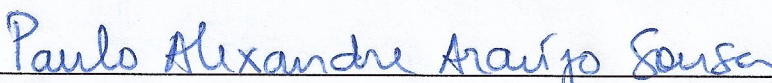
---

**Prof. Dr. Edecarlos Domingos da Silva**  
Instituto de Matemática e Estatística - UFG



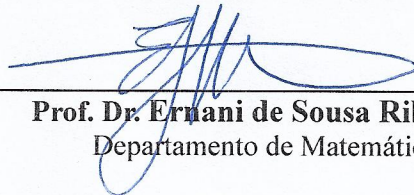
---

**Prof. Dr. Romildo da Silva Pina**  
Instituto de Matemática e Estatística - UFG



---

**Prof. Dr. Paulo Alexandre Araújo Sousa**  
Departamento de Matemática - UFPI



---

**Prof. Dr. Ernani de Sousa Ribeiro Junior**  
Departamento de Matemática - UFC

Todos os direitos reservados. É proibida a reprodução total ou parcial desta obra sem prévia aquiescência por parte do autor, orientador e também da universidade que abarcou o seu desenvolvimento.

**Willian Isao Tokura**

Graduou-se em Licenciatura Matemática pela UFGD-Universidade Federal da Grande Dourados-MS(2010). Durante sua graduação, foi monitor do departamento de matemática da UFGD e bolsista pela COAI. Mestre pela UFG-Universidade Federal de Goiás(2014). Durante o Doutorado na UFG foi bolsista pela CAPES.

À Lilian Satiê Tokura Takita (in memoriam),  
Com o amor que nos une como verdadeiros irmãos.



---

## Agradecimentos

---

Esta tese é resultado de muito esforço e dedicação, e não poderia deixar de registrar aqui minha sincera gratidão a todos que me ajudaram durante o desenvolvimento deste trabalho.

Primeiramente gostaria de agradecer a Deus por ter me dado esta oportunidade e também saúde, coragem, persistência e sabedoria para poder chegar a mais esta conquista.

Aos meus pais Isao e Aparecida, e as minhas irmãs Lilian(in memoriam), Alessandra e Luciene, pelo incentivo, amor e apoio incondicional que sempre me ajudaram em minhas conquistas.

À minha namorada, amiga e companheira, Priscila Marques Kai, pelo apoio durante o desenvolvimento do mesmo.

Ao Professor Levi Rosa Adriano, professor e orientador, por todos os ensinamentos matemáticos que aprendi durante esses 5 anos em que trabalhamos juntos. Diria que no Mestrado entrei aluno e no Doutorado sai pesquisador, graças ao Sr. e a forma com que trabalha.

Ao professor Romildo da Silva Pina, pelos inúmeros conselhos e ideias apresentadas em seminário que resultaram em teoremas nessa Tese.

Agradeço ao colega de Doutorado Marcelo Bezerra Barboza pela amizade, companheirismo e por todas as conversas no café, das quais aprendi muito. É uma das pessoas mais sábias que conheço e um irmão.

Agradeço a todos os amigos e familiares do IME-UFG e de Goiânia, em especial ao Elismar, Mariana, Abiel, Felipe, Paula, Laredo, Poliana e Betânia.

Agradeço aos membros da banca Ernani de Sousa Ribeiro Júnior, Paulo Alexandre Araújo Sousa, Edcarlos Domingos da Silva pelas sugestões e contribuições valiosas para este trabalho. Agradeço, sinceramente, pela presença e pela leitura do trabalho.

Ao professor e amigo Adriano Cavalcante Bezerra pelas aulas motivacionais na graduação e pelo incentivo a fazer o Mestrado na UFG. Suas aulas e ensinamentos fizeram toda diferença para que eu seguisse os estudos em Matemática.

Ao professor Lino Sanabria da FACET-UFGD, pela enorme contribuição de vida e como acadêmico durante a graduação.

Por fim, agradeço ao apoio financeiro da CAPES que me permitiu executar este trabalho.

---

## Resumo

---

Tokura, Willian I. **Desigualdade de Caffarelli-Kohn-Nirenberg e solitons de Yamabe gradiente**. Goiânia, 2019. 103p. Tese de Doutorado. Instituto de Matemática e Estatística, Universidade Federal de Goiás.

Esta tese trata de dois problemas distintos. A saber, estudamos

- (P1) Rigidez de espaços métricos que suportam a desigualdade de CKN;
- (P2) Solitons de Yamabe gradiente com estrutura de produto torcido  $B \times_f F$ .

Para o primeiro problema, provamos que os espaços métricos com medida que suportam a desigualdade de CKN tem crescimento de volume  $n$ -dimensional, isto é, existe uma constante universal  $C_0 > 0$  tal que,  $\mathfrak{m}(B_x(\rho)) \geq C_0 \rho^n, \forall x \in M, \rho > 0$ . Como aplicação, obtemos Teoremas de Rigidez nos seguintes espaços: Variedades Riemannianas, Variedades de Finsler e Espaços de Alexandrov. Para o segundo problema, considerando um soliton de Yamabe gradiente  $(B \times_f F, g, h, \rho)$ , obtemos resultados de trivialização para  $h$  e  $f$  assumindo hipóteses sobre  $B$ . Além disso, sob uma hipótese envolvendo a curvatura de Ricci da base  $Ric_{g_B}$ , provamos estimativas para  $h$ ,  $f$  e para curvatura escalar  $scal_g$ , ademais, no caso particular da função torção, apresentamos uma bela obstrução na construção dos solitons de Yamabe produto torcido. Por fim, utilizando as técnicas de soluções invariantes, classificamos os solitons de Yamabe gradientes com base conformemente plana steady que são invariantes pela ação do grupo de translações de codimensão 1.

### Palavras-chave

Desigualdade de Caffarelli-Kohn-Nirenberg (CKN), Rigidez, Soliton de Yamabe gradiente, Produto torcido, Curvatura escalar, Estimativa de gradiente.

---

## Abstract

---

Tokura, Willian I. **CKN inequality and gradient Yamabe solitons.** Goiânia, 2019. 103p. PhD. Thesis. Instituto de Matemática e Estatística, Universidade Federal de Goiás.

This thesis deals with two distinct problems. Namely, we study

- (P1) Rigidity of metric spaces that support CKN inequality;
- (P2) Gradient Yamabe solitons on top of warped product manifolds  $B \times_f F$ .

For the first problem, we prove that the metric measure spaces that support the CKN inequality have  $n$ -dimensional volume growth, that is, there exists a universal constant  $C_0 > 0$  such that,  $\mathfrak{m}(B_x(\rho)) \geq C_0 \rho^n, \forall x \in M, \rho > 0$ . As application, some rigidity theorems are obtained in the following spaces: Riemannian manifolds, Finsler manifolds and Alexandrov spaces. For the second problem, taking a gradient Yamabe soliton  $(B \times_f F, g, h, \rho)$ , we obtain triviality results for  $h$  and  $f$  by means of some hypotheses on the base  $B$ . Furthermore, under a hypothesis involving the Ricci curvature of the base  $Ric_{g_B}$ , we prove estimates for  $h$ ,  $f$  and for scalar curvature  $scal_g$ , in addition, by means of a warping gradient estimates, we present a beautiful obstruction in the construction of gradient Yamabe solitons on warped product manifolds. Finally, by making use of invariant solution techniques, we classify all steady gradient Yamabe solitons with a conformally flat base that is invariant by the action of a codimension 1 translation group.

### Keywords

Caffarelli-Kohn-Nirenberg (CKN) inequality, Rigidity, Gradient Yamabe solitons, Warped product, Scalar curvature, Gradient estimates

---

# Conteúdo

---

<b>Introdução</b> . . . . .	<b>9</b>
<b>1 Preliminares</b> . . . . .	<b>14</b>
1.1 Produto torcido semi-Riemanniano . . . . .	14
1.2 Princípio do máximo . . . . .	19
1.3 Solitons de Yamabe gradiente . . . . .	21
1.4 Espaços métricos com medida . . . . .	24
1.4.1 Medida de Hausdorff . . . . .	28
1.5 Espaço de Alexandrov . . . . .	30
1.6 Espaço de Finsler . . . . .	35
<b>2 Desigualdade de Caffarelli-Kohn-Nirenberg em espaços métricos</b> . . . . .	<b>40</b>
2.1 Introdução . . . . .	40
2.2 Resultados Principais . . . . .	43
2.3 Demonstração dos resultados principais . . . . .	49
<b>3 Solitons de Yamabe gradiente com base conformemente plana</b> . . . . .	<b>64</b>
3.1 Introdução . . . . .	64
3.2 Soluções invariantes por translação . . . . .	65
3.3 Infinitos exemplos de solitons de Yamabe gradiente steady completo . . . . .	71
3.4 Demonstração dos resultados principais . . . . .	73
<b>4 Propriedades geométricas e analíticas dos solitons de Yamabe gradiente com estrutura de produto torcido</b> . . . . .	<b>81</b>
4.1 Teoremas de Rigidez . . . . .	81
4.2 Estimativa de gradiente tipo Li-Yau para função torção . . . . .	84
4.3 Demonstração dos Resultados principais . . . . .	87
<b>Bibliografia</b> . . . . .	<b>99</b>

---

## Introdução

---

O século XX iniciou-se com grandes avanços na área de análise matemática, em especial na teoria de Equações Diferenciais Parciais. Em meados da década de 30, Sergei Sobolev iniciou os estudos de soluções fracas para as equações hiperbólicas e a minimização de certas integrais variacionais do princípio de Dirichlet. Durante esse período, como ferramenta para resolver tais problemas, Sobolev introduziu o que conhecemos atualmente como espaço de Sobolev, o qual denotamos por  $D^{1,p}(\mathbb{R}^n)$ . Diante desse cenário, as ideias de Sobolev se expandiram rapidamente por conta dos inúmeros modelos procedentes da física e das engenharias que poderiam ser investigadas através de Equações Diferenciais Parciais.

No estudo desse novo objeto  $D^{1,p}(\mathbb{R}^n)$ , assim como qualquer outro conceito importante da matemática, surge o interesse por descrever suas propriedades. Dessa forma, Sobolev em 1936 provou o seguinte resultado.

**Teorema 0.1.** *Seja  $p \in [1, n)$  e  $p^* = \frac{np}{n-p}$ , então*

$$D^{1,p}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow L^{p^*}(\mathbb{R}^n), \quad (0-1)$$

ou seja, o espaço de Sobolev pode ser incluído de maneira contínua nos espaços de Lebesgue. De outra maneira, a equação (0-1) pode ser escrita como

$$\left( \int_{\mathbb{R}^n} |u|^{p^*} dx \right)^{\frac{1}{p^*}} \leq C \left( \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}, \quad \forall u \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n), \quad C \in \mathbb{R}. \quad (0-2)$$

A desigualdade (0-2) é conhecida como desigualdade de Sobolev. A importância da desigualdade (0-2) reside no fato que, por ela é possível extrair certas propriedades para soluções fracas no espaço  $L^{p^*}(\mathbb{R}^n)$ , além de permitir extrair certas informações sobre a função  $u$  por meio de sua derivada.

Como ficou claro depois de um tempo, certos modelos importantes ligados a problemas físicos que envolviam equações diferenciais parciais mais gerais, necessitavam de desigualdades mais gerais que as obtidas por Sobolev. Nesse sentido, Emilio

Gagliardo [25] e Louis Nirenberg [43] obtiveram de maneira independente a seguinte extensão para desigualdade de Sobolev.

**Teorema 0.2.** *Sejam  $p \in (1, n)$ ,  $s < r \leq q = \frac{np}{n-p}$  e  $\theta \in [0, 1]$ , então*

$$\left( \int_{\mathbb{R}^n} |u|^r dx \right)^{\frac{1}{r}} \leq C \left( \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u|^p dx \right)^{\frac{\theta}{p}} \left( \int_{\mathbb{R}^n} |u|^s dx \right)^{\frac{1-\theta}{s}}, \quad \forall u \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n). \quad (0-3)$$

Como podemos observar, as desigualdades (0-2) e (0-3) apresentam afinidade com o espaço Euclidiano  $\mathbb{R}^n$ , visto que elas são satisfeitas em  $\mathbb{R}^n$ . Observando essa peculiaridade Ledoux [36] e Xia [57] iniciaram o estudo das variedades Riemannianas que suportam a desigualdade de Sobolev e Gagliardo-Nirenberg, respectivamente. Os autores provaram que as variedades com curvatura de Ricci não negativa que suportam tais desigualdades, são muito próximas do espaço Euclidiano  $\mathbb{R}^n$ . Mais precisamente, considere

$$GN_{opt}(\mathbb{R}^n)^{-1} = \inf_{u \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n) \setminus \{0\}} \frac{\|u\|_s^{1-\theta} \|\nabla u\|_p^\theta}{\|u\|_r}, \quad S_{opt}(\mathbb{R}^n)^{-1} = \inf_{u \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n) \setminus \{0\}} \frac{\|\nabla u\|_p}{\|u\|_{p^*}},$$

as constantes ótimas para as desigualdades (0-3) e (0-2), respectivamente, onde  $\|\cdot\|_p := \left( \int_{\mathbb{R}^n} |\cdot|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}$ , então toda variedade com Ricci não negativo que suporta (0-2), ou então (0-3), no contexto Riemanniano, com constante  $C$  próximo da constante ótima definida acima, é difeomorfa ao espaço Euclidiano  $\mathbb{R}^n$ ; e no caso em que  $C$  é igual a constante ótima temos que a variedade é isométrica à  $\mathbb{R}^n$ .

Dentre as famílias mais gerais de desigualdades, Caffarelli, Kohn e Nirenberg (CKN) provam que, sob um regime de parâmetros  $n, p, q, r, \alpha, \beta, \sigma$  e  $a$  (veja Teorema 2.1), existe uma constante  $C$  tal que

$$\left( \int_{\mathbb{R}^n} |x|^{\gamma r} |u|^r dx \right)^{\frac{1}{r}} \leq C \left( \int_{\mathbb{R}^n} |x|^{\alpha p} |\nabla u|^p dx \right)^{\frac{a}{p}} \left( \int_{\mathbb{R}^n} |x|^{\beta q} |u|^q dx \right)^{\frac{1-a}{q}}, \quad \forall u \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n).$$

Como podemos observar, essa desigualdade generaliza as desigualdades de Sobolev e Gagliardo-Nirenberg.

Motivado pelos resultados acima de Ledoux e Xia, e pelo fato da desigualdade de CKN depender apenas da função distância e de uma medida, nos propomos a estudar no Capítulo 2 dessa tese os espaços métricos com medida  $(X, d, \mathbf{m})$  que suportam a desigualdade de CKN, como consequência, estendemos os resultados de Ledoux e Xia para desigualdade de CKN em três contextos: variedades Riemannianas, variedades de Finsler e espaços de Alexandrov (veja Corolário 2.7, Corolário 2.8, Teorema 2.12, Teorema 2.14, Teorema 2.17 e Teorema 2.19).

Na segunda parte deste trabalho, focamos nossa atenção para os solitons de Yamabe gradiente com estrutura de produto torcido. Tais solitons são pontos estacionários do fluxo de Yamabe.

O estudo do fluxo de Yamabe iniciou-se em 1989 com o trabalho de Hamilton [28], onde o mesmo, definiu o fluxo de Yamabe como sendo uma equação de evolução no espaço das métricas Riemannianas, que sob vários aspectos se comporta como uma equação do calor não-linear. Tal fluxo é descrito pela equação:

$$\frac{\partial g}{\partial t}(t) = -scal_{g(t)}g(t), \quad g_0 = g(0), \quad (0-4)$$

onde  $scal_{g(t)}$  denota a curvatura escalar na métrica  $g(t)$ .

Duas linhas de pesquisa derivaram deste artigo de Hamilton. A primeira tem como objetivo entender o comportamento assintótico e convergência do fluxo (0-4). Essa direção levou Hamilton a conjecturar inicialmente que dado uma métrica inicial  $g_0$ , o fluxo convergia para uma métrica conforme de curvatura escalar constante. Isso foi provado em alguns contextos, veja por exemplo [12, 61].

A segunda linha de pesquisa focou no estudo dos pontos (ou métricas) estacionárias do fluxo (0-4), tais pontos estacionários gozam da propriedade de preservar a geometria inicial  $g_0$  ao longo do fluxo (0-4) e recebem o nome de solitons de Yamabe gradiente.

**Definição 0.3.** *( $M^n, g, h, \rho$ ) é um soliton de Yamabe gradiente se existir uma função diferenciável  $h : M \rightarrow \mathbb{R}$ , tal que*

$$(scal_g - \rho)g = Hess_g(h), \quad \rho \in \mathbb{R}^n, \quad (0-5)$$

onde  $scal_g$  denota a curvatura escalar na métrica  $g$ . Tal soliton é dito *expanding*, *steady* e *shirinking* se  $\rho < 0$ ,  $\rho = 0$ ,  $\rho > 0$ , respectivamente.

Em [13], Brozos-Vázquez *et al.* fornecem uma estrutura especial de produto torcido para os solitons de Yamabe gradiente, este resultado estabelece que.

**Teorema 0.4.** ([13]) *Um soliton de Yamabe gradiente  $(M^n, g, h, \rho)$  com  $|\nabla h| \neq 0$ , é localmente isométrico ao produto torcido*

$$\left( (-\varepsilon, \varepsilon), dt^2 \right) \times_{|\nabla h|} \left( N^{n-1}, g_N \right),$$

onde  $(N^{n-1}, g_N)$  é uma variedade semi-Riemanniana de curvatura escalar constante.

Por outro lado, de Sousa e Pina em [22], estudaram os solitons de Ricci gradiente com estrutura de produto torcido e provaram que a função potencial depende



apenas da base ou a função torção é constante. Utilizando a mesma técnica é possível provar tal fato no contexto dos solitons de Yamabe.

Estes resultados tornam interessante uma investigação mais detalhada dos solitons de Yamabe gradiente com estrutura de produto torcido  $B \times_f F$ , com curvatura escalar da fibra constante e função potencial dependendo apenas da base.

Recentemente, os espaços conformemente planos se tornaram de grande interesse para exibir exemplos de solitons de Yamabe gradiente steady. Em [42], Neto e Tenenblat trataram o caso  $(\mathbb{R}^n, \frac{1}{\varphi^2}g_0)$ , onde  $g_0$  é a métrica semi-Euclidiana canônica, e obtiveram as soluções steady que são invariantes pela ação do grupo de translações de dimensão  $(n - 1)$ . A mesma técnica é usada para obter todas as soluções invariantes de solitons de Ricci gradiente steady, veja [9].

No Capítulo 3, motivados pelo trabalho de Neto [42], focaremos nossa atenção para o produto torcido  $B^n \times_f F^d$ , onde a base é conforme ao espaço semi-Euclidiano de dimensão  $n$ , invariante pela ação de um grupo de translação  $(n - 1)$ -dimensional e como resultado, caracterizamos todos os solitons steady. Além disso, obtemos uma método para construir infinitos exemplos explícitos de solitons de Yamabe gradiente steady geodesicamente completo com base conforme ao espaço de Lorentz (veja Exemplo 3.5).

No Capítulo 4, passamos a explorar resultados de rigidez de solitons de Yamabe gradiente com estrutura de produto torcido, nosso ponto de partida é o seguinte resultado (veja Lema 3.10),

**Proposição 0.5.**  $(B^n \times_f F^d, g, \tilde{h}, \rho)$  é um soliton de Yamabe gradiente se, e somente se,  $(B^n, g_B, h, \lambda)$  é um quase soliton de Yamabe gradiente com função soliton

$$\lambda = -\frac{\lambda_F}{f^2} + \frac{2d}{f}\Delta f + \frac{d(d-1)}{f^2}g_B(\nabla f, \nabla f) + \rho, \quad (0-6)$$

e curvatura escalar

$$\text{scal}_{g_B} = \frac{1}{f}g_B(\nabla f, \nabla h) + \lambda. \quad (0-7)$$

De modo a explorar as equações (0-6) e (0-7), passamos a combinar o princípio do máximo com tais equações para obter resultados de trivialização para as funções  $f$  e  $h$ .

Entre outras coisas, provamos que

**Teorema 0.6.** *Todo soliton de Yamabe gradiente  $(B \times_f F, g, \tilde{h}, \rho)$  com base compacta é trivial, i.e.  $\tilde{h}$  é constante.*

Além disso, trocando a hipótese de compacidade da base pela limitação da função  $f$  obtemos

**Teorema 0.7.** *Seja  $(B \times_f F, g, \tilde{h}, \rho)$  um soliton de Yamabe gradiente com curvatura escalar da base  $\text{scal}_{g_B} \geq \rho - \frac{\lambda_F}{f^2}$ . Se  $f$  atinge seu máximo, então  $f$  é constante.*

Prosseguindo, sob uma hipótese envolvendo a curvatura de Ricci da base  $Ric_{g_B}$ , provamos estimativas para  $h$ ,  $f$  e para curvatura escalar  $scal_g$ .

Ademais, no caso particular da função torção, apresentamos uma bela obstrução na construção dos Yamabe solitons produto torcido. Tais resultados estabelecem que

**Corolário 0.8.** *Não existe soliton de Yamabe gradiente completo  $(B^n \times_f F^d, g, \tilde{h}, \rho)$  satisfazendo*

$$Ric_{g_B} + Hess_{g_B} w - \frac{1}{m} dw \otimes dw \geq 0, \quad scal_{g_B} = cte \leq \rho, \quad \lambda_F < 0, \quad \text{onde } w = -\frac{h}{2d}.$$

**Corolário 0.9.** *Não existe soliton de Yamabe gradiente completo  $(B^n \times_f F^d, g, \tilde{h}, \rho)$  satisfazendo*

$$Ric_{g_B} + Hess_{g_B} w - \frac{1}{m} dw \otimes dw \geq 0, \quad scal_{g_B} = cte < \rho, \quad \lambda_F = 0, \quad \text{onde } w = -\frac{h}{2d}.$$

A fim de facilitar para o leitor que queira ler separadamente um dos temas, dividimos esse trabalho seguindo a ordem de dependência descrita a seguir

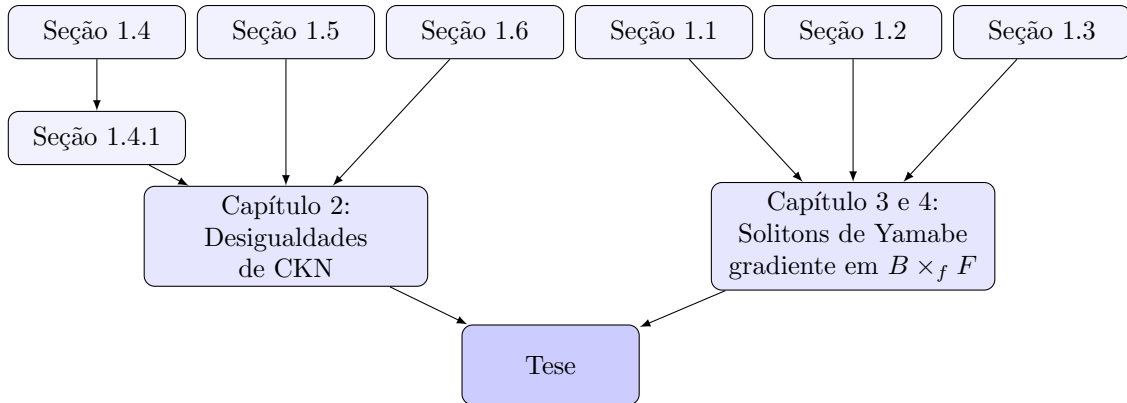


Figura 1: Quadro de dependência dos conteúdos dessa Tese.

---

# Preliminares

---

Neste capítulo, iremos estabelecer as notações e recordar alguns conceitos e fatos, necessários ao bom entendimento e desenvolvimento dos capítulos seguintes. Omitiremos a demonstração de alguns dos resultados, mas em todo o texto ficará clara a referência para obter as justificativas.

De início, assumiremos que o leitor esteja familiarizado com noções fundamentais de geometria Riemanniana; como métrica, conexão, tensor, campo de vetores e pullback.

## 1.1 Produto torcido semi-Riemanniano

Recordamos que um *tensor métrico* sobre uma variedade diferenciável  $M$  é um  $(0, 2)$ -tensor simétrico  $g$  sobre  $M$ , de modo que  $g_p$  é não degenerado para todo  $p \in M$ .

**Definição 1.1.** *Uma variedade semi-Riemanniana é um par  $(M, g)$ , onde  $M$  é uma variedade diferenciável e  $g$  é um tensor métrico de índice<sup>1</sup> constante sobre  $M$ .*

Sejam  $(B, g_B)$ ,  $(F, g_F)$  duas variedades semi-Riemannianas e considere uma função diferenciável  $f : B \rightarrow (0, \infty)$ .

**Definição 1.2.** ([46]) *Um produto torcido  $(B \times F, g)$  é uma variedade produto  $B \times F$ , munida do tensor métrico*

$$g = \pi^* g_B + (f \circ \pi)^2 \sigma^* g_F, \quad (1-1)$$

onde  $\pi$  e  $\sigma$  representam as projeções de  $B \times F$  sobre  $B$  e  $F$ , respectivamente. Denotaremos tal variedade por  $B \times_f F$  e chamaremos  $B$  de base e  $F$  de fibra.

As seguintes considerações são feitas.

---

<sup>1</sup>O índice do tensor métrico  $g$  é a maior dimensão de um subespaço  $W$  de  $T_x M$  de modo que  $V \in W$  satisfaz  $g(V, V) < 0$ .

- (a) Se  $f \equiv 1$ , dizemos que  $(B \times F, g)$  é um produto Riemanniano usual.
- (b) Para cada  $q \in F$ , a aplicação  $\pi|_{(B \times \{q\})}$  é uma isometria sobre  $B$ .
- (c) Para cada  $p \in B$ , a aplicação  $\sigma|_{(\{p\} \times F)}$  é uma homotetia sobre  $F$ , com coeficiente escalar  $f^{-1}$ .
- (d) Se  $h \in C^\infty(B)$ , então o levantamento de  $h$  para  $B \times F$  é definido por  $\tilde{h} = h \circ \pi$ .
- (e) Seja  $V \in T_p B$ ,  $p \in B$  e  $q \in F$ , então o levantameto  $\tilde{V}$  de  $V$  para  $(p, q)$  é o único vetor em  $T_{(p,q)}(B \times F)$ , tal que  $d\pi(\tilde{V}) = V$ .
- (f) Para um campo  $X \in \Gamma(TB)$ , o levantamento de  $X$  para  $B \times F$  é o campo  $\tilde{X}$ , tal que o valor em  $(p, q)$  é o levantamento de  $X_p$  para  $(p, q)$ .
- (g) Se  $V \in T_{(p,q)}(B \times F)$ , denotaremos por  $nor(V) \in T_{(p,q)}(B \times q)$  e  $tan(V) \in T_{(p,q)}(p \times F)$  as componentes de  $V$  pela decomposição  $T_{(p,q)}(B \times F) = T_{(p,q)}(B \times q) \oplus T_{(p,q)}(p \times F)$ .
- (h) O espaço dos levantamentos de  $B$  é denotado por  $\mathcal{L}(B)$ . De maneira similar, denotamos por  $\mathcal{L}(F)$  o espaço dos levantamentos de  $F$ .

**Observação 1.3.** *Funções, vetores tangentes e campos diferenciáveis sobre  $F$  podem ser levantados para  $B \times F$  de maneira similar usando a projeção  $\sigma$ .*

Uma vez que os conceitos de gradiente, Hessiana e Laplaciano de uma função  $h : M \rightarrow \mathbb{R}$  são recorrentes em geometria, vamos apresentar a seguir suas definições.

**Definição 1.4.** *Seja  $(M^n, g)$  uma variedade semi-Riemanniana e  $h \in C^\infty(M)$  uma função diferenciável em  $M$ , então temos as seguintes definições:*

- O gradiente de  $h$ , denotado por  $\nabla_g h$ , é dado por

$$dh(X) = g(\nabla_g h, X), \quad \forall X \in \Gamma(TM).$$

- A Hessiana de  $h$  é dada por

$$Hess_g h(X, Y) = g(\nabla_X \nabla_g h, Y).$$

- O Laplaciano de  $h$ , denotado por  $\Delta_g h$ , é dado por

$$\Delta_g h = \sum_{k,l}^n g^{kl} Hess_g h(E_k, E_l).$$

Considere  $(B \times F, g)$  uma variedade produto torcido e  $h : B \rightarrow \mathbb{R}$  uma função diferenciável em  $B$ . O resultado a seguir mostra a expressão do gradiente, da Hessiana e do Laplaciano para função levantamento  $\tilde{h} = h \circ \pi : B \times F \rightarrow \mathbb{R}$ .

**Proposição 1.5.** *Seja  $(B^n \times_f F^d, g)$  uma variedade produto torcido e  $h \in C^\infty(B)$ , então*

$$(a) \quad \nabla_{g_B} h = d\pi(\nabla_g \tilde{h}).$$

$$(b) \quad Hess_g \tilde{h} = (Hess_{g_B} h) \circ \pi.$$

$$(c) \quad \Delta_g \tilde{h} = \left[ \Delta_{g_B} h + \frac{g_B(\nabla_{g_B} h, \nabla_{g_B} f)}{f} d \right] \circ \pi.$$

*Demonstração.* Para o primeiro item, tome  $\tilde{V} \in \mathcal{L}(F)$ , como  $d\pi(\tilde{V}) = 0$ , temos que

$$g(\nabla_g \tilde{h}, \tilde{V}) = \tilde{V}(\tilde{h}) = d\pi(\tilde{V})\tilde{h} = 0.$$

Assim,  $\nabla_g \tilde{h}$  tangencia  $B$ . Dessa forma, se  $\tilde{W} \in \mathcal{L}(B)$ , obtemos

$$g_B(d\pi(\nabla_g \tilde{h}), d\pi(\tilde{W})) = g(\nabla_g \tilde{h}, \tilde{W}) = \tilde{W}(\tilde{h}) = d\pi(\tilde{W})\tilde{h} = g_B(\nabla_{g_B} h, d\pi(\tilde{W})).$$

Logo,  $\nabla_{g_B} h = d\pi(\nabla_g \tilde{h})$ .

Para o item (b), considere  $\tilde{X}, \tilde{Y} \in \mathcal{L}(B)$ . Assim,

$$\begin{aligned} Hess_g \tilde{h}(\tilde{X}, \tilde{Y}) &= g(\nabla_{\tilde{X}} \nabla_g \tilde{h}, \tilde{Y}), \\ &= \tilde{X}g(\nabla_g \tilde{h}, \tilde{Y}) - g(\nabla_g \tilde{h}, \nabla_{\tilde{X}} \tilde{Y}), \\ &= Xg_B(\nabla_{g_B} h, Y) \circ \pi - g_B(\nabla_{g_B} h, \nabla_X Y) \circ \pi, \\ &= (Hess_{g_B} h)(X, Y) \circ \pi. \end{aligned}$$

Para o item (c), considere os referenciais ortonormais  $\{\tilde{X}_i\}_{i=1}^{n=\dim(B)}$  e  $\{\tilde{W}_i\}_{i=1}^{d=\dim(F)}$  em  $B$  e  $F$ , respectivamente. Dessa forma,

$$\begin{aligned} \Delta_g \tilde{h} &= \sum_{i=1}^n g(\nabla_{\tilde{X}_i} \nabla_g \tilde{h}, \tilde{X}_i) + \sum_{j=n+1}^{n+d} g(\nabla_{\tilde{W}_j} \nabla_g \tilde{h}, \tilde{W}_j), \\ &= \sum_{i=1}^n g_B(\nabla_{X_i}^B \nabla_{g_B} h, X_i) \circ \pi + \sum_{j=n+1}^{n+d} \nabla_g \tilde{h}(\log(\tilde{f}))g(\tilde{W}_j, \tilde{W}_j), \\ &= (\Delta_{g_B} h) \circ \pi + d \frac{\nabla_{g_B} h(f)}{f} \circ \pi, \end{aligned}$$

na passagem da primeira para segunda linha utilizamos a expressão da conexão descrita na proposição a seguir.  $\square$

Denote por  $\nabla$ ,  $\nabla^B$  e  $\nabla^F$  as conexões de Levi-Civita de  $B \times F$ ,  $B$  e  $F$ , respectivamente. A proposição a seguir permite relacionar as conexões  $\nabla$ ,  $\nabla^B$  e  $\nabla^F$  em campos nos levantamentos  $\mathcal{L}(B)$  e  $\mathcal{L}(F)$ .

**Proposição 1.6.** ([46]) *Seja  $(B \times_f F, g)$  uma variedade produto torcido e  $\tilde{X}, \tilde{Y} \in \mathcal{L}(B)$ ,  $\tilde{V}, \tilde{W} \in \mathcal{L}(F)$ , então*

- (a)  $\nabla_{\tilde{X}} \tilde{Y} \in \mathcal{L}(B)$  é o levantamento de  $\nabla_X^B Y \in \Gamma(TB)$ ;
- (b)  $\nabla_{\tilde{X}} \tilde{V} = \nabla_{\tilde{V}} \tilde{X} = \tilde{X}(\log(f \circ \pi))\tilde{V}$ ;
- (c)  $\text{nor}(\nabla_{\tilde{V}} \tilde{W}) = -g(\tilde{V}, \tilde{W})\nabla_g(\log(f \circ \pi))$ ;
- (d)  $\text{tan}(\nabla_{\tilde{V}} \tilde{W}) \in \mathcal{L}(F)$  é o levantamento de  $\nabla_V^F W \in \Gamma(TF)$ .

Considere  $(M^n, g)$  uma variedade semi-Riemanniana com conexão de Levi-Civita  $\nabla$ , então a aplicação

$$R : \Gamma(TM) \times \Gamma(TM) \times \Gamma(TM) \rightarrow \Gamma(TM),$$

definida por

$$R(X, Y)Z = \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X, Y]} Z,$$

é um  $(1, 3)$  tensor, dito *Tensor Curvatura de Riemann*. Tal tensor desempenha fundamental importância na geometria Riemanniana, pois permite definir dois conceitos de curvatura em  $M$ .

**Definição 1.7.** *O Tensor de Ricci de uma variedade semi-Riemanniana  $(M^n, g)$ , denotado por  $Ric_g$  é um  $(0, 2)$  Tensor simétrico definido por*

$$Ric_g(X, Y) = \text{Traço} \{Z \rightarrow R(Z, X)Y\},$$

ou equivalentemente,

$$Ric_g(X, Y) = \sum_{l=1}^n \varepsilon_l \langle R(E_l, X)Y, E_l \rangle,$$

onde  $\{E_i\}_{i=1}^n$  é uma base ortonormal e  $\varepsilon_l = g(E_l, E_l)$ .

**Definição 1.8.** *A curvatura escalar de uma variedade semi-Riemanniana  $(M^n, g)$ , denotada por  $scal_g$  é definida como a contração do Tensor de Ricci, ou seja,*

$$scal_g = \sum_{k,l} g^{kl} Ric_g(E_i, E_j).$$

A seguir apresentamos a expressão do Tensor de Ricci e da curvatura escalar na métrica produto torcido.

