

UNIVERSIDADE FEDERAL DE GOIÁS  
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA

RÓBSON LOUSA DOS SANTOS

# **Os espaços conformemente flat $\mathbb{E}_3$ e $\mathbb{F}_3$**

Goiânia  
2019

**TERMO DE CIÊNCIA E DE AUTORIZAÇÃO PARA DISPONIBILIZAR  
VERSÕES ELETRÔNICAS DE TESES E DISSERTAÇÕES  
NA BIBLIOTECA DIGITAL DA UFG**

Na qualidade de titular dos direitos de autor, autorizo a Universidade Federal de Goiás (UFG) a disponibilizar, gratuitamente, por meio da Biblioteca Digital de Teses e Dissertações (BDTD/UFG), regulamentada pela Resolução CEPEC nº 832/2007, sem ressarcimento dos direitos autorais, de acordo com a Lei nº 9610/98, o documento conforme permissões assinaladas abaixo, para fins de leitura, impressão e/ou *download*, a título de divulgação da produção científica brasileira, a partir desta data.

1. Identificação do material bibliográfico:     Dissertação     Tese

2. Identificação da Tese ou Dissertação:

Nome completo do autor: Róbson Lousa dos Santos

Título do trabalho: Os Espaços Conformemente Flat E3 e F3

3. Informações de acesso ao documento:

Concorda com a liberação total do documento  SIM     NÃO<sup>1</sup>

Havendo concordância com a disponibilização eletrônica, torna-se imprescindível o envio do(s) arquivo(s) em formato digital PDF da tese ou dissertação.

Róbson Lousa dos Santos

Assinatura do(a) autor(a)<sup>2</sup>

Ciente e de acordo:

[Assinatura]  
Assinatura do(a) orientador(a)<sup>2</sup>

Data: 25 / 03 / 19

<sup>1</sup> Neste caso o documento será embargado por até um ano a partir da data de defesa. A extensão deste prazo suscita justificativa junto à coordenação do curso. Os dados do documento não serão disponibilizados durante o período de embargo.

Casos de embargo:

- Solicitação de registro de patente;
- Submissão de artigo em revista científica;
- Publicação como capítulo de livro;
- Publicação da dissertação/tese em livro.

<sup>2</sup> A assinatura deve ser escaneada.

RÓBSON LOUSA DOS SANTOS

# Os espaços conformemente flat $\mathbb{E}_3$ e $\mathbb{F}_3$

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação do Instituto de Matemática e Estatística da Universidade Federal de Goiás, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

**Área de concentração:** Geometria Diferencial.

**Orientador:** Prof. Dr. Levi Rosa Adriano

**Co-Orientadora:** Profa. Dra. Rosane Gomes Pereira

Goiânia  
2019

Ficha de identificação da obra elaborada pelo autor, através do Programa de Geração Automática do Sistema de Bibliotecas da UFG.

Lousa dos Santos, Róbson  
Os Espaços Conformemente Flat E3 e F3 [manuscrito] / Róbson  
Lousa dos Santos. - 2019.  
LXXII, 72 f.: il.

Orientador: Prof. Dr. Levi Rosa Adriano; co-orientadora Dra.  
Rosane Gomes Pereira.  
Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal de Goiás, Instituto  
de Matemática e Estatística (IME), Programa de Pós-Graduação em  
Matemática, Goiânia, 2019.

Bibliografia.  
Inclui lista de figuras.

1. Geometria Diferencial. 2. Geometria Riemanniana. 3. Espaços  
Conformemente Flat. 4. Superfícies de Rotação. 5. Superfícies  
Helicoidais. I. Rosa Adriano, Levi , orient. II. Título.

CDU 514.77

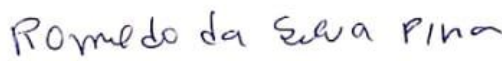


UNIVERSIDADE FEDERAL DE GOIÁS  
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA  
Campus Samambaia – Caixa Postal 131 – CEP: 74.001-970 – Goiânia-GO.  
Fones: (62) 3521-1208 e 3521-1137 [www.ime.ufg.br](http://www.ime.ufg.br)

**ATA DA REUNIÃO DA BANCA EXAMINADORA DA DEFESA DE DISSERTAÇÃO DE ROBSON LOUSA DOS SANTOS** – Ao sétimo dia do mês de março do ano de dois mil e dezenove (07/03/2019), às 14 horas, reuniram-se os componentes da Banca Examinadora: Prof. Levi Rosa Adriano – Orientador, Profa. Rosane Gomes Pereira, Prof. Romildo da Silva Pina e Prof. Tarcísio Castro Silva para, sob a presidência do primeiro, e em sessão pública realizada na sala Geraldo Ávila do Instituto de Matemática e Estatística, procederem à avaliação da defesa de dissertação intitulada: **“Os espaços conformemente flat  $E_3$  e  $F_3$ ”**, em nível de Mestrado, área de concentração em Geometria, de autoria de Robson Louisa dos Santos, discente do Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal de Goiás. A sessão foi aberta pelo Presidente da Banca, Prof. Levi Rosa Adriano, que fez a apresentação formal dos membros da Banca. A seguir, a palavra foi concedida ao autor da dissertação que, em 45 minutos procedeu à apresentação de seu trabalho. Terminada a apresentação, cada membro da Banca arguiu o examinando, tendo-se adotado o sistema de diálogo sequencial. Terminada a fase de arguição, procedeu-se a avaliação da defesa. Tendo-se em vista o que consta na Resolução nº. 1513 do Conselho de Ensino, Pesquisa, Extensão e Cultura (CEPEC), que regulamenta o Programa de Pós-Graduação em Matemática e procedidas às correções recomendadas, a dissertação foi **APROVADA** por unanimidade, considerando-se integralmente cumprido este requisito para fins de obtenção do título de **MESTRE EM MATEMÁTICA**, na área de concentração em Geometria, pela Universidade Federal de Goiás. A conclusão do curso dar-se-á quando da entrega na secretaria do PPGM da versão definitiva da dissertação, com as devidas correções supervisionadas e aprovadas pelo orientador. Cumpridas as formalidades de pauta, às 17 horas a presidência da mesa encerrou esta sessão de defesa de dissertação e para constar eu, Ana Maria Pereira Pinto, secretária do PPGM, lavrei a presente Ata que, depois de lida e aprovada, será assinada pelos membros da Banca Examinadora em quatro vias de igual teor.

  
Prof. Dr. Levi Rosa Adriano  
Presidente - IME/UFG

  
Prof. Dra. Rosane Gomes Pereira  
Membro – IME/UFG

  
Prof. Dr. Romildo da Silva Pina  
Membro – IME/UFG

  
Prof. Dr. Tarcísio Castro Silva  
Membro – MAT/UNB

# ROBSON LOUSA DOS SANTOS

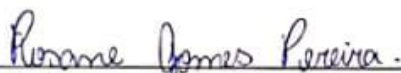
## OS ESPAÇOS CONFORMEMENTE FLAT $E_3$ e $F_3$

Dissertação defendida no Programa de Pós-Graduação do Instituto de Matemática e Estatística da Universidade Federal de Goiás como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática, aprovada no dia 07 de Março de 2019, pela Banca Examinadora constituída pelos professores:



---

**Prof. Dr. Levi Rosa Adriano**  
Instituto de Matemática e Estatística - UFG  
Presidente da Banca



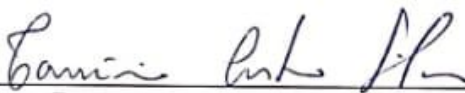
---

**Prof. Dra. Rosane Gomes Pereira**  
Instituto de Matemática e Estatística – UFG



---

**Prof. Dr. Romildo da Silva Pina**  
Instituto de Matemática e Estatística – UFG



---

**Prof. Dr. Tarcísio Castro Silva**  
Departamento de Matemática - UNB

Todos os direitos reservados. É proibida a reprodução total ou parcial do trabalho sem autorização da universidade, do autor e do orientador(a).

### **Róbson Lousa dos Santos**

Bacharel em Matemática pela Universidade Federal de Goiás (2017). Durante a graduação participou do Programa Jovens Talentos para a Ciência com fomento Capes e orientação do Prof. Dr. Romildo da Silva Pina, depois do Programa de Iniciação Científica (PIBIC) por dois anos consecutivos também com fomento Capes e orientação do Prof. Dr. Romildo da Silva Pina, onde estudou objetos essenciais para a Geometria Diferencial, tais como curvas e superfícies no plano/espço euclidiano. Durante o mestrado, sendo bolsista Capes e CNPq, estudou superfícies de rotação e superfícies mínimas nos espaços  $\mathbb{E}_3$  e  $\mathbb{F}_3$ .

Dedico este trabalho à minha sombra.



---

## Agradecimentos

---

Como de praxe, primeiramente gostaria de deixar aqui meus agradecimentos a Deus, mas meus agradecimentos não se limitam apenas ao deus cristão, eles se ampliam a todos os deuses, entidades, forças e energias existentes (física, metafísica ou imaginativamente) que contribuíram para o desenvolvimento do estudo realizado ao longo do meu mestrado que resultou neste trabalho e em um conhecimento adquirido que será levado comigo para todo o sempre até o meu fim. Mesmo as contribuições negativas, são positivas! Em especial, meus agradecimentos a Exu Caveirinha!

Também, meus agradecimentos à minha família. Obviamente meus agradecimentos se estendem a toda a extensão de minha árvore genealógica, a qual nem mesmo eu tenho conhecimento extenso devido a limitação de registros. Vale ressaltar o quão privilegiado sou por ter nascido e sido criado em uma família tradicional que sempre me incentivou a pesar de todas as dificuldades. Meus agradecimentos a minha mãe Vânia Lousa e a meu pai Job dos Santos por isso. É evidente que não é a família tradicional que merece mérito e sim as pessoas que me incentivaram, até porque o conceito de família é amplo.

Agora, dispenso certo tempo para agradecer meu amigos e colegas os quais não serão nomeados, que me apoiaram e incentivaram, além é claro das horas e horas de discussões e estudos que tivemos juntos e que foram fundamentais para todo o processo e, claro, que vão muito além da academia.

Um agradecimento especial ao professor Dr. Romildo Pina pelos anos de orientação nas iniciações científicas que desenvolvemos durante minha graduação, os conhecimentos que adquiri durante esses estudos foram de grande proveito para o desenvolvimento desse trabalho e das ideias aqui envolvidas.

Devo também agradecer a inúmeros professores que contribuíram de modo inestimado para minha formação, mas sempre há aqueles que vão além da formação acadêmica e te formam com apoio, incentivo e um conhecimento de mundo que possuem e que estão sempre dispostos a nos aconselhar e "puxar a orelha" se preciso for. Por isso, tenho que agradecer, e muito, a duas professoras que por fora dos bastidores sempre me apoiaram da maneira que podiam. Meus agradecimentos mais que especiais a professora Dr<sup>a</sup>. Shirlei Serconek e a professora Dr<sup>a</sup>. Ivonildes Ribeiro.

Por falar em professores, deixo aqui meus agradecimentos ao professor Dr. Levi Adriano por suas orientações para o desenvolvimento do trabalho e à professora Dr<sup>a</sup>. Rosane Gomes pelo importante e exaustivo trabalho de me acompanhar ao longo dos cálculos. Também de modo especial, agradeço ao professor Tarcísio Castro Silva pela disponibilidade em estar banca da minha defesa e contribuir grandiosamente com o meu trabalho.

Por fim, deixo meus agradecimentos às instituições Capes e CNPq pela essencial bolsa de estudo ao longo do mestrado que se fez fundamental para desenvolvimento de todo o estudo que resultou neste material.

E agora, mais matemático ainda, procurava um meio de não se ter punido.  
Ele não devia ser consolado.

**Clarice Lispector,**  
*Laços de Família.*

---

## Resumo

---

Lousa, Róbson. **Os espaços conformemente flat  $\mathbb{E}_3$  e  $\mathbb{F}_3$** . Goiânia, 2019. 72p. Dissertação de Mestrado. Instituto de Matemática e Estatística, Universidade Federal de Goiás.

Este trabalho trata-se de uma pesquisa bibliográfica baseada nos artigos de Armando V. Corro, Romildo da Silva Pina e Marcelo Souza (2011) [5] e Kellcio Oliveira Araujo, Ningwei Cui e Romildo da Silva Pina (2015) [3]. Nestes artigos, são estudadas as superfícies de rotação no espaço conformemente flat  $\mathbb{E}_3$  e as superfícies helicoidais no espaço conformemente flat  $\mathbb{F}_3$ , respectivamente. Mostramos que os teoremas de Efimov e Shlenker, que são generalizações do famoso Teorema de Hilbert, não são válidos no espaço  $\mathbb{E}_3$  além de caracterizar as superfícies helicoidais mínimas em  $\mathbb{F}_3$ .

### Palavras-chave

Geometria Diferencial, Geometria Riemanniana, Espaço conformalmente flat, Superfícies de rotação, Superfícies helicoidais.

---

## Abstract

---

Lousa, Róbson. **Conformally flat spaces  $\mathbb{E}_3$  and  $\mathbb{F}_3$** . Goiânia, 2019. 72p. MSc. Dissertation. Instituto de Matemática e Estatística, Universidade Federal de Goiás.

This work is a bibliographical research based on papers by Armando V. Corro, Romildo da Silva Pina and Marcelo Souza (2011) [5] and Kelcio Oliveira Araujo, Ningwei Cui and Romildo da Silva Pina (2015) [3]. In these papers the surfaces of rotation in the conformal flat space  $\mathbb{E}_3$  and the helicoidal surfaces in the conformally flat space  $\mathbb{F}_3$ , respectively, are studied. We have shown that the theorems of Efimov and Shlenker, which generalizes the famous Hilbert Theorem, are not voved in space  $\mathbb{E}_3$ . Furthermore, we characterize most common helicoidal surfaces in  $\mathbb{F}_3$ .

### Keywords

Differential Geometry, Riemannan Geometry, Conformal flat space, Rotation surfaces, Helicoidal surfaces.

---

# Sumário

---

Lista de Figuras	14
Introdução	15
<b>1 VARIEDADES DIFERENCIÁVEIS</b>	<b>19</b>
1.1 Variedade Riemanniana	22
1.2 Função Colchete e Conexão	24
1.3 Curvaturas	30
1.4 Imersões Isométricas	35
1.5 Hipersuperfícies e Equações Diferenciais Ordinárias	38
<b>2 SUPERFÍCIES DE ROTAÇÃO NO ESPAÇO <math>\mathbb{E}_3</math></b>	<b>45</b>
2.1 Símbolos de Christoffel e curvatura seccional do espaço $\mathbb{E}_3$	46
2.2 Superfícies em um espaço conformemente flat	48
2.3 Superfícies de rotação em $\mathbb{E}_3$	52
<b>3 SUPERFÍCIES HELICOIDAIS MÍNIMAS NO ESPAÇO <math>\mathbb{F}_3</math></b>	<b>60</b>
3.1 Superfície helicoidal	61
3.2 Superfícies helicoidais mínimas em $\mathbb{F}_3$	62
Conclusão	69
Referências Bibliográficas	71

---

## Lista de Figuras

---

1.1	Variedades diferenciáveis.	21
1.2	Diferenciabilidade entre variedades diferenciáveis.	22
1.3	Curva geratriz $\alpha(u) = (u^2, 0, u)$ .	41
1.4	Rotação de $\alpha(u) = (u^2, 0, u)$ .	42
2.1	Hiperboloide de duas folhas $x_3^2 - 2x_1^2 - 2x_2^2 = 1$ .	56
2.2	Cone $x_3^2 = x_1^2 + x_2^2$ .	57
3.1	Curva $\gamma(u) = (u, 0, u^2)$ .	62
3.2	Translação helicoidal da curva $\gamma$ .	63
3.3	Hélice $\psi(v) = (\cos v, \sin v, 1 + v)$ .	64
3.4	Helicoide $\mathbf{x}(u, v) = (u \cos v, u \sin v, 1 + v)$ .	66

---

## INTRODUÇÃO

---

Os estudos quanto a dependência ou não do quinto axioma de Euclides em relação aos demais foram de fundamental importância para o surgimento de geometrias não-euclidianas [2, 7, 17] que, por sua vez, contribuíram para o avanço do estudo em Geometria. O quinto axioma de Euclides: "de um ponto fora de uma reta se pode traçar no plano uma única reta que prolongada indefinidamente não encontra a primeira"[7] por inúmeros anos foi conjecturado um resultado que poderia ser provado a partir dos demais, mas que não possuía uma demonstração trivial. Por séculos, os matemáticos tentaram demonstrá-lo, mas só com a criação de geometrias não-euclidianas que ficou provado que o quinto axioma de Euclides trata-se realmente de um postulado independente dos demais.

Entre os séculos XVI e XVII, o italiano Giovanni Gerolamo Saccheri fez alguns avanços em direção à geometria não-euclidiana hoje conhecida como Geometria Hiperbólica [2]. O espaço hiperbólico, elemento fundamental da geometria hiperbólica, só foi correta e completamente apresentado pela primeira vez por Riemann em 1854 [4]. Com tudo isso, foi apenas no século XIX que surgiu explicitamente uma geometria não euclidiana, por meio dos matemáticos Nikolai Lobachevski em 1829 e Bolyai em 1938 [2, 7].