**Proposição 1.9.** *Seja  $(B^n \times_f F^d, g)$  uma variedade produto torcido. Se  $\tilde{X}, \tilde{Y} \in \mathcal{L}(B)$  e  $\tilde{V}, \tilde{W} \in \mathcal{L}(F)$ , então*

$$(a) \quad Ric_g(\tilde{X}, \tilde{Y}) = [Ric_{g_B}(X, Y) - (d/f)Hess_{g_B}f(X, Y)] \circ \pi;$$

$$(b) \quad Ric_g(\tilde{X}, \tilde{V}) = 0;$$

$$(c) \quad Ric_g(\tilde{V}, \tilde{W}) = Ric_{g_F}(V, W) \circ \sigma - [\{f\Delta_{g_B}f + (d-1)|\nabla_{g_B}f|^2\} \circ \pi] \sigma^*g_F(V, W).$$

*Demonstração.* Veja [46]. □

**Proposição 1.10.** *Seja  $(B^n \times_f F^d, g)$  uma variedade produto torcido, então a curvatura escalar no produto torcido é dado por*

$$scal_g = \frac{1}{f^2 \circ \pi} [scal_{g_F} \circ \sigma] + \left[ scal_{g_B} - 2d\frac{\Delta_{g_B}f}{f} - d(d-1)\frac{|\nabla_{g_B}f|^2}{f^2} \right] \circ \pi.$$

*Demonstração.* Considere  $\{E_1, E_2, \dots, E_n, \frac{E_{n+1}}{f}, \dots, \frac{E_{n+d}}{f}\}$  uma base ortonormal em  $B \times F$ . Pelo item (a) da Proposição 1.9 e pela definição da curvatura de Ricci, temos que

$$\begin{aligned} \sum_{i,j} g^{ij} Ric_g(E_i, E_j) &= \sum_{i,j} g_B^{ij} Ric_{g_B}(E_i, E_j) \circ \pi - \sum_{i,j} g_B^{ij} (d/f) Hess_{g_B}f(E_i, E_j) \circ \pi, \\ &= scal_{g_B} \circ \pi - (d/f)\Delta_{g_B}f \circ \pi. \end{aligned}$$

Por outro lado, pelo item (c) da Proposição 1.9, temos que

$$\begin{aligned} \sum_{i,j} g^{ij} Ric_g\left(\frac{E_i}{f}, \frac{E_j}{f}\right) &= \sum_{i,j} g_F^{ij} Ric_{g_F}\left(\frac{E_i}{f}, \frac{E_j}{f}\right) \circ \sigma + \\ &\quad - \sum_{i,j} g_F^{ij} [\{f\Delta_{g_B}f + (d-1)|\nabla_{g_B}f|^2\} \circ \pi] g_F\left(\frac{E_i}{f}, \frac{E_j}{f}\right), \\ &= \frac{scal_{g_F} \circ \sigma}{f^2 \circ \pi} - d\frac{\Delta_{g_B}f}{f} \circ \pi - d(d-1)\frac{|\nabla_{g_B}f|^2}{f^2} \circ \pi. \end{aligned}$$

Dessa forma, utilizando a definição da curvatura escalar, obtemos

$$scal_g = \frac{1}{f^2 \circ \pi} [scal_{g_F} \circ \sigma] + \left[ scal_{g_B} - 2d\frac{\Delta_{g_B}f}{f} - d(d-1)\frac{|\nabla_{g_B}f|^2}{f^2} \right] \circ \pi,$$

que é a expressão desejada. □

## 1.2 Princípio do máximo

O princípio do máximo é baseado na seguinte observação: se uma função  $u : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  é duas vezes diferenciável e satisfaz

$$Tu = u''(x) + c(x)u'(x) \geq 0,$$

em  $(a, b)$ , onde  $c$  é uma função limitada, então  $u$  não pode atingir seu máximo em  $(a, b)$ , a menos que  $u$  seja constante.

Para memorizar o resultado acima, podemos pensar na parábola  $u(x) = x^2$  em  $[-1, 1]$  com  $c(x) \equiv 0$ , nesse caso temos que  $Tu = 2 \geq 0$ , o que comprova que  $u$  atinge seu máximo apenas em  $x = \pm 1$ .

O resultado acima pode ser estendido para dimensões mais altas, assim como operadores mais gerais. Para isso, considere um domínio conexo  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  e defina o operador  $L$  por

$$Lu = \sum_{ij} a_{ij}(x) \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_i b_i(x) \frac{\partial u}{\partial x_i} + c(x)u, \quad a_{ij} = a_{ji}, \quad (1-2)$$

onde  $x = (x_1, \dots, x_n) \in \Omega \subset \mathbb{R}^n$  e  $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  é uma função duas vezes diferenciável.

O operador  $L$  é dito elíptico em  $x \in \Omega$  se os coeficientes da matriz  $(a_{ij}(x))$  são positivos, isto é, se  $\lambda(x)$ ,  $\Lambda(x)$  denotam respectivamente o menor e o maior autovalor de  $(a_{ij}(x))$ , então

$$0 < \lambda(x)|\xi|^2 \leq \sum_{ij} a_{ij}(x)\xi_i\xi_j \leq \Lambda(x)|\xi|^2, \quad \xi = (\xi_1, \dots, \xi_n) \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}.$$

Se  $\lambda(x) > 0$  em  $\Omega$ , então dizemos que  $L$  é elíptico. No caso em que  $\frac{\Lambda}{\lambda}$  é limitado em  $\Omega$  dizemos que  $L$  é uniformemente elíptico em  $\Omega$ .

O domínio  $\Omega$  satisfaz a condição da esfera interior em  $x_0 \in \partial\Omega$  se existe uma bola  $B \subset \Omega$  com  $x_0 \in \partial B$ .

**Lema 1.11.** ([27]) *Seja  $L$  um operador uniformemente elíptico,  $c \equiv 0$  e  $Lu \geq 0$  em  $\Omega$ . Considere  $x_0 \in \partial\Omega$  tal que*

- (a)  $u$  é contínua em  $x_0$ ;
- (b)  $u(x_0) > u(x)$  para todo  $x \in \Omega$ ;
- (c)  $\partial\Omega$  satisfaz a condição da esfera interior em  $x_0$ .



Então a derivada de  $u$  com respeito a direção  $\nu$  normal à fronteira  $\partial\Omega$  em  $x_0$ , se existir, satisfaz

$$\frac{\partial u}{\partial \nu}(x_0) > 0.$$

Caso  $c \leq 0$  e  $\frac{c}{\lambda}$  é limitado, a mesma conclusão é válida se assumirmos que  $u(x_0) \geq 0$ .

**Teorema 1.12.** *Seja  $L$  um operador uniformemente elíptico com  $c = 0$  e  $Lu \geq 0$  ( $Lu \leq 0$ ) em  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ . Se  $u$  atinge seu máximo (mínimo) no interior de  $\Omega$ , então  $u$  é constante.*

*Demonstração.* Faremos a demonstração apenas para o caso em que  $u$  assume máximo, o caso em que  $u$  assume mínimo é análogo. Suponha por contradição que  $u$  é não constante e atinge seu máximo  $M$  no interior de  $\Omega$ , então o conjunto definido por

$$\Omega^- := \{x \in \Omega; u(x) < M\},$$

satisfaz  $\partial\Omega^- \cap \Omega \neq \emptyset$ . Tome um ponto  $x_0 \in \Omega^-$  de modo que a distância de  $x_0$  até  $\partial\Omega^-$  seja menor que a distância de  $x_0$  até  $\partial\Omega$  e considere a maior bola  $B \subset \Omega^-$  tendo  $x_0$  como centro. Então  $u(y) = M$  para algum  $y \in \partial B$  e  $u < M$  em  $B$ . Segue do Lema 1.11 que  $\frac{\partial u}{\partial \nu}(y) \neq 0$ , mas isso é uma contradição pois

$$y \in \partial B \subset \partial\Omega^- = \{x \in \Omega; u(x) = M\}.$$

□

Para o caso em que  $c \leq 0$  e  $\frac{c}{\lambda}$  é limitado, Gilbarg e Trudinger em [27], pg. 35 obtém o seguinte resultado.

**Teorema 1.13.** *Seja  $L$  um operador uniformemente elíptico com  $c \leq 0$ ,  $\frac{c}{\lambda}$  limitado e  $Lu \geq 0$  ( $Lu \leq 0$ ) em  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ . Então  $u$  não pode atingir um máximo não negativo (mínimo não positivo) no interior de  $\Omega$ , a menos que  $u$  seja constante.*

*Demonstração.* A demonstração é análoga ao Teorema 1.12, basta considerar o caso  $c \leq 0$  e  $\frac{c}{\lambda}$  limitado no Lema 1.11. □

**Definição 1.14.** *Dizemos que o operador  $L$  satisfaz o princípio do máximo (mínimo) fraco em  $\Omega$  se, para toda função  $u \in C^2(\Omega)$  com  $u^* = \sup_{\Omega} u < \infty$  ( $u_* = \inf_{\Omega} u > -\infty$ ), existe uma seqüência de pontos  $\{x_k\} \subset \Omega$  satisfazendo*

$$(a) \quad u(x_k) > u^* - \frac{1}{k} \quad \left( u(x_k) < u_* + \frac{1}{k} \right),$$

$$(b) \quad Lu(x_k) < \frac{1}{k} \quad \left( Lu(x_k) > -\frac{1}{k} \right).$$

Recentemente, Pigola et. al. em [49] consideraram o caso em que  $c(x) \equiv 0$ ,  $a_{ij}(x) = g^{ij}(x)$  e  $b_i(x) = -\sum_k g^{ik}(x) \frac{\partial f}{\partial x_k}$ , onde  $g^{ij}(x)$  são os coeficientes inversos da métrica  $g_{ij}$  e  $f \in C^2(\Omega)$ . Nesse caso o operador  $L$  se torna

$$\Delta_f u = \sum_{ij} g^{ij}(x) \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} - \sum_i g^{ik}(x) \frac{\partial f}{\partial x_k} \frac{\partial u}{\partial x_i}.$$

O operador acima é denominado drifting Laplaciano de  $u$ .

Como resultado obtiveram, o seguinte resultado

**Teorema 1.15.** ([49]) *Seja  $(M, g)$  uma variedade Riemanniana completa satisfazendo o seguinte crescimento de volume*

$$\frac{r}{\log(\text{vol}_f(B_r))} \in L^1((0, \infty)), \quad \text{onde } \text{vol}_f(B_r) = \int_{B_r} e^{-f} dv.$$

*Então o princípio do máximo fraco para o drifting Laplaciano  $\Delta_f$  é satisfeito.*

## 1.3 Solitons de Yamabe gradiente

Duas métricas  $g$  e  $\bar{g}$  em  $M$  são ditas conformes se existe uma função diferenciável  $\varphi : M \rightarrow (0, \infty)$ , tal que

$$\bar{g}(X, Y) = \frac{1}{\varphi^2} g(X, Y).$$

Seja  $(M^n, g)$ ,  $n > 2$  uma variedade Riemanniana e  $\bar{g} = \frac{1}{\varphi^2} g$  uma métrica conforme à  $g$ , então a curvatura escalar  $scal_{\bar{g}}$  é dada por ([11]):

$$scal_{\bar{g}} = \varphi^2 scal_g + (n-1) (2\varphi \Delta_g \varphi - n |\nabla_g \varphi|^2).$$

Em 1982, Richard Hamilton definiu e estudou o fluxo de Yamabe como uma ferramenta para resolver o seguinte problema:

**Problema de Yamabe** ([60]): *Dada uma variedade Riemanniana compacta  $(M^n, g)$ ,  $n > 2$ , existe uma métrica  $\bar{g} = \frac{1}{\varphi^2} g$  para o qual  $scal_{\bar{g}}$  seja constante?*

O fluxo de Yamabe é inteiramente análogo a equação do calor no contexto de métricas, e a grosso modo tenta uniformizar a curvatura escalar inicial  $scal_{g_0}$  ao longo do fluxo. Tal fluxo é descrito pela equação:

$$\frac{\partial g}{\partial t}(t) = -scal_{g(t)} g(t), \quad g_0 = g(0), \quad (1-3)$$

onde  $scal_{g(t)}$  representa a curvatura escalar na métrica  $g(t)$ .

Hamilton conjecturou inicialmente que dado uma métrica inicial, o fluxo converge para uma métrica conforme de curvatura escalar constante. Isso foi provado em alguns contextos, veja por exemplo [12, 61].

O comportamento assintótico do fluxo de Yamabe foi estudado por Chow em [20]. Entre outras coisas, Chow mostrou que o fluxo converge para uma métrica de curvatura escalar constante se a métrica inicial  $g_0$  for conformemente plana e a curvatura de Ricci inicial  $Ric_{g_0}$  for positiva.

Tão importante quanto entendermos o comportamento analítico do fluxo de Yamabe, é entendermos seus pontos estacionários. No caso do fluxo de Yamabe, tais pontos (ou métricas) estacionárias são ditas solitons de Yamabe gradiente e gozam da propriedade de preservar a geometria inicial de  $g_0$  ao longo do fluxo (1-3).

**Definição 1.16.** *Uma variedade semi-Riemanniana  $(M^n, g)$  de dimensão  $n \geq 3$  é um soliton de Yamabe gradiente se existir uma função diferenciável  $h : M \rightarrow \mathbb{R}$ , dita função potencial e uma constante  $\rho$  dita soliton constante, tal que*

$$(scal_g - \rho)g = Hess_g(h), \quad (1-4)$$

onde  $scal_g$  denota a curvatura escalar na métrica  $g$ . Denotaremos tal soliton por  $(M^n, g, h, \rho)$ .

No caso em que  $\rho : M \rightarrow \mathbb{R}$  é uma função diferenciável,  $(M^n, g)$  é dito quasi soliton de Yamabe gradiente [10], e para  $h$  constante,  $(M^n, g)$  é dito trivial. Além disso, se  $\rho < 0$ ,  $\rho = 0$ ,  $\rho > 0$ , chamamos tal soliton de expanding, steady e shirinking, respectivamente.

**Observação 1.17.** *Existem outras variantes do fluxo (1-3), como exemplo*

$$\frac{\partial g}{\partial t}(t) = -2Ric_{g(t)}, \quad g_0 = g(0), \quad (1-5)$$

descreve a evolução da curvatura de Ricci, e é denominada fluxo de Ricci. O soliton associado ao fluxo (1-5) satisfaz

$$Ric_g + Hess_g h = \rho g, \quad (1-6)$$

e é denominado soliton de Ricci gradiente. Se  $h$  é constante, tal soliton de Ricci gradiente recebe o nome especial de variedade de Einstein, nesse caso a equação (1-6) tem a forma

$$Ric_g = \rho g.$$

A seguir, apresentaremos três exemplos de solitons de Yamabe gradiente.

**Exemplo 1.1.** (Charuto de Hamilton) *Em dimensão 2 Hamilton descobriu o seguinte exemplo; o espaço Euclidiano bidimensional  $(\mathbb{R}^2, g_{ij})$ , munido da métrica*

$$g_{ij} = \frac{\delta_{ij}}{1 + x_1^2 + x_2^2},$$

*é um soliton de Yamabe gradiente steady com função potencial*

$$h = -\log(1 + x_1^2 + x_2^2).$$

**Exemplo 1.2.** (Soliton de Yamabe Gaussiano) *O espaço Euclidiano  $(\mathbb{R}^n, \delta_{ij})$  munido da métrica canônica  $\delta$  é um soliton de Yamabe gradiente com função potencial*

$$h(x) = \frac{\rho}{2}(x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2).$$

*Tal soliton satisfaz*

$$\text{Hess}_\delta h = \rho\delta,$$

*e é denominado soliton de Yamabe gradiente Gaussiano.*

**Exemplo 1.3.** (Variedades de Einstein) *Considere  $(M^n, g)$  uma variedade Riemanniana não compacta satisfazendo  $\text{Ric}_g = \frac{\rho}{n}g$  e  $h$  uma função potencial constante, então temos que*

$$\text{scal}_g g = \rho g.$$

*Logo, toda variedade de Einstein é um soliton de Yamabe gradiente trivial.*

Seja  $(M^n, g, h, \rho)$  um quase soliton de Yamabe gradiente com curvatura escalar  $\text{scal}_g$ , então temos

**Proposição 1.18.** *Seja  $(M^n, g, h, \rho)$  um quase soliton de Yamabe gradiente, então*

- (a)  $(\text{scal}_g - \rho)n = \Delta h$ ;
- (b)  $(n - 1)\nabla \text{scal}_g + \text{Ric}(\nabla h) = 0$ ;
- (c)  $(n - 1)\Delta \text{scal}_g + \frac{1}{2}g(\nabla \text{scal}_g, \nabla h) + \text{scal}_g(\text{scal}_g - \rho) = (n - 1)\Delta \rho$ .

*Demonstração.* Primeiramente, note que, passando o traço na equação (1-4) obtemos o item (a). Para o item (b), tomando a derivada covariante de (1-4) e usando a identidade de Ricci ([37]),

$$\nabla_k \text{Hess}_g h_{ij} = \nabla_i \text{Hess}_g h_{jk} + \sum_l R_{jkl} \nabla_l h,$$

obtemos que

$$\begin{aligned}\nabla_k \text{scal}_g g_{ij} &= \nabla_k \text{Hess}_g h_{ij}, \\ &= \nabla_i \text{Hess}_g h_{jk} + \sum_l R_{jkl} \nabla_l h.\end{aligned}\tag{1-7}$$

Contraindo (1-7) com respeito a  $j, k$  e utilizando o item (a), deduzimos que

$$\begin{aligned}\nabla_i \text{scal}_g &= \nabla_i \Delta_g h + \sum_l \text{Ric}_{il} \nabla_l h, \\ &= n \nabla_i \text{scal}_g + \sum_l \text{Ric}_{il} \nabla_l h,\end{aligned}\tag{1-8}$$

o que prova o item (b).

Por último, tomando a derivada covariante de (1-8) e utilizando a equação (1-4) obtemos

$$\begin{aligned}(n-1) \nabla_i \nabla_i \text{scal}_g &= - \sum_l \nabla_i \text{Ric}_{il} \nabla_l h - \sum_l \text{Ric}_{il} \nabla_i \nabla_l h, \\ &= - \sum_l \nabla_i \text{Ric}_{il} \nabla_l h - \sum_l \text{Ric}_{il} (\text{scal}_g - \rho) \delta_{il}.\end{aligned}$$

O item (c) segue da identidade de Bianchi  $2\text{div}(\text{Ric})(X) = \nabla_X \text{scal}_g$ .  $\square$

## 1.4 Espaços métricos com medida

O conceito de espaço métrico é devido a Maurice Fréchet, que o introduziu em 1906, em sua famosa tese, juntamente com outras noções que se tornaram clássicas na teoria de espaços métricos. Os axiomas de Fréchet representam um refinamento matemático da noção de distância, tal como a concebemos na vida comum.

**Definição 1.19.** *Uma métrica num conjunto  $X$  é uma função  $d : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$  que associa a cada par de pontos  $x, y \in X$  um número real  $d(x, y)$ , chamado distância do ponto  $x$  ao ponto  $y$ , de tal modo que:*

- (a)  $d(x, x) = 0$ ,  $d(x, y) > 0$  se  $x \neq y$ ;
- (b)  $d(x, y) = d(y, x)$ ;
- (c)  $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$ ;

quaisquer que sejam  $x, y, z \in X$ .

Um espaço métrico é um par  $(X, d)$  onde  $X$  é um conjunto e  $d$  é uma função distância. Na maioria das vezes, salvo quando houver possibilidade de dúvida, diremos

simplesmente o “espaço métrico  $X$ ”, deixando subentendida qual a métrica  $d$  que está sendo considerada.

Os elementos de um espaço métrico podem ser de natureza bastante arbitrária: números, pontos, vetores, matrizes, conjuntos, etc. Mas nós os chamaremos sempre de pontos de  $X$ .

Daremos agora dois exemplos de espaços métricos.

**Exemplo 1.4.** (*Métrica “zero-um”*) Considere  $X$  um conjunto arbitrário e defina a métrica  $d : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$  por meio da regra:

$$d(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{se } x = y, \\ 0 & \text{se } x \neq y. \end{cases}$$

**Exemplo 1.5.** *métricas no plano Euclideano  $\mathbb{R}^2$ .* Considere  $x = (x_1, x_2)$ ,  $y = (y_1, y_2)$  pontos de  $\mathbb{R}^2$ . Assim, defina a função distância por meio de uma das regras:

$$d(x, y) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2},$$

$$d'(x, y) = |x_1 - y_1| + |x_2 - y_2|,$$

$$d''(x, y) = \max\{|x_1 - y_1|, |x_2 - y_2|\}.$$

É de fácil verificação que  $d$ ,  $d'$  e  $d''$  satisfazem as condições da Definição 1.19.  $d$ ,  $d'$  e  $d''$  são denominadas métrica Euclideana, métrica da soma e métrica do máximo, respectivamente.

Seja  $X$  um espaço métrico,  $r > 0$  um número real e  $a$  um ponto de  $X$ . A bola aberta de centro  $a$  e raio  $r$  é o conjunto  $B(a; r)$  dos pontos de  $X$  cuja distância ao ponto  $a$  é menor do que  $r$ :

$$B(a; r) = \{x \in X ; d(x, a) < r\}.$$

Dito isso, temos que um subconjunto  $A$  de um espaço métrico  $X$  é aberto quando todo ponto  $a \in X$  é centro de uma bola aberta inteiramente contida em  $A$ . Além disso,  $B \subset X$  é dito fechado se,  $B^c$  é aberto.

Uma aplicação  $f : X \rightarrow Y$ , de um espaço métrico  $X$  num espaço métrico  $Y$ , chama-se Lipschitziana quando existe um número  $c > 0$  (constante de Lipschitz) tal que,

$$d(f(x), f(y)) \leq c \cdot d(x, y),$$

quaisquer que sejam  $x, y \in X$ . Para o caso particular em que

$$d(f(x), f(y)) = d(x, y),$$

e  $f$  é uma aplicação de  $Y$  sobre  $X$ , então diz-se que  $f$  é uma isometria de  $X$  sobre  $Y$ , ou uma isometria entre  $X$  e  $Y$ .

As isometrias são os isomorfismos da estrutura de espaços métricos. Dois espaços métricos isométricos são indistinguíveis sob o ponto de vista de propriedades que digam respeito a distância.

Prosseguindo, é de grande importância destacar a definição de espaços métricos completos. De modo a fazê-lo, considere um espaço métrico  $X$  e uma sequência de pontos  $(x_n)$  em  $X$ . Dizemos que  $(x_n)$  converge para um ponto  $x$  quando, dado um  $\epsilon > 0$  existir  $n_0 \in \mathbb{N}$ , tal que,  $n > n_0$  implica  $d(x_n, x) < \epsilon$ . Além disso,  $(x_n)$  é dita sequência de Cauchy quando, para todo  $\epsilon > 0$  dado arbitrariamente, é possível obter  $n_0 \in \mathbb{N}$  tal que,  $m, n > n_0$  implica  $d(x_n, x_m) < \epsilon$ . Com isso, um espaço métrico  $(X, d)$  é chamado completo quando toda sequência de Cauchy em  $X$  converge.

Um espaço métrico  $(X, d)$  é dito próprio se os conjuntos limitados e fechados são compactos. Segue da definição de espaço métrico completo que, todo espaço métrico completo é próprio.

A fim de estudar as propriedades de certas medidas em espaços métricos, convém destacar e analisar com algum detalhe certos conceitos fundamentais como  $\sigma$ -álgebra, medida de Borel e função mensurável. Para tanto, considere  $X$  um espaço métrico e denote por  $2^X$  o conjunto das partes de  $X$ .

**Definição 1.20.** *Uma coleção  $\mathcal{F}$  de subconjuntos de  $X$ , isto é,  $\mathcal{F} \subset 2^X$ , é dito uma  $\sigma$ -álgebra se*

- (a)  $\emptyset, X \in \mathcal{F}$ ;
- (b) Se  $A \in \mathcal{F}$ , então  $X \setminus A \in \mathcal{F}$ ;
- (c) Se  $A_k \in \mathcal{F}$ ,  $k \in \mathbb{N}$ , então  $\bigcup_{k \geq 1} A_k \in \mathcal{F}$ .

**Proposição 1.21.** *Sejam  $\mathcal{F}_1$  e  $\mathcal{F}_2$  duas  $\sigma$ -álgebra de  $X$ , então a interseção  $\mathcal{F}_1 \cap \mathcal{F}_2$  é uma  $\sigma$ -álgebra de  $X$ .*

*Demonstração.* Com efeito, como  $\emptyset, X$  pertencem ambos a  $\mathcal{F}_1$  e  $\mathcal{F}_2$ , temos que,  $\emptyset, X \in \mathcal{F}_1 \cap \mathcal{F}_2$ . Se  $A \in \mathcal{F}_1 \cap \mathcal{F}_2$ , então  $A$  está em ambos  $\mathcal{F}_1$  e  $\mathcal{F}_2$ , como  $\mathcal{F}_1$  e  $\mathcal{F}_2$  são  $\sigma$ -álgebras, então  $X \setminus A \in \mathcal{F}_1 \cap \mathcal{F}_2$ . Por fim, se  $A_k \in \mathcal{F}_1 \cap \mathcal{F}_2$ , temos  $\bigcup_{k \geq 1} A_k \in \mathcal{F}_1$  e  $\bigcup_{k \geq 1} A_k \in \mathcal{F}_2$ , o que acarreta  $\bigcup_{k \geq 1} A_k \in \mathcal{F}_1 \cap \mathcal{F}_2$ .  $\square$

Considere  $A$  uma coleção de subconjuntos de  $X$  e tome todas as  $\sigma$ -álgebra que contém  $A$ , temos assim que a interseção de todas essas  $\sigma$ -álgebras também é uma  $\sigma$ -álgebra (Proposição 1.21). Essa interseção é a menor  $\sigma$ -álgebra que contém  $A$  e é chamada de  $\sigma$ -álgebra gerada por  $A$ . Quando a  $\sigma$ -álgebra é gerada pela família de conjuntos abertos de  $X$ , a nomeamos  $\sigma$ -álgebra de Borel.

**Definição 1.22.** *Uma medida em  $X$  é uma função  $\mu : 2^X \rightarrow [0, +\infty]$  satisfazendo:*

(a)  $\mu(\emptyset) = 0$ ;

(b)  $\mu(A) \leq \sum_{k=1}^{\infty} \mu(A_k)$ , sempre que  $A \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k$ ,  $A_k \subset X$ .

Dado uma medida  $\mu$  em  $X$ , dizemos que um subconjunto  $A \subset X$  é  $\mu$ -mensurável se

$$\mu(B) = \mu(B \cap A) + \mu(B \setminus A),$$

para todo  $B \subset X$ .

No presente caso, quando todo aberto de  $X$  for  $\mu$ -mensurável, dizemos que  $\mu$  é uma medida de Borel.

O teorema a seguir dá uma bela e simples caracterização das medidas de Borel em espaços métricos.

**Teorema 1.23.** *(Critério de Carathéodory) Seja  $(X, d)$  um espaço métrico e  $\mu$  uma medida em  $X$ . Então  $\mu$  é uma medida de Borel se, e somente se,*

$$\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B), \quad \text{sempre que } \text{dist}(A, B) > 0,$$

onde  $\text{dist}(A, B) := \inf\{d(a, b) ; a \in A, b \in B\}$ .

**Definição 1.24.** *Dizemos que uma função  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$  é  $\mathcal{F}$ -mensurável se para todo  $\alpha \in \mathbb{R}$ , o conjunto*

$$\{x \in X ; f(x) > \alpha\}$$

*pertence a  $\mathcal{F}$ .*

O resultado a seguir permite, de certo modo, representar as integrais sob um espaço métrico  $X$  em integrais de funções de uma variável. Esse resultado é conhecido na Literatura como “Layer cake representation”. Para mais detalhes veja [39] pg. 26.

**Proposição 1.25.** *Seja  $\nu$  uma medida de Borel em  $[0, \infty)$  e  $f : X \rightarrow (0, \infty)$  uma função  $\mathcal{F}$ -mensurável em  $X$ . Então para  $a, t \geq 0$ , temos*

$$\int_X \psi(f(x)) d\mu(x) = \int_0^\infty u(a) d\nu(a),$$



onde

$$\psi(t) = \int_0^t d\nu(s), \quad u(a) := \mu\{f > a\}.$$

*Demonstração.* Primeiramente, definindo o conjunto  $L(f, t) = \{y \in X; f(y) \geq t\}$ , temos que

$$\chi_{\{L(f,t)\}}(x) = \chi_{\{[0, f(x)]\}}(t),$$

onde  $\chi_{\{L(f,t)\}}(x)$  representa a função característica em  $L(f, t) \subset X$ , e  $\chi_{\{[0, f(x)]\}}(t)$  a função característica em  $\{t' \in \mathbb{R}; 0 < t' < f(x)\} \subset \mathbb{R}$ .

Assim sendo, temos

$$\begin{aligned} \int_0^\infty u(a) d\nu(a) &= \int_0^\infty \mu\{f > a\} d\nu(a), \\ &= \int_0^\infty \left( \int_X \chi_{\{L(f,t)\}}(x) d\mu(x) \right) d\nu(a), \\ &= \int_X \left( \int_0^\infty \chi_{\{[0, f(x)]\}}(t) d\nu(a) \right) d\mu(x), \end{aligned}$$

Portanto, o resultado segue da seguinte observação

$$\int_0^\infty \chi_{\{[0, f(x)]\}}(t) d\nu(a) = \int_0^{f(x)} d\nu(a) = \psi(f(x)).$$

□

### 1.4.1 Medida de Hausdorff

A medida de Hausdorff surge quando nos deparamos com a necessidade de medir tamanho de subconjuntos em um espaço métrico. A idéia para realizar tal fato não é tão exótica quanto parece, ela é motivada pelas fórmulas clássicas de comprimento, área e volume de objetos mergulhados no espaço Euclidiano.

Seja  $(X, d)$  um espaço métrico e considere  $S \subset X$ , o diâmetro do conjunto  $S$  é definido por

$$\text{diam}(S) = \sup\{d(x, y); x, y \in S\}.$$

**Definição 1.26.** *Seja  $S \subset X$  e  $\delta > 0$  um número real. Nós definimos a medida de Hausdorff de dimensão  $s$  limitada por  $\delta$  por:*

$$\mathcal{H}_\delta^s(S) = \inf \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} (\text{diam}(U_i))^s; S \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} U_i \quad e \quad \text{diam}(U_i) < \delta \right\},$$

onde o ínfimo é tomado sob todas as coberturas enumeráveis  $\{U_i\}_i$  de  $S$ , de modo que para cada  $i$ ,  $diam(U_i) < \delta$ .

**Proposição 1.27.** Para cada  $s \geq 0$  e todo  $S \subset X$  vale que,  $\mathcal{H}_{\delta_1}^s(S) \geq \mathcal{H}_{\delta_2}^s(S)$ , sempre que  $0 < \delta_1 < \delta_2$ .

*Demonstração.* Para  $S \subset X$  e  $\delta > 0$  fixados, defina os seguintes conjuntos:

$$R_\delta = \{R \subset X ; diam(R) < \delta\}, \quad C_\delta(S) = \left\{ \{U_k\} ; \bigcup_k U_k \supset S \text{ e } U_k \in R_\delta \right\}.$$

Agora, considere  $\delta_1, \delta_2$ , satisfazendo  $0 < \delta_1 < \delta_2$ . Temos então que  $R_{\delta_1} \subset R_{\delta_2}$ , pois todo conjunto com diâmetro menor ou igual a  $\delta_2$  tem, evidentemente, diâmetro menor ou igual a  $\delta_1$ . Logo, para todo  $S \subset X$ , tem-se  $C_{\delta_1}(S) \subset C_{\delta_2}(S)$  e, portanto,

$$\begin{aligned} \inf \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} (diam(U_i))^s ; S \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} U_i \text{ e } diam(U_i) < \delta_1 \right\} &\geq \\ &\geq \inf \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} (diam(U_i))^s ; S \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} U_i \text{ e } diam(U_i) < \delta_2 \right\}, \end{aligned}$$

estabelecendo que  $\mathcal{H}_{\delta_1}^s(S) \geq \mathcal{H}_{\delta_2}^s(S)$ . □

**Teorema 1.28.** Seja  $(X, d)$  um espaço métrico e  $s$  uma constante não negativa. Então  $\mathcal{H}^s : 2^X \rightarrow [0, \infty]$ , definido por

$$\mathcal{H}^s(S) = \lim_{\delta \rightarrow 0} \mathcal{H}_\delta^s(S),$$

é uma medida de Borel em  $X$ .

*Demonstração.* Primeiramente, provaremos que  $\mathcal{H}_\delta^s$  e  $\mathcal{H}^s$  são medidas. Com efeito,  $\forall x \in X$ , tem-se  $\emptyset \in \{x\}$  e  $diam(\{x\}) = 0$ , assim,  $\mathcal{H}_\delta^s(\emptyset) = 0$ ,  $\forall \delta > 0$ . Consequentemente, temos que  $\mathcal{H}^s(\emptyset) = 0$ .

Na sequência, considere  $A \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} A_j$ , queremos provar que

$$\mathcal{H}_\delta^s(A) \leq \sum_{j=1}^{\infty} \mathcal{H}_\delta^s(A_j). \quad (1-9)$$

Sem perda de generalidade, assuma que  $\mathcal{H}_\delta^s(A_j) < \infty$ ,  $\forall j$ . Segue da definição de ínfimo que, para  $\epsilon > 0$  fixado, existe uma cobertura  $\{C_k^j\}_k$  para  $A_j$  com  $diam(C_k^j) < \delta$  satisfazendo

$$\mathcal{H}_\delta^s(A_j) + \frac{\epsilon}{2^j} \geq \sum_k diam(C_k^j)^s.$$

Assim,

$$\begin{aligned} \sum_j \mathcal{H}_\delta^s(A_j) + \epsilon &\geq \sum_j \sum_k \text{diam}(C_k^j)^s, \\ &= \sum_{jk} \text{diam}(C_k^j)^s, \\ &\geq \mathcal{H}_\delta^s(A), \quad \text{pois } (A \subset \bigcup_{j,k} C_k^j). \end{aligned}$$

Então, a equação (1-9) segue quando fazemos  $\epsilon \rightarrow 0$ . Agora, tomando  $\delta \rightarrow 0$  em (1-9), obtemos

$$\mathcal{H}^s(A) \leq \sum_{j=1}^{\infty} \mathcal{H}^s(A_j).$$

Passaremos agora a demonstração de que  $\mathcal{H}^s$  é uma medida de Borel. Para tanto, faremos uso do Teorema 1.23. Tome  $A, B \in X$  com  $d(A, B) = \delta_0 > 0$ , desejamos provar que

$$\mathcal{H}^s(A \cup B) = \mathcal{H}^s(A) + \mathcal{H}^s(B).$$

Por um lado, a condição  $\mathcal{H}^s(A \cup B) \leq \mathcal{H}^s(A) + \mathcal{H}^s(B)$  é trivial, pois segue da definição de medida. Para provar a desigualdade inversa, considere  $\{C_j\}$  uma cobertura de  $A \cup B$  com  $\text{diam}(C_j) < \delta < \frac{\delta_0}{4}$ . Assim, cada  $C_j$  pode intersectar  $A$  ou  $B$ , mas não ambos. Assim, podemos separar  $\{C_j\}$  em duas classes  $\{C'_j\}$  e  $\{C''_j\}$ , com  $A \subset \bigcup_j C'_j$ ,  $B \subset \bigcup_j C''_j$ . Então

$$\begin{aligned} \sum_j \text{diam}(C_j)^s &= \sum_j \text{diam}(C'_j)^s + \sum_j \text{diam}(C''_j)^s, \\ &\geq \mathcal{H}_\delta^s(A) + \mathcal{H}_\delta^s(B). \end{aligned}$$

Tomando o ínfimo sob todas as coberturas  $\{C_j\}$ , deduzimos que

$$\mathcal{H}_\delta^s(A \cup B) \geq \mathcal{H}_\delta^s(A) + \mathcal{H}_\delta^s(B), \quad \forall \delta \in (0, \frac{\delta_0}{4}).$$

Tomando  $\delta \rightarrow 0$ , concluímos a desigualdade inversa.  $\square$

**Definição 1.29.** A medida de Borel  $\mathcal{H}^s$  obtida no Teorema 1.28 é dita medida de Hausdorff de dimensão  $s$ .

## 1.5 Espaço de Alexandrov

Nessa seção, definiremos a noção de espaço de Alexandrov. Primeiramente, recordemos a seguinte definição de espaço métrico intrínseco.

**Definição 1.30.** Considere  $(X, d)$  um espaço métrico conexo por caminhos. A métrica intrínseca  $\hat{d}$  sobre  $X$  associada a  $d$  é dada pela função:

$$\hat{d} : (x, y) \in X \times X \mapsto \inf\{\mathcal{L}(\gamma) ; \gamma \text{ é uma curva ligando } x \text{ a } y\} \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}.$$

Dizemos que  $\hat{d}$  é uma métrica intrínseca e que  $(X, \hat{d})$  é um espaço métrico intrínseco quando  $d = \hat{d}$ .

Um triângulo em um espaço métrico intrínseco  $X$  consiste de três pontos  $p, q, r$  e três curvas  $\overline{pq}, \overline{pr}, \overline{qr}$  de comprimento mínimo conectando os pontos  $p, q$  e  $r$ . Dado um número real  $\kappa \in \mathbb{R}$ , um triângulo de comparação, a qual denotaremos por  $\tilde{p}\tilde{q}\tilde{r}$ , é um triângulo em uma superfície de curvatura constante  $\kappa$  de mesma proporção, ou seja, as curvas que definem os dois triângulo tem mesmo comprimento.

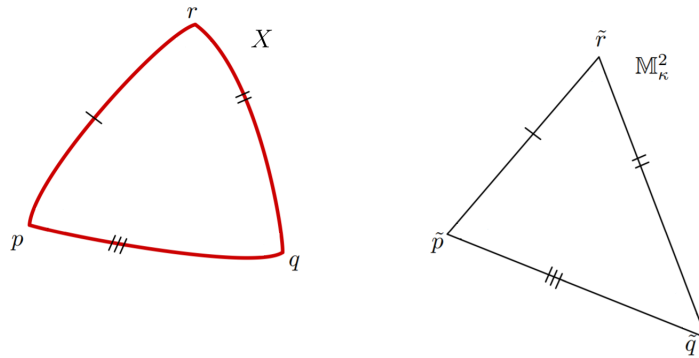
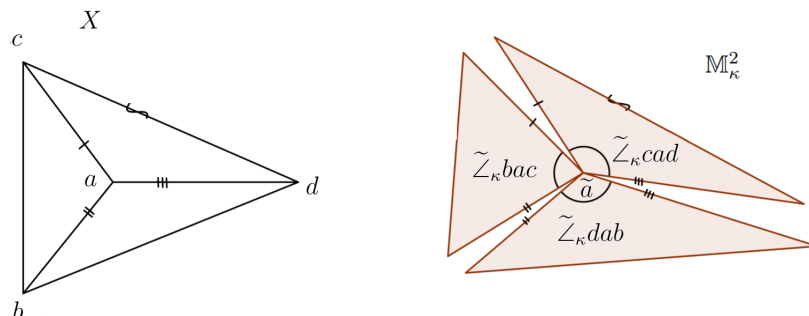


Figura 1.1: Triângulo de comparação

Os ângulos no triângulo  $\tilde{p}\tilde{q}\tilde{r}$  são chamados de ângulos de comparação e denotamos por  $\tilde{Z}_\kappa pqr, \tilde{Z}_\kappa qrp$  e  $\tilde{Z}_\kappa rpq$ . Um triângulo de comparação existe e é único sempre que  $\kappa \leq 0$ , ou então  $\kappa > 0$  e  $d(p, q) + d(p, r) + d(r, q) < \frac{2\pi}{\sqrt{\kappa}}$ , cf. [14].

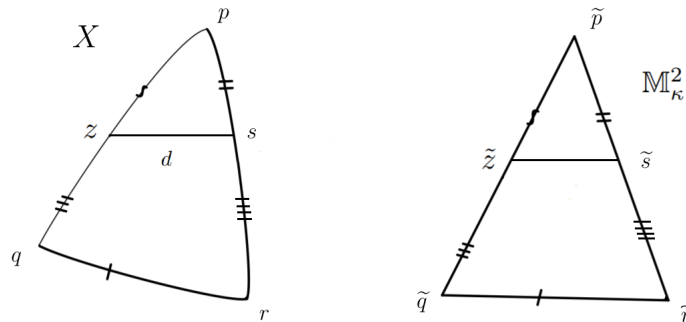
**Definição 1.31.** Um espaço métrico intrínseco  $(X, d)$  é dito um espaço de Alexandrov de curvatura  $\geq \kappa$  se para todo  $x \in X$  existe uma vizinhança  $U_x$ , tal que para todo  $a, b, c, d \in U_x$ , temos

$$\tilde{Z}_\kappa bac + \tilde{Z}_\kappa cad + \tilde{Z}_\kappa dab \leq 2\pi.$$



Para espaços localmente compactos, isto é, espaços onde todo ponto possui uma vizinhança compacta, a definição acima é equivalente a comparação de distância de Toponogov-Alexandrov.

**Definição 1.32.** (*Toponogov-Alexandrov*) Um espaço métrico intrínseco  $(X, d)$  localmente compacto é dito um espaço de Alexandrov de curvatura  $\geq \kappa$  se para todo  $x \in X$  existe uma vizinhança  $U_x$ , tal que para todo triângulo  $pqr$  em  $U_x$  e todo  $z \in \overline{pq}$ ,  $s \in \overline{pr}$ , tivermos  $d(z, s) \geq |\tilde{z}\tilde{s}|$ , onde  $\tilde{z}$  e  $\tilde{s}$  são os pontos correspondentes em  $\tilde{pq}$  e  $\tilde{pr}$  no triângulo de comparação  $\tilde{p}\tilde{q}\tilde{r}$ .

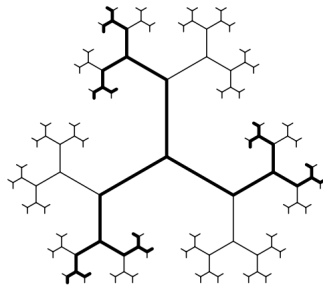


**Observação 1.33.** Se  $X$  é um espaço completo, então as condições locais nas definições (1.31) e (1.32) implicam em uma condição global.

A seguir, apresentaremos 2 exemplos.

**Exemplo 1.6.** Uma variedade Riemanniana completa  $(M, g)$  de curvatura seccional  $\geq \kappa$  é um espaço de Alexandrov de curvatura  $\geq \kappa$ .

**Exemplo 1.7.** Considere  $X_i$  uma árvore binária com aresta de comprimento  $2^{-i}$ . Temos que  $X_i$  pode ser mergulhado de maneira isométrica em  $X_{i+1}$ ; a figura abaixo mostra de maneira lúdica uma aproximação finita de  $X_i$  embutida em uma aproximação finita  $X_{i+1}$ . Construindo  $X_1 \subset X_2 \subset \dots$  de maneira indutiva, temos que o limite resultante é um espaço de Alexandrov de curvatura  $\geq 0$ .



Similar ao Teorema de comparação de Bishop-Gromov em variedades Riemannianas, existe uma extensão para espaços de Alexandrov.

**Teorema 1.34.** ([14])(Bishop-Gromov Inequality) *Seja  $(X, d)$  um espaço de Alexandrov localmente compacto de curvatura  $\geq \kappa$  e  $n$  um inteiro positivo. Então para todo ponto  $p \in X$  a função*

$$r \mapsto \frac{\mathcal{H}^n(B_r(p))}{V_r^\kappa},$$

*é não crescente, onde  $\mathcal{H}^n(B_r(p))$  é a medida  $n$ -dimensional de Hausdorff da bola de centro  $p$  e raio  $r$  e  $V_r^\kappa$  é o volume da bola de raio  $r$  na forma espacial  $M_\kappa^n$ . Em outras palavras, se  $R \geq r > 0$ , então*

$$\frac{\mathcal{H}^n(B_R(p))}{V_R^\kappa} \leq \frac{\mathcal{H}^n(B_r(p))}{V_r^\kappa}.$$

Suponha que  $X$  seja uma variedade Riemanniana de dimensão  $n$  e curvatura  $\geq \kappa$ . Fixando  $p \in X$ , temos que o volume de bolas pequenas centradas em  $p$  são próximos das bolas Euclidianas; isto é,

$$\frac{\text{Vol}(B_r(p))}{V_r^\kappa} \rightarrow 1, \quad r \rightarrow 0.$$

Assim pelo Teorema de Bishop-Gromov conclui-se que,  $\text{Vol}(B_R(p)) \leq V_R^\kappa$  para todo  $R > 0$ . Esse fato é conhecido como desigualdade de Bishop, e pode ser generalizado para espaços de Alexandrov.

**Teorema 1.35.** ([14])(Bishop inequality) *Seja  $(X, d)$  um espaço de Alexandrov de curvatura  $\geq \kappa$  e  $n$  um inteiro positivo. Então para todo  $p \in X$  e  $r > 0$ , tem-se que*

$$\mathcal{H}^n(B_r(p)) \leq V_r^\kappa,$$

*onde  $\mathcal{H}^n(B_r(p))$  é a medida  $n$ -dimensional de Hausdorff da bola de centro  $p$  e raio  $r$  e  $V_r^\kappa$  é o volume da bola de raio  $r$  na forma espacial  $M_\kappa^n$ . Além disso, a igualdade ocorre se, e somente se,  $B_r(p)$  é isométrico a bola de raio  $r$  na forma espacial  $M_\kappa^n$ .*

Prosseguindo, iremos definir o conceito de desigualdade de Bishop-Gromov infinitesimal em espaços de Alexandrov. Essa definição é devido a Kuwae et al. em [33]. Para um número real  $\kappa$ , considere

$$s_\kappa(r) = \begin{cases} \frac{\sin(\sqrt{\kappa}r)}{\sqrt{\kappa}}, & \text{se } \kappa > 0 \\ r, & \text{se } \kappa = 0 \\ \frac{\sinh(\sqrt{|\kappa}|r)}{\sqrt{|\kappa|}}, & \text{se } \kappa < 0 \end{cases}$$

Note que a função  $s_\kappa$  é solução da equação  $s_\kappa''(r) + \kappa s_\kappa'(r) = 0$  com condições iniciais  $s_\kappa(0) = 0$  e  $s_\kappa'(0) = 1$ .

Seja  $r_p(x) := d(p, x)$ , onde  $p, x \in X$  e  $d$  é a função distância. Para  $p \in X$  e  $0 < t \leq 1$ , definimos um conjunto  $W_{p,t} \subset X$  e uma aplicação  $\Phi_{p,t} : W_{p,t} \rightarrow X$  da seguinte maneira: Primeiramente, faça  $\Psi_{p,t}(p) = p \in W_{p,t}$ . Um ponto  $x (\neq p)$  pertence a  $W_{p,t}$  se, e somente se, existe  $y \in X$  tal que  $x \in py$  e  $r_p(x) = t \cdot r_p(y)$ , onde  $py$  é uma curva minimizante ligando  $p$  a  $y$ . Como em um espaço de Alexandrov as curvas minimizantes não se ramificam, temos que, dado um ponto  $x \in W_{p,t}$  o ponto  $y$  descrito acima é único e definimos  $\Psi_{p,t}(x) = y$ . Além disso, pela desigualdade triangular podemos verificar que  $\Psi_{p,t} : W_{p,t} \rightarrow X$  é uma aplicação Localmente Lipschitz.

Agora, estamos em condições de definir o conceito de desigualdade de Bishop-Gromov infinitesimal.

**Definição 1.36.** *Dados os números reais  $n \geq 1$  e  $\kappa \in \mathbb{R}$ , dizemos que a medida  $n$ -dimensional de Hausdorff  $\mathcal{H}^n$  satisfaz a desigualdade de Bishop-Gromov infinitesimal  $BG(\kappa, n)$  se, para todo  $p \in X$  e  $t \in (0, 1]$ , tivermos*

$$d(\Psi_{p,t*} \mathcal{H}^n)(x) \leq \frac{t s_\kappa(t \cdot r_p(x))^{n-1}}{s_\kappa(r_p(x))^{n-1}} d\mathcal{H}^n(x),$$

para todo  $x \in X$  tal que  $r_p(x) < \frac{\pi}{\sqrt{\kappa}}$ , onde  $\Psi_{p,t*} \mathcal{H}^n(B) = \mathcal{H}^n(\Psi_{p,t}^{-1}(B))$  e  $B$  pertence a  $\sigma$ -álgebra de  $X$ .

$BG(\kappa, n)$  é muitas vezes chamado de propriedade de contração da medida [33, 44, 54, 55], e é uma condição mais fraca que a noção de curvatura dimensional  $CD((n-1)\kappa, n)$  introduzida por Sturm em [54, 55].

Com base na Definição 1.36, Kuwae em [33] obtém o seguinte resultado.

**Teorema 1.37.** *Seja  $(X, d)$  um espaço de Alexandrov de curvatura  $\geq \kappa$ . Então a medida de Hausdorff  $n$ -dimensional  $\mathcal{H}^n$  em  $X$  satisfaz a condição de Bishop-Gromov infinitesimal  $BG(\kappa, n)$ .*

Na sequência, Munn em [40] provou que,

**Teorema 1.38.** *Para um inteiro  $n \geq 2$ , seja  $(X, d)$  um espaço de Alexandrov completo não compacto com a medida de Hausdorff  $\mathcal{H}^n$  satisfazendo a condição  $BG(0, n)$ . Então existe um  $\epsilon(n) = \epsilon > 0$  tal que, se*

$$\mathcal{H}^n(B_r(p)) \geq (1 - \epsilon)\omega_n r^n, \quad p \in X, \quad \forall r > 0,$$

então  $(X, d)$  tem tipo topológico finito.

## 1.6 Espaço de Finsler

Nessa seção apresentaremos o conceito de Variedade de Finsler. Tal conceito se apresenta como uma extensão natural das variedades Riemannianas. A saber, a geometria Riemanniana clássica, tal como a conhecemos, é regida por uma noção de métrica, ou seja, a cada ponto da variedade associamos um produto interno em seu espaço tangente que varia de modo suave a medida que variamos o ponto. No entanto, em contraste com o caso Riemanniano, na geometria de Finsler a cada ponto da variedade associaremos uma norma de Minkowski, que não necessariamente é provinda de um produto interno.

Considere  $V$  um espaço vetorial de dimensão  $n$ . Uma norma de Minkowski em  $V$  é uma aplicação  $F : V \rightarrow [0, \infty)$  satisfazendo as seguintes propriedades:

- (a)  $F \in C^\infty(V \setminus \{0\})$ ;
- (b)  $F(\lambda y) = |\lambda|F(y)$ ,  $\forall \lambda \in \mathbb{R}$  e  $y \in V$ ;
- (c) Para cada  $y \in V \setminus \{0\}$  fixado, a forma bilinear simétrica  $g_y$  é positiva definida, onde

$$g_y : V \times V \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$(u, v) \longmapsto \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial s \partial t} [F^2(y + su + tv)] \Big|_{s=t=0}.$$

O par  $(V, F)$  é dito um espaço de Minkowski.

Seja  $(M^n, g)$  uma variedade diferenciável de dimensão  $n$  e  $TM = \bigcup_{x \in M} T_x M$  o fibrado tangente de  $M$ .

**Definição 1.39.** *Uma estrutura de Finsler em  $M$  é uma função*

$$F : TM \rightarrow [0, \infty),$$

*satisfazendo as seguintes propriedades*

- (a)  $F \in C^\infty(TM \setminus \{0\})$ ;
- (b) *Para cada  $x \in M$ , a restrição  $F_x = F|_{T_x M}$  é uma norma de Minkowski em  $T_x M$ .*

*O par  $(M, F)$  é dito uma variedade de Finsler.*

Considere  $(x_i, y_i)$  um sistema de coordenadas locais em  $TM$ , isto é,  $y_k$  é determinado por  $y = \sum_k y_k \left(\frac{\partial}{\partial x_k}\right) \Big|_x$ . Então para  $y \neq 0$ , temos que

$$g_{ij}(x, y) := g_y \left( \frac{\partial}{\partial x_i} \Big|_x, \frac{\partial}{\partial x_j} \Big|_x \right) = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 F^2(x, y)}{\partial y_i \partial y_j}. \quad (1-10)$$



Para o caso em que  $g_{ij} = g_{ij}(x, y)$  é independente de  $y$ , temos que  $(M, F)$  se torna uma variedade Riemanniana.

Uma variedade de Finsler  $(M, F)$  é dita localmente um espaço de Minkowski se todo ponto de  $M$  admite um sistema de coordenadas  $(x_i)$  no qual  $F(x, y)$  não depende de  $x$ .

Na sequência, apresentaremos dois exemplos de variedades de Finsler.

**Exemplo 1.8.** Considere  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  uma função suave arbitrária e defina

$$F^2(x_1, x_2, y_1, y_2) = 2e^{f(x_1, x_2)}(y_1)^2(y_2)^{-4}.$$

Por um cálculo simples temos que  $F$  satisfaz os axiomas da Definição 1.39. Além disso, em coordenadas locais, temos que

$$g_{ij}(x_1, x_2, y_1, y_2) = e^{f(x_1, x_2)} \begin{bmatrix} 12 \left(\frac{y_1}{y_2}\right)^2 & -8 \left(\frac{y_1}{y_2}\right)^3 \\ -8 \left(\frac{y_1}{y_2}\right)^3 & 6 \left(\frac{y_1}{y_2}\right)^4 \end{bmatrix}.$$

**Exemplo 1.9.** Seja  $(M^n, g_{ij}(x))$  uma variedade Riemanniana e  $\beta_x(y) = \sum_i \beta_i(x)y_i$  uma 1-forma sobre  $M$  satisfazendo

$$\|\beta_x\| = \sup \left\{ \beta_x(y) ; \sqrt{\sum_i g^{ij}y_i y_j} = 1 \right\} < 1, \quad \forall x \in M,$$

onde  $y = \sum_i y_i \frac{\partial}{\partial x^i}$ . Então  $F$  dado por

$$F(x, y) = \left( \sum_{i,j} g_{ij}(x)y_i y_j \right)^{\frac{1}{2}} + \sum_i \beta_i(x)y_i,$$

define uma estrutura de Finsler em  $M$ , tal espaço é dito espaço de Randers.

Seja  $\pi : TM \rightarrow M$  a projeção canônica. Vamos considerar no pull-back

$$\pi^*TM = \{(u, v) \in TM \times TM ; \pi(u) = \pi(v)\},$$

a conexão de Chern, (veja Bao et al. [8], Teorema 2.4.1). Os coeficientes da conexão de Chern serão denotados por

$$\Gamma_{ij}^k = \frac{1}{2} \sum_l g^{kl} \left\{ \frac{\partial g_{jl}}{\partial x_i} + \frac{\partial g_{li}}{\partial x_j} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x_l} \right\} - \sum_l g^{kl} \left\{ \sum_m C_{jml} \frac{\partial G^m}{\partial y_i} + \sum_m C_{iml} \frac{\partial G^m}{\partial y_j} - C_{ijm} \frac{\partial G^m}{\partial y_l} \right\},$$

onde

$$C_{ijk} = \frac{1}{2} \frac{\partial g_{ij}}{\partial y_k}, \quad \text{e} \quad G^i = \frac{1}{4} \sum_{j,k,l} g^{il} \left\{ \frac{\partial g_{jl}}{\partial x_k} + \frac{\partial g_{lk}}{\partial x_j} - \frac{\partial g_{jk}}{\partial x_l} \right\} y_j y_k.$$

Uma variedade de Finsler é dita do tipo Berwald se os coeficientes  $\Gamma_{ij}^k(x, y)$  em uma carta coordenada são independentes de  $y$ .

**Observação 1.40.** *Por meio de derivações dos coeficientes da métrica (1.8), podemos notar que o Exemplo 1.8 fornece infinitos exemplos de variedades de Finsler do tipo Berwald.*

Seja  $\sigma : [0, l] \rightarrow M$  uma curva diferenciável em  $M$ , o comprimento de arco é definido como  $L_F(\sigma) := \int_0^l F(\sigma, \sigma') dt$ , e a função distância  $d_F : M \times M \rightarrow [0, \infty)$  por  $d_F(x_1, x_2) := \inf_{\sigma} L_F(\sigma)$ , onde  $\sigma$  varia sobre todas as curvas diferenciáveis ligando  $x_1$  à  $x_2$ . Uma curva diferenciável  $\sigma : [0, l] \rightarrow M$  é dita geodésica se  $\sigma$  minimiza localmente  $d_F$  e tem velocidade constante (i.e.  $F(\sigma, \sigma')$  é constante). Uma variedade de Finsler  $(M, F)$  é dita completa se toda geodésica  $\sigma : [0, l] \rightarrow M$  pode ser estendida a uma geodésica  $\sigma : \mathbb{R} \rightarrow M$ .

Assim como no caso Riemanniano, podemos definir a noção de variação em variedades de Finsler. De fato, seja  $\sigma : (-\epsilon, \epsilon) \times [0, l] \rightarrow M$  uma variação diferenciável por geodésicas (i.e.  $t \rightarrow \sigma(s, t)$  é geodésica para cada  $s$  fixado), e considere  $\eta(t) = \sigma(0, t)$ . Então o campo variacional  $J(t) = \frac{\partial \sigma}{\partial s}(0, t)$  satisfaz a equação de Jacobi

$$D_{\eta'}^{n'} D_{\eta'}^{n'} J + R^{n'}(J, \eta') \eta' = 0, \tag{1-11}$$

onde  $D^{n'}$  é a derivada covariante com respeito ao vetor  $\eta'$  e  $R^{n'}$  é o tensor curvatura (veja [8] pra detalhes). Considere  $v, w \in T_x M$  dois vetores não colineares e  $\mathcal{S} := \text{span}\{v, w\}$ , então a curvatura flag é definida como

$$K(\mathcal{S}, v) := \frac{\langle R^v(w, v)v, w \rangle_v}{F(v)^2 \langle w, w \rangle_v - \langle v, w \rangle_v^2},$$

onde  $\langle \cdot, \cdot \rangle_v$  denota o produto interno induzido por (1-10). No caso Riemanniano a curvatura flag se degenera na curvatura seccional na qual depende apenas de  $\mathcal{S}$ .

Tome  $v \in T_x M$  com  $F(x, v) = 1$  e considere  $\{e_i\}_{i=1}^n$  com  $e_n = v$  uma base ortonormal de  $(T_x M, \langle \cdot, \cdot \rangle_v)$ . faça  $\mathcal{S}_i = \text{span}\{e_i, v\}$  pra  $1 \leq i \leq n-1$ . Então a curvatura de Ricci de  $v$  é definida como segue

$$\text{Ric}(v) := \sum_{i=1}^{n-1} K(\mathcal{S}_i, v).$$

Inspirado pela noção de curvatura de Ricci com peso no caso Riemanniano, Ohta em [45], estende esse conceito para variedades de Finsler como segue

**Definição 1.41.** (*Curvatura de Ricci com peso*) Seja  $m$  uma medida positiva de classe  $C^\infty$  em  $M$ . Dado  $v \in T_x M \setminus \{0\}$ , seja  $\sigma : (\epsilon, \epsilon) \rightarrow M$  uma geodésica com  $\sigma'(0) = v$  e decomponha  $m$  ao longo de  $\sigma$  como  $m = e^{-\psi} \text{vol}_{\sigma'}$ , onde  $\text{vol}_{\sigma'}$  denota a forma volume associada a métrica  $g_{\sigma'}$ . Então para cada  $N \in [n, \infty]$  a  $N$ -curvatura de Ricci  $Ric_N$  é definida por

$$Ric_N(v) := Ric(v) + (\psi \circ \sigma)''(0) - \frac{(\psi \circ \sigma)'(0)^2}{N - n};$$

$$Ric_N(cv) := c^2 Ric_N(v), \quad \text{para } c > 0.$$

Nós também definimos como os limites

$$Ric_\infty(v) := Ric(v) + (\psi \circ \sigma)''(0);$$

$$Ric_n(v) := \begin{cases} Ric(v) + (\psi \circ \sigma)''(0), & \text{se } (\psi \circ \sigma)'(0) = 0. \\ -\infty, & \text{se } (\psi \circ \sigma)'(0) \neq 0. \end{cases}$$

Baseado no conceito de  $N$ -curvatura de Ricci  $Ric_N$ , Ohta em [45] prova o seguinte resultado de comparação de volume do tipo Bishop-Gromov em espaços de Finsler.

**Teorema 1.42.** ([45], Theorem 7.3) *Seja  $(M, F, m)$  uma variedade de Finsler  $n$ -dimensional completa com medida  $m$  e  $N$ -curvatura Ricci  $Ric_N$  não negativa, então*

$$\frac{m(B_R(x))}{m(B_r(x))} \leq \left(\frac{R}{r}\right)^n, \quad \forall x \in M, \quad e \quad 0 < r < R.$$

Além disso, se a igualdade ocorre com  $N = n$  para todo  $x \in M$  e  $0 < r < R$ , então todo campo de Jacobi  $J$  ao longo de uma geodésica  $\sigma$  de  $M$  tem a forma  $J(t) = tP(t)$ , onde  $P$  é um campo paralelo ao longo de  $\sigma$ .

Agora, passaremos a descrever uma medida particular nas variedades de Finsler, chamada medida de Busemann-Hausdorff. Para isso, considere  $\{e_i\}$ ,  $\{\theta_i\}$  referenciais locais em  $M$  e do dual  $T^*M$ , respectivamente. Assim, a medida de Busemann-Hausdorff é definida por

$$m_{BH} := \sigma_F \theta_1 \wedge \theta_2 \cdots \wedge \theta_n,$$

onde

$$\sigma_F(x) = \frac{\omega_n}{\text{Vol}(\{(y_i) \in \mathbb{R}^n ; F(x, \sum_i y_i e_i) < 1\})}$$

e  $\omega_n$  denota o volume Euclidiano da bola unitária em  $\mathbb{R}^n$ .

Shen em [53] provou a seguinte propriedade das medidas de Busemann-Hausdorff.

**Proposição 1.43.** *Considere  $(M, F, m_{BH})$  uma variedade de Finsler munida da medida de Busemann-Hausdorff  $m_{BH}$ . Para cada ponto  $x \in M$ , temos que*

$$\frac{m_{BH}(B_r(x))}{w_n r^n} = 1.$$

*Demonstração.* Veja [53] Lema 5.2. □

# Desigualdade de Caffarelli-Kohn-Nirenberg em espaços métricos

Neste capítulo, iremos apresentar uma série de resultados obtidos em [4] em parceria com Adriano e Xia. Entre outras coisas, generalizamos o trabalho de Kristály e Ohta [32] para uma classe de Caffarelli-Kohn-Nirenberg com termo de interpolação em espaços métricos com medida. Como aplicação, obtemos Teoremas de Rigidez nos seguintes espaços: Variedades Riemannianas, Variedades de Finsler e Espaços de Alexandrov.

## 2.1 Introdução

Seja  $(\mathbb{R}^n, g_0)$  o espaço Euclidiano, denote por  $dx$  o elemento de volume associado a métrica canônica  $g_0$  e considere  $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$  o espaço das funções suaves em  $\mathbb{R}^n$  com suporte compacto.

Dentre as famílias mais gerais de desigualdades, Caffarelli, Kohn e Nirenberg provam que

**Teorema 2.1.** ([15]) *Considere  $n \geq 2$ ,  $p, q, r, \alpha, \beta, \sigma, a$  constantes fixadas satisfazendo:*

$$p, q \geq 1, \quad r > 0, \quad 0 \leq a \leq 1, \quad \frac{1}{p} + \frac{\alpha}{n}, \frac{1}{q} + \frac{\beta}{n}, \frac{1}{r} + \frac{\gamma}{n} > 0, \quad \gamma = a\sigma + (1-a)\beta,$$

onde

$$\frac{1}{r} + \frac{\gamma}{n} = a\left(\frac{1}{p} + \frac{\alpha-1}{n}\right) + (1-a)\left(\frac{1}{q} + \frac{\beta}{n}\right),$$

com

$$0 \leq \alpha - \sigma \text{ se } a > 0, \quad e \quad \alpha - \sigma \leq 1 \text{ se } a > 0 \text{ e } \frac{1}{p} + \frac{\alpha-1}{n} = \frac{1}{r} + \frac{\gamma}{n}.$$

Então existe uma constante positiva  $C = C(n, p, q, r, \alpha, \beta, \sigma, a)$  tal que para toda função

$u \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$  tem-se

$$\left( \int_{\mathbb{R}^n} |x|^{\gamma r} |u|^r dx \right)^{\frac{1}{r}} \leq C \left( \int_{\mathbb{R}^n} |x|^{\alpha p} |\nabla u|^p dx \right)^{\frac{a}{p}} \left( \int_{\mathbb{R}^n} |x|^{\beta q} |u|^q dx \right)^{\frac{1-a}{q}}. \quad (2-1)$$

Denotamos por  $C_{opt}(\mathbb{R}^n)$  a constante ótima para desigualdade de Caffarelli-Kohn-Nirenberg (CKN) (2-1), ou seja,

$$C_{opt}(\mathbb{R}^n)^{-1} = \inf_{u \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n) - \{0\}} \frac{\left( \int_{\mathbb{R}^n} |x|^{\alpha p} |\nabla u|^p dx \right)^{\frac{a}{p}} \left( \int_{\mathbb{R}^n} |x|^{\beta q} |u|^q dx \right)^{\frac{1-a}{q}}}{\left( \int_{\mathbb{R}^n} |x|^{\gamma r} |u|^r dx \right)^{\frac{1}{r}}}.$$

E associado a constante ótima, podemos definir o conceito de função ótima, a qual satisfaz a igualdade (2-1) com  $C = C_{opt}(\mathbb{R}^n)$ .

Recentemente, Lam em [35] considerou a seguinte mudança em (2-1)

$$\alpha = -\frac{\mu}{p}, \quad \beta = -\frac{\theta}{q}, \quad \gamma = -\frac{s}{r},$$

e obteve o seguinte resultado.

**Teorema 2.2.** ([35], Teorema 1.2) *Sejam  $n \geq 2$ ,  $p, q, \mu$  constantes satisfazendo*

$$1 < p < p + \mu < n, \quad 1 \leq q < p \frac{q-1}{p-1} < \frac{np}{n-p}, \quad (2-2)$$

*juntamente com constantes  $r, \theta, s, a$  dadas por*

$$r = \frac{p(q-1)}{p-1}, \quad \theta = s = \frac{n\mu}{n-p} \quad e \quad a = \frac{[(n-\theta)r - (n-s)q]p}{[(n-\theta)p - (n-p-\mu)q]r}. \quad (2-3)$$

*Então com  $\delta = np - q(n-p)$ , tem-se*

$$C_{opt}(\mathbb{R}^n) = \left( \frac{n-p}{n-p-\mu} \right)^L \left( \frac{q-p}{p\sqrt{\pi}} \right)^a \left( \frac{pq}{n(q-p)} \right)^{\frac{a}{p}} \left( \frac{\delta}{pq} \right)^{\frac{1}{r}} \times \left[ \frac{\Gamma\left(q\frac{p-1}{q-p}\right) \Gamma\left(\frac{n}{2} + 1\right)}{\Gamma\left(\frac{p-1}{p} \frac{\delta}{q-p}\right) \Gamma\left(n\frac{p-1}{p} + 1\right)} \right],$$

onde

$$L = \frac{1}{r} + \frac{p-1}{p} - \frac{1-a}{q} - \frac{(p-1)(1-a)}{p}.$$

*E as funções ótimas são da forma*

$$V_0(x) = A(1 + B|x|^{\frac{n-p-\mu}{n-p} \frac{p}{p-1}})^{-\frac{p-1}{q-p}}, \quad A \in \mathbb{R}, \quad B > 0.$$

Os teoremas acima nos revelam que o espaço Euclidiano  $\mathbb{R}^n$  é um ambiente privilegiado, visto que suporta a desigualdade de CKN, isso se torna interessante, pois, tal desigualdade desempenha fundamental importância na teoria de equações diferenciais parciais elípticas, principalmente em problemas variacionais e regularidade de soluções. Dessa forma, o espaço Euclidiano se torna suficiente para estudos de tais problemas.

Por outro lado, quando trazemos a desigualdade de CKN para geometria, uma pergunta pertinente é a seguinte:

**Questão.** *Como é a estrutura dos espaços que suportam a desigualdade de CKN?*

Visando responder essa questão, em [5, 6, 23, 29, 36, 59, 57, 58] os autores consideram o estudo das variedades Riemannianas com curvatura de Ricci não negativa que satisfazem alguma das classes particulares de CKN. Em particular, em [5, 6, 23, 36, 59, 57, 58] os autores utilizam resultados de comparação de volume e obtêm que tais espaços satisfazem exatamente o crescimento de volume  $n$ -dimensional, isto é, existe uma constante universal  $C_0 > 0$  tal que

$$\text{Vol}(B_x(\rho)) \geq C_0 \rho^n, \quad x \in M, \quad \rho > 0.$$

Além disso, resultados de rigidez são obtidos, e entre outras coisas mostram que as variedades com Ricci não negativo e que suportam classes de desigualdades específicas, como: desigualdade de Sobolev, desigualdade de Gagliardo-Nirenberg, desigualdade de Hardy, etc, com constante  $C$  sendo próximo da constante ótima no caso Euclidiano para desigualdade correspondente, são difeomorfas ao espaço Euclidiano, e com constante  $C$  igual a constante ótima no caso Euclidiano temos a isometria com o espaço Euclidiano  $\mathbb{R}^n$ .

No contexto dos espaços métricos, Kristály e Ohta em [32], estudam os espaços métricos com medida  $(X, d, m)$  que suportam a desigualdade de Caffarelli-Kohn-Nirenberg sem termo de interpolação (isto é,  $a = 1$ )

$$\left( \int_X \frac{|u|^r}{d(x, x_0)^{-\gamma r}} dm(x) \right)^{\frac{1}{r}} \leq C \left( \int_X |Du|^2 dm(x) \right)^{\frac{1}{2}}, \quad (2-4)$$

com parâmetros

$$r = \frac{2n}{n - 2 - 2\gamma}, \quad -\gamma \in [0, 1),$$

e obtém o seguinte resultado

**Teorema 2.3.** *Seja  $(X, d, m)$  um espaço métrico próprio com medida  $n$ -dimensional e assumamos que para  $a \in [0, 1)$ ,  $n \geq 3$ ,  $p = 2n/(n - 2 + 2a)$ ,  $x_0 \in X$ , e*

$$C \geq K_a = \left( \frac{1}{(n-2)(n-ap)} \right)^{\frac{1}{2}} \left( \frac{(2-ap)\Gamma((2n-2ap)/(2-ap))}{n\omega_n\Gamma^2((n-ap)/(2-ap))} \right)^{\frac{2-ap}{2n-2ap}},$$

a desigualdade de Caffarelli-Kohn-Nirenberg (2-4) ocorra em  $X$ , juntamente com as seguintes condições:

$$\frac{m(B_R(x))}{m(B_\rho(x))} \leq C_0 \left( \frac{R}{\rho} \right)^n, \quad \forall x \in X, \quad e \quad 0 < \rho < R,$$

e

$$\liminf_{\rho \rightarrow 0} \frac{m(B_\rho(x_0))}{m_E(\mathbb{B}_\rho(0))} = 1.$$

Então

$$m(B_\rho(x)) \geq C_0^{-1} \left( \frac{K_a}{C} \right)^{\frac{n}{1-a}} m_E(\mathbb{B}_\rho(0)), \quad \forall \rho > 0, \quad e \quad x \in X.$$

Tais resultados nos motivaram a entender a estrutura dos espaços métricos  $(X, d, m)$  que suportam a desigualdade de Caffarelli-Kohn-Nirenberg com termo de interpolação

$$\left( \int_{\mathbb{R}^n} |x|^{-\frac{n\mu}{n-p}} |u|^{\frac{p(q-1)}{p-1}} dx \right)^{\frac{p-1}{p(q-1)}} \leq C \left( \int_{\mathbb{R}^n} |x|^{-\mu} |\nabla u|^p dx \right)^{\frac{a}{p}} \left( \int_{\mathbb{R}^n} |x|^{-\frac{n\mu}{n-p}} |u|^q dx \right)^{\frac{1-a}{q}},$$

onde os parâmetros acima são dados pelo Teorema 2.2.

## 2.2 Resultados Principais

Nessa seção, salvo menção em contrário, assumiremos os parâmetros descritos no Teorema 2.2.

Dito isso, nosso objetivo será estender o resultado principal de Kristály e Ohta em [32] (veja Teorema 2.3) para classe de Caffarelli-Kohn-Nirenberg com termo de interpolação. Como consequência, apresentaremos teoremas de rigidez métrica e topológica em variedades Riemannianas, variedades Finslerianas e Espaços de Alexandrov. Tais resultados fornecem boas pistas de como são os espaços que suportam a desigualdade CKN.