Em 1837, o alemão Carl Friedrich Gauss publicou o seu famoso artigo *Investigações Gerais de Superfícies Curvas* onde introduz e aprimora o conceito de curvatura que já havia sido discutido por Euler em 1760 [2, 7, 17]. As ideias propostas por Gauss neste artigo foram posteriormente trabalhadas por seu aluno de doutorado, Bernhard Riemann em 1854, ano em que publicou seu trabalho intitulado *As hipóteses sobre as quais se baseiam os fundamentos da geometria*, onde definiu o conceito de métrica riemanniana que desenvolve um importante papel para geometrias não-euclidianas. Contudo, somente em 1913 que a formalização do conceito de variedade diferencial surgiu graças a H. Weyl [4].

O conceito dado formalmente por Weyl de variedade diferencial trouxe inúmeros avanços para a geometria. Historicamente, tal conceito demorou quase um século para surgir devido, provavelmente, a não compreensão da importância da diferenciabilidade da mudança de parâmetros na teoria de superfícies [7], introduzida e estudada por Gauss já no século XIX [4].

Com o desenvolvimento de geometrias não-euclidianas, como a Geometria Riemanniana, houve grande avanço no estudo de Geometria com importantes aplicações



físicas como a Teoria Geral da Relatividade, Teoria de Buracos Negros [2, 20]. Ao longo do desenvolvimento da Geometria Riemanniana, conceitos como curvatura, variedade diferenciável e tensor surgiram e com isso também resultados como a Equação da Curvatura de Ricci e Equação de Einstein. Acompanhando os estudos em torno deste dois últimos conceitos, Pina e Tenenblat [16] publicaram em 2009 o trabalho *On solutions of the Ricci curvature equation and the Einstein equation* onde consideram "uma classe de tensores simétricos não diagonais  $T$  sobre um espaço pseudo-euclidiano  $(R^n, g)$ , com  $n \geq 3$ , e [determinaram] todas as métricas conformes a  $g$  cujo tensor de Ricci é dado pelo tenso  $T$ ."<sup>1</sup> No mesmo artigo, os autores também consideram a mesma questão para a Equação de Einstein.

Fazendo uso dos trabalhos de Riemann, Elwin Christoffel também generaliza a teoria de superfícies de Gauss introduzindo conceitos como os símbolos de Christoffel e de tensor de curvatura.

Tal teoria trouxe grandes aplicações para teorias físicas. Em 1916, Einstein apresentou seu trabalho *A Teoria da Relatividade Especial e Geral* onde contava com conceitos da Geometria Riemanniana apresentada a ele por Marcel Grossman [2]. Outras aplicações podem ser vistas também na teoria de Buracos Negros [2] e em trabalhos como [20] e em suas 75 páginas de referências.

Os estudos de variedades diferenciáveis levaram a inúmeras descobertas. Em suma, o teorema de D. Hilbert garante que não existe superfícies completas com curvatura gaussiana constante negativa em  $\mathbb{R}^3$  [14]. O teorema de Hilbert pode ser enunciado conforme [6, p. 536]:

**Teorema 0.1 (Hilbert)** *Uma superfície geométrica completa  $S$  com curvatura negativa constante não pode ser imersa isometricamente em  $\mathbb{R}^3$ .*

*Prova.* Ver [6]. □

Em 1964, o Teorema de Hilbert foi generalizado por N. V. Efimov em seu trabalho *Generation of singularities on surfaces of negative curvature* [8]. O teorema de Efimov mostra que no teorema de Hilbert não é necessário que a curvatura seja constante, mas apenas que seja limitada por uma constante negativa. O teorema de Efimov pode ser enunciado conforme [14]:

**Teorema 0.2** *Nenhuma superfície  $S$  pode ser imersa no espaço euclidiano  $\mathbb{R}^3$ , tal que na métrica induzida  $S$  seja completa e tenha curvatura gaussiana  $K \leq \text{constante} < 0$ .*

---

<sup>1</sup>a certain class of nondiagonal symmetric tensors  $T$  on a pseudo-Euclidean space  $(R^n, g)$ ,  $n \geq 3$ , and we determine all metrics, conformal to  $g$ , whose Ricci tensor is the given tensor  $T$ .

*Prova.* Ver [8]. □

Mendes [14] traz uma demonstração de uma versão um pouco mais forte, atribuído à Tilla Klotz Milnor.

**Teorema 0.3 (Efimov)** *Se  $S$  é uma superfície completa com a métrica induzida e tendo curvatura gaussiana  $K_g \leq -\varepsilon < 0$ , com  $\varepsilon > 0$  constante, então  $S$  não admite  $C^2$ -imersão isométrica em  $\mathbb{R}^3$ .*

*Prova.* Ver [14]. □

Generalizando ainda mais o resultado de Hilbert, Schlenker, em seu trabalho *Surfaces à courbure extrinsèque négative dans l'espace hyperbolique* [18] de 2001, estende o teorema de Efimov para outros espaços:  $\mathbb{H}^3$ ,  $S^3$  e  $\mathbb{H}_1^3$ .

**Teorema 0.4 (Teoremas de Schlenker)** *Seja  $S$  uma superfície riemanniana completa com a métrica induzida e seja  $\varepsilon > 0$ .*

- A) *Se a curvatura gaussiana  $K_g \leq -1 - \varepsilon$  é tal que  $\frac{\|\nabla K_g\|}{|K_g|^{\frac{3}{2}}}$  é limitada, então  $S$  não admite  $C^3$ -imersão isométrica em  $\mathbb{H}^3$ ;*
- B) *Se a curvatura gaussiana  $K_g \leq -\varepsilon < 0$  é tal que  $\frac{\|\nabla K_g\|}{|K_g|^{\frac{3}{2}}}$  é limitada, então  $S$  não admite  $C^3$ -imersão isométrica em  $S^3$ ;*
- C) *Se a curvatura gaussiana  $K_g \in [-1 - \varepsilon, -\varepsilon]$  é tal que  $\|\nabla K_g\|$  é limitado, então  $S$  não admite  $C^3$ -imersão isométrica em  $\mathbb{H}_1^3$ .*

*Prova.* Ver [18]. □

Fazendo uso de um exemplo particular em [16], em 2011, Corro, Pina e Souza [5] estudaram as superfícies de rotação com curvatura extrínseca constante em espaços tridimensionais conformemente flat e introduziram o espaço tridimensional conformemente flat  $\mathbb{E}_3$ , onde  $F(x) = e^{-x_1^2 - x_2^2 - x_3^2}$  com  $x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$  é o fator de conformidade, mostrando a não validade dos teoremas de Efimov e Schlenker neste espaço.

No mesmo sentido, em 2016, Araújo, Cui e Pina [3] definiram o espaço tridimensional conformemente flat  $\mathbb{F}_3$  cujo fator de conformidade é  $F(x) = e^{-x_1^2 - x_2^2}$  com  $x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$  e estudaram as superfícies helicoidais mínimas neste espaço.

Este trabalho se dedica ao estudo dos artigos [5] e [3], observando os conceitos e resultados de Geometria Riemanniana necessários para o completo entendimento de seus conteúdos.

O Capítulo 1 é dedicado inicialmente a um apanhado histórico sobre o desenvolvimento do estudo em Geometria Diferencial e Geometria Riemanniana a partir de uma

breve revisão bibliográfica fazendo uso dos trabalhos [2, 6, 7, 17]. Em seguida, neste capítulo é discutido os principais conceitos e resultados necessários para a compreensão de todo o trabalho. Tal discussão se sustenta forte e principalmente nos trabalhos [6] e [7] de do Carmo.

No capítulo 2 é definido o espaço tridimensional conformemente flat  $\mathbb{E}_3$  que aparece no trabalho [5] como um caso particular do importante artigo [16] de Pina e Tenenblat. Neste trabalho tem-se importantes resultados a cerca das superfícies de rotação com curvatura extrínseca constante. O trabalho [5] foi estudado por Vieira (2014) resultando em sua dissertação [21] defendida em 2014, contudo este trabalho foi realizado independentemente.

Por fim, no capítulo 3 é definido o espaço tridimensional conformemente flat  $\mathbb{F}_3$  que aparece no trabalho [3] também como caso particular do artigo [16] de Pina e Tenenblat. Neste espaço são estudados as superfícies helicoidais, dando suas caracterizações.

---

# VARIETADES DIFERENCIÁVEIS

---

O conceito de superfícies regulares já era estudado pelo matemático alemão Carl Friedrich Gauss, com o passar dos anos e melhor compreensão dos resultados que seguem do cálculo diferencial aplicado à definição de Superfícies Regulares foi possível generalizar e tornar o conceito mais abstrato.

**Definição 1.1 (Superfície Regular)** *Um subconjunto  $S \subset \mathbb{R}^3$  é uma superfície regular quando, para todo ponto  $p \in S$ , existem uma vizinhança  $V$  de  $p$  em  $\mathbb{R}^3$  e uma aplicação diferenciável  $\mathbf{x} : U \rightarrow V \cap S$  de um aberto  $U \subset \mathbb{R}^2$  sobre  $V \cap S \subset \mathbb{R}^3$ , tais que:*

- $\mathbf{x}$  é um homeomorfismo;
- para todo  $q \in U$ , a diferencial  $d\mathbf{x}_q : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$  é injetiva.

*A aplicação diferenciável  $\mathbf{x}$  é dita parametrização de  $S$  em  $p$  [6, 7].*

Aplicando ferramentas do cálculo diferencial na definição de *superfície regular* pode-se provar o próximo teorema.

**Teorema 1.2 (Mudança de parâmetros)** *Seja  $p$  um ponto de uma superfície regular  $S$  e sejam  $\mathbf{x} : U \rightarrow S$  e  $\mathbf{y} : V \rightarrow S$ , onde  $U$  e  $V$  são abertos de  $\mathbb{R}^2$ , duas parametrizações de  $S$ , tais que  $p \in \mathbf{x}(U) \cap \mathbf{y}(V) = W \neq \emptyset$ . Então a mudança de coordenação  $h : \mathbf{x}^{-1} \circ \mathbf{y} : \mathbf{y}^{-1}(W) \rightarrow \mathbf{x}^{-1}(W)$  é um difeomorfismo.*

*Prova.* Ver [6, p. 82]. □

A compreensão deste teorema resultou numa maior abstratização – que era uma preocupação de Gauss e de muitos matemáticos do século XIX [17] – para a ideia de superfície, isso pois, segundo Lima [13]

A noção de superfície  $M^n \subset \mathbb{R}^n$  [de mesmo modo, superfícies regulares generalizadas para dimensões  $n > 3$ ] ainda que adequadas para muitos propósitos, possui contudo dois inconvenientes. O primeiro é de caráter estético: não se pode pensar nas superfícies em si mesma sem fazer referência ao Espaço Euclidiano que a contém. O segundo inconveniente é de ordem prática: existem na natureza objetos importantes, semelhantes

a superfícies, que não se apresentam contidos num Espaço Euclidiano. Tais são, por exemplo, os espaços projetivos [...] e, mais geralmente, as variedades Grassmanianas<sup>1</sup> [13, p. 102].

O primeiro inconveniente citado por Lima diz respeito à Geometria Intrínseca. Durante o desenvolvimento da teoria de Superfícies Regulares em [6], tem-se os conceitos que são restritos a essa geometria, contudo, inúmeros conceitos utiliza-se da Geometria Extrínseca. Já o segundo inconveniente é relacionado ao espaço ambiente onde as superfícies (mas não somente) estão inseridas. Após a compreensão do que representa o Teorema de Mudança de Parâmetros foi possível solucionar tais inconveniente. Para isso, foi preciso acrescentar este teorema como um axioma na definição de Variedade Diferenciável, fazendo com que os inconvenientes citados por Lima fossem solucionados e dando mais abstratização à Geometria, sendo possível assim definir o que vem a ser uma variedade diferenciável e os conceitos provenientes de tal definição.

**Definição 1.3 (Variedade Diferenciável)** *Uma variedade diferenciável de dimensão  $n$  é um conjunto  $M$  e uma família de aplicações biunívocas  $\mathbf{x}_\alpha : U_\alpha \rightarrow M$  de abertos  $U_\alpha$  de  $\mathbb{R}^n$  em  $M$  tais que*

- $\bigcup_{\alpha} \mathbf{x}_\alpha(U_\alpha) = M$ ;
- para todo par  $\alpha, \beta$ , com  $\mathbf{x}_\alpha(U_\alpha) \cap \mathbf{x}_\beta(U_\beta) = W \neq \emptyset$ , os conjuntos  $\mathbf{x}_\alpha^{-1}(W)$  e  $\mathbf{x}_\beta^{-1}(W)$  são abertos em  $\mathbb{R}^n$  e as aplicações  $\mathbf{x}_\beta^{-1} \circ \mathbf{x}_\alpha$  e  $\mathbf{x}_\alpha^{-1} \circ \mathbf{x}_\beta$  são diferenciáveis;
- A família  $\{(U_\alpha, \mathbf{x}_\alpha)\}$  é máxima relativamente às duas primeiras condições.

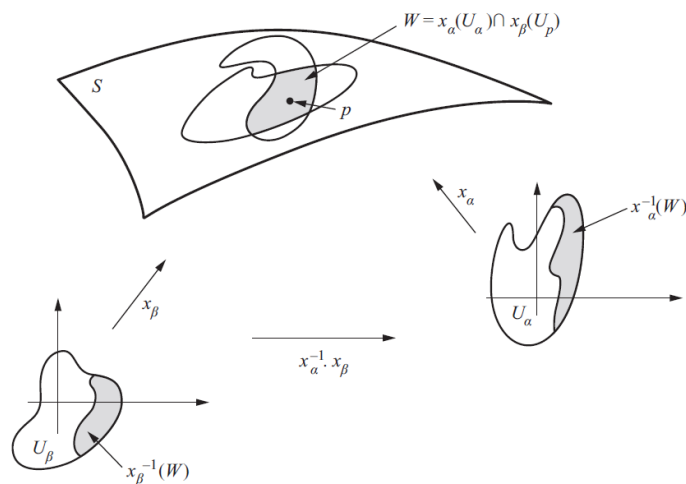
O par  $(U_\alpha, \mathbf{x}_\alpha)$  (ver figura 1.1) com  $p \in \mathbf{x}_\alpha(U_\alpha)$  é chamado uma parametrização (ou sistema de coordenadas) de  $M$  em  $p$ ;  $\mathbf{x}_\alpha(U_\alpha)$  é chamada uma vizinhança coordenada em  $p$ ; uma família  $\{(U_\alpha, \mathbf{x}_\alpha)\}$  que satisfaz as duas primeiras condições é chamada uma estrutura diferenciável em  $M$  [6, 7].

A segunda condição da definição de variedade diferenciável é justamente o fato da mudança de parâmetro ser difeomorfismo, o que fez com que a noção de superfície se tornasse mais abstrata e geral. Carmo [6] denomina variedades diferenciáveis de dimensão 2 por *superfícies abstratas*.

**Definição 1.4** *Sejam  $M$  e  $N$  variedades diferenciáveis de dimensão  $m$  e  $n$  respectivamente. Uma aplicação  $\psi : M \rightarrow N$  é diferenciável em  $p \in M$  se dada uma parametrização  $\mathbf{y} : V \rightarrow N$  de um aberto  $V \subset \mathbb{R}^n$  em  $\psi(p)$  existe uma parametrização  $\mathbf{x} : U \rightarrow M$  de um aberto  $U \subset \mathbb{R}^m$  em  $p$  tal que  $\psi(\mathbf{x}(U)) \subset \mathbf{y}(V)$  e a aplicação*

$$\mathbf{y}^{-1} \circ \psi \circ \mathbf{x} : U \rightarrow \mathbb{R}^m$$

<sup>1</sup>Para detalhes sobre espaços projetivos e variedades Grassmanianas, ver [6, 13].

**Figura 1.1:** Variedades diferenciáveis.

Fonte: ver [6, p. 513].

é diferenciável em  $\mathbf{x}^{-1}(p)$  (ver figura 1.2). Naturalmente,  $\psi$  é diferenciável em um aberto de  $M$  se é diferenciável em todos os pontos deste aberto.

**Exemplo 1:** Sejam  $M$  e  $N$  duas variedades diferenciáveis. Assim, podemos tomar  $\{(U_\alpha, \mathbf{x}_\alpha)\}$  e  $\{(V_\beta, \mathbf{y}_\beta)\}$  estruturas diferenciáveis de  $M$  e  $N$  respectivamente. O produto cartesiano  $M \times N$  também é uma variedade diferenciável. De fato, seja  $\mathbf{z}_{\alpha\beta}(p, q) = (\mathbf{x}_\alpha(p), \mathbf{y}_\beta(q))$  com  $p \in U_\alpha$  e  $q \in V_\beta$ , temos

$$\mathbf{z}_{\alpha\beta}^{-1} \circ \mathbf{z}_{\alpha'\beta'}(p, q) = \mathbf{z}_{\alpha\beta}^{-1}(\mathbf{x}'_\alpha(p), \mathbf{y}'_\beta(q)) = (\mathbf{x}_\alpha^{-1} \circ \mathbf{x}'_\alpha(p), \mathbf{y}_\beta^{-1} \circ \mathbf{y}'_\beta(q)).$$

Como  $\mathbf{x}_\alpha$  e  $\mathbf{y}_\beta$  são parametrizações de  $M$  e  $N$ , respectivamente, e as projeções  $\pi_1 : M \times N \rightarrow M$  e  $\pi_2 : M \times N \rightarrow N$  são aplicações diferenciáveis, as composições

$$\pi_1 \circ \mathbf{z}_{\alpha\beta}^{-1} \circ \mathbf{z}_{\alpha'\beta'}(p, q) = \mathbf{x}_\alpha^{-1} \circ \mathbf{x}'_\alpha(p)$$

e

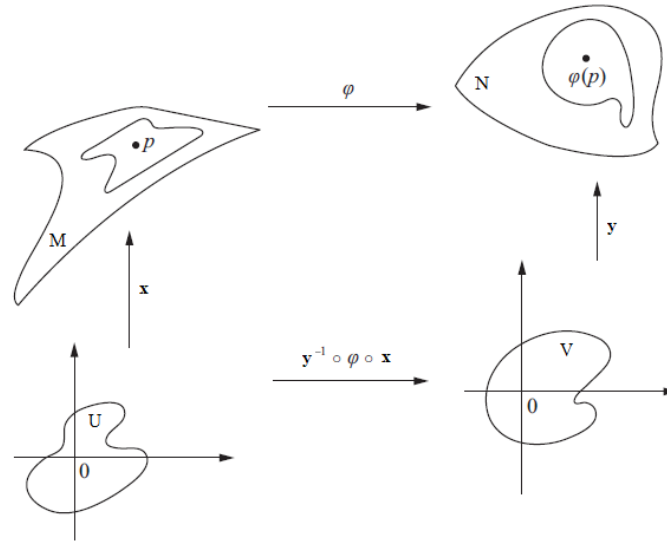
$$\pi_2 \circ \mathbf{z}_{\alpha\beta}^{-1} \circ \mathbf{z}_{\alpha'\beta'}(p, q) = \mathbf{y}_\beta^{-1} \circ \mathbf{y}'_\beta(q)$$

também o são. Logo, a composição  $\mathbf{z}_{\alpha\beta}^{-1} \circ \mathbf{z}_{\alpha'\beta'}$  é diferenciável e portanto,  $\mathbf{z}_{\alpha\beta}$  é uma parametrização de  $M \times N$ .