Para tanto, consideraremos no espaço métrico  $(X, d)$  a medida de Borel  $m$  satisfazendo

$$0 < m(U) < \infty, \quad \forall U \subset X, \quad U \text{ aberto}, \quad U \neq \emptyset.$$



e para  $x_0 \in X$  fixado e  $C > 0$  consideramos a desigualdade de CKN em  $(X, d, m)$  da seguinte forma

$$\left( \int_X d(x, x_0)^{-\frac{n\mu}{n-p}} |u|^{\frac{p(q-1)}{p(q-1)}} dm(x) \right)^{\frac{p-1}{p(q-1)}} \leq C \left( \int_X d(x, x_0)^{-\mu} |Du|^p dm(x) \right)^{\frac{a}{p}} \times \left( \int_X d(x, x_0)^{-\frac{n\mu}{n-p}} |u|^q dm(x) \right)^{\frac{1-a}{q}}, \quad (2-5)$$

$\forall u \in Lip_0(X)$ , onde  $Lip_0(X)$  denota o espaço das funções Lipschitz com suporte compacto e

$$|Du|(x) := \limsup_{y \rightarrow x} \frac{|u(x) - u(y)|}{d(x, y)},$$

é a constante de Lipschitz local.

Nosso principal resultado estabelece que

**Teorema 2.4.** *Seja  $(X, d, m)$  um espaço métrico próprio com medida  $n$ -dimensional e assuma que para  $x_0 \in X$ ,  $C \geq C_{opt}(\mathbb{R}^n)$ ,  $C_0 \geq 1$  a desigualdade de Caffarelli-Kohn-Nirenberg (2-5) ocorra em  $X$ , juntamente com as seguintes condições:*

$$\frac{m(B_R(x))}{m(B_\rho(x))} \leq C_0 \left( \frac{R}{\rho} \right)^n, \quad \forall x \in X, \quad e \quad 0 < \rho < R, \quad (2-6)$$

e

$$\liminf_{\rho \rightarrow 0} \frac{m(B_\rho(x_0))}{m_E(\mathbb{B}_\rho(0))} = 1, \quad (2-7)$$

onde  $B_\rho(x) := \{y \in X : d(x, y) < \rho\}$ ,  $\mathbb{B}_\rho(0) = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| < \rho\}$  e  $m_E$  é a medida de Lebesgue  $n$ -dimensional. Então temos

$$m(B_\rho(x)) \geq C_0^{-1} \left( \frac{C_{opt}(\mathbb{R}^n)}{C} \right)^{\frac{n}{a}} m_E(\mathbb{B}_\rho(0)), \quad \forall \rho > 0, \quad e \quad x \in X. \quad (2-8)$$

Em particular

$$C_0^{-1} \left( \frac{C_{opt}(\mathbb{R}^n)}{C} \right)^{\frac{n}{a}} w_n \rho^n \leq m(B_\rho(x_0)) \leq C_0 w_n \rho^n,$$

para todo  $\rho > 0$ , onde  $w_n$  denota o volume da bola de raio unitário em  $\mathbb{R}^n$ .

Relembremos agora a definição de curvatura de Ricci assintoticamente não negativa.

**Definição 2.5.** *Uma variedade Riemanniana completa  $(M^n, g)$  tem curvatura de Ricci assintoticamente não negativa em um ponto base  $p \in M$  se*

$$Ric_g(x) \geq -(n-1)G(r(x)), \quad \forall x \in M, \quad (2-9)$$

onde  $r(x)$  denota a função distância a partir de  $p$  e  $G \in C^1([0, \infty))$  é uma função não negativa satisfazendo

$$\int_0^\infty tG(t)dt = b_0 < \infty.$$

Nesse caso,  $(M^n, g)$  satisfaz a seguinte propriedade de crescimento de volume (veja corolário 2.17 de [48]):

$$\frac{Vol(B_R(p))}{Vol(B_\rho(p))} \leq e^{(n-1)b_0} \left(\frac{R}{\rho}\right)^n, \quad 0 < \rho < R. \quad (2-10)$$

Então como corolário do Teorema 2.4 temos o seguinte resultado.

**Corolário 2.6.** *Seja  $(M^n, g)$  uma variedade Riemanniana completa não compacta com curvatura de Ricci satisfazendo (2-9) e assuma que para toda função  $u \in C_0^\infty(M)$  a desigualdade de CKN ocorra*

$$\left(\int_M r(x)^{-\frac{n\mu}{n-p}} |u|^{\frac{p(q-1)}{p(q-1)}} dv\right)^{\frac{p-1}{p(q-1)}} \leq C \left(\int_M r(x)^{-\mu} |\nabla u|^p dv\right)^{\frac{a}{p}} \times \left(\int_M r(x)^{-\frac{n\mu}{n-p}} |u|^q dv\right)^{\frac{1-a}{q}}. \quad (2-11)$$

Então para todo  $R > 0$  temos

$$e^{-(n-1)b_0} \left(\frac{C_{opt}(\mathbb{R}^n)}{C}\right)^{\frac{n}{a}} \omega_n R^n \leq Vol(B_R(p)) \leq e^{(n-1)b_0} \omega_n R^n,$$

onde  $w_n$  denota o volume da bola de raio unitário em  $\mathbb{R}^n$ .

Um teorema devido a Cheeger e Colding [18] afirma que dado um inteiro  $n \geq 2$ , existe uma constante  $\delta(n) > 0$ , tal que toda variedade Riemanniana  $(M^n, g)$  completa com curvatura de Ricci não negativa satisfazendo

$$Vol(B_r(x)) \geq (1 - \delta(n))\omega_n r^n, \quad \forall x \in M, \quad \forall r > 0,$$

é difeomorfa ao espaço Euclideo  $\mathbb{R}^n$ . Então combinando este resultado com o Corolário 2.6, obtemos o seguinte resultado.

**Corolário 2.7.** *Dado um inteiro  $n \geq 2$ , existe  $\epsilon(n) > 0$ , tal que toda variedade Riemanniana completa não compacta  $(M^n, g)$  com curvatura de Ricci não negativa satisfazendo a desigualdade de CKN*

$$\left(\int_M r(x)^{-\frac{n\mu}{n-p}} |u|^{\frac{p(q-1)}{p(q-1)}} dv\right)^{\frac{p-1}{p(q-1)}} \leq [C_{opt}(\mathbb{R}^n) + \epsilon(n)] \left(\int_M r(x)^{-\mu} |\nabla u|^p dv\right)^{\frac{a}{p}} \times \left(\int_M r(x)^{-\frac{n\mu}{n-p}} |u|^q dv\right)^{\frac{1-a}{q}}, \quad \forall u \in C_0^\infty(M),$$

é difeomorfa ao espaço Euclidiano  $\mathbb{R}^n$ .

Pelo teorema de comparação de Bishop-Gromov [17, 51], temos que uma variedade Riemanniana completa  $(M^n, g)$  com curvatura de Ricci não negativa satisfaz

$$\text{Vol}(B_R(p)) \leq \omega_n R^n, \quad \forall p \in M,$$

e a igualdade ocorre se, e somente se, a bola  $B_R(p)$  é isométrica a bola Euclidiana de raio  $R$ . Assim, em decorrência do Corolário 2.6, temos que

**Corolário 2.8.** *Seja  $(M^n, g)$  uma variedade Riemanniana completa não compacta com curvatura de Ricci não negativa e assuma que para toda função  $u \in C_0^\infty(M)$  a desigualdade de CKN ocorra*

$$\left( \int_M r(x)^{-\frac{n\mu}{n-p}} |u|^{\frac{p(q-1)}{p(q-1)}} dv \right)^{\frac{p-1}{p(q-1)}} \leq C_{opt}(\mathbb{R}^n) \left( \int_M r(x)^{-\mu} |\nabla u|^p dv \right)^{\frac{a}{p}} \times \left( \int_M r(x)^{-\frac{n\mu}{n-p}} |u|^q dv \right)^{\frac{1-a}{q}}.$$

Então  $M$  é isométrica ao espaço Euclidiano  $\mathbb{R}^n$ .

Zhu em [62], provou que dado  $\delta > 0$ , existe  $\epsilon(n, \delta)$  tal que toda variedade Riemanniana completa não compacta  $(M^n, g)$  com curvatura seccional satisfazendo

$$K(x) \geq -G(r(x)), \quad \int_0^\infty tG(t)dt \leq \epsilon,$$

e

$$\text{Vol}(B_R(p)) \geq \left(\frac{1}{2} + \delta\right) \omega_n R^n, \quad \forall R > 0,$$

é difeomorfa ao espaço Euclidiano  $\mathbb{R}^n$ . Combinando este resultado com o Corolário 2.6 temos o seguinte resultado.

**Corolário 2.9.** *Seja  $(M^n, g)$  uma variedade Riemanniana completa não compacta. Fixe  $\delta \in (0, \frac{1}{2})$ , então existe  $b_0(n, \delta) > 0$  tal que se a curvatura seccional de  $M$  satisfaz*

$$K(x) \geq -G(r(x)), \quad \int_0^\infty tG(t)dt \leq b_0,$$

e para toda função  $u \in C_0^\infty(M)$  a desigualdade de CKN ocorra

$$\left( \int_M r(x)^{-\frac{n\mu}{n-p}} |u|^{\frac{p(q-1)}{p(q-1)}} dv \right)^{\frac{p-1}{p(q-1)}} \leq C \left( \int_M r(x)^{-\mu} |\nabla u|^p dv \right)^{\frac{a}{p}} \times \left( \int_M r(x)^{-\frac{n\mu}{n-p}} |u|^q dv \right)^{\frac{1-a}{q}},$$

com  $C < (\frac{1}{2} + \delta)^{-\frac{a}{n}} C_{opt}(\mathbb{R}^n)$ , então  $M$  é difeomorfa ao espaço Euclidiano  $\mathbb{R}^n$ .

Para finalizar o caso Riemanniano, provaremos que a constante na desigualdade de CKN em uma variedade Riemanniana completa deve ser maior ou igual a constante ótima no caso Euclidiano de mesma dimensão, ou seja, temos o seguinte.

**Teorema 2.10.** *Seja  $(M^n, g)$  uma variedade Riemanniana completa não compacta com elemento de volume  $dx$  e constantes  $\alpha, \beta, \sigma, p, q, r, a$  como no Teorema 2.1. Suponha que exista uma constante  $C \in \mathbb{R}$ , tal que  $\forall u \in C_0^\infty(M)$ ,*

$$\left( \int_M r(x)^{\gamma r} |u|^r dv \right)^{\frac{1}{r}} \leq C \left( \int_M r(x)^{\alpha p} |\nabla u|^p dv \right)^{\frac{a}{p}} \left( \int_M r(x)^{\beta q} |u|^q dv \right)^{\frac{1-a}{q}}.$$

Então  $C_{opt}(\mathbb{R}^n) \leq C$ .

Similar ao Teorema de Comparação de Bishop-Gromov em variedades Riemannianas, existe uma extensão para espaços de Alexandrov.

**Teorema 2.11.** ([14])(Bishop-Gromov Inequality) *Seja  $X$  um espaço de Alexandrov localmente compacto de curvatura  $\geq k$  e  $n$  um inteiro positivo. Então para todo ponto  $p \in X$  a função*

$$r \rightarrow \frac{\mathcal{H}^n(B_r(p))}{V_r^k},$$

*é não crescente, onde  $\mathcal{H}^n(B_r(p))$  é a medida  $n$ -dimensional de Hausdorff da bola de centro  $p$  e raio  $r$  e  $V_r^k$  é o volume da bola de raio  $r$  na forma espacial  $M_k^n$ .*

Assim, em decorrência do Teorema 2.4, obtemos.

**Teorema 2.12.** *Seja  $(X, d)$  um espaço de Alexandrov completo, localmente compacto de curvatura  $\geq 0$  com medida de Hausdorff  $\mathcal{H}^n$  satisfazendo*

$$\liminf_{\rho \rightarrow 0} \frac{\mathcal{H}^n(B_\rho(x))}{\omega_n \rho^n} = 1.$$

*Suponha que a desigualdade de CKN ocorra em  $X$  com  $C = C_{opt}(\mathbb{R}^n)$ , então  $(X, d)$  é isométrico ao espaço Euclidiano  $\mathbb{R}^n$ .*

É de grande interesse saber em que condições um espaço métrico  $(X, d)$  tem tipo topológico finito (i.e. existe um compacto  $K \subset X$ , tal que,  $\partial K \times [1, \infty)$  é homeomorfo à  $X \setminus K$ ). Recentemente, Munn em [40] estendeu o Teorema de Cheeger Colding para o contexto dos espaços de Alexandrov, porém, ao invés de difeomorfismo, nesse caso temos que  $X$  tem tipo topológico finito.

**Teorema 2.13.** ([40], Teorema 3.2) *Dado um inteiro  $n \geq 2$ , existe  $\epsilon(n) > 0$ , tal que todo espaço de Alexandrov  $(X, d)$  completo não compacto de curvatura  $\geq 0$  e medida de Hausdorff  $\mathcal{H}^n$  satisfazendo*

$$\mathcal{H}^n(B_r(p)) \geq (1 - \epsilon) \omega_n r^n, \quad \forall r > 0, \quad p \in X,$$

tem tipo topológico finito.

No contexto dos espaços de Alexandrov, como aplicação do Teorema 2.4, juntamente com Teorema 2.13, obtemos o seguinte resultado.

**Teorema 2.14.** *Fixe  $n > 1$ , então existe  $\delta(n) > 0$  tal que, todo espaço de Alexandrov completo  $(X, d)$ , localmente compacto de curvatura  $\geq 0$  com medida de Hausdorff  $n$ -dimensional  $\mathcal{H}^n$  satisfazendo*

$$\liminf_{\rho \rightarrow 0} \frac{\mathcal{H}^n(B_\rho(x_0))}{\omega_n \rho^n} = 1,$$

assim como

$$\begin{aligned} \left( \int_X d(x, x_0)^{-\frac{n\mu}{n-p}} |u|^{\frac{p(q-1)}{p(q-1)}} d\mathcal{H}^n \right)^{\frac{p-1}{p(q-1)}} &\leq (C_{opt}(\mathbb{R}^n) + \delta(n)) \times \\ &\times \left( \int_X d(x, x_0)^{-\mu} |Du|^p d\mathcal{H}^n \right)^{\frac{a}{p}} \left( \int_X d(x, x_0)^{-\frac{n\mu}{n-p}} |u|^q d\mathcal{H}^n \right)^{\frac{1-a}{q}}, \end{aligned}$$

$\forall u \in Lip_0(X)$ , tem tipo topológico finito.

Trataremos agora as variedades Finslerianas. Como apontado na Seção 1.6, baseado no conceito da  $N$ -curvatura de Ricci, Ohta em [45] provou o seguinte resultado de comparação de volume do tipo Bishop-Gromov em espaços de Finsler.

**Teorema 2.15.** ([45], Theorem 7.3) *Seja  $(M, F, m)$  uma variedade de Finsler completa  $n$ -dimensional com  $N$ -curvatura Ricci não negativa. Então temos que*

$$\frac{m(B_R(x))}{m(B_r(x))} \leq \left(\frac{R}{r}\right)^n, \quad \forall x \in M, \text{ e } 0 < r < R.$$

Além disso, se a igualdade ocorre com  $N = n$  para todo  $x \in M$  e  $0 < r < R$ , então todo campo de Jacobi  $J$  ao longo de uma geodésica  $\sigma$  de  $M$  tem a forma  $J(t) = tP(t)$ , onde  $P$  é um campo paralelo ao longo de  $\sigma$ .

Motivados pelo trabalho de Kristály e Ohta [32], podemos combinar os Teoremas 2.4 e 2.15 para obter:

**Teorema 2.16.** *Seja  $(M, F, m)$  uma variedade de Finsler  $n$ -dimensional completa com medida diferenciável positiva  $m$  e  $n$ -curvatura de Ricci de  $(M, F, m)$  não negativa. Assuma que a desigualdade de CKN ocorra em  $M$  com  $C = C_{opt}(\mathbb{R}^n)$  para algum  $x_0 \in M$ , juntamente com*

$$\liminf_{r \rightarrow 0} \frac{m(B_r(x))}{\omega_n r^n} = 1, \quad \forall x \in M.$$

Então a Curvatura flag de  $(M, F)$  é identicamente nula.

**Teorema 2.17.** *Seja  $(M, F, m)$  uma variedade de Berwald  $n$ -dimensional completa com medida de Hausdorff  $n$ -dimensional e curvatura de Ricci não negativa satisfazendo a desigualdade de CKN com  $C = C_{opt}(\mathbb{R}^n)$  para algum ponto  $x_0 \in M$ , então  $(M, F)$  é isométrico a um espaço de Minkowski.*

Recentemente, Lakzian em [34] considerou a medida de Busemann-Hausdorff em  $(M, F)$  e motivado pelo caso Riemanniano, definiu o conceito de máximo crescimento de volume em variedades de Finsler. Com isso, propôs a seguinte conjectura:

**Conjectura.** *Uma variedade de Berwald  $(M, F)$  completa com curvatura flag não negativa e máximo crescimento de volume é difeomorfa ao espaço Euclidiano  $\mathbb{R}^n$ .*

**Observação 2.18.** *Kell em [31] apresentou uma demonstração para essa conjectura, para mais detalhes veja ([31], Corolário 27).*

Logo, combinando o fato acima com o Teorema 2.4, obtemos.

**Teorema 2.19.** *Seja  $(M, F, m_{BH})$  uma variedade de Berwald  $n$ -dimensional completa com medida de Busemann-Hausdorff  $m_{BH}$  e curvatura flag não negativa satisfazendo a desigualdade de CKN com  $C \geq C_{opt}(\mathbb{R}^n)$  para algum  $x_0 \in M$ , então  $(M, F)$  é difeomorfo ao espaço Euclidiano  $\mathbb{R}^n$ .*

## 2.3 Demonstração dos resultados principais

**Prova do Teorema 2.4 :** Para demonstração do Teorema 2.4, iremos recorrer ao seguinte lema, cuja demonstração segue as linhas de argumentos de Ledoux e Xia [36, 58].

**Lema 2.20.** *Seja  $(X, d, m)$  um espaço métrico próprio com medida  $m$ , satisfazendo as condições (2-6) e (2-7) do Teorema 2.4 para algum  $x_0 \in X$ . Denote  $d(x) = d(x, x_0)$ , e assumamos que a desigualdade de CKN ocorra em  $X$  para alguma constante  $C > C_{opt}(\mathbb{R}^n)$ . Então para todo  $\lambda > 0$ , temos*

$$F(\lambda) \geq \left( \frac{C_{opt}(\mathbb{R}^n)}{C} \right)^{\frac{n}{a}} G(\lambda),$$

onde

$$F(\lambda) = \frac{q-p}{r(p-1) - (q-p)} \int_X \frac{d(x)^{\gamma r}}{(\lambda + d(x))^{\frac{n-p-\mu}{n-p} \frac{p}{p-1} \frac{q(p-1)}{q-p}}} dm(x), \quad (2-12)$$

e

$$G(\lambda) = \frac{q-p}{r(p-1) - (q-p)} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{|x|^{\gamma r}}{(\lambda + |x|^{\frac{n-p-\mu}{n-p} \frac{p}{p-1} \frac{q(p-1)}{q-p}})} dm_E(x). \quad (2-13)$$

*Demonstração.* Primeiramente, pela Proposição 1.25, obtemos a seguinte representação para (2-12)

$$F(\lambda) = \frac{q-p}{r(p-1)-(q-p)} \int_0^\infty \mathfrak{m} \left\{ x : \frac{d(x)^{\gamma r}}{(\lambda + d(x))^{\frac{n-p-\mu}{n-p} \frac{p}{p-1} \frac{q(p-1)}{q-p}}} > s \right\} ds.$$

De modo que, considerando a mudança de variável da forma

$$s = \frac{h^{\gamma r}}{(\lambda + h^{\frac{n-p-\mu}{n-p} \frac{p}{p-1} \frac{q(p-1)}{q-p}})},$$

obtemos

$$\begin{aligned} F(\lambda) &= T \int_0^\infty \mathfrak{m} \{ x : d(x) < h \} h^{\gamma r - 1} \frac{\left[ -\gamma r \lambda + \left( \frac{pq}{q-p} \frac{n-p-\mu}{n-p} - \gamma r \right) h^{\frac{n-p-\mu}{n-p} \frac{p}{p-1}} \right]}{(\lambda + h^{\frac{n-p-\mu}{n-p} \frac{p}{p-1} \frac{q(p-1)}{q-p}})^{\frac{q(p-1)}{q-p} + 1}} dh, \\ &= T \int_0^\infty \mathfrak{m}(B_h(x_0)) h^{\gamma r - 1} \frac{\left[ -\gamma r \lambda + \left( \frac{pq}{q-p} \frac{n-p-\mu}{n-p} - \gamma r \right) h^{\frac{n-p-\mu}{n-p} \frac{p}{p-1}} \right]}{(\lambda + h^{\frac{n-p-\mu}{n-p} \frac{p}{p-1} \frac{q(p-1)}{q-p}})^{\frac{q(p-1)}{q-p} + 1}} dh. \end{aligned} \quad (2-14)$$

onde

$$T = \frac{q-p}{r(p-1)-(q-p)}.$$

As hipóteses (2-6) e (2-7) implicam que  $\mathfrak{m}(B_h(x_0)) \leq Ah^n$ ,  $\forall h > 0$ , para alguma constante  $A \in \mathbb{R}$ . Assim,

$$F(\lambda) \leq TA \int_0^\infty h^{n+\gamma r-1} \frac{\left[ -\gamma r \lambda + \left( \frac{pq}{q-p} \frac{n-p-\mu}{n-p} - \gamma r \right) h^{\frac{n-p-\mu}{n-p} \frac{p}{p-1}} \right]}{(\lambda + h^{\frac{n-p-\mu}{n-p} \frac{p}{p-1} \frac{q(p-1)}{q-p}})^{\frac{q(p-1)}{q-p} + 1}} dh.$$

Pelos parâmetros (2-2) e (2-3), obtemos que

$$n + \gamma r - 1 > -1, \quad n + \gamma r - 1 - \left( \frac{n-p-\mu}{n-p} \right) \frac{pq}{p-1} \frac{p-1}{q-p} < -1.$$

Portanto,  $0 \leq F(\lambda) < \infty$ ,  $\forall \lambda > 0$ , i. e.,  $F(\lambda)$  está bem definida. Além disso,  $F$  é diferenciável e sua derivada é dada por

$$F'(\lambda) = - \int_X \frac{d(x)^{\gamma r}}{(\lambda + d(x))^{\frac{n-p-\mu}{n-p} \frac{p}{p-1} \frac{r(p-1)}{q-p}}} d\mathfrak{m}(x). \quad (2-15)$$

Prosseguindo, tome  $\lambda > 0$  e defina a sequência de funções  $u_{\lambda,k} : X \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $k \in \mathbb{N}$ , por meio da expressão

$$u_{\lambda,k}(x) := \max \left\{ 0, \min \{ 0, k - d(x) \} + 1 \right\} \left( \lambda + \max \left\{ d(x), \frac{1}{k} \right\}^{\frac{n-p-\mu}{n-p} \frac{p}{p-1}} \right)^{-\frac{(p-1)}{q-p}}.$$

Como  $(X, d)$  é um espaço métrico próprio, temos por definição, que o conjunto  $\text{supp}(u_{\lambda,k}) = \{x \in X : d(x) \leq k + 1\}$  é compacto. Logo,  $u_{\lambda,k} \in \text{Lip}_0(X)$ ,  $\forall \lambda > 0$  e  $k \in \mathbb{N}$ . Conseqüentemente, defina

$$u_\lambda(x) := \lim_{k \rightarrow \infty} u_{\lambda,k}(x) = \left( \lambda + d(x)^{\frac{n-p-\mu}{n-p} \frac{p}{p-1}} \right)^{-\frac{(p-1)}{q-p}}.$$

Por um cálculo simples, podemos observar que as funções  $u_{\lambda,k}$  satisfazem (2-5). Além disso, por um argumento de aproximação,  $u_\lambda(x)$  também satisfaz (2-5). Logo

$$\begin{aligned} & \left( \int_X \frac{d(x)^{\gamma r}}{\left( \lambda + d(x)^{\frac{n-p-\mu}{n-p} \frac{p}{p-1}} \right)^{\frac{r(p-1)}{q-p}}} dm(x) \right)^{\frac{1}{r}} \leq \\ & \leq C \left( \frac{p(n-p-\mu)}{(n-p)(q-p)} \right)^a \left( \int_X d(x)^{\alpha p} d(x)^{\frac{p(n-p(\mu+1))}{(n-p)(p-1)}} \left( \lambda + d(x)^{\frac{n-p-\mu}{n-p} \frac{p}{p-1}} \right)^{\frac{p(1-q)}{q-p}} dm(x) \right)^{\frac{a}{p}} \times \\ & \times \left( \int_X \frac{d(x)^{\beta q}}{\left( \lambda + d(x)^{\frac{n-p-\mu}{n-p} \frac{p}{p-1}} \right)^{\frac{q(p-1)}{q-p}}} dm(x) \right)^{\frac{1-a}{q}}, \end{aligned}$$

que combinado com (2-15), resulta em

$$(-F'(\lambda))^{\frac{1}{r}} \leq C \left( \frac{p(n-p-\mu)}{(n-p)(q-p)} \right)^a \left( \frac{F(\lambda)}{T} + \lambda F'(\lambda) \right)^{\frac{a}{p}} \left( \frac{F(\lambda)}{T} \right)^{\frac{1-a}{q}}.$$

Assim,  $F$  satisfaz a desigualdade

$$(-F'(\lambda))^{\frac{p}{ar}} \leq C_a^{\frac{p}{a}} \left( \frac{p(n-p-\mu)}{(n-p)(q-p)} \right)^p \left( \frac{F(\lambda)}{T} + \lambda F'(\lambda) \right) \left( \frac{F(\lambda)}{T} \right)^{\frac{p(1-a)}{aq}}. \quad (2-16)$$

De maneira similar ao que fizemos para  $F(\lambda)$ , podemos obter a seguinte expressão para  $G(\lambda)$

$$G(\lambda) = T\omega_n \int_0^\infty t^{n+\gamma r-1} \frac{\left[ -\gamma r \lambda + \left( \frac{pq}{q-p} \frac{n-p-\mu}{n-p} - \gamma r \right) t^{\frac{n-p-\mu}{n-p} \frac{p}{p-1}} \right]}{\left( \lambda + t^{\frac{n-p-\mu}{n-p} \frac{p}{p-1}} \right)^{\frac{q(p-1)}{q-p} + 1}} dt. \quad (2-17)$$



Além do mais, por meio das funções ótimas  $z_\lambda(x) = (\lambda + |x|^{\frac{n-p-\mu}{n-p} \frac{p}{p-1}})^{-\frac{(p-1)}{q-p}}$  obtida por Lam (Teorema 2.2) temos que

$$\begin{aligned} \left( \int_{\mathbb{R}^n} |x|^{\gamma r} |z_\lambda|^r d\mathbf{m}_E \right)^{\frac{1}{r}} &= C_{opt}(\mathbb{R}^n) \left( \int_{\mathbb{R}^n} |x|^{\alpha p} |\nabla z_\lambda|^p d\mathbf{m}_E \right)^{\frac{a}{p}} \times \\ &\times \left( \int_{\mathbb{R}^n} |x|^{\beta q} |z_\lambda|^q d\mathbf{m}_E \right)^{\frac{1-a}{q}}. \end{aligned} \quad (2-18)$$

Assim, combinando a equação (2-17) com (2-18), obtemos a seguinte expressão

$$\begin{aligned} (-G'(\lambda))^{\frac{p}{ar}} &= C_{opt}(\mathbb{R}^n)^{\frac{p}{a}} \left( \frac{p(n-p-\mu)}{(n-p)(q-p)} \right)^p \left( \frac{G(\lambda)}{T} + \lambda G'(\lambda) \right) \times \\ &\times \left( \frac{G(\lambda)}{T} \right)^{\frac{p(1-a)}{aq}}. \end{aligned} \quad (2-19)$$

Na sequência, a mudança de variável da forma  $t = h\lambda^{\frac{n-p}{n-p-\mu} \frac{p-1}{p}}$  nos permite concluir que

$$G(\lambda) = \lambda^{\frac{(q-p)(p-1)n-pq(p-1)}{p(q-p)}} G(1). \quad (2-20)$$

Logo, substituindo (2-20) em (2-19), obtemos

$$\begin{aligned} \left( -\frac{(q-p)(p-1)n-pq(p-1)}{p(q-p)} \right)^{\frac{p}{ar}} &= \\ &= C_{opt}(\mathbb{R}^n)^{\frac{p}{a}} \left[ \left( \frac{p(n-p-\mu)}{(n-p)(q-p)} \right)^p \left( \frac{q(p-1)}{q-p} \right)^{\frac{p(1-a)}{aq}} \left( \frac{n(p-1)}{p} \right) G(1)^{\frac{p}{n}} \right]. \end{aligned} \quad (2-21)$$

Considere a constante  $B \in \mathbb{R}$  definida por

$$\begin{aligned} \left( -\frac{(q-p)(p-1)n-pq(p-1)}{p(q-p)} \right)^{\frac{p}{ar}} &= \\ &= C_a^{\frac{p}{a}} \left[ \left( \frac{p(n-p-\mu)}{(n-p)(q-p)} \right)^p \left( \frac{q(p-1)}{q-p} \right)^{\frac{p(1-a)}{aq}} \left( \frac{n(p-1)}{p} \right) B^{\frac{p}{n}} \right]. \end{aligned} \quad (2-22)$$

Pela equação (2-22), podemos facilmente verificar que a função

$$H_0(\lambda) = B\lambda^{\frac{(q-p)(p-1)n-pq(p-1)}{p(q-p)}}, \quad \lambda \in (0, \infty),$$

satisfaz a equação diferencial

$$(-H'_0(\lambda))^{\frac{p}{ar}} = C^{\frac{p}{a}} \left( \frac{p(n-p-\mu)}{(n-p)(q-p)} \right)^p \left( \frac{H_0(\lambda)}{T} + \lambda H'_0(\lambda) \right) \left( \frac{H_0(\lambda)}{T} \right)^{\frac{p(1-a)}{aq}}. \quad (2-23)$$

Segue das equações (2-21) e (2-22) que

$$B = \left( \frac{C_{opt}(\mathbb{R}^n)}{C} \right)^{\frac{n}{a}} G(1).$$

Assim,

$$\begin{aligned} H_0(\lambda) &= B\lambda^{\frac{(q-p)(p-1)n-pq(p-1)}{p(q-p)}}, \\ &= \left( \frac{C_{opt}(\mathbb{R}^n)}{C} \right)^{\frac{n}{a}} G(1) \lambda^{\frac{(q-p)(p-1)n-pq(p-1)}{p(q-p)}}, \\ &= \left( \frac{C_{opt}(\mathbb{R}^n)}{C} \right)^{\frac{n}{a}} G(\lambda). \end{aligned} \quad (2-24)$$

Agora, afirmamos que se  $F(\lambda_0) < H_0(\lambda_0)$ , para algum  $\lambda_0 > 0$ , então  $F(\lambda) < H_0(\lambda)$ ,  $\forall \lambda \in (0, \lambda_0]$ . De fato, suponha por absurdo que exista  $\lambda_1 \in (0, \lambda_0)$ , tal que,  $F(\lambda_1) \geq H_0(\lambda_1)$  e defina

$$\lambda_2 := \sup\{\lambda < \lambda_0; F(\lambda) \geq H_0(\lambda)\}.$$

Então  $F(\lambda) \leq H_0(\lambda)$ ,  $\forall \lambda \in [\lambda_2, \lambda_0]$ , e assim, nós temos por (2-16) que

$$\begin{aligned} (-F'(\lambda))^{\frac{p}{ar}} &\leq \Gamma \left( \frac{F(\lambda)}{T} + \lambda F'(\lambda) \right) F(\lambda)^{\frac{p(1-a)}{aq}}, \\ &\leq \Gamma \left( \frac{H_0(\lambda)}{T} + \lambda F'(\lambda) \right) H_0(\lambda)^{\frac{p(1-a)}{aq}}, \end{aligned} \quad (2-25)$$

onde

$$\Gamma = C^{\frac{p}{a}} \left( \frac{p(n-p-\mu)}{(n-p)(q-p)} \right)^p \left( T^{-1} \right)^{\frac{p(1-a)}{aq}}.$$

Para cada  $\lambda > 0$ , considere a função  $\varphi_\lambda : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$  definida por

$$\varphi_\lambda(t) = t^{\frac{p}{ar}} + t\lambda\Gamma H_0(\lambda)^{\frac{p(1-a)}{aq}}.$$

Dessa forma, por (2-23) e (2-25), obtemos

$$\begin{aligned}
 \varphi_\lambda(-F'(\lambda)) &= (-F'(\lambda))^{\frac{p}{ar}} - \Gamma\lambda F'(\lambda)H_0(\lambda)^{\frac{p(1-a)}{aq}}, \\
 &\leq T^{-1}\Gamma H_0(\lambda)H_0(\lambda)^{\frac{p(1-a)}{aq}}, \\
 &= (-H'_0(\lambda))^{\frac{p}{ar}} - \Gamma\lambda H'_0(\lambda)H_0(\lambda)^{\frac{p(1-a)}{aq}}, \\
 &= \varphi_\lambda(-H'_0(\lambda)).
 \end{aligned}$$

Fixada a constante  $\lambda > 0$ , podemos observar que  $\varphi_\lambda$  é uma função não decrescente, com isso, podemos concluir pela desigualdade acima que

$$-F'(\lambda) \leq -H'_0(\lambda), \quad \forall \lambda \in [\lambda_2, \lambda_0].$$

Conseqüentemente,

$$0 \leq (F - H_0)(\lambda_2) \leq (F - H_0)(\lambda_0) < 0,$$

que é uma contradição.

Observe agora que a condição (2-7), implica que dado  $\epsilon > 0$ , existe  $\delta > 0$ , tal que

$$h \leq \delta \Rightarrow (1 - \epsilon)\mathbf{m}_E(\mathbb{B}_h(0)) \leq \mathbf{m}(B_h(x_0)).$$

Isso implica que

$$\begin{aligned}
 F(\lambda) &= T \int_0^\infty \mathbf{m}(B_h(x_0))h^{\gamma r-1} \frac{\left[ -\gamma r\lambda + \left(\frac{pq}{q-p} \frac{n-p-\mu}{n-p} - \gamma r\right)h^{\frac{n-p-\mu}{n-p} \frac{p}{p-1}} \right]}{\left(\lambda + h^{\frac{n-p-\mu}{n-p} \frac{p}{p-1}}\right)^{\frac{q(p-1)}{q-p}+1}} dh, \\
 &\geq T \int_0^\delta \mathbf{m}(B_h(x_0))h^{\gamma r-1} \frac{\left[ -\gamma r\lambda + \left(\frac{pq}{q-p} \frac{n-p-\mu}{n-p} - \gamma r\right)h^{\frac{n-p-\mu}{n-p} \frac{p}{p-1}} \right]}{\left(\lambda + h^{\frac{n-p-\mu}{n-p} \frac{p}{p-1}}\right)^{\frac{q(p-1)}{q-p}+1}} dh, \\
 &\geq (1 - \epsilon)T \int_0^\delta \mathbf{m}_E(\mathbb{B}_h(0))h^{\gamma r-1} \frac{\left[ -\gamma r\lambda + \left(\frac{pq}{q-p} \frac{n-p-\mu}{n-p} - \gamma r\right)h^{\frac{n-p-\mu}{n-p} \frac{p}{p-1}} \right]}{\left(\lambda + h^{\frac{n-p-\mu}{n-p} \frac{p}{p-1}}\right)^{\frac{q(p-1)}{q-p}+1}} dh, \\
 &\geq \Theta \int_0^\Delta \mathbf{m}_E(\mathbb{B}_s(0))s^{\gamma r-1} \frac{\left[ -\gamma r + \left(\frac{pq}{q-p} \frac{n-p-\mu}{n-p} - \gamma r\right)s^{\frac{n-p-\mu}{n-p} \frac{p}{p-1}} \right]}{\left(1 + s^{\frac{n-p-\mu}{n-p} \frac{p}{p-1}}\right)^{\frac{q(p-1)}{q-p}+1}} ds,
 \end{aligned}$$

onde

$$\Theta = (1 - \epsilon)T\lambda^{\frac{(q-p)(p-1)n-pq(p-1)}{p(q-p)}} \quad e \quad \Delta = \frac{\delta}{\lambda^{\frac{(n-p)(p-1)}{p(n-p-\mu)}}}.$$

Por outro lado, pela equação (2-13), temos que

$$\begin{aligned} G(\lambda) &= T \int_{\mathbb{R}^n} \frac{|x|^{\gamma r}}{(\lambda + |x|^{\frac{n-p-\mu}{n-p} \frac{p}{p-1}})^{\frac{q(p-1)}{q-p}}} d\mathbf{m}_E(x), \\ &= \frac{\Theta}{1-\epsilon} \int_0^\infty \mathbf{m}_E(\mathbb{B}_s(0)) s^{\gamma r-1} \frac{\left[ -\gamma r + \left( \frac{pq}{q-p} \frac{n-p-\mu}{n-p} - \gamma r \right) s^{\frac{n-p-\mu}{n-p} \frac{p}{p-1}} \right]}{\left( 1 + s^{\frac{n-p-\mu}{n-p} \frac{p}{p-1}} \right)^{\frac{q(p-1)}{q-p} + 1}} ds. \end{aligned}$$

Logo

$$\frac{F(\lambda)}{G(\lambda)} \geq (1-\epsilon) \frac{\int_0^\Delta \mathbf{m}_E(\mathbb{B}_s(0)) s^{\gamma r-1} \frac{\left[ -\gamma r + \left( \frac{pq}{q-p} \frac{n-p-\mu}{n-p} - \gamma r \right) s^{\frac{n-p-\mu}{n-p} \frac{p}{p-1}} \right]}{\left( 1 + s^{\frac{n-p-\mu}{n-p} \frac{p}{p-1}} \right)^{\frac{q(p-1)}{q-p} + 1}} ds}{\int_0^\infty \mathbf{m}_E(\mathbb{B}_s(0)) s^{\gamma r-1} \frac{\left[ -\gamma r + \left( \frac{pq}{q-p} \frac{n-p-\mu}{n-p} - \gamma r \right) s^{\frac{n-p-\mu}{n-p} \frac{p}{p-1}} \right]}{\left( 1 + s^{\frac{n-p-\mu}{n-p} \frac{p}{p-1}} \right)^{\frac{q(p-1)}{q-p} + 1}} ds}.$$

Assim

$$\liminf_{\lambda \rightarrow 0} \frac{F(\lambda)}{G(\lambda)} \geq 1 - \epsilon.$$

E tomando  $\epsilon \rightarrow 0$ , obtemos

$$\liminf_{\lambda \rightarrow 0} \frac{F(\lambda)}{G(\lambda)} \geq 1. \tag{2-26}$$

Para finalizar, segue da hipótese  $C_{opt}(\mathbb{R}^n) < C$ , juntamente com (2-24) e (2-26) que

$$\begin{aligned} \liminf_{\lambda \rightarrow 0} \frac{F(\lambda)}{H_0(\lambda)} &= \liminf_{\lambda \rightarrow 0} \frac{F(\lambda)}{G(\lambda)} \left( \frac{C}{C_{opt}(\mathbb{R}^n)} \right)^{\frac{n}{a}}, \\ &\geq \left( \frac{C}{C_{opt}(\mathbb{R}^n)} \right)^{\frac{n}{a}}, \\ &> 1. \end{aligned}$$

Então utilizando a afirmação provada acima, obtemos

$$F(\lambda) \geq H_0(\lambda), \quad \forall \lambda > 0,$$

isto é,

$$F(\lambda) \geq \left( \frac{C_{opt}(\mathbb{R}^n)}{C} \right)^{\frac{n}{a}} G(\lambda), \quad \forall \lambda > 0.$$

Isso completa a demonstração do Lema. □

Passaremos agora a demonstração do Teorema, para tanto, iremos dividi-lá em dois casos.

**Caso 1):**  $C > C_{opt}(\mathbb{R}^n)$ . Para simplificar os cálculos, vamos considerar:

$$\psi(h) = h^{\gamma r - 1} \frac{\left[ -\gamma r \lambda + \left( \frac{pq}{q-p} \frac{n-p-\mu}{n-p} - \gamma r \right) h^{\frac{n-p-\mu}{n-p} \frac{p}{p-1}} \right]}{\left( \lambda + h^{\frac{n-p-\mu}{n-p} \frac{p}{p-1}} \right)^{\frac{q(p-1)}{q-p} + 1}}.$$

Observe que, utilizando o Lema 2.20, juntamente com a notação acima, temos

$$\int_0^\infty [\mathfrak{m}(B_h(x_0)) - d_1 \mathfrak{m}_E(\mathbb{B}_h(0))] \psi(h) dh \geq 0, \quad \text{onde } d_1 := \left( \frac{C_{opt}(\mathbb{R}^n)}{C} \right)^{\frac{n}{\alpha}}. \quad (2-27)$$

Por outro lado, fixando  $x \in X$ , temos as seguintes inclusões

$$B(x_0, r - d(x, x_0)) \subset B(x, r) \subset B(x_0, r + d(x, x_0)), \quad \forall r > d(x, x_0).$$

Logo,

$$\begin{cases} \frac{\mathfrak{m}(B(x_0, r - d(x, x_0)))}{\omega_n (r - d(x, x_0))^n} \leq \frac{\mathfrak{m}(B(x, r))}{\omega_n r^n} \frac{r^n}{(r - d(x, x_0))^n}. \\ \frac{r^n}{(r + d(x, x_0))^n} \frac{\mathfrak{m}(B(x, r))}{\omega_n r^n} \leq \frac{\mathfrak{m}(B(x_0, r + d(x, x_0)))}{\omega_n (r + d(x, x_0))^n}. \end{cases}$$

Tomando  $r \rightarrow \infty$  nas desigualdades acima, obtemos

$$\limsup_{r \rightarrow \infty} \frac{\mathfrak{m}(B_r(x_0))}{\mathfrak{m}_E(\mathbb{B}_r(0))} = \limsup_{r \rightarrow \infty} \frac{\mathfrak{m}(B_r(x))}{\mathfrak{m}_E(\mathbb{B}_r(0))}. \quad (2-28)$$

Agora, fixando  $h > 0$ , temos pela condição (2-6) que

$$C_0 \frac{\mathfrak{m}(B_h(x))}{\mathfrak{m}_E(\mathbb{B}_h(0))} \geq \frac{\mathfrak{m}(B_R(x))}{\mathfrak{m}_E(\mathbb{B}_R(0))}, \quad \forall R > h \geq 0, \quad x \in X. \quad (2-29)$$

Assim, combinando as equações (2-28) e (2-29), temos

$$C_0 \frac{\mathfrak{m}(B_h(x))}{\mathfrak{m}_E(\mathbb{B}_h(0))} \geq \limsup_{R \rightarrow \infty} \frac{\mathfrak{m}(B_R(x))}{\mathfrak{m}_E(\mathbb{B}_R(0))} = \limsup_{R \rightarrow \infty} \frac{\mathfrak{m}(B_R(x_0))}{\mathfrak{m}_E(\mathbb{B}_R(0))} =: d_0. \quad (2-30)$$

Dessa forma, para provarmos a relação (2-8) no caso  $C_{opt}(\mathbb{R}^n) < C$ , é suficiente provarmos que  $d_1 \leq d_0$ . Iremos argumentar por contradição, suponha que  $d_0 < d_1$ , então pela definição de  $d_0$ , existe  $\epsilon_0 > 0$  tal que para algum  $h_0 > 0$

$$\frac{\mathbf{m}(B_h(x_0))}{\mathbf{m}_E(\mathbb{B}_h(0))} \leq d_1 - \epsilon_0, \quad \forall h \geq h_0. \quad (2-31)$$

Segue-se de (2-6) e (2-7) que

$$\mathbf{m}(B_h(x_0)) \leq C_0 \mathbf{m}_E(\mathbb{B}_h(0)). \quad (2-32)$$

Por consequência, substituindo (2-31) em (2-27) e considerando a desigualdade (2-32), obtemos

$$\begin{aligned} 0 &\leq \int_0^\infty [\mathbf{m}(B_h(x_0)) - d_1 \mathbf{m}_E(\mathbb{B}_h(0))] \psi(h) dh, \\ &\leq \int_0^{h_0} \mathbf{m}(B_h(x_0)) \psi(h) dh + (d_1 - \epsilon_0) \int_{h_0}^\infty \mathbf{m}_E(\mathbb{B}_h(0)) \psi(h) dh + \\ &\quad - d_1 \int_0^\infty \mathbf{m}_E(\mathbb{B}_h(0)) \psi(h) dh, \\ &\leq C_0 \int_0^{h_0} \mathbf{m}(\mathbb{B}_h(0)) \psi(h) dh - d_1 \int_0^{h_0} \mathbf{m}_E(\mathbb{B}_h(0)) \psi(h) dh + \\ &\quad - \epsilon_0 \int_{h_0}^\infty \mathbf{m}_E(\mathbb{B}_h(0)) \psi(h) dh, \\ &= (C_0 - d_1 + \epsilon_0) \int_0^{h_0} \mathbf{m}(\mathbb{B}_h(0)) \psi(h) dh - \epsilon_0 \int_0^\infty \mathbf{m}(\mathbb{B}_h(0)) \psi(h) dh, \\ &= (C_0 - d_1 + \epsilon_0) \int_0^{h_0} \mathbf{m}(\mathbb{B}_h(0)) \psi(h) dh - \epsilon_0 T^{-1} G(\lambda). \end{aligned} \quad (2-33)$$

Como  $\lambda \leq (\lambda + h^{\frac{n-p-\mu}{n-p} \frac{p}{p-1}})$ , nós temos que  $\frac{1}{(\lambda + h^{\frac{n-p-\mu}{n-p} \frac{p}{p-1}})} \leq \frac{1}{\lambda}$ , e então

$$\begin{aligned} \int_0^{h_0} h^n \psi(h) dh &= \int_0^{h_0} h^{n+\gamma r-1} \frac{\left[ -\gamma r \lambda + \left( \frac{pq}{q-p} \frac{n-p-\mu}{n-p} - \gamma r \right) h^{\frac{n-p-\mu}{n-p} \frac{p}{p-1}} \right]}{\left( \lambda + h^{\frac{n-p-\mu}{n-p} \frac{p}{p-1}} \right)^{\frac{q(p-1)}{q-p} + 1}} dh, \\ &\leq \int_0^{h_0} h^{n+\gamma r-1} \frac{\left[ -\gamma r \lambda + \left( \frac{pq}{q-p} \frac{n-p-\mu}{n-p} - \gamma r \right) h^{\frac{n-p-\mu}{n-p} \frac{p}{p-1}} \right]}{\lambda^{\frac{q(p-1)}{q-p} + 1}} dh, \\ &= \int_0^{h_0} \frac{h^{n+\gamma r-1}}{\lambda^{-\frac{q(p-1)}{q-p} - 1}} \left[ -\gamma r \lambda + \left( \frac{pq}{q-p} \frac{n-p-\mu}{n-p} - \gamma r \right) h^{\frac{n-p-\mu}{n-p} \frac{p}{p-1}} \right] dh, \\ &= \frac{\left[ -\frac{\gamma r \lambda h_0^{n+\gamma r}}{n+\gamma r} + \frac{\left( \frac{pq}{q-p} \frac{n-p-\mu}{n-p} - \gamma r \right) h_0^{n+\gamma r + \frac{n-p-\mu}{n-p} \frac{p}{p-1}}}{n+\gamma r + \frac{n-p-\mu}{n-p} \frac{p}{p-1}} \right]}{\lambda^{\frac{q(p-1)}{q-p} + 1}}. \end{aligned} \quad (2-34)$$

Substituindo (2-34) e (2-20) em (2-33) tem-se

$$\frac{\epsilon_0 T^{-1} G(1)}{\omega_n (C_0 - d_1 + \epsilon_0)} \leq \lambda^{-\frac{q(p-1)}{q-p} - 1 - \frac{(q-p)(p-1)n - pq(p-1)}{p(q-p)}} \left[ -\frac{\gamma r \lambda h_0^{n+\gamma r}}{n + \gamma r} + \frac{\left(\frac{pq}{q-p} \frac{n-p-\mu}{n-p} - \gamma r\right) h_0^{n+\gamma r + \frac{n-p-\mu}{n-p} \frac{p}{p-1}}}{n + \gamma r + \frac{n-p-\mu}{n-p} \frac{p}{p-1}} \right]. \quad (2-35)$$

Observe também que

$$-\frac{q(p-1)}{q-p} - 1 - \frac{(q-p)(p-1)n - pq(p-1)}{p(q-p)} < 0$$

e

$$-\frac{q(p-1)}{q-p} - \frac{(q-p)(p-1)n - pq(p-1)}{p(q-p)} = -\frac{n(p-1)}{p} < 0.$$

Logo, tomando  $\lambda \rightarrow \infty$ , obtemos uma contradição por (2-35). Isso completa a demonstração do Teorema 2.4 no caso  $C > C_{opt}(\mathbb{R}^n)$ .

**Caso 2):**  $C = C_{opt}(\mathbb{R}^n)$ . Nesse caso, para cada  $\delta > 0$ , nós temos

$$\left( \int_X d(x, x_0)^{\gamma r} |u|^r dm(x) \right)^{\frac{1}{r}} \leq (C_{opt}(\mathbb{R}^n) + \delta) \left( \int_X d(x, x_0)^{\alpha p} |Du|^p dm(x) \right)^{\frac{\alpha}{p}} \times \left( \int_X d(x, x_0)^{\beta q} |u|^q dm(x) \right)^{\frac{1-\alpha}{q}}.$$

Assim, pelo Caso 1, tem-se

$$m(B_\rho(x)) \geq C_0^{-1} \left( \frac{C_{opt}(\mathbb{R}^n)}{C_{opt}(\mathbb{R}^n) + \delta} \right)^{\frac{n}{\alpha}} m_E(\mathbb{B}_\rho(0)), \quad \forall \rho > 0, \quad x \in X.$$

Tomando  $\delta \rightarrow 0$ , deduzimos que

$$m(B_\rho(x)) \geq C_0^{-1} m_E(\mathbb{B}_\rho(0)), \quad \forall \rho > 0, \quad x \in X.$$

Isso completa a demonstração do Teorema 2.4. □

**Prova do Teorema 2.10 :** Argumentaremos por contradição, fixe  $p \in M$  e assumamos que  $C < C_{opt}(\mathbb{R}^n)$ , juntamente com

$$\left( \int_M d(x, x_0)^{\gamma r} |u|^r dv \right)^{\frac{1}{r}} \leq C \left( \int_M d(x, x_0)^{\alpha p} |\nabla u|^p dv \right)^{\frac{\alpha}{p}} \times \left( \int_M d(x, x_0)^{\beta q} |u|^q dv \right)^{\frac{1-\alpha}{q}}, \quad \forall u \in C_0^\infty(M). \quad (2-36)$$

Escolhendo coordenadas normais em torno do ponto  $p$ , temos que a geometria em uma vizinhança de  $p$  é próxima da geometria do espaço tangente a  $p$ , no seguinte sentido, para cada  $\epsilon > 0$  existe uma carta  $(\Omega, \phi)$  em  $M$  contendo  $p$  e um  $\delta > 0$  tal que,  $\phi(\Omega) = B_\delta(0) = \{x \in \mathbb{R}^n; |x| < \delta\}$ , e as componentes  $g_{ij}$  de  $g$  nesta carta satisfazem

$$\frac{1}{(1 + \epsilon)}\delta_{ij} \leq g_{ij} \leq (1 + \epsilon)\delta_{ij}, \quad (2-37)$$

no sentido de formas bilineares. A demonstração para este fato, pode ser encontra em [7].

Agora, afirmamos que, para  $\epsilon > 0$  suficientemente pequeno, existe  $\delta_0 > 0$  e  $C' < C_{opt}(\mathbb{R}^n)$ , tal que,  $\forall f \in C_0^\infty(B_{\delta_0}(0))$ ,

$$\begin{aligned} \left( \int_{B_{\delta_0}(0)} |x|^{\gamma r} |f|^r dx \right)^{\frac{1}{r}} &\leq C' \left( \int_{B_{\delta_0}(0)} |x|^{\alpha p} |\nabla f|^p dx \right)^{\frac{a}{p}} \times \\ &\times \left( \int_{B_{\delta_0}(0)} |x|^{\beta q} |f|^q dx \right)^{\frac{1-a}{q}}. \end{aligned} \quad (2-38)$$

De fato, se  $f \in C_0^\infty(B_{\delta_0}(0))$ , então  $u := f \circ \exp_p^{-1} \in C_0^\infty(\Omega)$ . Logo, por (2-36) e (2-37), temos que

$$\begin{aligned} \left( \int_{B_{\delta_0}(0)} |x|^{\gamma r} |f|^r dx \right)^{\frac{1}{r}} &\leq \left( \int_{B_{\delta_0}(0)} |x|^{\gamma r} |u \circ \exp_p|^r \sqrt{g} (1 - \epsilon)^{\frac{n}{2}} dx \right)^{\frac{1}{r}}, \\ &= (1 + \epsilon)^{\frac{n}{2r}} \left( \int_{\Omega} r(x)^{\gamma r} |u|^r dv \right)^{\frac{1}{r}}, \\ &\leq (1 + \epsilon)^{\frac{n}{2r}} C \left( \int_{\Omega} r(x)^{\alpha p} |\nabla u|^p dv \right)^{\frac{a}{p}} \left( \int_{\Omega} r(x)^{\beta q} |u|^q dv \right)^{\frac{1-a}{q}}, \\ &= (1 + \epsilon)^{\frac{n}{2r}} C \left( \int_{B_{\delta_0}(0)} |x|^{\alpha p} |\nabla(u \circ \exp_p)|^p \sqrt{g} dx \right)^{\frac{a}{p}} \times \\ &\times \left( \int_{B_{\delta_0}(0)} |x|^{\beta q} |u \circ \exp_p|^q \sqrt{g} dx \right)^{\frac{1-a}{q}}, \\ &\leq (1 + \epsilon)^{\frac{n}{2r}} (1 + \epsilon)^{\frac{an}{2p} + \frac{n(1-a)}{2q} + \frac{a}{2}} C \left( \int_{B_{\delta_0}(0)} |x|^{\alpha p} |\nabla f|^p dx \right)^{\frac{a}{p}} \times \\ &\times \left( \int_{B_{\delta_0}(0)} |x|^{\beta q} |f|^q dx \right)^{\frac{1-a}{q}}, \\ &= C' \left( \int_{B_{\delta_0}(0)} |x|^{\alpha p} |\nabla f|^p dx \right)^{\frac{a}{p}} \left( \int_{B_{\delta_0}(0)} |x|^{\beta q} |f|^q dx \right)^{\frac{1-a}{q}}. \end{aligned}$$

onde  $C' = (1 + \epsilon)^{\frac{n}{2r} + \frac{an}{2p} + \frac{n(1-a)}{2q} + \frac{a}{2}} C$ .



Observe agora que fazendo  $\epsilon \rightarrow 0$ , temos que  $C' \rightarrow C$ . Mas, como estamos assumindo que  $C < C_{opt}(\mathbb{R}^n)$ , então podemos tomar  $\epsilon$  suficientemente pequeno de modo que  $C' < C_{opt}(\mathbb{R}^n)$ , o que prova a afirmação inicial.

Seja  $u \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ . Escreva  $u_\lambda(x) = u(\lambda x)$ ,  $\lambda > 0$ . Para  $\lambda$  suficientemente grande temos que  $u_\lambda(x) \in C_0^\infty(B_{\delta_0}(0))$ . Dessa forma, considerando  $u_\lambda(x) \equiv 0$  em  $\mathbb{R}^n \setminus B_{\delta_0}(0)$ , temos

$$\left( \int_{\mathbb{R}^n} |x|^{\gamma r} |u_\lambda|^r dx \right)^{\frac{1}{r}} \leq C' \left( \int_{\mathbb{R}^n} |x|^{\alpha p} |\nabla u_\lambda|^p dx \right)^{\frac{a}{p}} \left( \int_{\mathbb{R}^n} |x|^{\beta q} |u_\lambda|^q dx \right)^{\frac{1-a}{q}}. \quad (2-39)$$

Agora, observe que, por meio de mudanças de variáveis, obtemos

$$\left( \int_{\mathbb{R}^n} |x|^{\gamma r} |u_\lambda(x)|^r dx \right)^{\frac{1}{r}} = \lambda^{-\frac{n}{r}} \lambda^{-\gamma} \left( \int_{\mathbb{R}^n} |y|^{\gamma r} |u(y)|^r dy \right)^{\frac{1}{r}},$$

$$\left( \int_{\mathbb{R}^n} |x|^{\alpha p} |\nabla u_\lambda(x)|^p dx \right)^{\frac{a}{p}} = \lambda^{-\frac{na}{p}} \lambda^{-\alpha a} \lambda^a \left( \int_{\mathbb{R}^n} |y|^{\alpha p} |\nabla u(y)|^p dy \right)^{\frac{a}{p}},$$

$$\left( \int_{\mathbb{R}^n} |x|^{\beta q} |u_\lambda(x)|^q dx \right)^{\frac{1-a}{q}} = \lambda^{-\frac{n(1-a)}{q}} \lambda^{-\beta(1-a)} \left( \int_{\mathbb{R}^n} |y|^{\beta q} |u(y)|^q dy \right)^{\frac{1-a}{q}}.$$

Inserindo as relações acima em (2-39), tem-se que

$$\begin{aligned} \left( \int_{\mathbb{R}^n} |y|^{\gamma r} |u(y)|^r dy \right)^{\frac{1}{r}} &\leq C' \lambda^{-\alpha a - \frac{na}{p} + a - \frac{n(1-a)}{q} - \beta(1-a) + \frac{n}{r} + \gamma} \times \\ &\quad \times \left( \int_{\mathbb{R}^n} |y|^{\alpha p} |\nabla u(y)|^p dy \right)^{\frac{a}{p}} \left( \int_{\mathbb{R}^n} |y|^{\beta q} |u(y)|^q dy \right)^{\frac{1-a}{q}}. \end{aligned}$$

Mas, pelas condições do Teorema 2.1, concluímos que

$$\begin{aligned} &\left[ -\alpha a - \frac{na}{p} + a - \frac{n(1-a)}{q} - \beta(1-a) + \frac{n}{r} + \gamma \right] = \\ &= -a(\alpha - 1) - \frac{na}{p} - (1-a) \left( \frac{n}{q} + \beta \right) + \frac{n}{r} + \gamma \\ &= -a \left( (\alpha - 1) + \frac{n}{p} \right) - (1-a) \left( \frac{n}{q} + \beta \right) + \frac{n}{r} + \gamma \\ &= -an \left( \frac{(\alpha - 1)}{n} + \frac{1}{p} \right) - n(1-a) \left( \frac{1}{q} + \frac{\beta}{n} \right) + n \left( \frac{1}{r} + \frac{\gamma}{n} \right) \\ &= -n \left( a \left( \frac{\alpha - 1}{n} + \frac{1}{p} \right) + (1-a) \left( \frac{\beta}{n} + \frac{1}{q} \right) - \left( \frac{1}{r} + \frac{\gamma}{n} \right) \right) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Logo, teremos que

$$\left( \int_{\mathbb{R}^n} |y|^{\gamma r} |u(y)|^r dy \right)^{\frac{1}{r}} \leq C' \left( \int_{\mathbb{R}^n} |y|^{\alpha p} |\nabla u(y)|^p dy \right)^{\frac{a}{p}} \left( \int_{\mathbb{R}^n} |y|^{\beta q} |u(y)|^q dy \right)^{\frac{1-a}{q}}.$$

Essa expressão contradiz o fato de  $C_{opt}(\mathbb{R}^n)$  ser a constante ótima em  $\mathbb{R}^n$ . Isso conclui a demonstração do Teorema.  $\square$

**Prova do Teorema 2.12 :** Visto que  $(X, d)$  é localmente compacto e completo, obtemos que os conjuntos limitados e fechados em  $X$  são compactos, logo  $X$  é um espaço métrico próprio. Agora, como  $X$  tem curvatura  $\geq 0$ , podemos aplicar o Teorema 1.34 e obter

$$\frac{\mathcal{H}^n(B_R(x))}{\mathcal{H}^n(B_\rho(x))} \leq \left( \frac{R}{\rho} \right)^n, \quad x \in X, \quad 0 < \rho < R. \quad (2-40)$$

Assim, a condição (2-6) do Teorema 2.4 é satisfeita com  $C_0 = 1$ .

Segue da desigualdade (2-40) e da hipótese

$$\liminf_{\rho \rightarrow 0} \frac{\mathcal{H}^n(B_\rho(x))}{\omega_n \rho^n} = 1,$$

a seguinte consequência

$$\mathcal{H}^n(B_R(x)) \leq \omega_n R^n, \quad \forall x \in X, \quad \forall \rho > 0.$$

Por outro lado, pelo Teorema 2.4, temos que

$$\mathcal{H}^n(B_R(x)) \geq \omega_n R^n, \quad \forall x \in X, \quad \forall \rho > 0.$$

Portanto

$$\mathcal{H}^n(B_R(x)) = \omega_n R^n, \quad \forall x \in X, \quad \forall \rho > 0.$$

Assim, a isometria com o espaço Euclidiano  $\mathbb{R}^n$  segue do Teorema 1.35.  $\square$

**Prova do Teorema 2.14 :** Considere  $\epsilon > 0$  dado pelo Teorema 1.38. Como a função  $\phi : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  definida por

$$\phi(x) := \left( \frac{C_{opt}(\mathbb{R}^n)}{C_{opt}(\mathbb{R}^n) + x} \right)^{\frac{n}{a}},$$

converge para 1 quando  $x \rightarrow 0$ , nós obtemos a existência de um  $\delta > 0$  satisfazendo

$$0 < x \leq \delta \implies 1 - \epsilon \leq \left( \frac{C_{opt}(\mathbb{R}^n)}{C_{opt}(\mathbb{R}^n) + x} \right)^{\frac{n}{a}}.$$

Então, aplicando os Teoremas 2.4, 1.37 e 1.38 nós obtemos que  $X$  tem tipo topológico finito.  $\square$

**Prova do Teorema 2.16 :** Como  $(M, F)$  é completa, temos pelo teorema de Hopf-Rinow (veja [52]) que  $(M, d_F, \mathbf{m})$  é um espaço métrico próprio. Pelo Teorema 1.42, temos que a condição (2-6) no Teorema 2.4 ocorre para  $C_0 = 1$ . Observe que a escolha da constante 1 no lado direito de (2-7) foi feito por simplicidade. De fato, por (2-6) temos que  $\Lambda_{x_0} = \liminf_{r \rightarrow 0} \frac{\mathbf{m}(B_r(x_0))}{\mathbf{m}_E(\mathbb{B}_r(0))}$  é positivo. Então podemos normalizar a medida  $\mathbf{m}$  de modo a satisfazer (2-7).

Por (2-6), temos que

$$\frac{\mathbf{m}(B_R(x_0))}{w_n R^n} \leq \frac{\mathbf{m}(B_r(x_0))}{w_n r^n} = \frac{\mathbf{m}(B_r(x_0))}{\mathbf{m}_E(\mathbb{B}_r(0))}, \quad 0 < r < R.$$

Tomando  $\rho \rightarrow 0$  obtemos, pela condição

$$\liminf_{\rho \rightarrow 0} \frac{\mathbf{m}(B_\rho(x))}{\omega_n \rho^n} = 1,$$

que  $\mathbf{m}(B_R(x)) \leq \omega_n R^n, \forall x \in M$  e  $R > 0$ .

Por outro lado, como  $C = C_{opt}(\mathbb{R}^n)$  na desigualdade de CKN, obtemos a partir do Teorema 2.4 que  $\mathbf{m}(B_R(x)) \geq w_n R^n, \forall x \in M$  e  $R > 0$ . Portanto,  $\mathbf{m}(B_R(x)) = \mathbf{m}_E(\mathbb{B}_R(0)), \forall x \in M$  e  $R > 0$ . Com isso, pelo Teorema 1.42 temos que todo campo de Jacobi  $J$  ao longo de uma geodésica  $\sigma$  tem a forma  $J(t) = tP(t)$ , onde  $P$  é um campo paralelo ao longo de  $\sigma$ . Dessa forma a equação de Jacobi (1-11) se reduz a  $R^{\dot{\sigma}}(J, \dot{\sigma}) \equiv 0$ . Então  $K(\mathcal{S}, \dot{\sigma}) \equiv 0$  com  $\mathcal{S} = span\{P, \dot{\sigma}\}$ . Por fim, como  $\sigma$  e  $J$  foram tomados arbitrários, temos que  $K \equiv 0$ , o que é equivalente a dizer que a curvatura flag de  $(M, F)$  é identicamente nula.  $\square$

**Prova do Teorema 2.17 :** Como  $(M, F)$  é um espaço de Berwald temos que a curvatura de Ricci não negativa  $Ric \geq 0$  é equivalente a  $Ric_n \geq 0$  (veja [53], Proposição 2.6 e 2.7). Dessa forma, podemos aplicar o Teorema 2.16 para obter que a curvatura flag de  $(M, F)$  é identicamente nula. A caracterização das variedades Berwald com curvatura flag identicamente nula foi obtida por Bao et.al. ([8], Seção 10.5), onde obtiveram que  $(M, F)$  é localmente um espaço de Minkowski.

Fixados  $p$  e  $q$  em  $M$ , pelo fato de  $M$  ser localmente um espaço de Minkowski, temos que existem vizinhanças  $V_p$  e  $V_q$  em  $M$  de modo que  $F|_{V_p}(x, y)$  e  $F|_{V_q}(x, y)$  não dependem de  $x$ . Porém, ainda não sabemos se  $F|_{V_p}(y) = F|_{V_q}(y)$ . Assim nos resta provar esse fato. Para tanto, considere uma geodésica  $\gamma$  ligando os pontos  $p$  e  $q$ , como a imagem formada pela geodésica é compacta, podemos extrair uma subcobertura finita

de vizinhanças de modo que  $F$  não dependa de  $x$ , mas como  $F$  é contínua, temos que  $F|_{V_p}(y) = F|_{V_q}(y)$ . Logo  $(M, F)$  é isométrico a um espaço de Minkowski.  $\square$

**Prova do Teorema 2.19 :** Como  $(M, F)$  é completa, temos pelo Teorema de Hopf-Rinow ([52]) que  $(M, d_F, \mathfrak{m})$  é um espaço métrico próprio. A hipótese de não negatividade da curvatura flag implica que a curvatura de Ricci é não negativa, então de maneira análoga a demonstração do Teorema 2.17 obtemos que  $Ric_n \geq 0$ , e pelo Teorema 1.42, temos que a condição (2-6) no Teorema 2.4 ocorre para  $C_0 = 1$ .

Agora, pela Proposição 1.43, temos que a medida de Busemann-Hausdorff  $\mathfrak{m}_{BH}$  satisfaz

$$\liminf_{\rho \rightarrow 0} \frac{\mathfrak{m}_{BH}(B_\rho(x))}{\omega_n \rho^n} = 1.$$

Assim, pelo Teorema 2.4 obtém-se

$$0 < \left( \frac{C_{opt}(\mathbb{R}^n)}{C} \right)^{\frac{n}{a}} \leq \frac{\mathfrak{m}_{BH}(B_\rho(x_0))}{\omega_n \rho^n} \leq 1, \quad \forall \rho > 0. \quad (2-41)$$

Recordemos que, uma variedade de Finsler  $(M, F)$  tem máximo crescimento de volume se

$$\lim_{\rho \rightarrow \infty} \frac{\mathfrak{m}_{BH}(B_\rho(x_0))}{\omega_n \rho^n} > 0.$$

Portanto pela desigualdade (2-41), obtemos que  $(M, F)$  tem máximo crescimento de volume, e então pela Observação 2.18,  $M$  é difeomorfa ao espaço Euclidiano  $\mathbb{R}^n$ .  $\square$

---

## Solitons de Yamabe gradiente com base conformemente plana

---

Neste capítulo, iremos apresentar uma série de resultados obtidos em [2] em parceria com Adriano, Pina e Barboza. Tais resultados classificam os solitons de Yamabe gradientes com base conformemente plana steady que são invariantes pela ação do grupo de translações de codimensão 1. Essa técnica permite estudar um problema que envolve certa dificuldade por se tratar de equações diferenciais parciais, em um problema envolvendo equações diferenciais ordinárias, o que a priori simplifica a busca por soluções.

### 3.1 Introdução

Nessa seção apresentaremos alguns resultados no escopo dos solitons de Yamabe gradiente. A definição para tal soliton, assim como diversos exemplos podem ser vistos na seção 1.3.

Recentemente, Brozos-Vázquez *et al.* forneceram uma estrutura especial de produto torcido para os solitons de Yamabe gradiente, este teorema estabelece o seguinte resultado.

**Teorema 3.1.** ([13]) *Um soliton de Yamabe gradiente  $(M^n, g, h, \rho)$  com  $|\nabla h| \neq 0$ , é localmente isométrico ao produto torcido*

$$\left( (-\varepsilon, \varepsilon), dt^2 \right) \times_{|\nabla h|} \left( N^{n-1}, g_N \right),$$

onde  $(N^{n-1}, g_N)$  é uma variedade semi-Riemanniana de curvatura escalar constante.

Por outro lado, de Sousa e Pina em [22], estudaram os solitons de Ricci gradiente com estrutura de produto torcido e provaram que a função potencial depende apenas da base ou a função torção é constante. Utilizando a mesma técnica é possível provar tal fato no contexto dos solitons de Yamabe.

Estes resultados tornam interessante uma investigação mais detalhada dos solitons de Yamabe gradiente com estrutura de produto torcido  $B \times_f F$  satisfazendo

$$scal_{g_F} = \lambda_F = \text{constant}, \quad \tilde{h} = h \circ \pi, \quad h \in C^\infty(B), \quad (3-1)$$

onde  $scal_{g_F}$  representa a curvatura escalar de  $F$ , e  $\tilde{h}$  a função potencial do produto torcido, visto que resultados nessa linha permitem o entendimento local dos solitons de Yamabe.

**Observação 3.2.** *Ao longo dessa tese, consideraremos a notação apresentada na equação (3-1).*

## 3.2 Soluções invariantes por translação

Considere  $(\mathbb{R}^n, \delta)$  o espaço semi-Euclideo de dimensão  $n \geq 3$  munido do tensor métrico

$$\delta = \sum_{i=1}^n \varepsilon_i dx_i \otimes dx_i, \quad \varepsilon_i = \pm 1.$$

Para um vetor não nulo  $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{R}^n$  defina a seguinte função  $\xi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  por meio da regra

$$\begin{aligned} \xi(x) &= \langle x, \alpha \rangle, \\ &= \alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_n x_n, \end{aligned}$$

onde  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ . O vetor  $\alpha$  define um conjunto de hiperplanos perpendiculares a  $\alpha$  dado por

$$Ker(\xi) = \{x \in \mathbb{R}^n ; \langle x, \alpha \rangle = 0\}.$$

Considere  $v \in \mathbb{R}^n$  tal que  $v \in Ker(\xi)$  e  $f : (a, b) \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  uma função diferenciável, então a função  $\hat{f} : \xi^{-1}(a, b) \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ , definida por  $\hat{f} = f \circ \xi$  satisfaz

$$\hat{f}(x) = \hat{f}(x + v), \quad \forall x \in \xi^{-1}(a, b).$$

É nesse sentido que dizemos que  $\hat{f}$  é uma função invariante por um grupo de translações de dimensão  $(n - 1)$ .