Além do mais, como  $\bigcup_\alpha U_\alpha = M$  e  $\bigcup_\beta V_\beta = N$ ,

$$\bigcup_{\alpha, \beta} (U_\alpha \times V_\beta) = M \times N.$$

Assim,  $M \times N$  munido de uma estrutura diferenciável  $\{(U_\alpha \times V_\beta, \mathbf{z}_{\alpha\beta})\}$  é uma variedade diferenciável chamada *variedade produto*.

**Figura 1.2:** Diferenciabilidade entre variedades diferenciáveis.

Fonte: ver [6, p. 86], com modificações do autor.

## 1.1 Variedade Riemanniana

As variedades diferenciáveis por si mesmas não apresentam como fazer medidas, para esse fim é preciso definir uma maneira de medir em uma variedade diferenciável, para isso, utilizamos as chamadas Métricas Riemannianas.

**Definição 1.5 (Métricas Riemannianas)** Uma Métrica Riemanniana em uma variedade diferenciável  $M$  é uma correspondência que associa a cada ponto  $p \in M$  um produto interno  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  no espaço tangente  $T_p M$ , tal que: se  $\mathbf{x} : U \rightarrow M$ , com  $U \subset \mathbb{R}^n$  aberto, é um sistema de coordenadas locais em torno de  $p$ , com  $\mathbf{x}(x) = q \in \mathbf{x}(U)$  e  $\frac{\partial}{\partial x_i}(q) = d\mathbf{x}(e_i)$ , então

$$\left\langle \frac{\partial}{\partial x_i}(q), \frac{\partial}{\partial x_j}(q) \right\rangle_q = g_{ij}(x),$$

com  $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ , é uma função diferenciável em  $U$ . Uma variedade diferenciável munida de uma Métrica Riemanniana é dita Variedade Riemanniana.

As Variedades Riemannianas foram definidas por Riemann em 1854 "de uma maneira completamente abstrata, definindo-as sem uso de qualquer mergulho ou imersão"<sup>2</sup>[4, p. 01]. Isto porque Riemann não possuía uma ideia muito precisa do conceito de variedade.

**Definição 1.6** Duas métricas  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  e  $\langle \langle \cdot, \cdot \rangle \rangle$  em uma variedade diferenciável  $M$  são ditas conformes quando existe uma função diferenciável  $\varphi : M \rightarrow \mathbb{R}$ , positiva, tal que para todo

<sup>2</sup>In a completely abstract way, making them free of any embedding or immersion.

ponto  $p \in M$  e todo  $u, v \in T_p M$  se tenha

$$\langle u, v \rangle_p = \varphi(p) \langle \langle u, v \rangle \rangle_p.$$

Em outras palavras, duas métricas são conformes quando a razão entre elas é dada por uma função diferenciável da variedade  $M$  em  $\mathbb{R}$ . A condição de tal função ser positiva se dá justamente pelo fato de ser a razão entre métricas.

**Teorema 1.7** *Uma variedade diferenciável  $M$  de Hausdorff e com base enumerável possui uma Métrica Riemanniana.*

*Prova.* Ver [7, p. 47] □

Este resultado traz uma importante relação entre as variedades diferenciáveis e as Variedades Riemannianas, em suma, garante que toda variedade diferenciável de Hausdorff e com base enumerável é uma Variedade Riemanniana. Na literatura, encontramos textos como [13], onde é adicionado à definição de variedade diferenciável as condições da variedade ser Hausdorff e possuir base enumerável por praticidade, já que "os teoremas mais importantes exigem estas hipóteses" [13, p. 108], o que garante a unicidade do limite de uma sucessão convergente e partição diferenciável da unidade, fatos de extrema importância para a demonstração deste teorema, por exemplo. Assim sendo, tais condições serão adotadas no que segue.

Na literatura, encontramos a Métrica Euclidiana usual representada por  $\delta_{ij}$ , assim toda métrica

$$g_{ij} = \frac{\delta_{ij}}{\varphi^2},$$

com  $\varphi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R} \setminus \{0\}$  uma função diferenciável, é conforme à métrica usual do Espaço Euclidiano  $\mathbb{R}^3$ .

**Definição 1.8 (Conformemente flat)** *Dado um espaço  $L$  de dimensão 3. Quando  $L$  é munido de uma métrica conforme à Métrica Euclidiana,  $L$  é chamado de espaço tridimensional conformemente flat.*

Pina e Tenenblat em [16, p. 65] mostraram que se  $\varphi$  for limitada, então a métrica  $g_{ij}$  é uma métrica completa, logo, o espaço  $\mathbb{R}^3$  munido da métrica  $g_{ij}$  é completo.

**Teorema 1.9** *Se  $(\mathbb{R}^n, \delta)$  é o Espaço Euclidiano e  $0 < \varphi < C$  para alguma constante  $C$ , então as métricas:*

- $g = \frac{1}{\varphi^2} \delta$  tal que

$$\text{Ric } g = T;$$



- $g = \frac{1}{\varphi^2} \delta$  tal que

$$\text{Ric } g - \frac{K}{2} g = T,$$

onde  $T = \sum_{i,j=1}^n f_{ij} dx_i dx_j$  é um tensor simétrico não-diagonal e a curvatura escalar da métrica  $g$  é  $K = (n-1)(2\varphi \Delta_g \varphi - n|\nabla_g \varphi|^2)$ , são completas em  $\mathbb{R}^n$ .

*Prova.* Ver [16]. □

Tomando para cada  $j = 1, 2, \dots, n$  a função  $U_j = -x_j^{2m_j}$ , onde  $m_j$  é um inteiro positivo, e o tensor simétrico não diagonal  $T = \sum_{i,j=1}^n f_{ij} dx_i dx_j$ , temos que, mesmo que  $T$  possa ter pontos singulares - dependendo dos inteiros  $m_j$  -, existe  $\bar{g} = \frac{1}{\varphi^2} g$  tal que

$$\text{Ric } \bar{g} = T,$$

globalmente definido sobre  $\mathbb{R}^n$  com

$$\varphi = e^{-\sum_j x_j^{2m_j}}.$$

Além do mais, do Teorema (1.9), a métrica  $\bar{g}$  é uma métrica completa em  $\mathbb{R}^n$ , com curvatura de Ricci negativa. Para mais detalhes, ver [16].

## 1.2 Função Colchete e Conexão

Agora que definimos as Variedades Riemannianas, é conveniente mostrarmos como derivar nessas variedades. Para isso, discutiremos inicialmente sobre *campos de vetores* em uma variedade diferenciável, por ser um conceito que induz naturalmente o conceito da função colchete [7, p. 27], elemento de grande importância para o que se segue.

De um modo geral, um campo de vetores em um subconjunto aberto  $U \subset \mathbb{R}^n$  é simplesmente uma aplicação  $X : U \rightarrow \mathbb{R}^n$  [13, p. 28]. Mas estamos interessados nos campos de vetores em uma variedade diferenciável. Para isso, utilizamos [7].

**Definição 1.10 (Campo de vetores)** *Um campo de vetores  $X$  em uma variedade diferenciável  $M$  é uma correspondência que cada ponto  $p \in M$  associa um vetor  $X(p) \in T_p M$ . Em termos de aplicações,  $X$  é uma aplicação de  $M$  no fibrado tangente  $TM$ . O campo  $X$  é diferenciável se a aplicação  $X : M \rightarrow TM$  é diferenciável.*

O fibrado tangente é o conjunto  $TM := \{(p, v) : p \in M, v \in T_p M\}$ . Como  $M$  e  $T_p M$  são variedade diferenciáveis, a variedade produto  $TM$  também o é (observe o Exemplo 1).

Considerando uma parametrização  $\mathbf{x} : U \rightarrow M$  definida num aberto  $U \subset \mathbb{R}^n$ , escrevemos

$$X(p) = \sum_{i=1}^n a_i(p) \frac{\partial}{\partial x_i},$$

onde cada  $a_i : U \rightarrow \mathbb{R}$  é uma função em  $U$  e  $\left\{ \frac{\partial}{\partial x_i} \right\}$  é a base associada à parametrização  $\mathbf{x}$ .

Tomando o campo de vetores  $X$  como uma aplicação  $X : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{F}$  definida do conjunto  $\mathcal{D}$  das funções em  $M$  que são diferenciáveis no conjunto  $\mathcal{F}$  das funções em  $M$ , temos que o campo de vetores  $X$  é dado por

$$(Xf)(p) = \sum_{i=1}^n a_i(p) \frac{\partial f}{\partial x_i}(p),$$

onde  $f$  indica a expressão de  $f \in \mathcal{D}$  na parametrização  $\mathbf{x}$ .

Quanto à diferenciabilidade, se  $\psi : M \rightarrow M$  é um difeomorfismo,  $v \in T_p M$  e  $f$  uma função diferenciável em uma vizinhança de  $\psi(p)$ , temos, tomando  $\alpha : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow M$  uma curva diferenciável com  $\alpha'(0) = v$ ,  $\alpha(0) = p$ ,

$$(d\psi(v)f)\psi(p) = \left. \frac{d}{dt}(f \circ \psi \circ \alpha) \right|_{t=0} = v(f \circ \psi)(p).$$

A curva  $\alpha$  é chamada de *curva integral* do campo  $X$ , com condição inicial  $p$ .

**Teorema 1.11** *Sejam  $M$  uma variedade diferenciável e  $X : M \rightarrow TM$  um campo vetorial diferenciável. Dado qualquer  $p \in M$ , existe uma curva integral  $\lambda : (-c, c) \rightarrow M$  do campo  $X$  com condição inicial  $\lambda(0) = p$ . Se  $\varphi : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow M$  for outra curva integral de  $X$  com  $\varphi(0) = p$ , então  $\lambda = \varphi$  num intervalo  $(-\delta, \delta) \subset (-c, c) \cap (-\varepsilon, \varepsilon)$ .*

*Prova.* Ver [13, p. 29]. □

O próximo teorema garante a existência de um único campo vetorial  $Z$  que desempenha um papel fundamental no desenvolvimento da Geometria Riemanniana.

**Teorema 1.12** *Sejam  $X$  e  $Y$  campos diferenciáveis de vetores em uma variedade diferenciável  $M$ . Então existe um único campo vetorial  $Z$  tal que, para toda função diferenciável  $f$  de  $M$ ,  $Zf = (XY - YX)f$ .*

*Prova.* Ver [7, p. 28]. □

O campo vetorial  $Z$  é chamado de o *colchete* (de Lie)  $[X, Y] = XY - YX$  de  $X$  e  $Y$ .  $Z$  é diferenciável por se tratar de operações que preservam a diferenciabilidade de campos diferenciáveis. Além do mais, a operação colchete possui as propriedades a seguir:

**Teorema 1.13** *Se  $X, Y$  e  $Z$  são campos diferenciáveis na variedade diferenciável  $M$ ,  $a$  e  $b$  são números reais,  $f$  e  $g$  funções diferenciáveis, então:*

- i)  $[X, Y] = -[Y, X]$  (*anticomutatividade*);
- ii)  $[aX + bY, Z] = a[X, Z] + b[Y, Z]$  (*linearidade*);
- iii)  $[[X, Y], Z] + [[Y, Z], X] + [[Z, X], Y] = 0$  (*identidade de Jacobi*);
- iv)  $[fX, gY] = fg[X, Y] + fX(g)Y - gY(f)X$ .

*Prova.*

- i) Pela definição da aplicação colchete,

$$[X, Y] = XY - YX = -(YX - XY) = -[Y, X];$$

- ii) Também pela definição,

$$\begin{aligned} [aX + bY, Z] &= (aX + bY)Z - Z(aX + bY) \\ &= aXZ + bYZ - ZaX - ZbY \\ &= a(XZ - ZX) + b(YZ - ZY) \\ &= a[X, Z] + b[Y, Z]; \end{aligned}$$

- iii) Agora, note que

$$\begin{aligned} [[X, Y], Z] &= [X, Y]Z - Z[X, Y] \\ &= (XY - YX)Z - Z(XY - YX) \\ &= XYZ - YXZ - ZXY + ZYX \end{aligned}$$

por outro lado,

$$\begin{aligned} [X, [Y, Z]] + [Y, [Z, X]] &= X[Y, Z] - [Y, Z]X + Y[Z, X] - [Z, X]Y \\ &= X(YZ - ZY) - (YZ - ZY)X + Y(ZX - XZ) - (ZX - XZ)Y \\ &= XYZ - XZY - YZX + ZYX + YZX - YXZ - ZXY + XZY \\ &= XYZ - YXZ - ZXY + ZYX \\ &= [[X, Y], Z] \end{aligned}$$

Assim, pelo item i),

$$[[X, Y], Z] = -([[Y, Z], X] + [[Z, X], Y])$$

donde segue a identidade de Jacobi:

$$[[X, Y], Z] + [[Y, Z], X] + [[Z, X], Y] = 0;$$

iv) Temos

$$\begin{aligned}
 [fX, gY] &= fX(gY) - gY(fX) \\
 &= fgXY + fX(g)Y - gfYX - gY(f)X \\
 &= fg(XY - YX) + fX(g)Y - gY(f)X \\
 &= fg[X, Y] + fX(g)Y - gY(f)X.
 \end{aligned}$$

□

O "colchete  $[X, Y]$  pode também ser interpretado como uma derivação de  $Y$  ao longo das 'trajetórias' de  $X$ " [6, p. 29].

Com a definição de função colchete, poderemos agora estudar um pouco sobre as conexões, que juntamente com a função colchete desempenharão um trabalho fundamental nos estudos da curvatura ao longo deste trabalho. A noção de *conexão* foi introduzida por Elie Cartan e utilizada largamente por Ehresmann em seus trabalhos [4], contudo, de maneira diferente da utilizada usualmente. A maneira com que o conceito de conexão é apresentado atualmente foi desenvolvida por Koszul em 1951 [4].

Sejam  $\mathcal{X}(M)$  o conjunto dos campos de vetores de classe  $C^\infty$  em  $M$  e  $\mathcal{D}(M)$  o anel das funções reais de classe  $C^\infty$  definidas em  $M$ . Com isso,

**Definição 1.14 (Conexão afim)** *Uma conexão afim,  $\nabla$ , em uma variedade diferenciável  $M$  é uma aplicação*

$$\nabla : \mathcal{X}(M) \times \mathcal{X}(M) \rightarrow \mathcal{X}(M)$$

que se indica por  $(X, Y) \xrightarrow{\nabla} \nabla_X Y$  e que satisfaz as seguintes propriedades:

- i)  $\nabla_{fX+gY} Z = f\nabla_X Z + g\nabla_Y Z$ ;
- ii)  $\nabla_X (Y + Z) = \nabla_X Y + \nabla_X Z$ ;
- iii)  $\nabla_X (fY) = f\nabla_X Y + X(f)Y$ ,

onde  $X, Y, Z \in \mathcal{X}(M)$  e  $f, g \in \mathcal{D}(M)$ .

A conexão  $\nabla_X Y$  pode ser vista como a derivada do campo  $Y$  em relação ao campo  $X$ . Em coordenadas locais, por exemplo, podemos interpretar a conexão como

$$\nabla_{\frac{\partial}{\partial x}} \frac{\partial}{\partial y}.$$

Agora, estamos interessados em trabalhar com um tipo particular de conexão afim devido algumas propriedades e sua unicidade, a conexão Levi-Civita. Para isso, devemos antes definir duas propriedades desta conexão.

**Definição 1.15** *Uma conexão afim  $\nabla$  em uma Variedade Riemanniana é compatível com a Métrica Riemanniana  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  da variedade quando*

$$X \langle Y, Z \rangle = \langle \nabla_X Y, Z \rangle + \langle Y, \nabla_X Z \rangle, \quad X, Y, Z \in \mathcal{X}(M).$$

A compatibilidade com a métrica da variedade indica o modo de *derivar* na métrica.

**Definição 1.16** *Uma conexão afim  $\nabla$  em uma variedade diferenciável  $M$  é dita simétrica quando*

$$\nabla_X Y - \nabla_Y X = [X, Y] \text{ para todo } X, Y \in \mathcal{X}(M).$$

**Definição 1.17** *Uma conexão  $\nabla$  que satisfaz as definições (1.15) e (1.16) é chamada de conexão Levi-Civita (ou Conexão Riemanniana).*

O teorema a seguir garante a existência e unicidade da conexão Levi-Civita em Variedades riemannianas. Ele é conhecido como *Teorema Fundamental da Geometria Riemanniana*, devido sua fundamental importância para a teoria de Geometria Riemanniana.

**Teorema 1.18 (Levi-Civita)** *Dada uma Variedade Riemanniana  $M$  a conexão Levi-Civita existe e é única, isto é, existe uma única conexão afim  $\nabla$  em  $M$  satisfazendo as condições:*

- i)  $\nabla$  é simétrica;
- ii)  $\nabla$  é compatível com a Métrica Riemanniana.

*Prova.* Seguindo a demonstração de [7, p. 61], vamos começar a mostrar a unicidade. Para isso, suponha a existência da conexão Levi-Civita  $\nabla$ . Como  $\nabla$  é compatível com a métrica  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  de  $M$ , temos

$$X \langle Y, Z \rangle = \langle \nabla_X Y, Z \rangle + \langle Y, \nabla_X Z \rangle; \quad (1-1)$$

$$Y \langle Z, X \rangle = \langle \nabla_Y Z, X \rangle + \langle Z, \nabla_Y X \rangle; \quad (1-2)$$

$$Z \langle X, Y \rangle = \langle \nabla_Z X, Y \rangle + \langle X, \nabla_Z Y \rangle. \quad (1-3)$$

Somando (1-1) e (1-2), subtraindo (1-3) e utilizando propriedades do produto interno, temos

$$\begin{aligned} & X \langle Y, Z \rangle + Y \langle Z, X \rangle - Z \langle X, Y \rangle \\ &= \langle \nabla_X Y, Z \rangle + \langle \nabla_X Z, Y \rangle + \langle \nabla_Y Z, X \rangle + \langle \nabla_Y X, Z \rangle - \langle \nabla_Z X, Y \rangle - \langle \nabla_Z Y, X \rangle \\ &= \langle \nabla_X Z - \nabla_Z X, Y \rangle + \langle \nabla_Y Z - \nabla_Z Y, X \rangle + \langle \nabla_X Y - \nabla_Y X, Z \rangle + 2 \langle Z, \nabla_Y X \rangle \end{aligned}$$

a segunda igualdade segue somando e subtraindo o termo  $\langle Z, \nabla_Y X \rangle$ .

Como  $\nabla$  é simétrica, temos

$$X \langle Y, Z \rangle + Y \langle Z, X \rangle - Z \langle X, Y \rangle$$

$$= \langle [X, Z], Y \rangle + \langle [Y, Z], X \rangle + \langle [X, Y], Z \rangle + 2 \langle Z, \nabla_Y X \rangle.$$

Logo

$$\begin{aligned} \langle Z, \nabla_Y X \rangle &= \frac{1}{2} \{ X \langle Y, Z \rangle + Y \langle Z, X \rangle - Z \langle X, Y \rangle - \\ &\quad - \langle [X, Z], Y \rangle - \langle [Y, Z], X \rangle - \langle [X, Y], Z \rangle \}. \end{aligned} \quad (1-4)$$

Assim, como (1-4) determina  $\nabla$  de modo único pela Métrica Riemanniana  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ , temos a unicidade de  $\nabla$ .

Definindo  $\nabla$  por (1-4), temos que ela está bem definida e que satisfaz as condições i) e ii) do teorema, pelo modo que foi construída. Isto prova a existência da conexão Levi-Civita e, por fim, demonstra o teorema.  $\square$

A equação (1-4) é conhecida como Fórmula de Koszul e possui grande importância para a Geometria Riemanniana, uma de suas muitas importâncias é o auxílio na dedução da fórmula dos símbolos de Christoffel em coordenadas.

A partir de agora, toda conexão adotada neste trabalho será a conexão Levi-Civita, portanto, não será mais necessário a especificação.

Tomando um sistema de coordenadas da Variedade Riemanniana  $M$ ,  $\mathbf{x} : U \rightarrow M$ , com  $U \subset \mathbb{R}^n$  aberto, e fazendo uso da conexão Levi-Civita, podemos escrever

$$\nabla_{X_i} X_j = \sum_k \Gamma_{ij}^k X_k$$

onde o campo de vetores  $X_i \in \mathcal{X}(M)$  é dado por  $X_i = \frac{\partial}{\partial x_i}$ .

**Definição 1.19** As funções  $\Gamma_{ij}^k$  definidas no aberto  $U$  são chamadas de coeficientes da conexão  $\nabla$  em  $U$  ou símbolos de Christoffel da conexão  $\nabla$ .

A definição (1.19) não exige que a conexão afim utilizada seja Levi-Civita, mas é utilizada aqui por relacionar o conceito de conexão afim com a Métrica Riemanniana e auxiliar a dedução dos símbolos de Christoffel tomando um sistema de coordenadas. Com isso, temos que  $[X_i, X_j] = \frac{\partial^2}{\partial x_j \partial x_i} - \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} = 0$  pelo teorema de Clairaut-Schwarz. Assim sendo, pela simetria da conexão Levi-Civita,  $\nabla_{X_i} X_j = \nabla_{X_j} X_i$  e logo  $\Gamma_{ij}^k = \Gamma_{ji}^k$ , isto significa que os símbolos de Christoffel são simétricos em relação aos índices inferiores, fato devido a simetria da conexão Levi-Civita.

Definindo  $X := X_j$ ,  $Y := X_i$ ,  $Z := X_k$  e  $g_{ij} := \langle X_i, X_j \rangle$  na Fórmula de Koszul (1-4), temos

$$\left\langle X_k, \sum_l \Gamma_{ij}^l X_l \right\rangle = \frac{1}{2} \{ X_i \langle X_j, X_k \rangle + X_j \langle X_i, X_k \rangle - X_k \langle X_i, X_j \rangle \}$$

Como o somatório está em relação a  $l$ ,  $\left\langle X_{,k}, \sum_l \Gamma_{ij}^l X_{,l} \right\rangle = \sum_l \Gamma_{ij}^l \langle X_{,l}, X_{,k} \rangle$ . Assim,

$$\sum_l \Gamma_{ij}^l g_{lk} = \frac{1}{2} \left\{ \frac{\partial}{\partial x_i} g_{jk} + \frac{\partial}{\partial x_j} g_{ik} - \frac{\partial}{\partial x_k} g_{ij} \right\}$$

A matriz  $g_{km}$  admite inversa denotada por  $g^{km}$ . Assim,

$$\begin{aligned} \sum_k g^{km} \sum_l \Gamma_{ij}^l g_{lk} &= \sum_k \frac{1}{2} \left\{ \frac{\partial}{\partial x_i} g_{jk} + \frac{\partial}{\partial x_j} g_{ik} - \frac{\partial}{\partial x_k} g_{ij} \right\} g^{km} \\ \Leftrightarrow \sum_{k,l} \Gamma_{ij}^l g_{lk} g^{km} &= \frac{1}{2} \sum_k \left\{ \frac{\partial}{\partial x_i} g_{jk} + \frac{\partial}{\partial x_j} g_{ik} - \frac{\partial}{\partial x_k} g_{ij} \right\} g^{km} \\ \Leftrightarrow \sum_l \Gamma_{ij}^l \left( \sum_k g_{lk} g^{km} \right) &= \frac{1}{2} \sum_k \left\{ \frac{\partial}{\partial x_i} g_{jk} + \frac{\partial}{\partial x_j} g_{ik} - \frac{\partial}{\partial x_k} g_{ij} \right\} g^{km} \\ \Leftrightarrow \sum_l \Gamma_{ij}^l \delta_{lm} &= \frac{1}{2} \sum_k \left\{ \frac{\partial}{\partial x_i} g_{jk} + \frac{\partial}{\partial x_j} g_{ik} - \frac{\partial}{\partial x_k} g_{ij} \right\} g^{km} \end{aligned}$$

Sempre que  $l \neq m$ , temos  $\delta_{lm} = 0$ , com isso, restam apenas os termos com  $l = m$ , onde  $\delta_{mm} = 1$ . Portanto, temos

$$\Gamma_{ij}^m = \frac{1}{2} \sum_k \left\{ \frac{\partial}{\partial x_i} g_{jk} + \frac{\partial}{\partial x_j} g_{ik} - \frac{\partial}{\partial x_k} g_{ij} \right\} g^{km}. \quad (1-5)$$

A equação (1-5) é a expressão clássica para os símbolos de Christoffel em um sistema de coordenadas.

## 1.3 Curvaturas

Nessa seção será apresentado algumas curvaturas que serão importantes durante as próximas seções, principalmente ao se tratar do espaço  $\mathbb{E}_3$  no capítulo 2.

**Definição 1.20** A curvatura (Gaussiana)  $R$  de uma Variedade Riemanniana  $M$  é uma correspondência que associa a cada par  $X, Y \in \mathcal{X}(M)$  uma aplicação  $R(X, Y) : \mathcal{X}(M) \rightarrow \mathcal{X}(M)$  dada por

$$R(X, Y)Z = \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_X \nabla_Y Z + \nabla_{[X, Y]} Z, \quad Z \in \mathcal{X}(M)$$

onde  $\nabla$  é a conexão Levi-Cevita de  $M$ .

**Teorema 1.21** A curvatura  $R$  de uma Variedade Riemanniana possui as seguintes propriedades:

(i)  $R$  é bilinear em  $\mathcal{X}(M) \times \mathcal{X}(M)$ , isto é,

$$R(fX_1 + gX_2, Y_1) = fR(X_1, Y_1) + gR(X_2, Y_1),$$

$$R(X_1, fY_1 + gY_2) = fR(X_1, Y_1) + gR(X_1, Y_2),$$

com  $f, g \in \mathcal{D}(M)$ ,  $X_1, X_2, Y_1, Y_2 \in \mathcal{X}(M)$ .

(ii) Para todo par  $X, Y \in \mathcal{X}(M)$ , o operador curvatura  $R(X, Y) : \mathcal{X}(M) \rightarrow \mathcal{X}$  é linear, isto é,

$$R(X, Y)(Z + W) = R(X, Y)Z + R(X, Y)W,$$

$$R(X, Y)fZ = fR(X, Y)Z,$$

com  $f \in \mathcal{D}$ ,  $Z, W \in \mathcal{X}(M)$ .

*Prova.*

Para mostrar (i), note que pelas propriedades da função colchete (Teorema (1.13))

$$[fX_1 + gX_2, Y_1] = f[X_1, Y_1] - Y_1(f)X_1 + g[X_2, Y_1] - Y_1(g)X_2,$$

assim, tomando  $Z \in \mathcal{X}(M)$  e pelas propriedade de conexão

$$\begin{aligned} \nabla_{[fX_1 + gX_2, Y_1]}Z &= f\nabla_{[X_1, Y_1]}Z - \nabla_{Y_1(f)X_1}Z + g\nabla_{[X_2, Y_1]}Z - \nabla_{Y_1(g)X_2}Z \\ &= f\nabla_{[X_1, Y_1]}Z - Y_1(f)\nabla_{X_1}Z + g\nabla_{[X_2, Y_1]}Z - Y_1(g)\nabla_{X_2}Z. \end{aligned}$$

Além do mais,

$$\begin{aligned} \nabla_{Y_1}\nabla_{fX_1 + gX_2}Z &= \nabla_{Y_1}(f\nabla_{X_1}Z + g\nabla_{X_2}Z) \\ &= \nabla_{Y_1}(f\nabla_{X_1}Z) + \nabla_{Y_1}(g\nabla_{X_2}Z) \\ &= f\nabla_{Y_1}\nabla_{X_1}Z + Y_1(f)\nabla_{X_1}Z + g\nabla_{Y_1}\nabla_{X_2}Z + Y_1(g)\nabla_{X_2}Z \end{aligned}$$

e

$$\nabla_{fX_1 + gX_2}\nabla_{Y_1}Z = f\nabla_{X_1}\nabla_{Y_1}Z + g\nabla_{X_2}\nabla_{Y_1}Z$$

$$\begin{aligned} R(fX_1 + gX_2, Y_1)Z &= \nabla_{Y_1}\nabla_{fX_1 + gX_2}Z - \nabla_{fX_1 + gX_2}\nabla_{Y_1}Z + \nabla_{[fX_1 + gX_2, Y_1]}Z \\ &= f\nabla_{Y_1}\nabla_{X_1}Z + Y_1(f)\nabla_{X_1}Z + g\nabla_{Y_1}\nabla_{X_2}Z + Y_1(g)\nabla_{X_2}Z - \\ &\quad - f\nabla_{X_1}\nabla_{Y_1}Z - g\nabla_{X_2}\nabla_{Y_1}Z + f\nabla_{[X_1, Y_1]}Z - Y_1(f)\nabla_{X_1}Z + \\ &\quad + g\nabla_{[X_2, Y_1]}Z - Y_1(g)\nabla_{X_2}Z \\ &= f(\nabla_{Y_1}\nabla_{X_1}Z - \nabla_{X_1}\nabla_{Y_1}Z + \nabla_{[X_1, Y_1]}Z) + \\ &\quad + g(\nabla_{Y_1}\nabla_{X_2}Z - \nabla_{X_2}\nabla_{Y_1}Z + \nabla_{[X_2, Y_1]}Z) \\ &= fR(X_1, X_2)Z + gR(X_2, Y_1)Z \end{aligned}$$



Analogamente para a segunda parte, seja  $Z \in \mathcal{X}$ , então

$$\begin{aligned}
R(X_1, fY_1 + gY_2)Z &= \nabla_{fY_1 + gY_2} \nabla_{X_1} Z - \nabla_{X_1} \nabla_{fY_1 + gY_2} Z + \nabla_{[X_1, fY_1 + gY_2]} Z \\
&= f \nabla_{Y_1} \nabla_{X_1} Z + g \nabla_{Y_2} \nabla_{X_1} Z - f \nabla_{X_1} \nabla_{Y_1} Z - X_1(f) \nabla_{Y_1} Z - \\
&\quad - g \nabla_{X_1} \nabla_{Y_2} Z - X_1(g) \nabla_{Y_2} Z + f \nabla_{[X_1, Y_1]} Z + X_1(f) \nabla_{Y_1} Z + \\
&\quad + g \nabla_{[X_1, Y_2]} Z + X_1(g) \nabla_{Y_2} Z \\
&= f(\nabla_{Y_1} \nabla_{X_1} Z - \nabla_{X_1} \nabla_{Y_1} Z + \nabla_{[X_1, Y_1]} Z) \\
&\quad + g(\nabla_{Y_2} \nabla_{X_1} Z - \nabla_{X_1} \nabla_{Y_2} Z + \nabla_{[X_1, Y_2]} Z) \\
&= fR(X_1, Y_1)Z + gR(X_1, Y_2)Z
\end{aligned}$$

Para mostrar a primeira parte do item (ii), temos

$$\begin{aligned}
R(X, Y)(Z + W) &= \nabla_Y \nabla_X (Z + W) - \nabla_X \nabla_Y (Z + W) + \nabla_{[X, Y]} (Z + W) \\
&= \nabla_Y (\nabla_X Z + \nabla_X W) - \nabla_X (\nabla_Y Z + \nabla_Y W) + \nabla_{[X, Y]} (Z + W) \\
&= \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_X \nabla_Y Z + \nabla_{[X, Y]} Z + \nabla_Y \nabla_X W - \nabla_X \nabla_Y W + \nabla_{[X, Y]} W \\
&= R(X, Y)Z + R(X, Y)W
\end{aligned}$$

Para a segunda parte,

$$\begin{aligned}
R(X, Y)fZ &= \nabla_Y \nabla_X (fZ) - \nabla_X \nabla_Y (fZ) + \nabla_{[X, Y]} (fZ) \\
&= \nabla_Y (f \nabla_X Z + X(f)Z) - \nabla_X (f \nabla_Y Z + Y(f)Z) + f \nabla_{[X, Y]} Z + [X, Y](f)Z \\
&= f \nabla_Y \nabla_X Z + Y(f) \nabla_X Z + X(f) \nabla_Y Z + YX(f)Z - f \nabla_X \nabla_Y Z - X(f) \nabla_Y Z - \\
&\quad - Y(f) \nabla_X Z - XY(f)Z + f \nabla_{[X, Y]} Z + XY(f)Z - YX(f)Z \\
&= f(\nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_X \nabla_Y Z + \nabla_{[X, Y]} Z) \\
&= fR(X, Y)Z
\end{aligned}$$

Assim o teorema está demonstrado.  $\square$

Por conveniência, denotamos  $\langle R(X, Y)Z, T \rangle = (X, Y, Z, T)$ .