Recentemente, os espaços conformemente planos se tornaram objetos de grande interesse pela sua flexibilidade em fornecer exemplos de solitons de Yamabe gradiente steady. Em [42], Neto e Tenenblat trataram o caso  $(\mathbb{R}^n, \frac{1}{\varphi^2} g_0)$ , onde  $g_0$  é a métrica semi-Euclidea canônica, e obtiveram as soluções steady que são invariantes pela ação do

grupo de translações de dimensão  $(n - 1)$ . A mesma técnica é usada para obter todas as soluções invariantes de solitons de Ricci gradiente steady, veja [9].

O produto torcido provou sua eficiência em produzir novos exemplos de variedades com certas características geométricas peculiares, veja [11, 24, 26]. Considerando soluções invariantes no produto torcido, Neto em [41] forneceu exemplos explícitos de soluções da equação de campo de Einstein que são completas. Por outro lado, no mesmo contexto de invariância, Sousa em [22] forneceu exemplos de solitons de Ricci gradiente com estrutura de produto torcido que não são conformemente plano.

Nessa seção, focaremos nossa atenção para o produto torcido  $B^n \times_f F^d$ , onde a base é conforme ao espaço semi-Euclideano de dimensão  $n$ , invariante pela ação de um grupo de translação  $(n - 1)$ -dimensional. Como aplicação, iremos construir 5 exemplos de solitons de Yamabe gradiente steady. Além disso, forneceremos uma forma de construir infinitos exemplos explícitos de solitons de Yamabe gradiente steady geodesicamente completos com base conforme ao espaço de Lorentz (veja Exemplo 3.5).

Como citado no início da seção, nós procuramos por funções diferenciáveis  $\varphi, f, h : (a, b) \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , com  $f, \varphi > 0$ , de modo que  $f = f \circ \xi$ ,  $\varphi = \varphi \circ \xi$ ,  $h = h \circ \xi : B = \xi^{-1}(a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ , satisfaçam (1-4) com função potencial  $\tilde{h}$  e tensor métrico

$$g = \frac{\delta}{\varphi(x)^2} + f(x)^2 g_F.$$

**Teorema 3.3.** *Com  $(\mathbb{R}^n, \delta)$  e  $f = f \circ \xi, \varphi = \varphi \circ \xi, h = h \circ \xi$  como acima, o espaço  $\overline{M} = \xi^{-1}(a, b) \times F^d$ , munido do tensor métrico*

$$g = \frac{\delta}{\varphi(x)^2} + f(x)^2 g_F, \quad (3-2)$$

*é um soliton de Yamabe gradiente se, e somente se*

$$h'' + 2\frac{\varphi' h'}{\varphi} = 0, \quad (3-3)$$

$$\begin{aligned} \|\alpha\|^2 \left[ (n-1)(2\varphi\varphi'' - n(\varphi')^2) - 2\frac{d}{f}(\varphi^2 f'' - (n-2)\varphi\varphi' f') + \right. \\ \left. - \frac{d(d-1)}{f^2}\varphi^2(f')^2 + \varphi' h' \varphi \right] = \rho - \frac{\lambda_F}{f^2}, \end{aligned} \quad (3-4)$$

$$\begin{aligned} \|\alpha\|^2 \left[ (n-1)(2\varphi\varphi'' - n(\varphi')^2) - 2\frac{d}{f}(\varphi^2 f'' - (n-2)\varphi\varphi' f') + \right. \\ \left. - \frac{d(d-1)}{f^2}\varphi^2(f')^2 - \frac{\varphi^2}{f} f' h' \right] = \rho - \frac{\lambda_F}{f^2}, \end{aligned} \quad (3-5)$$

*quando  $\|\alpha\|^2 \neq 0$ , e*

$$h'' + 2\frac{\varphi'h'}{\varphi} = 0, \quad (3-6)$$

$$\rho - \frac{\lambda_F}{f^2} = 0, \quad (3-7)$$

quando  $\|\alpha\|^2 = 0$ .

**Corolário 3.4.** *Se  $\|\alpha\|^2 = 0$  e  $\lambda_F \neq 0$ , então o produto torcido  $\overline{M} = \xi^{-1}(a, b) \times F^d$  é um produto Riemanniano usual.*

Nesse caso, nós temos a seguinte obstrução na constante  $\rho$ .

**Corolário 3.5.** *Se  $\|\alpha\|^2 = 0$  e  $\lambda_F > 0$ , então não existe soliton de Yamabe gradiente steady ou expanding com métrica produto torcido (3-2). Analogamente, se  $\|\alpha\|^2 = 0$  e  $\lambda_F < 0$ , então não existe soliton de Yamabe gradiente steady ou shrinking com métrica produto torcido (3-2).*

Pelas equações (3-3) e (3-6) do Teorema 3.3 podemos observar que uma condição necessária e suficiente para que tal espaço seja um soliton de Yamabe gradiente, é que  $h$  seja uma função monótona. Isto é,

$$h'(\xi) = \frac{k_1}{\varphi^2(\xi)},$$

para alguma constante  $k_1 \in \mathbb{R}$ .

Apresentaremos as soluções das EDOs do Teorema 3.3 nos seguintes casos:  $h' = 0$  e  $h' \neq 0$ .

**Teorema 3.6.** *Com as considerações acima, o tensor métrico*

$$g = \frac{\delta}{\varphi(x)^2} + f(x)^2 g_F,$$

*é um soliton de Yamabe gradiente steady se, e somente se, as funções  $\varphi, f, h$  satisfazem as seguintes condições*

(a) *Se  $\|\alpha\|^2 \neq 0$ ,  $\lambda_F \neq 0$  e  $h' \neq 0$ , então*

$$f(\xi) = \frac{k_2}{\varphi(\xi)}, \quad (3-8)$$

$$h(\xi) = k_1 \int \frac{1}{\varphi^2(\xi)} d\xi, \quad (3-9)$$



$$\varphi^2 \varphi'' - \frac{(n+d)}{2} \varphi (\varphi')^2 + \frac{k_1}{2(n+d-1)} \varphi' = -\frac{\varphi^3 \lambda_F}{k_2^2 \|\alpha\|^2}, \quad (3-10)$$

onde  $k_1 \neq 0$ ,  $k_2 \neq 0$ , são constantes.

(b) Se  $\|\alpha\|^2 \neq 0$ ,  $\lambda_F = 0$  e  $h' \neq 0$ , então

$$f(\xi) = \frac{k_2}{\varphi(\xi)}, \quad (3-11)$$

$$h(\xi) = k_1 \int \frac{1}{\varphi^2(\xi)} d\xi, \quad (3-12)$$

$$(n+d-1)(n+d+2) \int \frac{\varphi d\varphi}{k_1 - \frac{2k_3(n+d-1)(n+d+2)}{n+d-2} \varphi^{\frac{n+d}{2}+1}} = \xi + k_4, \quad (3-13)$$

onde  $k_1 \neq 0$ ,  $k_2 \neq 0$ ,  $k_3$  e  $k_4$  são constantes.

(c) Se  $\|\alpha\|^2 \neq 0$ ,  $\lambda_F = 0$  e  $h' = 0$ , então dado uma função suave  $\varphi(\xi) > 0$ , temos

$$h(\xi) = \text{constante}, \quad (3-14)$$

$$f(\xi) = \varphi^{\frac{n-2}{d+1}}(\xi) e^{\Phi(\xi)} \left( \int e^{-(d+1)\Phi(\xi)} d\xi + \frac{2}{d+1} C \right)^{\frac{2}{d+1}}, \quad (3-15)$$

onde  $\Phi(\xi) = \int z_p(\xi) d\xi$  e  $z_p$  é uma solução particular de

$$z^2 + \frac{2}{d+1} z' + \frac{(n+d-1)}{d(d+1)^2} \left( n \left( \frac{\varphi'}{\varphi} \right)^2 - 2 \frac{\varphi''}{\varphi} \right) = 0. \quad (3-16)$$

(d) Se  $\|\alpha\|^2 = 0$  e  $\lambda_F = 0$ , então dado duas funções suaves  $\varphi(\xi)$  e  $f(\xi)$ , temos

$$h(\xi) = k_1 \int \frac{1}{\varphi^2(\xi)} d\xi,$$

onde  $k_1$  é uma constante.

**Observação 3.7.** Como poderemos observar, na demonstração do Teorema 3.3, se  $\rho$  é uma função definida apenas na base, então facilmente podemos estender o Teorema 3.3 no contexto dos quase solitons de Yamabe gradiente. Como exemplo, no caso particular em que  $\|\alpha\|^2 = 0$  nós obtemos uma infinidade de soluções, isto é, dado as funções  $\varphi$  e  $f$ , então

$$\rho(\xi) = \frac{\lambda_F}{f(\xi)^2},$$

$$h(\xi) = k_1 \int \frac{1}{\varphi^2(\xi)} d\xi, \quad k_1 \in \mathbb{R},$$

fornecem uma família de quase solitons de Yamabe gradiente com estrutura de produto torcido.

Na sequência, apresentamos alguns exemplos ilustrando o Teorema 3.6. Tais exemplos são interessantes e guiarão nossa intuição a respeito de propriedades gerais dos solitons de Yamabe gradiente. Primeiramente denote

$$\mathbb{R}_+^3 = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3; x_3 > 0\}, \quad \mathbb{R}_*^3 = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3; x_1 + x_2 + x_3 > 0\},$$

$$\mathbb{R}_\#^3 = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3; 0 < x_1 + x_2 + x_3 < 10\pi\},$$

e

$$ds^2 = (dx_1)^2 + (dx_2)^2 + (dx_3)^2.$$

**Exemplo 3.1.** No Teorema 3.6, Caso (a), considere  $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{H}^3$ ,  $k_1 = 1$ ,  $k_2 = 3$ , então temos que

$$f(\xi) = \frac{1}{\varphi(\xi)}, \quad h(\xi) = \int \frac{1}{\varphi^2(\xi)} d\xi, \quad e \quad \varphi^2 \varphi'' - 3\varphi(\varphi')^2 + \frac{\varphi'}{10} = \frac{2}{3} \frac{\varphi^3}{\|\alpha\|^2}.$$

A família de soluções de  $\varphi$  está descrita no seguinte retrato de fase.

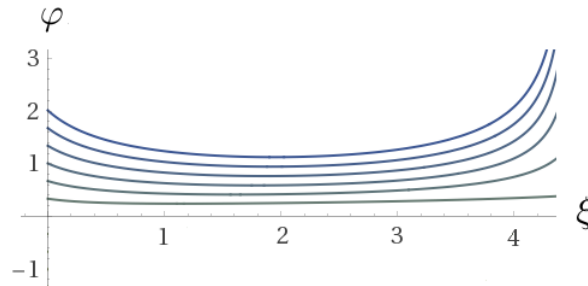


Figura 3.1: Plot de  $\varphi(0)$  e  $\varphi'(0)$

**Exemplo 3.2.** No Teorema 3.6, Caso (b), considere  $k_1 = 1$ ,  $k_2 = 1$ ,  $k_3 = 0$ ,  $k_4 = 0$ , então o espaço  $\mathbb{R}_*^3 \times \mathbb{R}^3$  munido da métrica  $g = ds_1^2 + f^2 ds$ , onde

$$ds_1^2 = 20 \frac{ds^2}{x_1 + x_2 + x_3}, \quad f(x_1, x_2, x_3) = \sqrt{\frac{20}{x_1 + x_2 + x_3}},$$

é um soliton de Yamabe gradiente steady com função potencial

$$h(x_1, x_2, x_3) = 20 \log(x_1 + x_2 + x_3).$$

**Exemplo 3.3.** No Teorema 3.6, Caso (b), considere  $k_1 = 1, k_2 = 1, k_3 = -\frac{1}{20}, k_4 = 0$ , então o espaço  $\mathbb{R}_\#^3 \times \mathbb{R}^3$  munido da métrica  $g = ds_1^2 + f^2 ds$ , onde

$$ds_1^2 = \frac{ds^2}{\tan\left(\frac{x_1 + x_2 + x_3}{20}\right)}, \quad f(x_1, x_2, x_3) = \sqrt{\frac{1}{\tan\left(\frac{x_1 + x_2 + x_3}{20}\right)}},$$

é um soliton de Yamabe gradiente steady com função potencial

$$h(x_1, x_2, x_3) = 20 \log \left[ \sin \left( \frac{x_1 + x_2 + x_3}{20} \right) \right].$$

**Exemplo 3.4.** No Teorema 3.6, Caso (c), considere o espaço de Lorentz  $(\mathbb{R}^4, g)$  com coordenadas  $(x_1, x_2, x_3, x_4)$ , assinatura  $\varepsilon_1 = -1, \varepsilon_k = 1$  para  $k = 2, 3, 4$ , e  $F^3$  com curvatura escalar zero. Considere  $\xi = x_2 + x_3 + x_4$  e escolha  $\varphi(\xi) = |\sec(\xi)|$  onde  $\xi \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$ , então  $z_p(\xi) = -\frac{1}{2}$  é uma solução particular de (3-16), e pelo Teorema 3.6

$$f(\xi) = (2|\sec(\xi)|e^\xi)^{\frac{1}{2}}, \quad h(\xi) = \text{constante}, \quad \varphi(\xi) = |\sec(\xi)|,$$

fornece uma estrutura de soliton de Yamabe gradiente steady definido em  $x_1 + x_2 + x_3 \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$ .

**Exemplo 3.5.** No Teorema 3.6, Caso (d), considere o espaço de Lorentz  $(\mathbb{R}^n, g)$  com coordenadas  $(x_1, \dots, x_n)$ , assinatura  $\varepsilon_1 = -1, \varepsilon_i = 1, \forall i \geq 2$ , e fibra  $(\mathbb{R}^d, g_0)$  onde  $g_0$  é a métrica Euclideana usual. Considere  $\xi = x_1 + x_2$  e escolha  $k \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ , então

$$f(\xi) = e^{k\xi}, \quad h(\xi) = -\frac{k_1 e^{-2k\xi}}{2k}, \quad k_1 \neq 0, \quad \varphi(\xi) = e^{k\xi},$$

define uma família de solitons de Yamabe gradiente steady completos no produto torcido  $(\mathbb{R}^n, \varphi^{-2}g) \times_f (\mathbb{R}^d, g_0)$  com função potencial  $h$  e função torção  $f$  (veja Seção 3.3).

**Exemplo 3.6.** (Produto torcido Einstein) Considere o espaço  $\mathbb{R}_+^3 \times \mathbb{R}^3$  munido da métrica  $g = ds_1^2 + f^2 ds$ , onde

$$ds_1^2 = \frac{ds^2}{x_3^2}, \quad f(x_1, x_2, x_3) = \frac{1}{x_3}.$$

Por um cálculo direto, temos que  $\mathbb{H}^3 \times_f \mathbb{R}^3$  é uma variedade de Einstein completa não compacta com  $\text{Ric} = -\frac{5}{6}g$ . Com isso,  $\mathbb{H}^3 \times_f \mathbb{R}^3$  é um soliton de Yamabe gradiente trivial.

**Exemplo 3.7.** *Seja  $(\mathbb{S}^3, dr^2)$  a esfera de dimensão 3 com métrica canônica e considere a variedade produto  $\hat{M} = \mathbb{R}_+^3 \times (\mathbb{S}^3 \times \mathbb{R}_+^3)$  munido da métrica  $\hat{g} = ds_1^2 + f^2(dr^2 + ds_1^2)$ , onde*

$$ds_1^2 = \frac{ds^2}{x_3^2}, \quad f(x_1, x_2, x_3) = \sqrt[7]{x_3^4}.$$

*Por um cálculo direto, temos que  $\mathbb{H}^3 \times_f (\mathbb{S}^3 \times \mathbb{H}^3)$  é um soliton de Yamabe gradiente trivial completo não compacto com  $\rho = -6$ .*

### 3.3 Infinitos exemplos de solitons de Yamabe gradiente steady completo

Nessa seção, demonstraremos que o Exemplo 3.5 fornece infinitos exemplos de solitons de Yamabe gradiente geodesicamente completo. No âmbito das métricas semi-Riemannianas definimos completude como segue.

**Definição 3.8.** *Uma variedade semi-Riemanniana na qual toda geodésica  $\gamma$  pode ser estendida para todo  $t \in \mathbb{R}$  é dita geodesicamente completa, ou simplesmente completa.*

Muitos exemplos de variedades semi-Riemannianas são encontrados na literatura. Porém, exemplos geodesicamente completos são raros, visto que resultados clássicos na geometria Riemanniana não podem ser utilizados, como é o caso do teorema de Hopf-Rinow que não permanecerem válido para métricas semi-Riemanniana. O exemplo a seguir retirado de [46] apresenta uma variedade semi-Riemanniana compacta que não é completa.

**Exemplo 3.8.** ([46]) *Considere  $M = \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$  equipado com a métrica semi-Riemanniana*

$$g = \frac{dx \otimes dy + dy \otimes dx}{x^2 + y^2}.$$

*Para todo  $c \neq 0$  a aplicação  $(x, y) \mapsto c(x, y)$  é uma isometria de  $M$ . Considere como caso particular a seguinte isometria:  $\lambda(x, y) = (2x, 2y)$ . O grupo  $\Gamma = \{\lambda^n : n \in \mathbb{Z}\}$  gerado por  $\lambda$  age de maneira propriamente descontínua em  $M$ , dessa forma,  $\frac{M}{\Gamma}$  é uma variedade semi-Riemanniana cuja topologia pode ser identificada com a região anular  $\{(x, y) \in M : 1 \leq x^2 + y^2 < 2\}$ . Identificando a fronteira de  $\frac{M}{\Gamma}$  por meio de  $\lambda$  obtemos um toro de Clifton-Pohl. As geodésicas de  $M$  são dadas por  $\gamma(t) = ((1-t)^{-1}, 0)$ ,  $-\infty < t < 1$ , dessa forma,  $\gamma$  não pode ser estendida para  $t > 1$ . Como a projeção  $\pi : \frac{M}{\Gamma} \rightarrow M$  é uma isometria local e  $M$  é não completa, temos que  $\frac{M}{\Gamma}$  é não completa.*

O exemplo acima inviabiliza a utilização do teorema de Hopf-Rinow no âmbito das métricas semi-Riemannianas. Dessa forma, em muitos casos precisamos provar a

completude por meio da definição, a saber, é necessário exibir as geodésicas e provar que elas podem ser estendidas para todo parâmetro real.

No contexto dos produtos torcidos, considere  $\gamma$  uma curva em  $B \times_f F$ , então podemos escrever  $\gamma(s) = (\gamma_B(s), \gamma_F(s))$ , onde  $\gamma_B = \pi \circ \gamma$  e  $\gamma_F = \sigma \circ \gamma$ . A proposição a seguir garante uma condição para que  $\gamma$  seja uma geodésica.

**Proposição 3.9.** ([46]) *Uma curva  $\gamma = (\gamma_B, \gamma_F)$  em  $B \times_f F$  é uma geodésica se, e somente se,*

$$(a) \quad \gamma_B'' = g_F(\gamma_F', \gamma_F') f \circ \gamma_B \nabla f \quad \text{em } B;$$

$$(b) \quad \gamma_F'' = \frac{-2}{f \circ \gamma_B} \frac{d(f \circ \gamma_B)}{ds} \gamma_F' \quad \text{em } F.$$

Na sequência, utilizando a Proposição 3.9 encontraremos as geodésicas do Exemplo 3.5 e provaremos que é possível estendê-las para todo parâmetro real.

**Prova da completude do Exemplo 3.5 :** Seja  $(\mathbb{R}^n, g)$  o espaço semi-Euclideano onde  $g = -dx_1^2 + \sum_{i=2}^n dx_i^2$ . Tome  $k \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$  e considere as funções

$$\varphi(\xi) = e^{k\xi}, \quad f(\xi) = e^{k\xi}, \quad h(\xi) = -\frac{k_1 e^{-2k\xi}}{2k}, \quad k_1 \neq 0.$$

Denotando por  $\hat{g} := \varphi^{-2}g = e^{-2k\xi}g$ , obtemos que o gradiente  $\nabla_{\hat{g}}f$  nessa métrica é dado por

$$\nabla_{\hat{g}}f = \sum_{r,s=1}^n \hat{g}^{rs} f_{,x_s} \partial_r = \sum_{r,s=1}^n \varphi^2 \varepsilon_r \delta_{rs} f' \alpha_s \partial_s = \sum_{s=1}^n k \varepsilon_s \alpha_s e^{3k\xi} \partial_s.$$

Como  $\alpha_1 = \alpha_2 = 1$ ,  $\alpha_i = 0$ , para  $i \geq 3$ , e  $\varepsilon_1 = -1$ ,  $\varepsilon_i = 1$ , para  $i \geq 2$ , obtemos

$$\nabla_{\hat{g}}f = (-ke^{3k\xi}, ke^{3k\xi}, 0, \dots, 0).$$

Então, considerando  $\gamma_B(s) = (y_1(s), \dots, y_n(s))$  e  $\gamma_F(s) = (y_{n+1}, \dots, y_{n+p}(s))$  como na Proposição 3.9, concluimos que

$$\left\{ \begin{array}{l} y_1''(s) = -k[y_{n+1}'(s)^2 + \dots + y_{n+p}'(s)^2] e^{4k(y_1(s)+y_2(s))}, \quad (I) \\ y_2''(s) = k[y_{n+1}'(s)^2 + \dots + y_{n+p}'(s)^2] e^{4k(y_1(s)+y_2(s))}, \quad (II) \\ y_r''(s) = 0, \quad \text{para } r \in \{3, \dots, n\}, \quad (III) \\ y_{n+l}''(s) = -2k[y_1'(s) + y_2'(s)]y_{n+l}'(s), \quad \text{para } l \in \{1, \dots, d\}. \quad (IV) \end{array} \right.$$

A soma das equações diferenciais (I) e (II) produz  $y_1''(s) + y_2''(s) = 0$ , então por integração

$$y_1'(s) + y_2'(s) = c_1, \quad y_1(s) + y_2(s) = c_1s + c_2, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}. \quad (3-17)$$

Substituindo (3-17) em (IV), obtemos a equação diferencial de segunda ordem

$$y_{n+l}''(s) + 2kc_1y_{n+l}'(s) = 0 \quad \text{para cada } l \in \{1, \dots, d\}, \quad (3-18)$$

cuja solução geral é dado por

$$y_{n+l}(s) = \begin{cases} c_{3,l} + c_{4,l}s & \text{se } c_1 = 0, \\ c_{3,l} + c_{4,l}e^{-2kc_1s} & \text{se } c_1 \neq 0, \end{cases}$$

onde  $c_{3,l}, c_{4,l} \in \mathbb{R}$ . Isso mostra que para cada  $l \in \{1, \dots, d\}$ , as funções  $y_{n+l}(s)$  estão definidas para todo  $s \in \mathbb{R}$ .

Como as soluções de (III) são dadas por  $y_r(s) = c_{5,r} + c_{6,r}s$ , para  $c_{5,r}, c_{6,r} \in \mathbb{R}$ , cujo domínio é  $\mathbb{R}$ , é necessário provarmos apenas que as soluções de (I) e (II) estão definidas em  $\mathbb{R}$ .

Integrando (3-18) e substituindo o resultado em (I), nós temos

$$y_1''(s) = -k[c_{7,1}^2 + c_{7,2}^2 + \dots + c_{7,r}^2]e^{-4kc_1s}e^{4k(y_1(s)+y_2(s))},$$

onde  $c_{7,1}, c_{7,2}, \dots, c_{7,r} \in \mathbb{R}$ .

Agora, por (3-17), obtemos

$$\begin{aligned} y_1''(s) &= -k[c_{7,1}^2 + c_{7,2}^2 + \dots + c_{7,p}^2]e^{-4kc_1s}e^{4k(c_1s+c_2)}, \\ &= -k[c_{7,1}^2 + c_{7,2}^2 + \dots + c_{7,p}^2]e^{4kc_2}, \\ &= c_{8,1} \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Então  $y_1(s) = \frac{c_{8,1}}{2}s^2 + c_9s + c_{10}$ , cujo domínio é  $\mathbb{R}$ . A menos de sinal, o mesmo ocorre para  $y_2(s)$ . Assim, toda geodésica  $\gamma = (\gamma_B, \gamma_F)$  esta definida na reta  $\mathbb{R}$ , o que estabelece que  $(\mathbb{R}^n, \varphi^{-2}g) \times_f (\mathbb{R}^d, g_0)$  é geodesicamente completa.  $\square$

### 3.4 Demonstração dos resultados principais

Primeiramente, para demonstração dos resultados principais necessitaremos do seguinte lema de caracterização dos solitons de Yamabe gradiente no produto torcido.

**Lema 3.10.**  $(B^n \times_f F^d, g, \tilde{h}, \rho)$  é um soliton de Yamabe gradiente se, e somente se,  $(B^n, g_B, h, \lambda)$  é um quase soliton de Yamabe gradiente com função soliton

$$\lambda = -\frac{\lambda_F}{f^2} + \frac{2d}{f}\Delta f + \frac{d(d-1)}{f^2}g_B(\nabla f, \nabla f) + \rho,$$

e curvatura escalar

$$scal_{g_B} = \frac{1}{f}g_B(\nabla f, \nabla h) + \lambda. \quad (3-19)$$

**Prova do Lema 3.10 :** Considere  $scal_{g_F} = \lambda_F$ , então pela Proposição 1.10, temos que a curvatura escalar no produto torcido é dada por

$$scal_g = \left[ scal_{g_B} + \frac{\lambda_F}{f^2} - 2d\frac{\Delta f}{f} - d(d-1)\frac{|\nabla f|^2}{f^2} \right] \circ \pi,$$

onde  $\Delta$  denota o Laplaciano em  $B$ , e por simplicidade utilizamos  $g_B = \langle \cdot, \cdot \rangle = |\cdot|^2$ . Com isso,  $(B \times F, g, \tilde{h}, \rho)$  é um soliton de Yamabe gradiente se, e somente se,

$$\left( \left[ scal_{g_B} + \frac{\lambda_F}{f^2} - 2d\frac{\Delta f}{f} - d(d-1)\frac{|\nabla f|^2}{f^2} \right] \circ \pi - \rho \right) g = Hess_g \tilde{h}. \quad (3-20)$$

Considere  $X \in \mathcal{L}(B)$  e  $V \in \mathcal{L}(F)$ , então, pela definição de métrica produto torcido e pelas expressões da conexão no produto torcido, obtemos

$$g(X, V) = 0 = Hess_g \tilde{h}(X, V).$$

Assim, precisamos apenas analisar a equação (3-20) para par de campos ambos em  $\mathcal{L}(B)$  ou em  $\mathcal{L}(F)$ .

Tomando campos  $X, Y \in \mathcal{L}(B)$  em (3-20) e utilizando a expressão para a Hessiana do levantamento  $Hess_g \tilde{h}$  (veja Proposição 1.5), obtemos a seguinte condição de equivalência

$$\pi^* \left[ \left( scal_{g_B} + \frac{\lambda_F}{f^2} - 2d\frac{\Delta f}{f} - d(d-1)\frac{|\nabla f|^2}{f^2} - \rho \right) g_B \right] = \pi^*(Hess_{g_B} h),$$

que mostra que  $(B^n, g_B)$  é um quase soliton de Yamabe gradiente com função soliton

$$\lambda = -\frac{\lambda_F}{f^2} + \frac{2d}{f}\Delta f + d(d-1)\frac{|\nabla f|^2}{f^2} + \rho,$$

e função potencial  $h$ .

Agora, considere  $V, W \in \mathcal{L}(F)$ , então utilizando as expressões da conexão no

produto torcido (veja Proposição 1.6), obtemos a seguinte expressão para Hessiana

$$\begin{aligned}
Hess_g(\tilde{h})(V, W) &= V(W(\tilde{h})) - (\nabla_V W)(\tilde{h}), \\
&= V(W(\tilde{h})) + \frac{g(V, W)}{\tilde{f}} \nabla \tilde{f}(\tilde{h}) - \nabla_V^F W(\tilde{h}), \\
&= \tilde{f} \nabla \tilde{f}(\tilde{h})(\sigma^* g_F)(V, W), \\
&= \tilde{f} \left[ d\pi(\nabla \tilde{f})(\tilde{h}) \circ \pi \right] (\sigma^* g_F)(V, W).
\end{aligned} \tag{3-21}$$

Substituindo  $V, W \in \mathcal{L}(F)$  em (3-20) e considerando a equação (3-21) nós obtemos

$$\pi^* \left( scal_{g_B} + \frac{\lambda_F}{f} - 2d \frac{\Delta f}{f} - d(d-1) \frac{|\nabla f|^2}{f^2} - \rho \right) \tilde{f}(\sigma^* g_F) = \left[ d\pi(\nabla \tilde{f})(\tilde{h}) \circ \pi \right] (\sigma^* g_F).$$

E usando que  $\nabla f = d\pi \nabla(\tilde{f})$  (veja Proposição 1.5) nós obtemos a seguinte condição equivalente

$$scal_{g_B} + \frac{\lambda_F}{f^2} - \frac{2d}{f} \Delta f - d(d-1) \frac{|\nabla f|^2}{f^2} - \rho = \frac{\langle \nabla f, \nabla h \rangle}{f},$$

que é a equação (3-19). Isso finaliza a demonstração.  $\square$

**Prova do Teorema 3.3 :** A equivalência obtida no Lema 3.10 estabelece que uma condição necessária e suficiente para que  $(B^n \times F^d, g, \tilde{h}, \rho)$  seja um soliton de Yamabe gradiente é que

$$scal_{g_B} + \frac{\lambda_F}{f^2} - \frac{2d}{f} \Delta f - d(d-1) \frac{|\nabla f|^2}{f^2} - \rho = \frac{\langle \nabla f, \nabla h \rangle}{f} \tag{3-22}$$

e

$$\left( scal_{g_B} + \frac{\lambda_F}{f^2} - \frac{2d}{f} \Delta f - d(d-1) \frac{|\nabla f|^2}{f^2} - \rho \right) g_B = Hess_{g_B}(h). \tag{3-23}$$

Usaremos as equações acima em combinação com as técnicas de soluções invariantes para obter as equações (3-3), (3-4), (3-5), (3-6) e (3-7).

Primeiramente, para a escolha de um vetor não nulo  $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ , considere  $\xi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  dado por  $\xi(x_1, \dots, x_n) = \alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_n x_n$ . Como estamos assumindo que  $\varphi(\xi)$ ,  $h(\xi)$  e  $f(\xi)$  são funções de  $\xi$ , então considerando a derivada com respeito a  $i$ -ésima coordenada por  $x_i$ , temos

$$\begin{aligned}
\varphi_{,x_i} &= \varphi' \alpha_i, & f_{,x_i} &= f' \alpha_i, & h_{,x_i} &= h' \alpha_i, \\
\varphi_{,x_i x_j} &= \varphi'' \alpha_i \alpha_j, & f_{,x_i x_j} &= f'' \alpha_i \alpha_j, & h_{,x_i x_j} &= h'' \alpha_i \alpha_j.
\end{aligned} \tag{3-24}$$



Recordemos que a curvatura de Ricci na métrica conforme  $g_B = \frac{\delta}{\varphi^2}$  é dada por (veja [11])

$$Ric_{g_B} = \frac{1}{\varphi^2} \left\{ (n-2)\varphi Hess_{\delta}\varphi + [\varphi\Delta_{\delta}\varphi - (n-1)|\nabla_{\delta}\varphi|^2]\delta \right\}. \quad (3-25)$$

Combinando (3-24) com (3-25), obtemos a seguinte expressão para curvatura escalar na métrica  $g_B = \frac{\delta}{\varphi^2}$

$$\begin{aligned} scal_{g_B} &= \sum_{k=1}^n \varphi^2 \varepsilon_k (Ric_{g_B})_{kk}, \\ &= (n-1) \left( 2\varphi \sum_{k=1}^n \varepsilon_k \varphi_{,x_k x_k} - n \sum_{k=1}^n \varepsilon_k \varphi_{,x_k}^2 \right), \\ &= \|\alpha\|^2 (n-1) (2\varphi\varphi'' - n(\varphi')^2). \end{aligned} \quad (3-26)$$

De modo a calcular  $Hess_{g_B}h$ , lembremos que a Hessiana é dada por (Definição 1.4)

$$(Hess_{g_B}h)_{ij} = h_{,x_i x_j} - \sum_{k=1}^n \Gamma_{ij}^k h_{,x_k},$$

onde as funções

$$\begin{aligned} \Gamma_{ij}^k &= \frac{1}{2} \sum_{l=1}^n \left\{ (g_{jl})_{,x_i} + (g_{li})_{,x_j} - (g_{ij})_{,x_l} \right\} g^{lk}, \\ &= -\frac{\varepsilon_k}{\varphi} \left\{ \delta_{jk} \varepsilon_j \varphi_{,x_i} + \delta_{ki} \varepsilon_k \varphi_{,x_j} - \delta_{ij} \varepsilon_i \varphi_{,x_k} \right\}, \end{aligned}$$

ou seja,

$$\Gamma_{ij}^k = 0, \quad \Gamma_{ij}^i = -\frac{\varphi_{,x_j}}{\varphi}, \quad \Gamma_{ii}^k = \varepsilon_i \varepsilon_k \frac{\varphi_{,x_k}}{\varphi} \quad \text{e} \quad \Gamma_{ii}^i = -\frac{\varphi_{,x_i}}{\varphi}$$

são os símbolos de Christoffel na métrica  $g_B$ ,  $i, j, k = 1, 2, \dots, n$ . Assim,

$$\begin{aligned} (Hess_{g_B}h)_{ij} &= h_{,x_i x_j} + \varphi^{-1} (\varphi_{,x_i} h_{,x_j} + \varphi_{,x_j} h_{,x_i}) - \delta_{ij} \varepsilon_i \sum_k \varepsilon_k \varphi^{-1} \varphi_{,x_k} h_{,x_k}, \\ &= \alpha_i \alpha_j h'' + (2\alpha_i \alpha_j - \delta_{ij} \varepsilon_i \|\alpha\|^2) \varphi^{-1} \varphi' h'. \end{aligned} \quad (3-27)$$

O Laplaciano  $\Delta f = \sum_k \varphi^2 \varepsilon_k (Hess_{g_B}f)_{kk}$  de  $f$  com respeito a  $g_B$  é

$$\Delta f = \|\alpha\|^2 \varphi^2 (f'' - (n-2)\varphi^{-1} \varphi' f'). \quad (3-28)$$

Por outro lado, as expressões de  $\langle \nabla f, \nabla h \rangle$  e  $|\nabla f|^2$  na métrica conforme  $g_B$  são

dadas por

$$\begin{aligned}\langle \nabla f, \nabla h \rangle &= \varphi^2 \sum_k \varepsilon_k f_{,x_k} h_{,x_k} = \|\alpha\|^2 \varphi^2 f' h', \\ |\nabla f|^2 &= \varphi^2 \sum_k \varepsilon_k f_{,x_k}^2 = \|\alpha\|^2 \varphi^2 (f')^2.\end{aligned}\tag{3-29}$$

Então substituindo (3-26), (3-28) e (3-29) em (3-22) obtemos (3-5).

Agora, para  $i \neq j$ , obtemos por (3-23) e (3-27) que

$$\alpha_i \alpha_j \left( h'' + 2 \frac{\varphi' h'}{\varphi} \right) = 0.$$

Se existir  $i, j$ ,  $i \neq j$  tal que  $\alpha_i \alpha_j \neq 0$ , então

$$h'' + 2 \frac{h' \varphi'}{\varphi} = 0,$$

que é a equação (3-3). E para  $i = j$ , substituindo (3-26), (3-27) e (3-29) em (3-23) obtemos (3-4).

Agora, precisamos considerar o caso  $\alpha_{k_0} = 1$ ,  $\alpha_k = 0$  para  $k \neq k_0$ . Nesse caso, substituindo (3-26), (3-27) e (3-29) em (3-23) obtemos que

$$\begin{aligned}\left[ \varepsilon_{k_0} (n-1) (2\varphi\varphi'' - n(\varphi')^2) + \frac{\lambda_F}{f^2} - \frac{2d}{f} \varepsilon_{k_0} (\varphi^2 f'' - (n-2)\varphi\varphi' f') + \right. \\ \left. - \varepsilon_{k_0} \frac{d(d-1)}{f^2} \varphi^2 (f')^2 - \rho \right] \frac{\varepsilon_i}{\varphi^2} = -\varepsilon_i \varepsilon_{k_0} \frac{\varphi'}{\varphi} h',\end{aligned}$$

para  $i \neq k_0$ , isto é,  $\alpha_i = 0$ , e

$$\begin{aligned}\left[ \varepsilon_{k_0} (n-1) (2\varphi\varphi'' - n(\varphi')^2) + \frac{\lambda_F}{f^2} - \frac{2d}{f} \varepsilon_{k_0} (\varphi^2 f'' - (n-2)\varphi\varphi' f') + \right. \\ \left. - \varepsilon_{k_0} \frac{d(d-1)}{f^2} \varphi^2 (f')^2 - \rho \right] \frac{\varepsilon_{k_0}}{\varphi^2} = h'' + \frac{\varphi'}{\varphi} h',\end{aligned}$$

para  $i = k_0$ , isto é,  $\alpha_{k_0} = 1$ .

Porém, essas equações são equivalentes às equações (3-3) e (3-4). O caso  $\|\alpha\|^2 = 0$ , segue se fizermos  $\|\alpha\|^2 = 0$  em (3-4) e (3-5). Isso completa a demonstração.  $\square$

**Prova do Teorema 3.6 : Caso a):** Como  $\rho = 0$  e  $h' \neq 0$  nós obtemos pelas equações (3-4) e (3-5) do Teorema 3.3 que

$$\frac{\varphi'}{\varphi} = -\frac{f'}{f}.$$

Integrando esta equação temos

$$f(\xi) = \frac{k_2}{\varphi(\xi)}, \quad (3-30)$$

para  $k_2 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ , que é a equação (3-8).

Integrando a equação (3-3), temos

$$h'(\xi) = \frac{k_1}{\varphi^2(\xi)}, \quad (3-31)$$

para  $k_1 \neq 0$ , e então

$$h(\xi) = k_1 \int \frac{1}{\varphi^2(\xi)} d\xi,$$

que é a equação (3-9).

Substituindo a equação (3-31) em (3-4) e considerando (3-30), obtemos a seguinte equação diferencial ordinária

$$\varphi^2 \varphi'' - \frac{(n+d)}{2} \varphi (\varphi')^2 + \frac{k_1}{2(n+d-1)} \varphi' = -\frac{\varphi^3 \lambda_F}{k_2^2 \|\alpha\|^2}, \quad (3-32)$$

que é a equação (3-10). A implicação contrária segue por substituição das funções obtidas.

**Caso b)**: Como no Caso *a*), as expressões (3-11) e (3-12) aparecem de maneira análoga. Agora, como  $\lambda_F = 0$ , a equação diferencial (3-32) fica

$$\varphi^2 \varphi'' - \frac{(n+d)}{2} \varphi (\varphi')^2 + \frac{k_1}{2(n+d-1)} \varphi' = 0. \quad (3-33)$$

Considerando  $\varphi(\xi)^{-\frac{n+d}{2}+1} = v(\xi)$ , obtemos por (3-33) a seguinte condição equivalente

$$v''(\xi) + \frac{k_1}{2(n+d-1)} v'(\xi) v(\xi)^{\frac{4}{n+d-2}} = 0. \quad (3-34)$$

Integrando (3-34) obtemos

$$v'(\xi) + \frac{k_1(n+d-2)}{2(n+d+2)(n+d-1)} v(\xi)^{\frac{n+d+2}{n+d-2}} = k_3, \quad k_3 \in \mathbb{R}.$$

Assim,

$$- \int \frac{1}{\frac{k_1(n+d-2)}{2(n+d+2)(n+d-1)} v(\xi)^{\frac{n+d+2}{n+d-2}} - k_3} dv = \xi + k_4, \quad k_4 \in \mathbb{R}.$$

E então

$$(n+d-1)(n+d+2) \int \frac{\varphi d\varphi}{k_1 - \frac{2k_3(n+d-1)(n+d+2)}{n+d-2} \varphi^{\frac{n+d}{2}+1}} = \xi + k_4,$$

que é a equação (3-13) do Teorema 3.6. A implicação contrária segue por substituição das funções obtidas.

**Caso c):** Como  $h' = 0$  e  $\lambda_F = \rho = 0$ , temos pelas equações (3-4) e (3-5) do Teorema 3.3 que

$$(n-1)(2\varphi\varphi'' - n(\varphi')^2) - 2\frac{d}{f}(\varphi^2 f'' - (n-2)\varphi\varphi' f') - \frac{d(d-1)}{f^2}\varphi^2(f')^2 = 0,$$

que é equivalente a

$$\left(\frac{f'}{f} - \frac{(n-2)\varphi'}{(d+1)\varphi}\right)^2 + \frac{2}{d+1}\left(\frac{f'}{f} - \frac{(n-2)\varphi'}{(d+1)\varphi}\right)' + \frac{(n+d-1)}{d(d+1)^2}\left(n\left(\frac{\varphi'}{\varphi}\right)^2 - 2\frac{\varphi''}{\varphi}\right) = 0.$$

Considere

$$z = \frac{f'}{f} - \frac{(n-2)\varphi'}{(d+1)\varphi},$$

então temos

$$z^2 + \frac{2}{d+1}z' + \frac{(n+d-1)}{d(d+1)^2}\left(n\left(\frac{\varphi'}{\varphi}\right)^2 - 2\frac{\varphi''}{\varphi}\right) = 0. \quad (3-35)$$

Recordemos que uma equação diferencial ordinária é dita de Ricatti se apresenta a forma

$$z(\xi)' = f_2(\xi)z(\xi)^2 + f_1(\xi)z(\xi) + f_0(\xi), \quad (3-36)$$

onde  $f_0$ ,  $f_1$  e  $f_2$  são funções suaves em  $\mathbb{R}$ , e pelo Teorema de Picard, dado uma solução particular  $z_0$  de (3-36), a solução geral é dada por

$$z(\xi) = z_0(\xi) + \Phi(\xi) \left[ C - \int \Phi(\xi)f_2(\xi)d\xi \right]^{-1},$$

onde

$$\Phi(\xi) = \exp \left\{ \int [2f_2(\xi)z_0(\xi) + f_1(\xi)]d\xi \right\} \quad e \quad C = \text{constante}.$$

Observe que (3-35) é uma equação diferencial de Ricatti com

$$f_1(\xi) = 0, \quad f_2(\xi) = -\frac{d+1}{2}, \quad f_0(\xi) = -\frac{(n+d-1)}{2d(d+1)}\left(n\left(\frac{\varphi'}{\varphi}\right)^2 - 2\frac{\varphi''}{\varphi}\right).$$

Então temos que

$$\frac{f'(\xi)}{f(\xi)} = \frac{(n-2)\varphi'(\xi)}{(d+1)\varphi(\xi)} + z_p(\xi) + \frac{e^{-(d+1)\int z_p(\xi)d\xi}}{\frac{d+1}{2}\int e^{-(d+1)\int z_p(\xi)d\xi}d\xi + C}.$$

Portanto,

$$f(\xi) = \varphi^{\frac{n-2}{d+1}} e^{\int z_p d\xi} \left( \int e^{-(d+1) \int z_p d\xi} d\xi + \frac{2}{d+1} C \right)^{\frac{2}{d+1}},$$

onde  $z_p(\xi)$  é uma solução particular de (3-35). Essa expressão é a equação (3-15).

Agora, como  $h' = 0$ , nós temos que  $h(\xi) = \text{constante}$ , que é a equação (3-14). A implicação contrária segue por substituição das funções obtidas.

**Caso d)**: Segue de maneira direta de (3-6) e (3-7). Isso completa a demonstração do Teorema 3.6. □

# Propriedades geométricas e analíticas dos solitons de Yamabe gradiente com estrutura de produto torcido

Neste capítulo, iremos apresentar uma série de resultados obtidos em [2, 3] em parceria com Adriano, Pina e Barboza. Tais resultados descrevem propriedades geométricas e analíticas dos solitons de Yamabe gradiente  $(B \times_f F, g, \tilde{h}, \rho)$ , satisfazendo

$$\text{scal}_{g_F} = \lambda_F = \text{constante}, \quad \tilde{h} = h \circ \pi, \quad h \in C^\infty(B).$$

Como foi observado no Capítulo 3, as condições acima são naturais e trazem a luz infinitos exemplos de solitons de Yamabe gradiente. Tais exemplos servirão como guia para investigarmos suas propriedades.

## 4.1 Teoremas de Rigidez

Primeiramente, recordemos o seguinte resultado (veja Lema 3.10).

**Proposição 4.1.**  *$(B^n \times_f F^d, g, \tilde{h}, \rho)$  é um soliton de Yamabe gradiente se, e somente se,  $(B^n, g_B, h, \lambda)$  é um quase soliton de Yamabe gradiente com função soliton*

$$\lambda = -\frac{\lambda_F}{f^2} + \frac{2d}{f} \Delta f + \frac{d(d-1)}{f^2} g_B(\nabla f, \nabla f) + \rho, \quad (4-1)$$

e curvatura escalar

$$\text{scal}_{g_B} = \frac{1}{f} g_B(\nabla f, \nabla h) + \lambda. \quad (4-2)$$

De modo a explorar as equações (4-1), (4-2), passaremos a investigar resultados de trivialização das funções potencial  $h$  e função torção  $f$ . Como podemos observar, os exemplos obtidos no capítulo anterior apresentam uma característica em comum, exceto nos casos em que  $h$  é constante, a função potencial  $h$  nunca atinge seu máximo ou mínimo. Dito isso, podemos formular a seguinte conjectura:

**Conjectura.** *Não existe soliton de Yamabe gradiente  $(B \times_f F, g, \tilde{h}, \rho)$  com função potencial não constante que atinge seu máximo ou mínimo.*

Na sequência, apresentamos uma resposta afirmativa para essa conjectura.

**Teorema 4.2.** *Seja  $(B \times_f F, g, \tilde{h}, \rho)$  um soliton de Yamabe gradiente. Se  $h$  atinge seu máximo ou mínimo, então  $(B \times_f F, g, \tilde{h}, \rho)$  é trivial.*

Na literatura, o seguinte resultado é conhecido

**Teorema 4.3.** ([30]) *Todo soliton de Yamabe gradiente compacto  $(M^n, g, h, \rho)$  é trivial.*

Desse modo, como consequência do Teorema 4.2, fica provado que

**Teorema 4.4.** *Todo soliton de Yamabe gradiente  $(B \times_f F, g, \tilde{h}, \rho)$  com base compacta é trivial.*

A análise pode ser feita para função torção, nesse a seguinte questão é pertinente

**Questão.** *Existe soliton de Yamabe gradiente  $(B \times_f F, g, \tilde{h}, \rho)$  com função torção não constante que atinge seu máximo?(ou mínimo?)*

A seguir, apresentamos uma resposta parcial e negativa para esta questão.

**Teorema 4.5.** *Seja  $(B \times_f F, g, \tilde{h}, \rho)$  um soliton de Yamabe gradiente com curvatura escalar  $scal_{g_B} \geq \rho - \frac{\lambda_F}{f^2}$ . Se  $f$  atinge seu máximo, então  $(B \times F, g)$  é um produto Riemanniano usual.*

**Teorema 4.6.** *Seja  $(B \times_f F, g, \tilde{h}, \rho)$  um soliton de Yamabe gradiente com curvatura escalar  $scal_{g_B} \leq \rho - \frac{\lambda_F}{f^2}$ . Se  $f$  atinge seu mínimo, então  $(B \times F, g)$  é um produto Riemanniano usual.*

Na sequência, é interessante saber em que condições um soliton de Yamabe gradiente  $(B \times_f F, g, \rho, \tilde{h})$  tem base não compacta. Nesse sentido provamos que

**Teorema 4.7.** *Seja  $(B \times_f F, g, \tilde{h}, \rho)$  um soliton de Yamabe gradiente com base completa e*

$$g_B(\nabla \log f, \nabla h) = \text{constante} \neq 0,$$

*então  $(B^n, g_B)$  é isométrico ao espaço Euclidiano usual  $(\mathbb{R}^n, g_0)$ .*

Nos últimos anos, muitos esforços foram dedicados a entender a geometria dos solitons de Yamabe gradiente. Sob uma suposição na integral da curvatura de Ricci, Wu [56] fornece uma estimativa para a curvatura escalar em função de  $\rho$ . Como citado por Wu, seu resultado exclui a análise das variedades Einstein com curvatura constante negativa. Observando essa lacuna, Chu melhorou tal resultado considerando um limite inferior para o tensor de Bakry-Émery Ricci.

**Teorema 4.8.** ([21]) *Seja  $(M^n, g, h, \rho)$  um soliton de Yamabe gradiente completo não compacto com*

$$\text{Ric}_g + \text{Hess}_g h_1 \geq K, \quad \text{onde } h_1 = \frac{h}{2(n-1)},$$

para uma constante  $K \in \mathbb{R}$  e considere  $R_* = \inf_M \text{scal}_g$ .

- (a) *Se  $\rho > 0$ , então  $0 \leq R_* \leq \rho$ .*
- (b) *Se  $\rho = 0$ , então  $R_* = 0$ .*
- (c) *Se  $\rho < 0$ , então  $\rho \leq R_* \leq 0$ .*

Pelos exemplos do capítulo anterior, podemos observar que  $\mathbb{H}^3 \times_f (\mathbb{S}^3 \times \mathbb{H}^3)$  (Exemplo 3.7) é um soliton de Yamabe gradiente expanding completo não compacto com curvatura escalar constante  $-6$ . Isto é, satisfaz o item (c). Por outro lado, segue da Proposição 1.9 que a expressão do tensor de Ricci para levantamentos  $\mathcal{L}(\{p\} \times \mathbb{H}^3)$  é dado por

$$\text{Ric}_g(V, W) = - \left( 2x_3^{-\frac{8}{7}} + \frac{40}{49} \right) g(V, W), \quad p \in \mathbb{S}^3,$$

que é ilimitado inferiormente. Então o Teorema 4.8 exclui os solitons  $(\mathbb{H}^3 \times_f (\mathbb{S}^3 \times \mathbb{H}^3), g)$ .

O próximo resultado melhora o Teorema 4.8 de modo a incluir o exemplo 3.7.

**Teorema 4.9.** *Seja  $(M = B^n \times_f F^d, g, \tilde{h}, \rho)$  um soliton de Yamabe gradiente completo satisfazendo*

$$\text{Ric}_{g_B} + \text{Hess}_{g_B} w \geq K, \quad \text{onde } w = -d \log f - \frac{h}{2(n+d-1)}, \quad (4-3)$$

para  $K \in \mathbb{R}$  e considere  $R_* = \inf_M \text{scal}_g$ ,  $\psi_* = \inf_B \psi$ , onde  $\psi = \text{scal}_{g_B} - \lambda$  e

$$\lambda = -\frac{\lambda_F}{f^2} + \frac{2d}{f} \Delta f + \frac{d(d-1)}{f^2} g_B(\nabla f, \nabla f) + \rho.$$

- (a) *Se  $\rho > 0$ , então  $0 \leq R_* \leq \rho$ . Além disso, se  $\psi(x_0) = \psi_* = -\rho$  para algum  $x_0 \in B$ , então  $\psi \equiv -\rho$ ,  $\text{scal}_g = 0$  e a função potencial  $\tilde{h}$  pode ser expressa por  $\tilde{h}(x) = -\frac{\rho}{2}|x|^2 + \langle b, x \rangle + c$ , onde  $b \in \mathbb{R}^{n+d}$ ,  $c \in \mathbb{R}$ ; por outro lado, se  $\psi(x_0) = \psi_* = 0$  para algum  $x_0 \in B$ , então  $\psi \equiv 0$ , a curvatura escalar  $\text{scal}_g$  é constante positiva e  $\nabla \tilde{h}$  é um campo Killing.*
- (b) *Se  $\rho = 0$ , então  $R_* = 0$ . Além disso, se  $\psi(x_0) = \psi_* = 0$  para algum  $x_0 \in B$ , então  $\psi \equiv 0$ ,  $\text{scal}_g = 0$  e  $\nabla \tilde{h}$  é um campo Killing.*
- (c) *Se  $\rho < 0$ , então  $\rho \leq R_* \leq 0$ . Além disso, se  $\psi(x_0) = \psi_* = 0$  para algum  $x_0 \in B$ , então  $\psi \equiv 0$ , a curvatura escalar  $\text{scal}_g$  é constante negativa e  $\nabla \tilde{h}$  é um campo Killing; por outro lado, se  $\psi(x_0) = \psi_* = -\rho$  para algum  $x_0 \in B$ , então  $\psi \equiv -\rho$ ,  $\text{scal}_g = 0$  e a função potencial  $\tilde{h}$  pode ser expressa por  $\tilde{h}(x) = -\frac{\rho}{2}|x|^2 + \langle b, x \rangle + c$  onde  $b \in \mathbb{R}^{n+d}$ ,  $c \in \mathbb{R}$ .*



Além disso, obtemos as seguintes estimativas da função potencial.

**Teorema 4.10.** *Sob as mesmas hipóteses do Teorema 4.9, temos*

(a) *Se  $\rho > 0$ , então  $\tilde{h}(x) \geq -\frac{\rho}{2}r(x)^2 + c_1r(x) + c_2$*

(b) *Se  $\rho \leq 0$ , então  $\tilde{h}(x) \geq c_1r(x) + c_2$*

onde  $r(x)$  denota a função distância partindo de um ponto  $p \in M$  e  $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ .

## 4.2 Estimativa de gradiente tipo Li-Yau para função torção

As equações (4-1) e (4-2) da Proposição 4.1 nos mostram que estimativas para função torção tem forte impacto na geometria do produto torcido. Como exemplo, considere  $(\mathbb{H}^n, g_{-1})$  e  $(\mathbb{R}^d, g_0)$  o espaço Hiperbólico e o espaço Euclideano, respectivamente, então não existe soliton de Yamabe gradiente expanding  $\mathbb{H}^n \times_f \mathbb{R}^d$  com  $\rho = -n(n-1)$  e  $|\nabla f| \neq 0$ , se  $f$  assume seu máximo.

Dito isso, visto que a condição para que  $f$  assumo seu máximo está relacionada ao comportamento do seu gradiente, passaremos a investigar estimativas de gradiente para  $f$ . Para tanto, considere a mudança  $f = v^{\frac{2}{d+1}}$ , então (4-1) e (4-2) tomam a forma

$$\Delta_w v - \frac{1}{dp}(scal_{g_B} - \rho)v - \frac{1}{dp}\lambda_F v^{1-p} = 0, \quad (4-4)$$

onde  $w = -\frac{h}{2d}$  e  $p = \frac{4}{d+1}$ .

A longo dessa seção focaremos nossa atenção em estimativas de gradiente para função torção por meio das soluções positivas da equação não linear (4-4). Nossos resultados seguem as ideias de P. Li e S.T. Yau em [38].

**Teorema 4.11.** *Seja  $(B^n \times_f F^d, g, \tilde{h}, \rho)$  um soliton de Yamabe gradiente completo satisfazendo*

$$Ric_{g_B} + Hess_{g_B} w - \frac{1}{m} dw \otimes dw \geq -K, \quad \Delta_w scal_{g_B} \leq \theta, \quad |\nabla scal_{g_B}| \leq \gamma,$$

na bola  $B(p, 2R) \subset B$ , onde  $K \geq 0$ ,  $w = -\frac{h}{2d}$ . Então para cada  $\beta \in (0, 1)$  com  $\beta > 1 - \frac{4}{d+1}$  a função torção  $f$  satisfaz as seguintes estimativas.

(a) *Se  $\lambda_F < 0$ , temos*

$$\beta \frac{|\nabla f|^2}{f^2} - \frac{scal_B - \rho}{d(d+1)} - \frac{\lambda_F}{d(d+1)f^2} \leq \frac{4(n+m)}{\beta(d+1)^2} \mathcal{B} + 4 \sqrt{\frac{(n+m)\mathcal{C}}{2\beta(d+1)^4}}, \quad \text{em } B(p, R),$$

(b) Se  $\lambda_F \geq 0$ , assumamos que  $f$  é limitada em  $B(p, 2R)$ , então

$$\beta \frac{|\nabla f|^2}{f^2} - \frac{\text{scal}_B - \rho}{d(d+1)} - \frac{\lambda_F}{d(d+1)f^2} \leq \frac{4(n+m)}{\beta(d+1)^2} \left[ \mathcal{B} + \frac{\lambda_F \mathcal{M}}{d} \right] + 4\sqrt{\frac{(n+m)(\mathcal{C} + \mathcal{D})}{2\beta(d+1)^4}}, \quad \text{em } B(p, R),$$

onde

$$\begin{aligned} \mathcal{M} &= \sup_{B(p, 2R)} f^{-2}, \\ \mathcal{B} &= \frac{(n+m)c_1^2}{4R^2\beta(1-\beta)} + \frac{(n-1 + R\sqrt{nK})c_1 + c_2 + 2c_1^2}{R^2}, \\ \mathcal{C} &= \frac{3\beta}{2} \left[ \frac{n+m}{4} \left( \frac{\gamma}{dp} \right)^4 \frac{(1-\beta)^2}{\beta^4} \varepsilon^{-1} \right]^{\frac{1}{3}} + \frac{\beta(n+m)}{2} (1-\varepsilon)^{-1} (1-\beta)^{-2} K^2 + \\ &\quad + \frac{\theta(d+1)}{4d}, \\ \mathcal{D} &= \frac{\beta(n+m)}{2(1-\varepsilon)(1-\beta)^2} \left[ \left( \frac{(d+1)(\beta + \frac{4}{d+1} - 1)\lambda_F M}{8d} \right)^2 + \right. \\ &\quad \left. + \frac{(d+1)(\beta + \frac{4}{d+1} - 1)K\lambda_F M}{4d} \right], \end{aligned}$$

$c_1, c_2$  são constantes positivas e  $\varepsilon \in (0, 1)$ .

Tomando  $R \rightarrow \infty$ , obtemos a seguinte estimativa global para o gradiente.

**Corolário 4.12.** *Seja  $(B^n \times_f F^d, g, \tilde{h}, \rho)$  um soliton de Yamabe gradiente satisfazendo*

$$\text{Ric}_{g_B} + \text{Hess}_{g_B} w - \frac{1}{m} dw \otimes dw \geq -K, \quad \Delta_w \text{scal}_{g_B} \leq \theta, \quad |\nabla \text{scal}_{g_B}| \leq \gamma,$$

na bola  $B(p, 2R) \subset B$ , onde  $K \geq 0$ ,  $w = -\frac{h}{2d}$ . Então para cada  $\beta \in (0, 1)$  com  $\beta > 1 - \frac{4}{d+1}$ , a função torção  $f$  satisfaz as seguintes estimativas.

(a) Se  $\lambda_F < 0$ , temos

$$\beta \frac{|\nabla f|^2}{f^2} - \frac{\text{scal}_B - \rho}{d(d+1)} - \frac{\lambda_F}{d(d+1)f^2} \leq 4\sqrt{\frac{(n+m)\mathcal{C}}{2\beta(d+1)^4}}, \quad \text{em } B^n,$$

(b) Se  $\lambda_F = 0$ , temos

$$\beta \frac{|\nabla f|^2}{f^2} - \frac{\text{scal}_B - \rho}{d(d+1)} \leq 4\sqrt{\frac{(n+m)\mathcal{C}}{2\beta(d+1)^4}}, \quad \text{em } B^n,$$

(c) Se  $\lambda_F > 0$ , assumamos que  $f$  é limitada, então

$$\beta \frac{|\nabla f|^2}{f^2} - \frac{\text{scal}_B - \rho}{d(d+1)} - \frac{\lambda_F}{d(d+1)f^2} \leq \frac{4\mathcal{M}'\lambda_F(n+m)}{d\beta(d+1)^2} + 4\sqrt{\frac{(n+m)(\mathcal{C} + \mathcal{D})}{2\beta(d+1)^4}}, \quad \text{em } B^n,$$

onde

$$\begin{aligned} \mathcal{M}' &= \sup_B f^{-2}, \\ \mathcal{C} &= \frac{3\beta}{2} \left[ \frac{n+m}{4} \left( \frac{\gamma}{dp} \right)^4 \frac{(1-\beta)^2}{\beta^4} \varepsilon^{-1} \right]^{\frac{1}{3}} + \frac{\beta(n+m)}{2} (1-\varepsilon)^{-1} (1-\beta)^{-2} K^2 + \\ &\quad + \frac{\theta(d+1)}{4d}, \\ \mathcal{D} &= \frac{\beta(n+m)}{2(1-\varepsilon)(1-\beta)^2} \left[ \left( \frac{(d+1)(\beta + \frac{4}{d+1} - 1)\lambda_F M}{8d} \right)^2 + \right. \\ &\quad \left. + \frac{(d+1)(\beta + \frac{4}{d+1} - 1)K\lambda_F M}{4d} \right] \end{aligned}$$

e  $\varepsilon \in (0, 1)$ .

Como aplicação obtemos os seguintes resultados.

**Corolário 4.13.** Não existe soliton de Yamabe gradiente completo  $(B^n \times_f F^d, g, \tilde{h}, \rho)$  satisfazendo

$$\text{Ric}_{g_B} + \text{Hess}_{g_B} w - \frac{1}{m} dw \otimes dw \geq 0, \quad \text{scal}_{g_B} = \text{cte} \leq \rho, \quad \lambda_F < 0, \quad \text{onde } w = -\frac{h}{2d}.$$

**Corolário 4.14.** Não existe soliton de Yamabe gradiente completo  $(B^n \times_f F^d, g, \tilde{h}, \rho)$  satisfazendo

$$\text{Ric}_{g_B} + \text{Hess}_{g_B} w - \frac{1}{m} dw \otimes dw \geq 0, \quad \text{scal}_{g_B} = \text{cte} < \rho, \quad \lambda_F = 0, \quad \text{onde } w = -\frac{h}{2d}.$$

**Observação 4.15.** O Corolário 4.13 e o Corolário 4.14 produzem fortes restrições na construção dos solitons de Yamabe gradiente. Por exemplo, considere  $\hat{M} = \mathbb{R} \times_f \mathbb{H}^d$ , então não existe soliton de Yamabe gradiente completo shrinking ou steady em  $\hat{M}$ , com função potencial satisfazendo

$$h'' + \frac{h^2}{2d} \leq 0.$$

No caso de soliton trivial, o exemplo anterior nos traz a luz que a variedade produto  $\mathbb{R}^n \times \mathbb{H}^d$  não admite métrica produto torcido  $g$  completa com  $\text{scal}_g \geq 0$ .

### 4.3 Demonstração dos Resultados principais

**Prova do Teorema 4.2 :** Pelo Lema 3.10, temos que

$$(\text{scal}_{g_B} - \lambda)g_B = \text{Hess}_{g_B} h \quad e \quad \text{scal}_{g_B} - \lambda = \frac{\langle \nabla f, \nabla h \rangle}{f}. \quad (4-5)$$

Combinando essas equações, obtemos

$$\Delta h - \langle \nabla w, \nabla h \rangle = 0, \quad (4-6)$$

onde  $w = \ln f^n$ .

Agora, considere  $x_0$  o ponto onde  $h$  atinge seu máximo  $h_0$ , e defina

$$\Omega_0 := \{x \in B ; h(x) = h_0\},$$

$\Omega_0$  é fechado e não vazio visto que  $x_0 \in \Omega_0$ . Considere  $y \in \Omega_0$ , então aplicando o princípio do máximo (Teorema 1.12) a equação (4-6), obtemos que  $h(x) = h_0$  em uma vizinhança de  $y$ , dessa forma  $\Omega_0$  é aberto. Uma vez que  $\Omega_0$  é aberto e fechado, temos que  $B = \Omega_0 \cup \Omega_0^c$  é uma cisão para  $B$ . Pela conexidade de  $B$  tem-se  $\Omega_0^c = \emptyset$ , ou seja,  $h$  é constante. O caso em que  $h$  atinge seu mínimo é análogo.  $\square$

**Prova do Teorema 4.5 :** Utilizando mais uma vez o Lema 3.10, obtemos que

$$\text{scal}_{g_B} + \frac{\lambda_F}{f^2} - \frac{2d}{f} \Delta f - d(d-1) \frac{|\nabla f|^2}{f^2} - \rho = \frac{\langle \nabla f, \nabla h \rangle}{f}. \quad (4-7)$$

Como  $\text{scal}_{g_B} \geq \rho - \frac{\lambda_F}{f^2}$ , temos pela equação (4-7) que

$$\Delta f + \langle \nabla w, \nabla f \rangle = \frac{(S_B - \rho)f^2 + \lambda_F}{2fd} \geq 0, \quad (4-8)$$

onde  $w = \frac{h}{2d} + \ln f^{\frac{d-1}{2}}$ .

Considere  $x_0$  o ponto onde  $f$  atinge seu máximo  $f_0$  e defina

$$\Omega_0 := \{x \in B ; f(x) = f_0\},$$

$\Omega_0$  é fechado e não vazio, visto que  $x_0 \in \Omega_0$ . Considere  $y \in \Omega_0$ , então aplicando o princípio do máximo (Teorema 1.12) a equação (4-8), obtemos que  $f(x) = f_0$  em uma

vizinhança de  $y$ , dessa forma  $\Omega_0$  é aberto. Uma vez que  $\Omega_0$  é aberto e fechado, temos pela conexidade de  $B$  que  $\Omega_0^c = \emptyset$ , ou seja,  $f$  é constante.  $\square$

**Prova do Teorema 4.6 :** Análoga a demonstração do Teorema 4.5.  $\square$

**Prova do Teorema 4.7 :** Considere  $\theta = \langle \nabla \log f, \nabla h \rangle$ , então utilizando o Lema 3.10, obtemos  $\theta g_B = Hess_{g_B} h$ . O resultado segue do seguinte lema:

**Lema 4.16.** ([49], Teorema 1) *Seja  $(N^n, g)$  uma variedade completa. Suponha que exista uma função diferenciável  $h : N \rightarrow \mathbb{R}$  satisfazendo  $Hess_g h = \theta g$  para uma constante  $\theta \neq 0$ . Então  $N^n$  é isométrico ao espaço Euclidiano  $\mathbb{R}^n$ .*  $\square$

**Prova do Teorema 4.9 :** Como  $(B^n \times F^d, g, \tilde{h}, \rho)$  é um soliton de Yamabe gradiente, temos pela Proposição 1.18 que

$$(n + d - 1)\Delta_{scal_g} + \frac{1}{2}g(\nabla_{scal_g}, \nabla \tilde{h}) + scal_g(scals_g - \rho) = 0. \quad (4-9)$$

Por outro lado, segue do Lema 3.10 que

$$\begin{aligned} scal_g &= \pi^* \left[ scal_{g_B} + \frac{\lambda_F}{f^2} - 2d \frac{\Delta f}{f} - \frac{d(d-1)}{f^2} g_B(\nabla f, \nabla f) \right], \\ &= \pi^* scal_{g_B} + \pi^* \rho - \pi^* \lambda. \end{aligned} \quad (4-10)$$

Então combinando (4-9) e (4-10) juntamente com a Proposição 1.5, temos

$$\begin{aligned} (n + d - 1)\Delta(scals_{g_B} - \lambda) + \frac{d(n + d - 1)}{f} g_B(\nabla(scals_{g_B} - \lambda), \nabla f) + \\ + \frac{1}{2} g_B(\nabla(scals_{g_B} - \lambda), \nabla h) + (scals_{g_B} - \lambda + \rho)(scals_{g_B} - \lambda) = 0. \end{aligned}$$

De outro modo,

$$\Delta_w \psi = -\frac{1}{n + d - 1} (\psi + \rho) \psi, \quad (4-11)$$

onde  $\psi = scals_{g_B} - \lambda$  e  $w = -d \log f - 2^{-1}(n + d - 1)^{-1}h$ .

A hipótese (4-3) sobre o tensor de Bakry-Emery implica a seguinte estimativa de volume (veja [47], Proposição 3.3):

$$Vol_w(B_r) \leq A e^{Br^2}, \quad A, B \in \mathbb{R}. \quad (4-12)$$

Em particular,

$$\liminf_{r \rightarrow \infty} \frac{\log Vol_w(B_r)}{r^2} \leq C < \infty, \quad C \in \mathbb{R}.$$

Agora, considere  $\psi_- = \max\{-\psi, 0\}$ , a igualdade (4-11) implica que

$$\Delta_w \psi_- = \frac{\psi_-^2 - \rho \psi_-}{n + d - 1}.$$

Então aplicando o Teorema 12 em [49], com os parâmetros

$$a(x) = -\rho(n + d - 1)^{-1}, \quad b(x) = (n + d - 1)^{-1}, \quad \sigma = 2,$$

obtemos que a função  $\psi_-$  é limitada superiormente, ou equivalentemente,

$$\psi_* = \inf_B \psi > -\infty.$$

A estimativa de volume (4-12) implica a validade do princípio do máximo fraco para o drifting Laplaciano  $\Delta_w$  (Teorema 1.15). Então existe uma sequência  $\{x_k\}$  tal que

$$\psi(x_k) \rightarrow \psi_* \quad \Delta_w \psi(x_k) \geq -\frac{1}{k},$$

e tomando o limite em (4-11) ao longo de  $\{x_k\}$ , tem-se

$$(\psi_* + \rho)\psi_* \leq 0. \tag{4-13}$$

**Caso I:**  $\rho > 0$ . Obviamente a desigualdade (4-13) implica  $-\rho \leq \psi_* \leq 0$ . Assim,  $0 \leq R_* \leq \rho$ . Assuma agora que  $\psi(x_0) = \psi_* = -\rho$ , onde  $x_0 \in B$ , então, pela equação (4-11), a função não negativa  $l(x) = \psi(x) + \rho$  satisfaz

$$\Delta_w l - \frac{\rho}{n + d - 1} l = -\frac{l^2}{n + d - 1} \leq 0. \tag{4-14}$$

Considere

$$\Omega_0 := \{x \in B ; l(x) = 0\},$$

$\Omega_0$  é fechado e não vazio, visto que  $x_0 \in \Omega_0$ . Considere  $y \in \Omega_0$ , então aplicando o princípio do máximo (Teorema 1.13) a equação (4-14), obtemos que  $l(x) = 0$  em uma vizinhança de  $y$ , dessa forma  $\Omega_0$  é aberto. Uma vez que  $\Omega_0$  é aberto e fechado, temos pela conexidade de  $B$  que  $\Omega_0^c = \emptyset$ , ou seja,  $l(x) \equiv 0$ . Portanto  $\psi \equiv -\rho$ , ou equivalentemente,

$$scal_g = 0.$$

Combinando  $scal_g = 0$  com a equação (1-4), tem-se

$$-\rho g = Hess_g \tilde{h}. \tag{4-15}$$

Assim, pelo Lema 4.16, temos que  $B^n \times_f F^d$  é isométrico ao espaço Euclidiano  $\mathbb{R}^{n+d}$ ,

e resolvendo a equação (4-15), obtemos

$$\tilde{h}(x) = -\frac{\rho}{2}|x|^2 + \langle b, x \rangle + c, \quad b \in \mathbb{R}^{n+d}, \quad c \in \mathbb{R},$$

o que prova a primeira afirmação do item (a).

De maneira análoga, se  $\psi(x_0) = \psi_* = 0$  para algum  $x_0 \in B$ , deduzimos que  $\psi \circ \pi = \text{scal}_g - \rho \equiv 0$ , e então,  $\text{scal}_g$  é positiva constante e  $\nabla \tilde{h}$  é um campo de Killing.

**Caso II:**  $\rho = 0$ . Obviamente a desigualdade (4-13) implica  $\psi_* = 0$ . Assim,  $R_* = 0$ . Assuma agora que  $\psi(x_0) = \psi_* = 0$ , onde  $x_0 \in B$ , então pela equação (4-11), a função não negativa  $\psi$  satisfaz

$$\Delta_w \psi = -\frac{1}{n+d-1} \psi^2 \leq 0.$$

Pelo princípio do Máximo, concluímos que  $\psi \circ \pi = \text{scal}_g \equiv 0$ , e então  $\nabla \tilde{h}$  é um campo de Killing, o que conclui a prova do item (b).