**Teorema 1.22** *Seja  $(U, \mathbf{x})$  um sistema de coordenadas em torno de  $p \in M$  e  $\{X_i\}_{i=1}^n$  uma base de  $T_p M$ . Nesse sistema de coordenadas*

$$R(X_i, X_j)X_k = \sum_l R_{ijk}^l X_l$$

onde as componentes  $R_{ijk}^l$  de  $R$  em  $(U, \mathbf{x})$  são dados por

$$R_{ijk}^l = \sum_s \Gamma_{ik}^s \Gamma_{js}^l - \sum_s \Gamma_{jk}^s \Gamma_{is}^l + \frac{\partial}{\partial x_j} \Gamma_{ik}^l - \frac{\partial}{\partial x_i} \Gamma_{jk}^l. \quad (1-6)$$

*Prova.* Escrevendo

$$X = \sum_i u^i X_i, \quad Y = \sum_j v^j X_j, \quad Z = \sum_k w^k X_k,$$

pela linearidade de  $R$ , temos

$$R(X, Y)Z = \sum_{i,j,k,l} R^l_{ijk} u^i v^j w^k X_l$$

Agora, escrevemos

$$\begin{aligned} R(X_i, X_j)X_k &= \nabla_{X_j} \nabla_{X_i} X_k - \nabla_{X_i} \nabla_{X_j} X_k + \nabla_{[X_i, X_j]} X_k \\ &= \nabla_{X_j} \left( \sum_l \Gamma^l_{ik} X_l \right) - \nabla_{X_i} \left( \sum_l \Gamma^l_{jk} X_l \right), \end{aligned}$$

pela definição dos coeficientes de Christoffel e pelo fato de  $[X_i, X_j] = 0$ . Pelas propriedades de conexão,

$$\begin{aligned} R(X_i, X_j)X_k &= \sum_l \nabla_{X_j} (\Gamma^l_{ik} X_l) - \sum_l \nabla_{X_i} (\Gamma^l_{jk} X_l) \\ &= \sum_l (\Gamma^l_{ik} \nabla_{X_j} X_l + X_j(\Gamma^l_{ik}) X_l) - \sum_l (\Gamma^l_{jk} \nabla_{X_i} X_l + X_i(\Gamma^l_{jk}) X_l) \\ &= \sum_l (\Gamma^l_{ik} \nabla_{X_j} X_l + X_j(\Gamma^l_{ik}) X_l - \Gamma^l_{jk} \nabla_{X_i} X_l - X_i(\Gamma^l_{jk}) X_l) \\ &= \sum_l \left( \Gamma^l_{ik} \sum_s \Gamma^s_{jl} X_s + \frac{\partial}{\partial x_j} \Gamma^l_{ik} X_l - \Gamma^l_{jk} \sum_s \Gamma^s_{il} X_s - \frac{\partial}{\partial x_i} \Gamma^l_{jk} X_l \right) \\ &= \sum_l \left( \sum_s \Gamma^s_{ik} \Gamma^l_{js} + \frac{\partial}{\partial x_j} \Gamma^l_{ik} - \sum_s \Gamma^s_{jk} \Gamma^l_{is} - \frac{\partial}{\partial x_i} \Gamma^l_{jk} \right) X_l \end{aligned}$$

substituindo  $s$  por  $l$  e  $l$  por  $s$  quando necessário. Como

$$R(X_i, X_j)X_k = \sum_l R^l_{ijk} X_l,$$

temos

$$R^l_{ijk} = \sum_s \Gamma^s_{ik} \Gamma^l_{js} - \sum_s \Gamma^s_{jk} \Gamma^l_{is} + \frac{\partial}{\partial x_j} \Gamma^l_{ik} - \frac{\partial}{\partial x_i} \Gamma^l_{jk},$$

mostrando assim o teorema. □

**Teorema 1.23** *Seja  $\sigma \subset T_p M$  um subespaço bidimensional do espaço tangente  $T_p M$  e sejam  $x, y \in \sigma$  dois vetores linearmente independentes. Então*

$$K(x, y) = \frac{(x, y, x, y)}{|x \wedge y|^2}$$

não depende da escolha dos vetores  $x, y \in \sigma$ .

*Prova.* Ver [7, p. 105]. □

**Definição 1.24** Dado um ponto  $p \in M$  e um subespaço bidimensional  $\sigma \subset T_p M$  o número real  $K(x, y) = K(\sigma)$ , onde  $\{x, y\}$  é uma base qualquer de  $\sigma$ , é chamado curvatura seccional (ou Curvatura Riemanniana) de  $\sigma$  em  $p$ .

A curvatura seccional possui importantes interpretações geométricas. Um fato importante é que conhecendo  $K(\sigma)$ , para todo  $\sigma$ , determina-se completamente a curvatura  $R$  (ver lema 3.3, [7, p. 105]). Note que se  $x, y \in \sigma$  forem ortonormais,  $|x \wedge y| = 1$  e portanto,  $K(\sigma) = \langle x, y, x, y \rangle$ .

**Teorema 1.25** Sejam  $M$  uma Variedade Riemanniana e  $p$  um ponto de  $M$ . Defina uma aplicação trilinear  $R' : T_p M \times T_p M \times T_p M \rightarrow T_p M$  por

$$\langle R'(X, Y, W), Z \rangle = \langle X, W \rangle \langle Y, Z \rangle - \langle Y, W \rangle \langle X, Z \rangle,$$

para todo  $X, Y, W, Z \in T_p M$ . Então  $M$  tem curvatura seccional constante igual a  $K_0$  se, e somente se,  $R = K_0 R'$ , onde  $R$  é a curvatura de  $M$ .

*Prova.* Ver [7, p. 107]. □

**Corolário 1.26** Sejam  $M$  uma Variedade Riemanniana,  $p$  um ponto de  $M$  e  $\{e_1, \dots, e_n\}, n = \dim M$ , uma base ortonormal de  $T_p M$ . Escreva  $R_{ijkl} = \langle R(e_i, e_j)e_k, e_l \rangle$ ,  $i, j, k, l = 1, \dots, n$ . Então  $K(p, \sigma) = K_0$  para todo  $\sigma \subset T_p M$ , se, e somente se,

$$R_{ijkl} = K_0(\delta_{ik}\delta_{jl} - \delta_{il}\delta_{jk}),$$

onde

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{se } i = j \\ 0, & \text{se } i \neq j. \end{cases}$$

Em outras palavras,  $K(p, \sigma) = K_0$  para todo  $\sigma \subset T_p M$  se, e somente se,  $R_{ijij} = -R_{ijji} = K_0$  para todo  $i \neq j$ , é  $R_{ijkl} = 0$  nos demais casos.

*Prova.* Basta tomar  $R' = R_{ijkl}$  e aplicar o teorema (1.25). □

## 1.4 Imersões Isométricas

Continuando nosso estudo, precisaremos definir o conceito de imersão e imersão isométrica.

**Definição 1.27 (Imersão)** *Sejam  $(M, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  e  $(N, \langle \langle \cdot, \cdot \rangle \rangle)$  Variedades Riemannianas. Uma aplicação diferenciável  $\psi : M \rightarrow N$  é uma imersão quando  $d\psi_p : T_p M \rightarrow T_{\psi(p)} N$  é injetiva<sup>3</sup> para todo  $p \in M$ . Se além disso,*

$$\langle v, w \rangle_p = \langle \langle d\psi_p(v), d\psi_p(w) \rangle \rangle_{\psi(p)}, \quad v, w \in T_p M,$$

*dizemos que  $\psi$  é uma imersão isométrica.*

Em suma, uma imersão isométrica é uma imersão que preserva a métrica.

Para o próximo teorema, usaremos a seguinte notação:  $\mathcal{X}(U)^\perp$  é o conjunto dos campos diferenciáveis em  $U$  de vetores normais a  $f(U) \approx U$ , onde  $f : M \rightarrow N$  é uma imersão e  $U \subset M$  é uma vizinhança de  $p \in M$ ;  $\bar{\nabla}$  é a conexão Levi-Civita em  $N$ ; e  $\nabla$  é a conexão Levi-Civita em  $M$ .

**Teorema 1.28** *Se  $X, Y \in \mathcal{X}(U)$ , a aplicação  $B : \mathcal{X}(U) \times \mathcal{X}(U) \rightarrow \mathcal{X}(U)^\perp$  dada por*

$$B(X, Y) = \bar{\nabla}_X \bar{Y} - \nabla_X Y$$

*é bilinear e simétrica.*

*Prova.* Pelas propriedades de conexão (1.14), temos que  $B$  é aditiva em  $X$  e  $Y$ , ou seja,

$$B(X_1 + X_2, Y) = B(X_1, Y) + B(X_2, Y)$$

e

$$B(X, Y_1 + Y_2) = B(X, Y_1) + B(X, Y_2)$$

para  $X_1, X_2, Y_1, Y_2 \in \mathcal{X}$ . Além do mais,  $B(fX, Y) = fB(X, Y)$ ,  $f \in \mathcal{D}(U)$ .

Seja  $\bar{f}$  uma extensão de  $f$  a  $\bar{U}$ , assim

$$\begin{aligned} B(X, fY) &= \bar{\nabla}_X(\bar{f}\bar{Y}) - \nabla_X(fY) \\ &= \bar{f}\bar{\nabla}_X\bar{Y} - f\nabla_X Y + \bar{X}(\bar{f})\bar{Y} - X(f)Y \end{aligned}$$

Como em  $M$ ,  $f = \bar{f}$  e  $\bar{X}(\bar{f}) = X(f)$ , temos que as duas últimas parcelas se anulam e portanto,

$$B(X, fY) = fB(X, Y),$$

<sup>3</sup>Note que para isto ocorrer é necessário que  $\dim M \leq \dim N$ .

isto é,  $B$  é bilinear.

Pela simetria da conexão Levi-Civita,

$$B(X, Y) = \bar{\nabla}_{\bar{X}}\bar{Y} - \nabla_X Y = \bar{\nabla}_{\bar{Y}}\bar{X} + [\bar{X}, \bar{Y}] - \nabla_Y X - [X, Y].$$

Como em  $M$ ,  $[\bar{X}, \bar{Y}] = [X, Y]$ , concluímos que  $B$  é simétrica, ou seja,

$$B(X, Y) = B(Y, X).$$

□

Seja  $p \in M$  e  $\eta \in (T_p M)^\perp$ . Pelo teorema anterior, a aplicação  $H_\eta : T_p M \times T_p M \rightarrow \mathbb{R}$  dada por

$$H_\eta(x, y) = \langle B(x, y), \eta \rangle, \quad x, y \in T_p M$$

é uma forma bilinear simétrica.

**Definição 1.29 (Segunda forma fundamental)** A forma quadrática  $II_\eta$  definida em  $T_p M$  por

$$II_\eta(x) = H_\eta(x, x)$$

é chamada a segunda forma fundamental de  $f$  em  $p$  segundo o vetor normal  $\eta$ .

Podemos associar à aplicação bilinear  $H_\eta$  uma aplicação auto-adjunta  $S_\eta : T_p M \rightarrow T_p M$  por

$$\langle S_\eta(x), y \rangle = H_\eta(x, y) = \langle B(x, y), \eta \rangle$$

de forma que

**Teorema 1.30** Seja  $p \in M$ ,  $x \in T_p M$  e  $\eta \in (T_p M)^\perp$ . Seja  $N$  uma extensão local de  $\eta$  normal a  $M$ . Então

$$S_\eta(x) = -(\bar{\nabla}_x N)^T.$$

*Prova.* Seja  $y \in T_p M$  e  $X, Y$  extensões locais de  $x, y$ , respectivamente, e tangente a  $M$ . Então  $\langle N, Y \rangle = 0$ , e portanto

$$\begin{aligned} \langle S_\eta(x), y \rangle &= \langle B(X, Y), N \rangle_p \\ &= \langle \bar{\nabla}_X Y - \nabla_X Y, N \rangle_p \\ &= \langle \bar{\nabla}_X Y, N \rangle_p \\ &= -\langle Y, \bar{\nabla}_X N \rangle_p \\ &= \langle -\bar{\nabla}_x N, y \rangle \\ &= \left\langle -(\bar{\nabla}_x N)^T - (\bar{\nabla}_x N)^\perp, y \right\rangle, \end{aligned}$$

para todo  $y \in T_p M$ . Assim, temos

$$S_\eta(x) = -(\bar{\nabla}_x N)^T.$$

□

Para enunciar um importante resultado a cerca da Equação de Gauss, sejam  $M$  e  $\bar{M}$  variedades diferenciáveis, sejam também  $x, y \in T_p M \subset T_p \bar{M}$  linearmente independentes,  $K(x, y)$  e  $\bar{K}(x, y)$  as curvaturas seccionais de  $M$  e  $\bar{M}$  no plano gerado por  $x$  e  $y$ , respectivamente.

**Teorema 1.31 (Gauss)** *Sejam  $p \in M$  e  $x, y$  vetores ortonormais de  $T_p M$ . Então*

$$K(x, y) - \bar{K}(x, y) = \langle B(x, x), B(y, y) \rangle - |B(x, y)|^2. \quad (1-7)$$

*Prova.* Sejam  $X, Y$  extensões locais ortogonais de  $x, y$ , respectivamente, e tangentes a  $M$  e sejam também  $\bar{X}, \bar{Y}$  as extensões locais de  $X, Y$  a  $\bar{M}$ . Além disso, sejam  $E_1, \dots, E_m$ ,  $m = \dim \bar{M} - \dim M$ , campos locais ortogonais e normais a  $M$ , assim,

$$B(X, Y) = \sum_{i=1}^m H_{E_i}(X, Y) E_i.$$

Em  $p$ ,

$$\begin{aligned} \bar{\nabla}_Y \bar{\nabla}_X \bar{X} &= \bar{\nabla}_Y \left( \sum_{i=1}^m H_{E_i}(X, Y) E_i + \nabla_X X \right) \\ &= \sum_{i=1}^m \left\{ H_{E_i}(X, X) \bar{\nabla}_Y E_i + \bar{Y} H_{E_i}(X, X) E_i \right\} + \bar{\nabla}_Y \nabla_X X. \end{aligned}$$

Logo, em  $p$ ,

$$\langle \bar{\nabla}_Y \bar{\nabla}_X \bar{X}, Y \rangle = - \sum_i^m H_{E_i}(X, X) H_{E_i}(Y, Y) + \langle \nabla_Y \nabla_X X, Y \rangle. \quad (1-8)$$

Analogamente, em  $p$ ,

$$\begin{aligned} \bar{\nabla}_X \bar{\nabla}_Y \bar{X} &= \bar{\nabla}_X \left( \sum_{i=1}^m H_{E_i}(X, Y) E_i + \nabla_Y X \right) \\ &= \sum_{i=1}^m \left\{ H_{E_i}(X, Y) \bar{\nabla}_X E_i + \bar{X} H_{E_i}(X, Y) E_i \right\} + \bar{\nabla}_X \nabla_Y X. \end{aligned}$$

Portanto,

$$\langle \bar{\nabla}_X \bar{\nabla}_Y \bar{X}, Y \rangle = - \sum_{i=1}^m H_{E_i}(X, X) H_{E_i}(X, Y) + \langle \nabla_X \nabla_Y X, Y \rangle. \quad (1-9)$$

Por definição,

$$\begin{aligned} K(x, y) - \bar{K}(x, y) &= \langle \nabla_Y \nabla_X X - \nabla_X \nabla_Y X + \nabla_{[X, Y]} X, Y \rangle(p) - \\ &\quad - \langle \bar{\nabla}_{\bar{Y}} \bar{\nabla}_{\bar{X}} \bar{X} - \bar{\nabla}_{\bar{X}} \bar{\nabla}_{\bar{Y}} \bar{X} + \bar{\nabla}_{[\bar{X}, \bar{Y}]} \bar{X}, \bar{Y} \rangle(p) \\ &= \langle \nabla_Y \nabla_X X, Y \rangle(p) - \langle \nabla_X \nabla_Y X, Y \rangle(p) - \langle \bar{\nabla}_{\bar{Y}} \bar{\nabla}_{\bar{X}} \bar{X}, \bar{Y} \rangle(p) + \\ &\quad + \langle \bar{\nabla}_{\bar{X}} \bar{\nabla}_{\bar{Y}} \bar{X}, \bar{Y} \rangle(p) + \langle \nabla_{[X, Y]} X - \bar{\nabla}_{[\bar{X}, \bar{Y}]} \bar{X}, Y \rangle(p). \end{aligned}$$

Pela definição da conexão Levi-Civita relativa à métrica induzida de  $M$ , o último termo se anula, já que

$$\langle \nabla_{[X, Y]} X - \bar{\nabla}_{[\bar{X}, \bar{Y}]} \bar{X}, Y \rangle(p) = - \left\langle \left( \bar{\nabla}_{[\bar{X}, \bar{Y}]} \bar{X} \right)^N, Y \right\rangle(p) = 0.$$

Logo, pelas equações (1-8) e (1-9),

$$\begin{aligned} K(x, y) - \bar{K}(x, y) &= \langle \nabla_Y \nabla_X X, Y \rangle(p) - \langle \nabla_X \nabla_Y X, Y \rangle(p) + \sum_i^m H_{E_i}(X, X) H_{E_i}(Y, Y) - \\ &\quad - \langle \nabla_Y \nabla_X X, Y \rangle - \sum_{i=1}^m H_{E_i}(X, X) H_{E_i}(X, Y) + \langle \nabla_X \nabla_Y X, Y \rangle \\ &= \langle B(x, x), B(y, y) \rangle - |B(x, y)|^2 \end{aligned}$$

como queríamos demonstrar. □

A equação (1-7) é conhecida como Equação de Gauss. Veremos que quando estudamos as hipersuperfícies e principalmente as hipersuperfícies de dimensão 2, a Equação de Gauss se torna mais simples.

## 1.5 Hipersuperfícies e Equações Diferenciais Ordinárias

Um caso particular de variedades diferenciáveis/Riemannianas, são as *hipersuperfícies*. São elas o principal objeto de estudo deste trabalho, mais particularmente ainda, as hipersuperfícies de dimensão 2.

**Definição 1.32 (Hipersuperfície)** *Seja  $M \subset \mathbb{R}^m$  uma variedade diferenciável de dimensão  $n < m$ , o número  $m - n$  é chamado de co-dimensão de  $M$ . Quando a variedade  $M$  tem co-dimensão  $m - n = 1$ ,  $M$  é denominada hipersuperfície (ou hiperfície [13, p. 34]).*

Note que as superfícies regulares e superfícies abstratas definidas em [6] são exemplos de hipersuperfícies.