**Caso III:**  $\rho < 0$ . Obviamente a desigualdade (4-13) implica  $0 \leq \psi_* \leq -\rho$ . Assim,  $\rho \leq R_* \leq 0$ . Assuma agora que  $\psi(x_0) = \psi_* = 0$ , onde  $x_0 \in B$ , então pela equação (4-11), temos que

$$\Delta_w \psi + \frac{\rho}{n+d-1} \psi = -\frac{\psi^2}{n+d-1} \leq 0.$$

Como  $\psi(x) \geq \psi_* = 0$ , pelo princípio do máximo, concluímos que  $\psi \circ \pi = \text{scal}_g - \rho \equiv 0$ , e então,  $\text{scal}_g$  é negativa constante e  $\nabla \tilde{h}$  é um campo de Killing, o que prova a primeira afirmação do item (3).

De maneira análoga, assuma que  $\psi(x_0) = \psi_* = -\rho$  para algum  $x_0 \in B$ , então novamente pelo princípio do máximo deduzimos que  $\psi \equiv -\rho$ , ou equivalentemente,

$$\text{scal}_g = 0.$$

Combinando  $\text{scal}_g = 0$  com a equação (1-4), obtemos

$$-\rho g = \text{Hess}_g \tilde{h}. \quad (4-16)$$

Assim, pelo Lema 4.16, obtemos que  $B^n \times_f F^d$  é isométrico ao espaço Euclidiano  $\mathbb{R}^{n+d}$ , e resolvendo a equação (4-16) obtemos

$$\tilde{h}(x) = -\frac{\rho}{2}|x|^2 + \langle b, x \rangle + c, \quad b \in \mathbb{R}^{n+d}, \quad c \in \mathbb{R}.$$

□

**Prova do Teorema 4.10 :** Seja  $r(x) := r(x, x_0)$  a função distância a partir de  $x_0$  e considere  $\alpha(s) : [0, r] \rightarrow M$  uma geodésica minimizante partindo do ponto  $x_0 = \alpha(0)$ , então

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds} \Big|_r \tilde{h}(\alpha(s)) &= g(\nabla \tilde{h}, \alpha'(r)), \\ &= \int_0^r \frac{d}{ds} g(\nabla \tilde{h}, \alpha'(s)) ds + g(\nabla \tilde{h}, \alpha'(0)), \\ &= \int_0^r \text{Hess}_g \tilde{h}(\alpha', \alpha') ds + g(\nabla \tilde{h}, \alpha'(0)). \end{aligned}$$

Pelo Teorema 4.9 obtemos que

$$\text{Hess}_g \tilde{h}(\alpha', \alpha') = \text{scal}_g - \rho \geq \begin{cases} -\rho & \text{se } \rho > 0; \\ 0 & \text{se } \rho \leq 0. \end{cases}$$

Assim,

$$\frac{d}{ds} \Big|_r \tilde{h}(\alpha(s)) \geq \begin{cases} -\rho r + g(\nabla \tilde{h}, \alpha'(0)) & \text{se } \rho > 0; \\ g(\nabla \tilde{h}, \alpha'(0)) & \text{se } \rho \leq 0. \end{cases}$$

Integrando as equações acima ao longo de  $\alpha(s)$  obtemos o Teorema 4.10. □

**Prova do Teorema 4.11 :** Pelo Lema 3.10, a função potencial  $h$  e a função torção  $f$  devem satisfazer

$$\text{scal}_{g_B} = \frac{1}{f} g_B(\nabla f, \nabla h) - \frac{\lambda_F}{f^2} + \frac{2d}{f} \Delta f + \frac{d(d-1)}{f^2} g_B(\nabla f, \nabla f) + \rho. \quad (4-17)$$

Então, considerando a mudança  $f = v^{\frac{2}{d+1}}$  em (4-17), obtemos

$$\Delta_w v - \frac{1}{dp} (\text{scal}_{g_B} - \rho) v - \frac{1}{dp} \lambda_F v^{1-p} = 0, \quad (4-18)$$

onde

$$w = -\frac{h}{2d}, \quad p = \frac{4}{d+1}.$$

Seja  $v$  uma solução positiva da equação (4-18) e por simplicidade considere  $g_B = \langle \cdot, \cdot \rangle = |\cdot|^2$ , então  $u = \log v$  satisfaz

$$\Delta_w u = (\beta - 1) |\nabla u|^2 - \mathcal{F},$$



onde

$$\mathcal{F} = \beta |\nabla u|^2 - \frac{1}{dp} (\text{scal}_{g_B} - \rho) - \frac{\lambda_F}{dp} e^{-pu}, \quad \beta \in (0, 1).$$

Agora, considere a função bump  $\xi$  satisfazendo

$$\xi(r) = \begin{cases} 1 & \text{se } r \in [0, 1] \\ 0 & \text{se } r \in [2, \infty) \end{cases}, \quad -c_1 \leq \frac{\xi'(r)}{\xi^{\frac{1}{2}}(r)} \leq 0, \quad -c_2 \leq \xi''(r), \quad c_1, c_2 \in (0, \infty),$$

e defina

$$\psi(x) = \xi\left(\frac{r(x)}{R}\right),$$

onde  $r(x)$  é a função distância a partir de  $p$ . Usando um argumento devido a Calabi [16] (veja também Cheng e Yau [19]), podemos assumir sem perda de generalidade que a função  $\psi$  é diferenciável em  $B(p, 2R)$ . Então a função definida por  $G = \psi\mathcal{F}$  é diferenciável em  $B(p, 2R)$ .

Seja  $x_0 \in B(p, 2R)$  o ponto no qual  $G$  atinge seu máximo  $G_{max}$ , e suponha que  $G_{max} > 0$  (do contrário a prova se torna trivial). No ponto  $x_0$ , nós temos

$$\nabla(G) = \psi \nabla \mathcal{F} + \mathcal{F} \nabla \psi = 0.$$

Com isso,

$$\begin{aligned} 0 &\geq \Delta_w G, \\ &= \psi \Delta_w \mathcal{F} + \mathcal{F} \Delta_w \psi + 2 \langle \nabla \psi, \nabla \mathcal{F} \rangle, \\ &= \psi \Delta_w \mathcal{F} + \mathcal{F} \Delta_w \psi - 2\mathcal{F} \frac{|\nabla \psi|^2}{\psi}. \end{aligned} \tag{4-19}$$

De modo a estimar o lado direito de (4-19) nós provamos o seguinte lema.

**Lema 4.17.** *Seja  $(B^n, g_B)$  uma variedade completa não compacta satisfazendo*

$$\text{Ric}_{g_B} + \text{Hess}_{g_B} w - \frac{1}{m} dw \otimes dw \geq -K, \tag{4-20}$$

na bola  $B(p, 2R)$ , onde  $K \geq 0$ ,  $w = -\frac{h}{2d}$ , e considere  $\mathcal{F}$  e  $\psi$  como anteriormente, então temos

$$\frac{|\nabla \psi|^2}{\psi} \leq \frac{c_1^2}{R^2}, \tag{4-21}$$

$$\Delta_w \psi \geq -\frac{(n-1 + R\sqrt{nK})c_1 + c_2}{R^2}, \tag{4-22}$$

$$\begin{aligned} \Delta_w \mathcal{F} &\geq 2\beta \frac{(\Delta_w u)^2}{n+m} + \frac{2(\beta-1)}{dp} \langle \nabla u, \nabla \text{scal}_{g_B} \rangle - \frac{2(\beta-1)\lambda_F}{d} e^{-pu} |\nabla u|^2 + \\ &- 2 \langle \nabla u, \nabla \mathcal{F} \rangle - 2\beta K |\nabla u|^2 - \frac{\Delta_w \text{scal}_{g_B}}{dp} - \frac{\lambda_F}{d} e^{-pu} [(p-\beta+1)|\nabla u|^2 + \mathcal{F}]. \end{aligned} \quad (4-23)$$

**Prova do Lemma 4.17 :** A equação (4-21) segue do cálculo

$$\frac{|\nabla \psi|^2}{\psi} = \frac{1}{\xi} \left\langle \xi' \frac{\nabla r}{R}, \xi' \frac{\nabla r}{R} \right\rangle = \frac{(\xi')^2}{\xi} \frac{1}{R^2} \langle \nabla r, \nabla r \rangle \leq \frac{c_1^2}{R^2}.$$

Agora, sob a hipótese (4-20), Qian demonstrou a seguinte estimativa ([50]):

$$\Delta_w r^2 \leq n \left( 1 + \sqrt{1 + \frac{4Kr^2}{n}} \right),$$

o qual implica

$$\begin{aligned} \Delta_w r &= \frac{1}{2r} (\Delta_w r^2 - 2|\nabla r|^2), \\ &\leq \frac{n-2}{2r} + \frac{n}{2r} \left( 1 + \sqrt{1 + \frac{4Kr^2}{n}} \right), \\ &= \frac{n-1}{r} + \sqrt{nK}. \end{aligned}$$

Então, temos que

$$\Delta_w \psi = \frac{\xi''(r)|\nabla r|^2}{R^2} + \frac{\xi'(r)\Delta_w r}{R} \geq -\frac{(n-1 + R\sqrt{nK})c_1 + c_2}{R^2},$$

o que prova (4-22).

Recordemos que a fórmula de Bochner para o tensor de  $m$ -Bakry-Émery é dada por

$$\frac{1}{2} \Delta_w |\nabla u|^2 = |\text{Hess}u|^2 + \langle \nabla u, \nabla \Delta_w u \rangle + \text{Ric}_w^m(\nabla u, \nabla u) + \frac{1}{m} |\langle \nabla u, \nabla w \rangle|,$$

onde  $\text{Ric}_w^m := \text{Ric} + \text{Hess}w - \frac{1}{m} dw \otimes dw$ . Logo, pela hipótese (4-20), obtemos que

$$\frac{1}{2} \Delta_w |\nabla u|^2 \geq \frac{(\Delta_w u)^2}{n+m} + \langle \nabla u, \nabla \Delta_w u \rangle - K |\nabla u|^2.$$

Assim,

$$\begin{aligned}\Delta_w \mathcal{F} &= \beta \Delta_w |\nabla u|^2 - \frac{1}{dp} \Delta_w \text{scal}_{g_B} - \frac{\lambda_F}{dp} \Delta_w e^{-pu}, \\ &\geq 2\beta \frac{(\Delta_w u)^2}{n+m} + 2\beta \langle \nabla u, \nabla \Delta_w u \rangle - 2\beta K |\nabla u|^2 + \\ &\quad - \frac{1}{dp} \Delta_w \text{scal}_{g_B} - \frac{\lambda_F}{d} e^{-pu} (p |\nabla u|^2 - \Delta_w u).\end{aligned}$$

Observe que

$$\begin{aligned}2\beta \langle \nabla u, \nabla \Delta_w u \rangle &= 2\beta \langle \nabla u, \nabla \left[ \left(1 - \frac{1}{\beta}\right) \left(\frac{1}{dp} (\text{scal}_{g_B} - \rho) + \frac{\lambda_F e^{-pu}}{dp}\right) - \frac{\mathcal{F}}{\beta} \right] \rangle, \\ &= 2\beta \left(1 - \frac{1}{\beta}\right) \frac{1}{dp} \langle \nabla u, \nabla \text{scal}_{g_B} \rangle + 2\beta \left(1 - \frac{1}{\beta}\right) \frac{\lambda_F}{dp} \langle \nabla u, \nabla e^{-pu} \rangle + \\ &\quad - 2 \langle \nabla u, \nabla \mathcal{F} \rangle, \\ &= 2(\beta - 1) \frac{1}{dp} \langle \nabla u, \nabla \text{scal}_{g_B} \rangle - \frac{2(\beta - 1)\lambda_F}{d} e^{-pu} |\nabla u|^2 - 2 \langle \nabla u, \nabla \mathcal{F} \rangle,\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}\frac{\lambda_F}{d} e^{-pu} (p |\nabla u|^2 - \Delta_w u) &= \frac{\lambda_F}{d} e^{-pu} [p |\nabla u|^2 - (\beta - 1) |\nabla u|^2 + \mathcal{F}], \\ &= \frac{\lambda_F}{d} e^{-pu} [(p - \beta + 1) |\nabla u|^2 + \mathcal{F}].\end{aligned}$$

Assim, temos que

$$\begin{aligned}\Delta_w \mathcal{F} &\geq 2\beta \frac{(\Delta_w u)^2}{n+m} + \frac{2(\beta - 1)}{dp} \langle \nabla u, \nabla \text{scal}_{g_B} \rangle - \frac{2(\beta - 1)\lambda_F}{d} e^{-pu} |\nabla u|^2 - 2 \langle \nabla u, \nabla \mathcal{F} \rangle + \\ &\quad - 2\beta K |\nabla u|^2 - \frac{\Delta_w \text{scal}_{g_B}}{dp} - \frac{\lambda_F}{d} e^{-pu} [(p - \beta + 1) |\nabla u|^2 + \mathcal{F}],\end{aligned}$$

o que completa a demonstração do lema.  $\square$

Prosseguindo, usando o Lema 4.17 e a equação (4-19), obtemos que

$$\begin{aligned}\psi \left( 2\beta \frac{(\Delta_w u)^2}{n+m} + 2(\beta - 1) \frac{1}{dp} \langle \nabla u, \nabla \text{scal}_{g_B} \rangle - \frac{2(\beta - 1)\lambda_F}{d} e^{-pu} |\nabla u|^2 - 2 \langle \nabla u, \nabla \mathcal{F} \rangle + \right. \\ \left. - 2\beta K |\nabla u|^2 - \frac{\Delta_w \text{scal}_{g_B}}{dp} - \frac{\lambda_F}{d} e^{-pu} [(p - \beta + 1) |\nabla u|^2 + \mathcal{F}] \right) \leq \mathcal{F}H,\end{aligned}$$

onde

$$H = \left( \frac{(n-1 + R\sqrt{nK})c_1 + c_2 + 2c_1^2}{R^2} \right).$$

Como a função  $\psi$  satisfaz  $0 \leq \psi \leq 1$ , deduzimos que

$$-2\psi \langle \nabla u, \nabla \mathcal{F} \rangle = 2\mathcal{F} \langle \nabla u, \nabla \psi \rangle \geq -2\mathcal{F} |\nabla u| |\nabla \psi| \geq -\frac{2c_1}{R} \psi^{\frac{1}{2}} \mathcal{F} |\nabla u|.$$

Logo,

$$\begin{aligned} & 2\beta\psi \frac{(\Delta_w u)^2}{n+m} + 2(\beta-1) \frac{\psi}{dp} \langle \nabla u, \nabla \text{scal}_{g_B} \rangle - \frac{(\beta+p-1)\lambda_F \psi}{d} e^{-pu} |\nabla u|^2 + \\ & - \frac{2c_1}{R} \psi^{\frac{1}{2}} \mathcal{F} |\nabla u| - 2\beta\psi K |\nabla u|^2 - \psi \frac{\Delta_w \text{scal}_{g_B}}{dp} - \frac{\lambda_F \psi}{d} e^{-pu} \mathcal{F} \leq \mathcal{F} H. \end{aligned} \quad (4-24)$$

Na sequência, vamos considerar os seguintes casos:  $\lambda_F < 0$  e  $\lambda_F \geq 0$ .

Caso (a):  $\lambda_F < 0$ . A hipótese

$$\Delta_w \text{scal}_{g_B} \leq \theta(2R), \quad |\nabla \text{scal}_{g_B}| \leq \gamma(2R).$$

juntamente com a equação (4-24) produz a seguinte desigualdade

$$2\beta\psi \frac{(\Delta_w u)^2}{n+m} + 2(\beta-1) \frac{\psi}{dp} \gamma |\nabla u| - \frac{2c_1}{R} \psi^{\frac{1}{2}} \mathcal{F} |\nabla u| - 2\beta\psi K |\nabla u|^2 - \frac{\theta\psi}{dp} \leq \mathcal{F} H.$$

Multiplicando ambos os lados da equação acima pela função  $\psi$  e usando o fato

$$0 \leq \psi(x) \leq 1,$$

obtemos

$$2\beta \frac{(\psi \Delta_w u)^2}{n+m} + 2(\beta-1) \frac{\psi^{\frac{1}{2}}}{dp} \gamma |\nabla u| - \frac{2c_1}{R} \psi^{\frac{3}{2}} \mathcal{F} |\nabla u| - 2\beta\psi K |\nabla u|^2 - \frac{\theta}{dp} \leq \psi \mathcal{F} H.$$

Agora, considere

$$y = \psi |\nabla u|^2, \quad z = \psi \left( \frac{1}{dp} (\text{scal}_{g_B} - \rho) + \frac{\lambda_F}{dp} e^{-pu} \right).$$

Então

$$\begin{aligned} & \frac{2\beta}{n+m} \left\{ (y-z)^2 + \frac{(\beta-1)\gamma(n+m)y^{\frac{1}{2}}}{\beta dp} - \frac{(n+m)c_1}{R} y^{\frac{1}{2}} \left( y - \frac{z}{\beta} \right) + \right. \\ & \left. -(n+m)Ky \right\} \leq \psi \mathcal{F} H + \frac{\theta}{dp}. \end{aligned}$$

Por um argumento devido a Li e Yau ([38], pg.161-162), temos

$$\begin{aligned}
 & (y-z)^2 - (n+m)c_1R^{-1}y^{\frac{1}{2}}\left(y - \frac{z}{\beta}\right) - (n+m)Ky - (n+m)\left(\frac{1}{\beta} - 1\right)\frac{\gamma}{dp}y^{\frac{1}{2}} \geq \\
 & \geq \left(\frac{1}{\beta}\right)^{-2}\left(y - \frac{z}{\beta}\right)^2 - \frac{(n+m)^2c_1^2}{8}\left(\frac{1}{\beta}\right)^2\left(\frac{1}{\beta} - 1\right)^{-1}R^{-2}\left(y - \frac{z}{\beta}\right) - \frac{3}{4}4^{-\frac{1}{3}} \times \\
 & \times (n+m)^{\frac{4}{3}}\left[\left(\frac{\gamma}{dp}\right)^4\left(\frac{1}{\beta} - 1\right)^2\left(\frac{1}{\beta}\right)^2\varepsilon^{-1}\right]^{\frac{1}{3}} - \frac{(n+m)^2}{4}(1-\varepsilon)^{-1}\left(\frac{1}{\beta} - 1\right)^{-2} \times \\
 & \times \left(\frac{1}{\beta}\right)^2 K^2.
 \end{aligned}$$

para todo  $0 < \varepsilon < 1$ .

Assim, em nosso contexto obtemos

$$\begin{aligned}
 & \frac{2\beta}{n+m}\left\{(\beta y - z)^2 - \frac{(n+m)^2c_1^2}{8R^2\beta^2(1-\beta)}(\beta y - z) - \frac{3}{4}4^{-\frac{1}{3}}(n+m)^{\frac{4}{3}} \times \right. \\
 & \times \left. \left[\left(\frac{\gamma}{dp}\right)^4\frac{(1-\beta)^2}{\beta^4}\varepsilon^{-1}\right]^{\frac{1}{3}} - \frac{(n+m)^2}{4}(1-\varepsilon)^{-1}(1-\beta)^{-2}K^2\right\} \leq \\
 & \leq (\beta y - z)H + \frac{\theta}{dp}.
 \end{aligned}$$

Logo,

$$\frac{2\beta}{n+m}(\psi\mathcal{F})^2 - \mathcal{B}(\psi\mathcal{F}) - \mathcal{C} \leq 0,$$

onde

$$\begin{aligned}
 \mathcal{B} &= \frac{(n+m)c_1^2}{4R^2\beta(1-\beta)} + H, \\
 \mathcal{C} &= \frac{3\beta}{2}\left[\frac{n+m}{4}\left(\frac{\gamma}{dp}\right)^4\frac{(1-\beta)^2}{\beta^4}\varepsilon^{-1}\right]^{\frac{1}{3}} + \frac{\beta(n+m)}{2}(1-\varepsilon)^{-1}(1-\beta)^{-2}K^2 + \frac{\theta}{dp}.
 \end{aligned}$$

Agora, pela desigualdade  $az^2 - bz \leq c$ , concluímos que

$$z \leq \frac{2b}{a} + \sqrt{\frac{c}{a}}.$$

Então,

$$\sup_{x \in B(p,R)} \mathcal{F}(x) \leq (\psi\mathcal{F})(x_0) \leq \frac{n+m}{\beta}\mathcal{B} + \sqrt{\frac{n+m}{2\beta}}\mathcal{C}^{\frac{1}{2}},$$

e assim

$$\beta|\nabla u|^2 - \frac{1}{dp}(scal_{g_B} - \rho) - \frac{\lambda_F}{dp}e^{-pu} \leq \frac{n+m}{\beta}\mathcal{B} + \sqrt{\frac{n+m}{2\beta}}\mathcal{C}^{\frac{1}{2}}.$$

Substituindo de volta a função  $u = \log f^{\frac{d+1}{2}}$  na equação acima, obtemos a desigualdade desejada no caso  $\lambda_F < 0$ .

Caso (b):  $\lambda_F \geq 0$ . A hipótese

$$\Delta_w scal_{g_B} \leq \theta(2R), \quad |\nabla scal_{g_B}| \leq \gamma(2R).$$

juntamente com a equação (4-24) produz

$$\begin{aligned} 2\beta\psi\frac{(\Delta_w u)^2}{n+m} + 2(\beta-1)\frac{\psi}{dp}\gamma|\nabla u| - \frac{(\beta+p-1)\lambda_F\psi}{d}e^{-pu}|\nabla u|^2 - \frac{2c_1}{R}\psi^{\frac{1}{2}}\mathcal{F}|\nabla u| + \\ -2\beta\psi K|\nabla u|^2 - \psi\frac{\theta}{dp} - \frac{\lambda_F\psi}{d}e^{-pu}\mathcal{F} \leq \mathcal{F}H. \end{aligned}$$

Multiplicando ambos os lados da equação acima pela função  $\psi$  e usando o fato

$$0 \leq \psi(x) \leq 1,$$

obtemos

$$\begin{aligned} 2\beta\frac{(\psi\Delta_w u)^2}{n+m} + 2(\beta-1)\frac{\psi^{\frac{1}{2}}}{dp}\gamma|\nabla u| - \frac{(\beta+p-1)\lambda_F\psi}{d}\mathcal{M}|\nabla u|^2 - \frac{2c_1}{R}\psi^{\frac{3}{2}}\mathcal{F}|\nabla u| + \\ -2\beta\psi K|\nabla u|^2 - \psi\frac{\theta}{dp} - \frac{\lambda_F\psi}{d}\mathcal{M}\mathcal{F} \leq \psi\mathcal{F}H, \end{aligned}$$

onde  $\mathcal{M} = \sup_{B(p,2R)} e^{-pu}$ .

Agora, considere

$$y = \psi|\nabla u|^2, \quad z = \psi\left(\frac{1}{dp}(scal_{g_B} - \rho) + \frac{\lambda_F}{dp}e^{-pu}\right).$$

Logo,

$$\begin{aligned} \frac{2\beta}{n+m}\left\{(y-z)^2 - \frac{c_1(n+m)}{R}y^{\frac{1}{2}}\left(y - \frac{z}{\beta}\right) + (n+m)\frac{(\beta-1)y^{\frac{1}{2}}}{\beta}\frac{\gamma}{dp} + \right. \\ \left. -(n+m)\left[\frac{(\beta+p-1)\lambda_F}{2d\beta}\mathcal{M} + K\right]y\right\} \leq \psi\mathcal{F}\left[H + \frac{\lambda_F\mathcal{M}}{d}\right] + \frac{\theta}{dp}. \end{aligned}$$

Assim,

$$\frac{2\beta}{n+m}(\psi\mathcal{F})^2 - \left\{ \mathcal{B} + \frac{\lambda_F\mathcal{M}}{d} \right\}(\psi\mathcal{F}) - \left\{ \mathcal{C} + \frac{\beta(n+m)}{2(1-\varepsilon)(1-\beta)^2} \left[ \left( \frac{(\beta+p-1)\lambda_F\mathcal{M}}{2dp} \right)^2 + \frac{K(\beta+p-1)\lambda_F\mathcal{M}}{dp} \right] \right\} \leq 0,$$

ou seja,

$$\psi\mathcal{F} \leq \frac{n+m}{\beta} \left[ \mathcal{B} + \frac{\lambda_F\mathcal{M}}{d} \right] + \sqrt{\frac{n+m}{2\beta}}(\mathcal{C} + \mathcal{D})^{\frac{1}{2}},$$

onde

$$\mathcal{D} = \frac{\beta(n+m)}{2(1-\varepsilon)(1-\beta)^2} \left[ \left( \frac{(\beta+p-1)\lambda_F\mathcal{M}}{2dp} \right)^2 + \frac{K(\beta+p-1)\lambda_F\mathcal{M}}{dp} \right].$$

Dessa forma,

$$\beta|\nabla u|^2 - \frac{1}{dp}(\text{scal}_{g_B} - \rho) - \frac{\lambda_F}{dp}e^{-pu} \leq \frac{n+m}{\beta} \left[ \mathcal{B} + \frac{\lambda_F\mathcal{M}}{d} \right] + \sqrt{\frac{n+m}{2\beta}}(\mathcal{C} + \mathcal{D})^{\frac{1}{2}},$$

Analogamente ao caso anterior, a substituindo da função  $u = \log f^{\frac{d+1}{2}}$  implica a desigualdade desejada no caso  $\lambda_F \geq 0$ .  $\square$

---

## Bibliografia

---

- [1] ADRIANO, L.; BARBOZA, M.; PINA, R.; TOKURA, W. **Gradient estimates on warped product gradient almost ricci solitons.** *arXiv preprint arXiv:1905.00068*, 2019.
- [2] ADRIANO, L.; BARBOZA, M.; PINA, R.; TOKURA, W. **On warped product gradient yamabe solitons.** *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 473(1):201 – 214, 2019.
- [3] ADRIANO, L.; BARBOZA, M.; PINA, R.; TOKURA, W. **Properties of Complete Noncompact Warped Product Gradient Yamabe Solitons.** *arXiv e-prints*, p. arXiv:1904.08288, Apr 2019.
- [4] ADRIANO, L.; TOKURA, W.; XIA, C. **The caffarelli-kohn-nirenberg inequalities on metric measure spaces.** *arXiv preprint arXiv:1711.04836*, 2017.
- [5] ADRIANO, L.; XIA, C. **Sobolev type inequalities on riemannian manifolds.** *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 371(1):372–383, 2010.
- [6] ADRIANO, L.; XIA, C. **Hardy type inequalities on complete riemannian manifolds.** *Monatshefte für Mathematik*, 163(2):115–129, 2011.
- [7] AUBIN, T. **Some nonlinear problems in Riemannian geometry.** Springer Science & Business Media, 2013.
- [8] BAO, D.; CHERN, S.-S.; SHEN, Z. **An introduction to Riemann-Finsler geometry**, volume 200. Springer Science & Business Media, 2012.
- [9] BARBOSA, E.; PINA, R.; TENENBLAT, K. **On gradient ricci solitons conformal to a pseudo-euclidean space.** *Israel Journal of Mathematics*, 200(1):213–224, 2014.
- [10] BARBOSA, E.; RIBEIRO, E. **On conformal solutions of the yamabe flow.** *Archiv der Mathematik*, 101(1):79–89, 2013.
- [11] BESSE, A. L. **Einstein manifolds.** Springer Science & Business Media, 2007.



- [12] BRENDLE, S.; OTHERS. **Convergence of the yamabe flow for arbitrary initial energy.** *Journal of Differential Geometry*, 69(2):217–278, 2005.
- [13] BROZOS-VÁZQUEZ, M.; CALVIÑO-LOUZAO, E.; GARCÍA-RÍO, E.; VÁZQUEZ-LORENZO, R. **Local structure of self-dual gradient yamabe solitons.** In: *Geometry, Algebra and Applications: From Mechanics to Cryptography*, p. 25–35. Springer, 2016.
- [14] BURAGO, D.; BURAGO, Y.; BURAGO, I. D.; IVANOV, S. **A course in metric geometry**, volume 33. American Mathematical Soc., 2001.
- [15] CAFFARELLI, L.; KOHN, R.; NIRENBERG, L. **First order interpolation inequalities with weights.** *Compositio Mathematica*, 53(3):259–275, 1984.
- [16] CALABI, E.; OTHERS. **An extension of e. hopf’s maximum principle with an application to riemannian geometry.** *Duke Mathematical Journal*, 25(1):45–56, 1958.
- [17] CHAVEL, I. **Riemannian geometry: a modern introduction**, volume 98. Cambridge university press, 2006.
- [18] CHEEGER, J.; COLDING, T. H.; OTHERS. **On the structure of spaces with ricci curvature bounded below.** *J. Differential Geom*, 46(3):406–480, 1997.
- [19] CHENG, S. Y.; YAU, S.-T. **Differential equations on riemannian manifolds and their geometric applications.** *Communications on Pure and Applied Mathematics*, 28(3):333–354, 1975.
- [20] CHOW, B. **The yamabe flow on locally conformally flat manifolds with positive ricci curvature.** *Communications on pure and applied mathematics*, 45(8):1003–1014, 1992.
- [21] CHU, Y.; WANG, X. **On the scalar curvature estimates for gradient yamabe solitons.** *Kodai Mathematical Journal*, 36(2):246–257, 2013.
- [22] DE SOUSA, M. L.; PINA, R. **Gradient ricci solitons with structure of warped product.** *Results in Mathematics*, 71(3-4):825–840, 2017.
- [23] DO CARMO, M. P.; XIA, C. **Complete manifolds with non-negative ricci curvature and the caffarelli–kohn–nirenberg inequalities.** *Compositio Mathematica*, 140(3):818–826, 2004.
- [24] DOBARRO, F.; LAMI DOZO, E. **Scalar curvature and warped products of riemann manifolds.** *Transactions of the American Mathematical Society*, 303(1):161–168, 1987.

- [25] GAGLIARDO, E. **Proprieta di alcune classi di funzioni in piu variabili.** *Matematika*, 5(4):87–116, 1961.
- [26] GANCHEV, G.; MIHOVA, V. **Riemannian manifolds of quasi-constant sectional curvatures.** *Journal fur die Reine und Angewandte Mathematik*, p. 119–142, 2000.
- [27] GILBARG, D.; TRUDINGER, N. S. **Elliptic partial differential equations of second order.** springer, 2015.
- [28] HAMILTON, R. S. **Lectures on geometric flows.** *Unpublished manuscript*, 1989.
- [29] HEBEY, E. **Nonlinear analysis on manifolds: Sobolev spaces and inequalities**, volume 5. American Mathematical Soc., 2000.
- [30] HSU, S.-Y. **A note on compact gradient yamabe solitons.** *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 388(2):725–726, 2012.
- [31] KELL, M. **A note on non-negatively curved berwald spaces.** *arXiv preprint arXiv:1502.03764*, 2015.
- [32] KRISTÁLY, A.; OHTA, S.-I. **Caffarelli–kohn–nirenberg inequality on metric measure spaces with applications.** *Mathematische Annalen*, 357(2):711–726, 2013.
- [33] KUWAE, K.; SHIOYA, T. **Infinitesimal bishop-gromov condition for alexandrov spaces.** *Advanced Studies in Pure Mathematics*, 5:20XX.
- [34] LAKZIAN, S. **On closed geodesics in non-negatively curved finsler structures with large volume growth.** *arXiv preprint arXiv:1408.0214*, 2014.
- [35] LAM, N.; LU, G. **Sharp constants and optimizers for a class of caffarelli–kohn–nirenberg inequalities.** *Advanced Nonlinear Studies*, 17(3):457–480, 2017.
- [36] LEDOUX, M. **On manifolds with non-negative ricci curvature and sobolev inequalities.** *Communications in Analysis and Geometry*, 7(2):347–353, 1999.
- [37] LEE, J. M. **Riemannian manifolds: an introduction to curvature**, volume 176. Springer Science & Business Media, 2006.
- [38] LI, P.; YAU, S. T. **On the parabolic kernel of the schrödinger operator.** *Acta Mathematica*, 156(1):153–201, 1986.
- [39] LIEB, E. H.; LOSS, M. **Analysis, volume 14 of graduate studies in mathematics.** American Mathematical Society, Providence, RI, 4, 2001.
- [40] MUNN, M. **Alexandrov spaces with large volume growth.** *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 419(1):525–540, 2014.

- [41] NETO, B. L.; PINA, R. **Invariant solutions for the static vacuum equation.** *Journal of Mathematical Physics*, 58(7):072502, 2017.
- [42] NETO, B. L.; TENENBLAT, K. **On gradient yamabe solitons conformal to a pseudo-euclidian space.** *Journal of Geometry and Physics*, 123:284–291, 2018.
- [43] NIRENBERG, L. **On elliptic partial differential equations.** *Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa-Classe di Scienze*, 13(2):115–162, 1959.
- [44] OHTA, S.-I. **On the measure contraction property of metric measure spaces.** *Commentarii Mathematici Helvetici*, 82(4):805–828, 2007.
- [45] OHTA, S.-I. **Finsler interpolation inequalities.** *Calculus of Variations and Partial Differential Equations*, 36(2):211–249, 2009.
- [46] O’NEILL, B. **Semi-Riemannian geometry with applications to relativity**, volume 103. Academic press, 1983.
- [47] PIGOLA, S.; RIGOLI, M.; RIMOLDI, M.; SETTI, A. G. **Ricci almost solitons.** *Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa-Classe di Scienze*, 10(4):757–799, 2011.
- [48] PIGOLA, S.; RIGOLI, M.; SETTI, A. G. **Vanishing and finiteness results in geometric analysis: a generalization of the Bochner technique**, volume 266. Springer Science & Business Media, 2008.
- [49] PIGOLA, S.; RIMOLDI, M.; SETTI, A. G. **Remarks on non-compact gradient ricci solitons.** *Mathematische Zeitschrift*, 268(3-4):777–790, 2011.
- [50] QIAN, Z. **A comparison theorem for an elliptic operator.** *Potential Analysis*, 8(2):137–142, 1998.
- [51] SCHOEN, R.; YAU, S. **Lectures on differential geometry, vol. 1 of conference proceedings and lecture notes in geometry and topology.** *International Press*, 1994.
- [52] SHEN, Y.-B.; SHEN, Z. **Introduction to modern Finsler geometry.** World Scientific Publishing Company, 2016.
- [53] SHEN, Z. **Volume comparison and its applications in riemann–finsler geometry.** *advances in mathematics*, 128(2):306–328, 1997.
- [54] STURM, K.-T.; OTHERS. **On the geometry of metric measure spaces i.** *Acta mathematica*, 196(1):65–131, 2006.

- [55] STURM, K.-T.; OTHERS. **On the geometry of metric measure spaces ii.** *Acta mathematica*, 196(1):133–177, 2006.
- [56] WU, J.-Y. **On a class of complete non-compact gradient yamabe solitons.** *arXiv preprint arXiv:1109.0861*, 2011.
- [57] XIA, C. **The gagliardo–nirenberg inequalities and manifolds of non-negative ricci curvature.** *Journal of Functional Analysis*, 224(1):230–241, 2005.
- [58] XIA, C. **The caffarelli-kohn-nirenberg inequalities on complete manifolds.** *Mathematical Research Letters*, 14(5):875–885, 2007.
- [59] XIA, C.; OTHERS. **Complete manifolds with nonnegative ricci curvature and almost best sobolev constant.** *Illinois Journal of Mathematics*, 45(4):1253–1259, 2001.
- [60] YAMABE, H. **On a deformation of riemannian structures on compact manifolds.** *Osaka Mathematical Journal*, 12(1):21–37, 1960.
- [61] YE, R.; OTHERS. **Global existence and convergence of yamabe flow.** *Journal of Differential Geometry*, 39(1):35–50, 1994.
- [62] ZHU, S.-H. **A volume comparison theorem for manifolds with asymptotically nonnegative curvature and its applications.** *American Journal of Mathematics*, 116(3):669–682, 1994.