Seja  $M$  uma hipersuperfície, para cada ponto  $p \in M$  podemos definir uma forma quadrática  $I_p$ , chamada de primeira forma fundamental de  $M$  em  $p$ , definida no plano

tangente  $T_pM$  por  $I_p(v) = \langle v, v \rangle$ , com  $v \in T_pM$ . Se  $\mathbf{x} : U \rightarrow \mathbb{R}^3$  dado por  $\mathbf{x}(u, v)$  com  $u, v \in U \subset \mathbb{R}^2$  é uma parametrização da hipersuperfície  $M^2 \subset \mathbb{R}^3$ , para cada ponto  $p \in M$  os vetores  $\mathbf{x}_u$  e  $\mathbf{x}_v$  formam uma base para  $T_pM$  e assim todo vetor  $w \in T_pM$  pode ser escrito univocamente como  $w = a\mathbf{x}_u + b\mathbf{x}_v$  e a primeira forma fundamental de  $M$  em  $p$  é dada por,

$$I_p(w) = \langle w, w \rangle = a^2 \langle \mathbf{x}_u, \mathbf{x}_u \rangle + 2ab \langle \mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v \rangle + b^2 \langle \mathbf{x}_v, \mathbf{x}_v \rangle,$$

pelas propriedades de produto interno. Os números  $E = \langle \mathbf{x}_u, \mathbf{x}_u \rangle$ ,  $F = \langle \mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v \rangle$  e  $G = \langle \mathbf{x}_v, \mathbf{x}_v \rangle$  são chamados os coeficientes da primeira forma fundamental<sup>4</sup>.

Sejam  $p$  um ponto da hipersuperfície  $M$  e  $\eta \in (T_pM)^\perp$ , com  $|\eta| = 1$ . Como  $S_\eta : T_pM \rightarrow T_pM$  é simétrica, existe uma base ortonormal de autovetores  $\{e_1, \dots, e_n\}$  de  $T_pM$  com autovalores  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ , ou seja,  $S_\eta(e_i) = \lambda_i e_i$ ,  $1 \leq i \leq n$ . Ao considerarmos uma imersão  $f : M \rightarrow \bar{M}$ , com  $f(M) = \bar{M}$ , se  $M$  e  $\bar{M}$  são orientáveis e orientada, o vetor  $\eta$  fica univocamente determinado com uma base orientada  $\{e_1, \dots, e_n\}$  de  $M$  e uma base orientada  $\{e_1, \dots, e_n, \eta\}$  de  $\bar{M}$ . Nestas condições,  $e_i$ 's são as chamadas *direções principais* e os  $\lambda_i$ 's são os denominados *curvaturas principais* de  $f$ .

**Definição 1.33** *O determinante  $K_E = \det(S_\eta) = \lambda_1 \cdot \dots \cdot \lambda_n$  é denominada de curvatura de Gauss-Kronecker (ou curvatura extrínseca, ver [10]) de  $f$ . A média do traço  $H = \frac{1}{n} \text{Tr}(S_\eta) = \frac{1}{n}(\lambda_1 + \dots + \lambda_n)$  é denominada de curvatura média de  $f$ .*

Segundo Berger [4], antes de 1827, Gauss, em seus estudos das superfícies em  $\mathbb{R}^3$ , mostrou que a curvatura Gaussiana (extrínseca) definida em uma superfície em  $\mathbb{R}^3$  como o produto das curvaturas principais é elemento da geometria intrínseca, demonstrando, assim, o seu famoso Teorema Egregium<sup>5</sup> que pode ser enunciado segundo [6] da seguinte maneira.

**Teorema 1.34 (Egregium de Gauss)** *A curvatura Gaussiana (extrínseca) de uma superfície (regular) é invariante por isometrias locais.*

*Prova.* Ver [6, p. 280]. □

A demonstração deste teorema é realizado a partir da dedução da fórmula de Gauss (em superfícies regulares) a qual consiste em escrever a curvatura Gaussiana em função dos símbolos de Christoffel e suas derivadas. Assim, como os símbolos de Christoffel são elementos da geometria intrínseca, suas derivadas também o são e portando a curvatura Gaussiana também.

<sup>4</sup>Para mais detalhes sobre a construção da primeira forma fundamental em uma hipersuperfície em  $\mathbb{R}^3$ , ver [6, p. 109].

<sup>5</sup>Teorema notável.



Em suma, este resultado garante que embora a curvatura Gaussiana ter sido definida como elemento da geometria extrínseca, ela é, de fato, um elemento da geometria intrínseca.

Quanto à curvatura média, temos uma classe importante de superfícies: as superfícies mínimas.

**Definição 1.35** *Uma superfície  $M$  é dita superfície mínima quando possui curvatura média identicamente nula, isto é,  $H \equiv 0$ .*

Quanto a equação de Gauss (1-7), temos que no caso de hipersuperfícies ela é dado por

$$K(e_i, e_j) - \bar{K}(e_i, e_j) = \lambda_i \lambda_j$$

Para mostrar isso, sejam  $p \in M$  e  $\eta \in (T_p M)^\perp$ ,  $|\eta| = 1$ . Seja também  $\{e_1, \dots, e_n\}$  uma base ortonormal de  $T_p M$  para a qual  $S_\eta = S$  é diagonal, ou seja,  $S(e_i) = \lambda_i e_i$ ,  $i = 1, \dots, n$ , onde  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  são os auto-valores de  $S$ . Assim,  $H(e_i, e_i) = \lambda_i$  e  $H(e_i, e_j) = 0$  quando  $i \neq j$ .

Considerando uma hipersuperfície  $S \subset \mathbb{R}^3$  de dimensão 2, de parametrização  $\mathbf{x} : U \rightarrow S$ , definida num aberto  $U \subset \mathbb{R}^2$ , para cada ponto  $q \in \mathbf{x}(U)$  podemos definir a aplicação normal de Gauss  $N : S \rightarrow S^2$ , onde  $S^2$  é a esfera unitária em  $\mathbb{R}^3$ , dada por

$$N(q) = \frac{\mathbf{x}_{,u} \wedge \mathbf{x}_{,v}}{|\mathbf{x}_{,u} \wedge \mathbf{x}_{,v}|}(q).$$

Neste contexto, a segunda forma fundamental de  $S$  em  $p$  é definida como

$$II_p(v) = -\langle dN_p(v), v \rangle$$

Na base  $\{\mathbf{x}_{,u}, \mathbf{x}_{,v}\}$  de  $T_p S$

$$II_p(\alpha') = e(u')^2 + 2fu'v' + g(v')^2,$$

onde

$$e = \langle N, \mathbf{x}_{,uu} \rangle, \quad f = \langle N, \mathbf{x}_{,uv} \rangle = \langle N, \mathbf{x}_{,vu} \rangle, \quad g = \langle N, \mathbf{x}_{,vv} \rangle$$

são os chamados coeficientes da segunda forma fundamental.

Para cada  $p$  existe uma base ortonormal  $\{e_1, e_2\}$  de  $T_p S$  tal que  $dN_p(e_1) = \lambda_1 e_1$ ,  $dN_p(e_2) = \lambda_2 e_2$ , onde  $\lambda_1$  e  $\lambda_2$  são as curvaturas principais.

Carmo [6], ao definir  $dN_p$ , traz sinais trocados devido a orientação adotada. Neste trabalho é adotada a orientação canônica, segundo Fernández e Mira [11], que é

adotada por Corro, Pina e Souza [5]. Com isso, temos  $K_E = \lambda_1 \lambda_2$  e  $H = -\frac{1}{2}(\lambda_1 + \lambda_2)$  as curvaturas extrínseca e média. Em termos dos coeficientes das primeira e segunda formas fundamentais, temos

$$K_E = \frac{eg - f^2}{EG - F^2} \quad \text{e} \quad H = -\frac{1}{2} \frac{eG - 2fF + gE}{EG - F^2}.$$

Para a demonstração deste resultado, ver [6, pp. 183-184].

No caso da hipersuperfícies de dimensão 2, temos que sua curvatura seccional coincide com sua curvatura (Gaussiana)  $K_g$ , assim, a equação de Gauss (1-7) se simplifica a

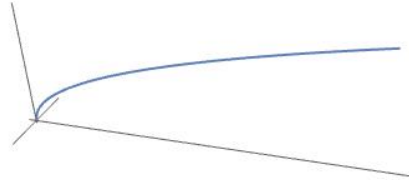
$$K_g - K_{sec} = K_E. \quad (1-10)$$

Note que o espaço ambiente  $\mathbb{R}^3$  possui curvatura extrínseca nula, assim, novamente  $K_g = K_{sec}$ .

Como exemplo, vamos calcular as principais curvaturas das superfícies de rotação.

Seja  $\alpha(u) = (\psi(u), 0, u)$  uma curva em  $\mathbb{R}^3$ , com  $\psi(u) > 0, \forall u \in \mathbb{R}$  de classe  $C^\infty$ . Em suma, a função  $\psi$  deve ser não nula, contudo, como é necessário a continuidade de  $\psi$ , ela não pode mudar de sinal, por isso, tomamos  $\psi(u) > 0$ . A curva  $\alpha$  é chamada de curva geratriz. Veja na figura (1.3) o exemplo da curva geratriz  $\alpha = (x^2, 0, x)$ .

**Figura 1.3:** Curva geratriz  $\alpha(u) = (u^2, 0, u)$ .



Fonte: Wolfram Mathematica<sup>©</sup>.

Fazendo a rotação da curva geratriz  $\alpha$  em torno do eixo  $x_3$ , temos

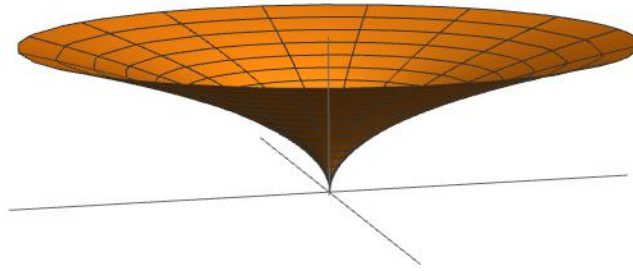
$$\begin{aligned} \mathbf{x}(u, v) &= \begin{pmatrix} \cos(v) & -\text{sen}(v) & 0 \\ \text{sen}(v) & \cos(v) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi(u) \\ 0 \\ u \end{pmatrix} \\ &= (\psi(u) \cos(v), \psi(u) \text{sen}(v), u), \end{aligned}$$

$\mathbf{x}(u, v)$  é a parametrização de Hipersuperfície Riemanniana de rotação, com a

Métrica Euclidiana, veja figura (1.4). Assim, temos

$$\begin{aligned}\mathbf{x}_{,u}(u, v) &= (\Psi'(u) \cos(v), \Psi'(u) \sin(v), 1), \\ \mathbf{x}_{,v}(u, v) &= (-\Psi(u) \sin(v), \Psi(u) \cos(v), 0), \\ \mathbf{x}_{,uu}(u, v) &= (\Psi''(u) \cos(v), \Psi''(u) \sin(v), 0), \\ \mathbf{x}_{,uv}(u, v) &= (-\Psi'(u) \sin(v), \Psi'(u) \cos(v), 0), \\ \mathbf{x}_{,vv}(u, v) &= (-\Psi(u) \cos(v), -\Psi(u) \sin(v), 0).\end{aligned}$$

**Figura 1.4:** Rotação de  $\alpha(u) = (u^2, 0, u)$ .



Fonte: Wolfram Mathematica<sup>©</sup>.

Além disso,

$$\mathbf{x}_{,u} \wedge \mathbf{x}_{,v} = \begin{pmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \Psi'(u) \cos(v) & \Psi'(u) \sin(v) & 1 \\ -\Psi(u) \sin(v) & \Psi(u) \cos(v) & 0 \end{pmatrix} = -\Psi(u) (\cos(v), \sin(v), -\Psi'(u))$$

e

$$|\mathbf{x}_{,u} \wedge \mathbf{x}_{,v}| = \Psi(u) \sqrt{1 + (\Psi'(u))^2}.$$

Logo a aplicação normal de Gauss é dada por:

$$N(u, v) = \frac{\mathbf{x}_{,u} \wedge \mathbf{x}_{,v}}{|\mathbf{x}_{,u} \wedge \mathbf{x}_{,v}|} = \frac{-1}{\sqrt{1 + (\Psi'(u))^2}} (\cos(v), \sin(v), -\Psi'(u)).$$

Assim, os coeficientes das primeira e segunda formas fundamentais são dados por:

$$E = \langle \mathbf{x}_{,u}, \mathbf{x}_{,u} \rangle = (\Psi')^2 + 1, \quad F = \langle \mathbf{x}_{,u}, \mathbf{x}_{,v} \rangle = 0, \quad G = \langle \mathbf{x}_{,v}, \mathbf{x}_{,v} \rangle = \Psi^2 \quad (1-11)$$

$$e = \langle N, \mathbf{x}_{,uu} \rangle = \frac{-\Psi''}{\sqrt{1 + (\Psi')^2}}, \quad f = \langle N, \mathbf{x}_{,uv} \rangle = 0, \quad g = \langle N, \mathbf{x}_{,vv} \rangle = \frac{\Psi}{\sqrt{1 + (\Psi')^2}} \quad (1-12)$$

Neste caso, temos que a curvatura extrínseca<sup>6</sup> e curvatura média são dadas por:

$$G = \frac{eg}{EG} = \frac{-\Psi''}{\Psi(1+(\Psi')^2)^2} \quad H = \frac{1}{2} \frac{(\Psi')^2 - \Psi\Psi''}{\Psi(1+(\Psi')^2)^{\frac{3}{2}}}$$

Como a curvatura extrínseca,  $K$ , e duas vezes a curvatura média,  $2H$ , são o produto e a soma das curvaturas principais, respectivamente, temos

$$\lambda_1 = -\frac{e}{E} = \frac{\Psi''}{(1+(\Psi')^2)^{\frac{3}{2}}} \quad \text{e} \quad \lambda_2 = -\frac{g}{G} = \frac{-1}{\Psi\sqrt{(1+(\Psi')^2)}}. \quad (1-13)$$

Comumente nos estudos das curvaturas, aparecem as Equações Diferenciais Ordinárias (EDO's). De acordo com Sotomayor [19],

**Definição 1.36 (Equação Diferencial Ordinária)** *Seja uma aplicação contínua  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$  definida num subconjunto do espaço  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ . A equação*

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x) \quad (1-14)$$

*é chamada de Equação Diferencial Ordinária de primeira ordem, denotada por*

$$x' = f(t, x).$$

*Uma função diferenciável  $\varphi : I \rightarrow \mathbb{R}^n$  é dita solução da EDO (1-14) no intervalo não degenerado  $I \subset \mathbb{R}$  quando*

- *o gráfico de  $\varphi$  está contido em  $\Omega$ ; e*
- *$\varphi' = f(t, \varphi(t))$  para todo  $t \in I$ .*

Em geral, uma EDO possui uma infinidade de soluções. Contudo, dado  $(t_0, x_0) \in \Omega$ , chamado *condição inicial*, em certas condições, existe uma única solução  $\varphi$  tal que  $\varphi(t_0) = x_0$ . O sistema

$$\begin{cases} x' = f(t, x) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$

é chamado de *Problema de Cauchy*.

Apesar de muitas EDO's serem simples, encontrar o resultado de algumas delas pode ser bastante trabalhoso. Para isso, existem muitas técnicas para solucionar determinadas classes de EDO's que podem ser encontradas em Sotomayor [19], por exemplo. Para solucionar algumas EDO's que aparecerão futuramente, o Teorema de Picard será fundamental. Este teorema será enunciado aqui conforme [19].

<sup>6</sup>Note que a curvatura extrínseca no caso de uma hipersuperfície de dimensão 2 coincide com a noção de curvatura Gaussiana definida em [6, p. 172].

**Teorema 1.37 (Picard)** *Seja  $f$  contínua e lipschitziana em  $\Omega = I_a \times B_b$  onde  $I_a = \{t; |t - t_0| \leq a\}$  e  $B_b = \{x; |x - x_0| \leq b\}$ . Se  $|f| \leq M$  em  $\Omega$ , existe uma e única solução de*

$$\begin{cases} f(t, x) = x' \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$

em  $I_\alpha$ , onde  $\alpha = \min \{a, b/M\}$ .

*Prova.* Ver [19, 13].

□

---

# SUPERFÍCIES DE ROTAÇÃO NO ESPAÇO $\mathbb{E}_3$

---

Nesta seção será discutido alguns objetos do espaço  $\mathbb{E}_3$  com base no artigo de Corro, Souza e Pina [5]. As demonstrações da maioria dos resultados dessa seção também encontram-se no trabalho de Vieira [21], contudo, as demonstrações que aqui se encontram foram feitas independentes, seguindo as orientações prévias contidas no artigo [5].

Um dos problemas de grande interesse da Geometria Diferencial é encontrar condições necessárias e suficientes para o tensor simétrico  $T_{ij}$  sobre uma variedade compacta para que se possa encontrar uma métrica  $g_{ij}$  que satisfaça a Equação de Campo de Einstein<sup>1</sup> (ARAÚJO, CUI, PINA [3]) dada por

$$R_{ij} - \frac{1}{2}Kg_{ij} = T_{ij}, \quad (2-1)$$

onde  $R_{ij}$  e  $K$  são o Tensor de Ricci e a curvatura escalar da métrica  $g_{ij}$ , respectivamente.

O lado esquerdo da equação (2-1) "descreve a geometria do espaço-tempo e o lado direito,  $T_{ij}$ , chamado de tensor stress-energy, descreve a densidade e fluxo de energia que é a fonte do campo gravitacional em Relatividade Geral"<sup>2</sup> (ARAÚJO, CUI, PINA [3]). Assim, a métrica  $g_{ij}$  que satisfaz (2-1) representa o campo gravitacional.

O problema vem sendo estudado amplamente por matemáticos e físicos (ver [20], por exemplo). Pina e Tenenblat [16] estudaram essa equação para uma família particular de tensores em variedades que são localmente conformemente flat. Deste artigo, Corro, Souza e Pina [5] deduziram o espaço conformemente flat  $\mathbb{E}_3$ .

O espaço  $\mathbb{E}_3$  é definido como sendo o espaço tridimensional  $\mathbb{R}^3$  munido de uma métrica conforme  $g = g_{ij} := \frac{\delta_{ij}}{\varphi^2}$ , onde  $\varphi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R} \setminus \{0\}$  definida por  $\varphi(x) = e^{-x_1^2 - x_2^2 - x_3^2}$  com  $x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$ .

---

<sup>1</sup>A Equação de Campo de Einstein foi formulada por Einstein para quando  $g_{ij}$  é uma métrica de Lorentz sobre uma variedade de dimensão 4.

<sup>2</sup>"describes the geometry of the space time, and the right hand side  $T_{ij}$ , called stress-energy tensor, describes the density and flux of energy which is the source of the gravitational field in general relativity."

Pelo Teorema 1.9, tendo  $g$  satisfazendo

$$\text{Ricc } g = T = \sum_{i,j=1}^n f_{ij} dx_i dx_j,$$

temos que  $g$  é uma métrica completa em  $\mathbb{R}^3$ , portanto,  $\mathbb{E}_3$  é um espaço completo.

## 2.1 Símbolos de Christoffel e curvatura seccional do espaço $\mathbb{E}_3$

Nosso primeiro passo será calcular os símbolos de Christoffel. Para isso, considere a conexão Levi-Civita  $\nabla$  de  $\mathbb{E}_3$  e a base canônica  $\{e_1, e_2, e_3\}$ . Temos que

$$\nabla_{e_i} e_j = \sum_{k=1}^3 \Gamma_{ij}^k e_k$$

e

$$\nabla_{e_i} e_j = \nabla_{e_j} e_i, \text{ pela simetria de } \nabla.$$

Como  $g_{ij} = \frac{\delta_{ij}}{\varphi^2}$  temos que  $g_{ij} = 0, \forall i \neq j$ . Observe que  $m \neq k$  implica  $g^{mk} = 0$  e, portanto, todas as parcelas com  $m \neq k$  se anulam, assim, utilizando a fórmula (1-5), os símbolos de Christoffel são dados por:

$$\Gamma_{ij}^k = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial}{\partial x_i} g_{jk} + \frac{\partial}{\partial x_j} g_{ki} - \frac{\partial}{\partial x_k} g_{ij} \right) g^{kk} \quad (2-2)$$

onde  $g^{kk} = g_{kk}^{-1} = \varphi^2 \delta^{kk} = \varphi^2 I$ ,  $I$  denota a matriz identidade. Temos também que  $\frac{\partial}{\partial x_l} g_{ms} = \frac{-2\varphi_{,l}}{\varphi^3} \delta_{ms}$ , onde  $\varphi_{,l} = \frac{\partial}{\partial x_l} \varphi$  denota a derivada parcial de  $\varphi$  com respeito a  $x_l$ .

Assim, temos quatro caso a serem analisados:

- $i \neq j \neq k \neq i$

Neste caso,  $g_{jk} = g_{ki} = g_{ij} = 0$ , portanto,  $\Gamma_{ij}^k = 0$ .

- $i \neq j = k$

Neste caso,  $g_{ij} = 0$  e  $g_{ik} = 0$ , portanto  $\Gamma_{ik}^k = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial}{\partial x_i} g_{kk} \right) g^{kk} = -\frac{\varphi_{,i}}{\varphi}$

- $i = j \neq k$

Nestas condições,  $g_{jk} = 0$  e  $g_{ki} = 0$ , tendo portanto,  $\Gamma_{ii}^k = \frac{1}{2} \left( -\frac{\partial}{\partial x_k} g_{ii} \right) g^{kk} = \frac{\varphi_{,k}}{\varphi}$

- $i = j = k$

Neste caso,  $\Gamma_{ii}^i = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial}{\partial x_i} g_{ii} + \frac{\partial}{\partial x_i} g_{ii} - \frac{\partial}{\partial x_i} g_{ii} \right) g^{ii} = -\frac{\varphi_{,i}}{\varphi}$

Portanto, podemos escrever resumidamente os símbolos de Christoffel como sendo

$$\begin{aligned}\Gamma_{ij}^k &= 0, & i \neq j \neq k \neq i; \\ \Gamma_{ii}^j &= \frac{\phi_{,j}}{\phi}, & \forall i \neq j; \text{ e} \\ \Gamma_{ij}^i &= -\frac{\phi_{,j}}{\phi}, & 1 \leq i, j \leq 3.\end{aligned}\quad (2-3)$$

Agora, iremos calcular a curvatura seccional. A fim de redução dos cálculos e seguindo orientação em [7], definimos  $\phi(x) := \ln \varphi(x)$ . Neste caso,  $\phi_{,i}(x) = \frac{1}{\varphi(x)}\varphi_{,i}(x)$  e tendo  $\varphi(x) = e^{-(x_1^2+x_2^2+x_3^2)}$ , onde  $x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$ , temos

$$\phi(x) = -(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2). \quad (2-4)$$

Como  $g_{ij} = \frac{\delta_{ij}}{\varphi^2}$ , tem-se  $\frac{\partial}{\partial x_k} g_{ij} = -2\delta_{ij} \frac{\phi_{,k}}{\varphi^3} = -2\delta_{ij} \frac{\phi_{,k}}{\varphi^2}$ . Da equação (2-2), temos que

$$\begin{aligned}\Gamma_{ij}^k &= \frac{1}{2} \left( \frac{\partial}{\partial x_i} g_{jk} + \frac{\partial}{\partial x_j} g_{ki} - \frac{\partial}{\partial x_k} g_{ij} \right) \varphi^2 \\ &= -\delta_{ik} \phi_{,i} - \delta_{ki} \phi_{,j} + \delta_{ij} \phi_{,k}\end{aligned}$$

Para calcular os coeficientes da curvatura seccional, temos de (1-6) que

$$\begin{aligned}R_{ijj} &= \sum_l R_{ijl}^l g_{lj} \\ &= R_{ijj}^j g_{jj} \quad \text{Note que, quando } l \neq j, \text{ as parcelas se anulam.} \\ &= R_{ijj}^j \frac{1}{\varphi^2} \\ &= \frac{1}{\varphi^2} \left( \sum_l \Gamma_{ii}^l \Gamma_{jl}^j - \sum_l \Gamma_{ji}^l \Gamma_{il}^j + \frac{\partial}{\partial x_j} \Gamma_{ii}^j - \frac{\partial}{\partial x_i} \Gamma_{ji}^j \right).\end{aligned}$$

Como  $\frac{\partial}{\partial x_j} \Gamma_{ii}^j = \frac{\partial}{\partial x_j} \phi_{,j} = \phi_{,jj}$  e  $\frac{\partial}{\partial x_i} \Gamma_{ji}^i = \frac{\partial}{\partial x_i} (-\phi_{,i}) = -\phi_{,ii}$ , temos

$$\begin{aligned}\varphi^2 R_{ijj} &= \sum_l \phi_{,l} (-\phi_{,l}) - \sum_l \Gamma_{ji}^l \Gamma_{il}^j + \phi_{,ii} + \phi_{,jj} \\ &= - \sum_{l \neq i, l \neq j} \phi_{,l}^2 + \phi_{,j}^2 - \phi_{,j}^2 - \phi_{,i}^2 + \phi_{,i}^2 + \phi_{,jj} + \phi_{,ii} \\ &= - \sum_l \phi_{,l}^2 + \phi_{,i}^2 + \phi_{,j}^2 + \phi_{,ii} + \phi_{,jj}\end{aligned}$$

Para  $i, j, k, s$  diferentes entre si

$$R_{ijk}^s = \sum_l \Gamma_{ik}^l \Gamma_{jl}^s - \sum_l \Gamma_{jk}^l \Gamma_{il}^s + \frac{\partial}{\partial x_j} \Gamma_{ik}^s - \frac{\partial}{\partial x_i} \Gamma_{jk}^s = 0,$$

já que os símbolos de Christoffel se anulam.



Para três índices distintos, temos

$$R_{ijk}^i = \sum_l \Gamma_{ik}^l \Gamma_{jl}^i - \sum_l \Gamma_{jk}^l \Gamma_{il}^i + \frac{\partial}{\partial x_j} \Gamma_{ik}^i - \frac{\partial}{\partial x_i} \Gamma_{jk}^i = \phi_{,k} \phi_{,j} - (\phi_{,k} \phi_{,j} + \phi_{,j} \phi_{,k}) - \phi_{,kj} = -\phi_{,k} \phi_{,j} - \phi_{,kj},$$

$$R_{ijk}^j = \sum_l \Gamma_{ik}^l \Gamma_{jl}^j - \sum_l \Gamma_{jk}^l \Gamma_{il}^j - \frac{\partial}{\partial x_i} \Gamma_{jk}^j = \phi_{,k} \phi_{,i} + \phi_{,i} \phi_{,k} - \phi_{,k} \phi_{,i} + \phi_{,ki} = \phi_{,k} \phi_{,i} + \phi_{,ki},$$

$$R_{ijk}^k = \sum_l \Gamma_{ik}^l \Gamma_{jl}^k - \sum_l \Gamma_{jk}^l \Gamma_{il}^k + \frac{\partial}{\partial x_j} \Gamma_{ik}^k - \frac{\partial}{\partial x_i} \Gamma_{jk}^k = \phi_{,i} \phi_{,j} - \phi_{,i} \phi_{,k} - \phi_{,ij} + \phi_{,ji} = 0.$$

Com isso, a curvatura seccional no plano gerado pelos campos de vetores ortogonais  $\frac{\partial}{\partial x_i}$  e  $\frac{\partial}{\partial x_j}$  é dada por

$$\begin{aligned} K_{ij} &= \frac{R_{ijij}}{g_{ii}g_{jj}} \\ &= R_{ijij} \Phi^4 \\ &= \left( -\sum_l \phi_{,l}^2 + \phi_{,i}^2 + \phi_{,j}^2 + \phi_{,ii} + \phi_{,jj} \right) \Phi^2 \end{aligned}$$

A partir de (2-4), temos

$$K_{sec} = K_{ij} = \frac{-\sum_l 4x_l^2 + 4x_i^2 + 4x_j^2 - 2 - 2}{e^{2(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)}},$$

desenvolvendo o somatório, como  $1 \leq i, j, l \leq 3$ , permanece apenas o termo  $x_k^2$  com  $i \neq k \neq j$ , assim

$$K_{sec} = \frac{-4(x_k^2 + 1)}{e^{2(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)}}$$

onde  $1 \leq i \neq j \neq k \neq i \leq 3$ .

Note que a exponencial é sempre positiva, do mesmo modo que  $x_k^2 + 1$  também o é. Portanto, a curvatura seccional  $K_{sec}$  é sempre negativa.

## 2.2 Superfícies em um espaço conformemente flat

Com os símbolos de Christoffel calculados, podemos enunciar e demonstrar o primeiro teorema em [5].

**Teorema 2.1** Tome  $\mathbf{x} : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ , com  $U \subset \mathbb{R}^2$  aberto, uma superfície parametrizada regular. Considere  $\mathbf{x}(U)$  como uma superfície em  $(\mathbb{R}^3, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  com a Métrica Euclidiana e denote  $N$  a sua aplicação normal de Gauss,  $\lambda_i$ ,  $H$  e  $K$  as suas curvaturas principais, média e gaussiana, respectivamente. Analogamente, considere  $\mathbf{x}(U)$  como uma superfície em  $\mathbb{E}_3$ , com a métrica conforme à Métrica Euclidiana, com fator conforme  $\Phi^{-2}$  e tome

$\tilde{N}$  a sua aplicação normal de Gauss,  $\tilde{\lambda}_i$ ,  $\tilde{H}$  e  $\tilde{K}_E$  as suas curvaturas principais, média e extrínseca, respectivamente. Então

$$\tilde{\lambda}_i = \varphi \lambda_i - \langle N, \text{grad } \varphi \rangle,$$

$$\tilde{H} = \varphi H - \langle N, \text{grad } \varphi \rangle,$$

$$\tilde{K}_E = \varphi^2 K - 2H\varphi \langle N, \text{grad } \varphi \rangle + \langle N, \text{grad } \varphi \rangle^2,$$

onde  $\varphi$  denota a expressão de  $\varphi$  em  $\mathbf{x}(u, v)$ ,  $(u, v) \in U$ .

*Prova.* Sejam  $\mathbf{x} : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ , com  $U \subset \mathbb{R}^2$  aberto, uma superfície parametrizada regular em  $\mathbb{R}^3$  dada por

$$\mathbf{x}(u, v) = \sum_{j=1}^3 \mathbf{x}^j(u, v) e_j, \quad (u, v) \in U,$$

onde  $\mathbf{x}^j$  representa a  $j$ -ésima coordenada da parametrização  $\mathbf{x}$  e  $N$  a aplicação normal de Gauss de  $\mathbf{x}$  em  $\mathbb{R}^3$  com a Norma Euclidiana, dada por

$$N(u, v) = \sum_{j=1}^3 N^j(u, v) e_j.$$

Note que  $|\mathbf{x}_{,u} \wedge \mathbf{x}_{,v}|_g = \sqrt{g_{uv}} = \sqrt{\frac{\delta_{uv}}{\varphi^2(u, v)}} = \frac{\sqrt{\delta_{uv}}}{\varphi(u, v)} = \frac{|\mathbf{x}_{,u} \wedge \mathbf{x}_{,v}|}{\varphi(u, v)}$ , assim

$$\tilde{N}(u, v) = \frac{\mathbf{x}_{,u} \wedge \mathbf{x}_{,v}}{|\mathbf{x}_{,u} \wedge \mathbf{x}_{,v}|_g}(u, v) = \frac{\mathbf{x}_{,u} \wedge \mathbf{x}_{,v}}{\frac{|\mathbf{x}_{,u} \wedge \mathbf{x}_{,v}|}{\varphi(u, v)}}(u, v) = \varphi(u, v) \frac{\mathbf{x}_{,u} \wedge \mathbf{x}_{,v}}{|\mathbf{x}_{,u} \wedge \mathbf{x}_{,v}|}(u, v) = \varphi(u, v) N(u, v)$$

Agora, utilizando a propriedade (iii) da conexão Levi-Civita (ver Definição (1.14)), temos que

$$\nabla_{\mathbf{x}_i} \tilde{N} = \nabla_{\mathbf{x}_i} (\varphi N) = \mathbf{x}_{,i}(\varphi) N + \varphi \nabla_{\mathbf{x}_i} N, \quad \forall 1 \leq i \leq 3.$$

Logo,

$$\nabla_{\mathbf{x}_i} \tilde{N} = \nabla_{\mathbf{x}_i} (\varphi N) = \mathbf{x}_{,i}(\varphi) N + \varphi (\nabla_{\mathbf{x}_i} N). \quad (2-5)$$

Utilizando as propriedades de conexão, temos que

$$\begin{aligned}
\nabla_{\mathbf{x},i} N &= \nabla_{\mathbf{x},i} \left( \sum_{k=1}^3 N^k e_k \right) \\
&= \sum_{k=1}^3 \nabla_{\mathbf{x},i} (N^k e_k) \\
&= \sum_{k=1}^3 [\mathbf{x},i(N^k) e_k + N^k \nabla_{\mathbf{x},i} e_k] \\
&= N_{,i} + \sum_{k=1}^3 \left[ N^k \nabla_{\sum_{j=1}^3 \mathbf{x},i^j} e_k \right] \\
&= N_{,i} + \sum_{k,j=1}^3 N^k \mathbf{x},i^j \nabla_{e_j} e_k \\
&= N_{,i} + \sum_{k,j,s=1}^3 N^k \mathbf{x},i^j \Gamma_{jk}^s e_s \\
&= N_{,i} + \sum_{j=1}^3 N^j \mathbf{x},i^j \Gamma_{jj}^j e_j + \sum_{j \neq k} N^k \mathbf{x},i^j \Gamma_{jk}^k e_k + \sum_{j \neq s} N^j \mathbf{x},i^j \Gamma_{jj}^s e_s + \sum_{j \neq k} N^k \mathbf{x},i^j \Gamma_{jk}^j e_j
\end{aligned}$$

Substituindo os valores dos símbolos de Christoffel dados por (2-3), temos

$$\begin{aligned}
\nabla_{\mathbf{x},i} N &= N_{,i} - \sum_{j=1}^3 N^j \mathbf{x},i^j \left( \frac{\varphi_{,j}}{\varphi} \right) e_j - \sum_{j \neq k} N^k \mathbf{x},i^j \left( \frac{\varphi_{,j}}{\varphi} \right) e_k + \\
&\quad + \sum_{j \neq s} N^j \mathbf{x},i^j \left( \frac{\varphi_{,s}}{\varphi} \right) e_s - \sum_{j \neq k} N^k \mathbf{x},i^j \left( \frac{\varphi_{,k}}{\varphi} \right) e_j \\
&= N_{,i} - \sum_{j,k=1}^3 N^k \mathbf{x},i^j \left( \frac{\varphi_{,j}}{\varphi} \right) e_k + \sum_{j \neq s} N^j \mathbf{x},i^j \left( \frac{\varphi_{,s}}{\varphi} \right) e_s - \\
&\quad - \sum_{j \neq k} N^k \mathbf{x},i^j \left( \frac{\varphi_{,k}}{\varphi} \right) e_j + \sum_{j=s=1}^3 N^j \mathbf{x},i^j \left( \frac{\varphi_{,s}}{\varphi} \right) e_s - \\
&\quad - \sum_{j=k=1}^3 N^k \mathbf{x},i^k \left( \frac{\varphi_{,j}}{\varphi} \right) e_j
\end{aligned}$$

Note que

$$\sum_{j,s=1}^3 N^j \mathbf{x},i^j \left( \frac{\varphi_{,s}}{\varphi} \right) e_s = \sum_{j=1}^3 N^j \mathbf{x},i^j \sum_{s=1}^3 \left( \frac{\varphi_{,s}}{\varphi} \right) e_s,$$

onde  $\sum_{j=1}^3 N^j \mathbf{x},i^j = \langle N, \mathbf{x},i \rangle = 0$ , pois os vetores  $N$  e  $\mathbf{x},i$  são ortogonais.

Com isso,

$$\begin{aligned}
\nabla_{\mathbf{x},i} N &= N_{,i} - \sum_{j,k=1}^3 N^k \mathbf{x},i^j \left( \frac{\varphi_{,k}}{\varphi} \right) e_j - \sum_{j,k=1}^3 N^k \mathbf{x},i^j \left( \frac{\varphi_{,j}}{\varphi} \right) e_k \\
&= N_{,i} - \left[ \sum_{k=1}^3 N^k \frac{\varphi_{,k}}{\varphi} \right] \mathbf{x},i - \left[ \sum_{j=1}^3 N^j \frac{\varphi_{,j}}{\varphi} \right] N.
\end{aligned} \tag{2-6}$$

Agora, substituindo (2-6) em (2-5), temos

$$\begin{aligned}
\nabla_{\mathbf{x}_i} \tilde{N} &= \mathbf{x}_i(\varphi)N + \varphi \left[ N_{,i} - \left( \sum_{k=1}^3 N^k \frac{\varphi_{,k}}{\varphi} \right) \mathbf{x}_i - \left( \sum_{j=1}^3 \mathbf{x}_i^j \frac{\varphi_{,j}}{\varphi} \right) N \right] \\
&= \mathbf{x}_i(\varphi)N + \varphi N_{,i} - \left( \sum_{k=1}^3 N^k \varphi_{,k} \right) \mathbf{x}_i - \left( \sum_{j=1}^3 \mathbf{x}_i^j \varphi_{,j} \right) N \\
&= \varphi N_{,i} - \left( \sum_{k=1}^3 N^k \varphi_{,k} \right) \mathbf{x}_i + \left[ \mathbf{x}_i(\varphi) - \left( \sum_{j=1}^3 \mathbf{x}_i^j \varphi_{,j} \right) \right] N
\end{aligned}$$

Note que  $\sum_{k=1}^3 N^k \varphi_{,k} = \langle N, \text{grad } \varphi \rangle$  e, como  $\mathbf{x}_i = \sum_{j=1}^3 \mathbf{x}_i^j e_j$ ,  $\mathbf{x}_i(\varphi) = \langle \mathbf{x}_i, \text{grad } \varphi \rangle = \sum_{j=1}^3 \mathbf{x}_i^j \varphi_{,j}$ . Portanto,

$$\nabla_{\mathbf{x}_i} \tilde{N} = \varphi N_{,i} - \langle N, \text{grad } \varphi \rangle \mathbf{x}_i \quad (2-7)$$

Como temos  $N_{,i} = \lambda_i \mathbf{x}_i$  e  $\nabla_{\mathbf{x}_i} \tilde{N} = \tilde{\lambda}_i \mathbf{x}_i$ , de (2-7) temos que

$$\tilde{\lambda}_i = \varphi \lambda_i - \langle N, \text{grad } \varphi \rangle \quad (2-8)$$

Da definição de curvatura média,

$$\begin{aligned}
\tilde{H} &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \tilde{\lambda}_i \\
&= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (\varphi \lambda_i - \langle N, \text{grad } \varphi \rangle) \\
&= \varphi \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \lambda_i - \langle N, \text{grad } \varphi \rangle \\
&= \varphi H - \langle N, \text{grad } \varphi \rangle
\end{aligned}$$

De mesmo modo, da definição de curvatura extrínseca, observando que temos duas curvaturas principais

$$\begin{aligned}
\tilde{K}_E &= \prod_{i=1}^2 \tilde{\lambda}_i \\
&= (\varphi \lambda_1 - \langle N, \text{grad } \varphi \rangle)(\varphi \lambda_2 - \langle N, \text{grad } \varphi \rangle) \\
&= \varphi^2 \lambda_1 \lambda_2 - \varphi \langle N, \text{grad } \varphi \rangle (\lambda_1 + \lambda_2) + \langle N, \text{grad } \varphi \rangle^2 \\
&= \varphi^2 K - 2\varphi H \langle N, \text{grad } \varphi \rangle + \langle N, \text{grad } \varphi \rangle^2
\end{aligned}$$

Assim, o teorema está provado.  $\square$

Observamos que em momento algum foi necessário utilizar a definição de  $\varphi$ , ou seja, este teorema não se restringe ao espaço  $\mathbb{E}_3$ , sendo válido em todo espaço munido de uma métrica conformemente flat. De mesmo modo, podemos observar que com algumas

modificações quanto à Curvatura Extrínseca, o teorema é válido para hipersuperfícies em espaço de dimensões maiores que 3.

## 2.3 Superfícies de rotação em $\mathbb{E}_3$

Diferentemente do Teorema (2.1), os teoremas desta seção se restringem ao espaço  $\mathbb{E}_3$  e, mais especificamente, dizem respeito às superfícies de rotação neste espaço. Antes de enunciá-los e demonstrá-los, precisamos do Lema (2.2) a seguir.

**Lema 2.2** Tome  $\mathbf{x}(u, v) = (\psi(u) \cos(v), \psi(u) \sin(v), u)$  uma superfície de rotação em  $\mathbb{E}_3$ . A superfície  $\mathbf{x}$  tem curvatura extrínseca constante  $c_0$  se, e somente se,  $\psi$  satisfaz a equação diferencial ordinária

$$[-1 + 2\psi(-\psi + u\psi')][\psi'' + 2a^2(-\psi + u\psi')] = c_0 a^4 \psi e^{2(u^2 + \psi^2)}, \quad (2-9)$$

onde  $a^2 = 1 + (\psi')^2$ .

*Prova.*

Temos, de (1-11), que os coeficientes da primeira forma fundamental com respeito à Métrica Euclidiana são dados por

$$E = 1 + (\psi')^2(u) = a^2, \quad F = 0 \quad \text{e} \quad G = \psi^2(u).$$

Já os coeficientes da segunda forma fundamental, de (1-12), são dados por

$$e = \frac{-\psi''(u)}{a}, \quad f = 0, \quad \text{e} \quad g = \frac{\psi(u)}{a}.$$

A aplicação normal de Gauss é dada por

$$N = -\frac{1}{a}(\cos(v), \sin(v), -\psi')$$

assim temos,

$$\langle N, \mathbf{x} \rangle = \frac{-\psi + u\psi'}{a}, \quad \langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle = \psi^2 + u^2$$

e

$$\begin{aligned} \langle N, \text{grad } \varphi \rangle &= \langle N, (-2x_1\varphi, -2x_2\varphi, -2x_3\varphi) \rangle \\ &= -2\varphi \langle N, (x_1, x_2, x_3) \rangle \\ &= -2\varphi \langle N, \mathbf{x} \rangle, \end{aligned}$$

onde  $(x_1, x_2, x_3) \in \mathbf{x}(U)$  e  $\varphi(\mathbf{x}) = e^{-\psi^2 - u^2}$

Do Teorema (2.1),

$$\begin{aligned}\tilde{\lambda}_i &= \varphi(\mathbf{x})\lambda_i + 2\varphi\langle N, \mathbf{x} \rangle \\ &= \varphi(\mathbf{x})(\lambda_i + 2\langle N, \mathbf{x} \rangle) \\ &= e^{-u^2-\psi^2} \left( \lambda_i + 2\frac{-\psi+u\psi'}{a} \right)\end{aligned}$$

De (1-13), temos

$$\lambda_1 = \frac{\psi''}{a^3}, \quad \lambda_2 = -\frac{\psi}{\psi^2 a} = -\frac{1}{\psi a}$$

Daí,

$$\tilde{\lambda}_1 = e^{-u^2-\psi^2} \left( \frac{\psi''}{a^3} + 2\frac{-\psi+u\psi'}{a} \right) \quad (2-10)$$

e

$$\tilde{\lambda}_2 = e^{-u^2-\psi^2} \left( -\frac{1}{\psi a} + 2\frac{-\psi+u\psi'}{a} \right) \quad (2-11)$$

Por definição,  $\tilde{K}_E = \tilde{\lambda}_1\tilde{\lambda}_2$  em  $\mathbb{E}_3$ , logo

$$\begin{aligned}\tilde{K}_E &= e^{-2(u^2+\psi^2)} \left( -\frac{\psi''}{\psi a^4} + 2\psi''\frac{-\psi+u\psi'}{a^4} - 2\frac{-\psi+u\psi'}{\psi a^2} + 4\frac{(-\psi+u\psi')^2}{a^2} \right) \\ &= \frac{e^{-2(u^2+\psi^2)}}{\psi a^4} \left( -\psi'' + 2\psi\psi''(-\psi+u\psi') - 2a^2(-\psi+u\psi') + 4\psi a^2(-\psi+u\psi')^2 \right)\end{aligned}$$

Portanto,  $\tilde{K}_E = c_0$  se, e somente se, é

$$\begin{aligned}c_0 a^4 \psi e^{2(u^2+\psi^2)} &= -\psi'' + 2\psi\psi''(-\psi+u\psi') - 2a^2(-\psi+u\psi') + 4\psi a^2(-\psi+u\psi')^2 \\ &= [-1 + 2\psi(-\psi+u\psi')][\psi'' + 2a^2(-\psi+u\psi')]\end{aligned}$$

Em outras palavras,  $\psi$  satisfaz a equação diferencial ordinária (2-9).  $\square$

A partir da definição de  $\tilde{K}_E$ , temos que  $c_0 = 0$  se, e somente se,  $\tilde{\lambda}_1 = 0$  ou  $\tilde{\lambda}_2 = 0$ . Assim, a partir das equações (2-10) e (2-11) e observando que  $e^{-(u^2+\psi^2)} \neq 0, \forall u, \psi(u) \in \mathbb{R}$ , temos  $\tilde{K}_E = 0$  se, e somente se,

$$\begin{aligned}\frac{\psi''}{a^3} + 2\frac{-\psi+u\psi'}{a} &= 0 \\ \Rightarrow \psi'' + 2a^2(-\psi+u\psi') &= 0\end{aligned} \quad (2-12)$$

ou

$$\begin{aligned}-\frac{1}{\psi a} + 2\frac{-\psi+u\psi'}{a} &= 0 \\ \Rightarrow -\frac{1}{\psi} + 2(-\psi+u\psi') &= 0\end{aligned} \quad (2-13)$$

Para o próximo resultado, além do Lema (2.2) faremos amplo uso do Teorema (1.37) de Picard.

**Teorema 2.3** *Tome  $c$  uma constante não nula. Então*

a) a família a um parâmetro de hiperboloides de duas folhas dada pela equação

$$(cx_3)^2 - 2x_1^2 - 2x_2^2 = 1,$$

consiste de superfícies completas com curvatura extrínseca nula em  $\mathbb{E}_3$ ;

b) a família a um parâmetro de cones

$$(cx_3)^2 = x_1^2 + x_2^2$$

também descreve superfícies com curvatura extrínseca nula em  $\mathbb{E}_3$ ;

c) existe uma família a um parâmetro de superfícies de rotação completas no espaço  $\mathbb{E}_3$  com curvatura extrínseca nula.

*Prova.*

a) De (2-13) temos que  $\tilde{K}_E = 0$  e

$$\begin{aligned} & -\frac{1}{\psi} + 2(-\psi + u\psi') = 0 \\ \Leftrightarrow & -\psi^2 + u\psi \frac{d}{du}\psi = \frac{1}{2} \\ \Leftrightarrow & \psi d\psi = \left(\frac{1}{2} + \psi^2\right) \frac{du}{u} \\ \Leftrightarrow & \frac{2\psi}{1+2\psi^2} d\psi = \frac{du}{u} \\ \Leftrightarrow & \int \frac{1}{2} \frac{dv}{v} = \int \frac{du}{u}, \quad \text{onde } v = 1 + 2\psi^2 \\ \Leftrightarrow & \frac{1}{2} \ln(1 + 2\psi^2) = \ln(u) + c_1, \quad \text{para algum } c_1 \in \mathbb{R} \\ \Leftrightarrow & (1 + 2\psi^2)^{\frac{1}{2}} = cu \quad \text{onde } c = e^{c_1} \neq 0 \\ \Leftrightarrow & (cu)^2 - 2\psi^2 = 1. \end{aligned}$$

Fazendo  $\mathbf{x}(u, v) = (x_1, x_2, x_3)$ , temos uma família a um parâmetro de hiperboloide de duas folhas

$$(cx_3)^2 - 2x_1^2 - 2x_2^2 = 1$$

que consiste de superfícies completas com curvatura extrínseca nula em  $\mathbb{E}_3$ .

b) Temos que  $\psi(u) = cu$ , onde  $c \in \mathbb{R}$  é uma constante não nula, é solução de (2-12). De fato, note que  $\psi''(u) = 0$  e  $\psi'(u) = c$ , logo

$$2a^2(-cu + cu) = 0.$$

Como no item a), seja  $\mathbf{x}(u, v) = (x_1, x_2, x_3)$ . Logo  $x_1^2 = \psi^2(u) \cos^2(v)$ ,  $x_2^2 = \psi^2(u) \sin^2(v)$  e assim  $\psi^2(u) = x_1^2 + x_2^2$ . Portanto, a família a um parâmetro de cones com vértice passando pela origem

$$(cx_3)^2 = x_1^2 + x_2^2$$

descreve superfícies com curvatura extrínseca nula em  $\mathbb{E}_3$ .

c) Dada a condição inicial

$$\begin{cases} \psi(0) = b > 0 \\ \psi'(0) = 0 \end{cases}$$

pelo Teorema (1.37) de Picard, a equação diferencial ordinária (2-12) possui uma única solução  $\psi$ , que é simétrica em relação ao eixo  $x_1$ .

De fato, a equação diferencial ordinária (2-12) pode ser escrita como  $\dot{X} = h(X, u)$  onde  $X = (x_1, x_2)$  com  $x_1 = \psi(u)$  e  $x_2 = \psi'(u)$ . Então  $\frac{dx_2}{du} = \psi''(u) = 2(1 + x_2^2)(x_1 - ux_2)$ . Assim, a equação diferencial ordinária de segunda ordem (2-12) é equivalente à equação diferencial de primeira ordem  $\dot{X} = h(u, X)$ , onde

$$h(u, x_1, x_2) = (x_2, 2(1 + x_2^2)(x_1 - ux_2)) \in C^\infty(\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}).$$

Note que a função  $h : \Omega \subset \mathbb{R} \times E \rightarrow \mathbb{R}^2$  é  $C^\infty$ .

Agora, defina  $\tilde{\psi}(u) := \psi(-u)$ . Tem-se que  $\tilde{\psi}'(u) := -\psi'(-u)$  e  $\tilde{\psi}''(u) := \psi''(-u)$ .

Logo,

$$\tilde{\psi}''(u) + 2a^2(-\tilde{\psi}(u) + u\tilde{\psi}'(u)) = \psi''(v) + 2a^2(-\psi(v) + v\psi'(v)) = 0,$$

onde  $v = -u$  e a segunda igualdade segue da equação (2-12). Assim, segue que  $\tilde{\psi}(u)$  também satisfaz (2-12), donde a solução  $\psi$  é simétrica com respeito ao eixo  $x_1$ .

Além disso, a solução possui as duas propriedades a seguir:

- $\psi$  é sempre convexa. Com a condição inicial, a Equação (2-12) nos dá  $\psi''(0) = 2b > 0$ , assim  $\psi''(u) > 0 \forall u$ . De fato, suponha que exista  $u_0 > 0$  tal que  $\psi''(u_0) = 0$ , então, pela Equação (2-12),  $-\psi(u_0) + u_0\psi'(u_0) = 0$ , donde tem-se que a linha tangente ao ponto  $(u_0, \psi(u_0))$  passa pela origem. Contudo, essa linha também é solução da Equação (2-12), pela parte b), mas isso contradiz a unicidade das soluções para equações diferenciais ordinárias. Logo  $\psi''$  não se anula. Por ser diferenciável, é também contínua, portanto, não existe  $u_0$  tal que  $\psi''(u) < 0$ . Donde segue a propriedade.

Note que  $\psi$  ser convexa garante a condição de Lipschitz exigida pelo Teorema (1.37) de Picard.

- O intervalo maximal onde a solução  $\psi$  está definida é  $(\omega_-, \omega_+) = \mathbb{R}$ . Se o intervalo maximal for finito, a solução  $\psi$  satisfaz

$$\lim_{u \rightarrow \omega_+} \psi = +\infty,$$

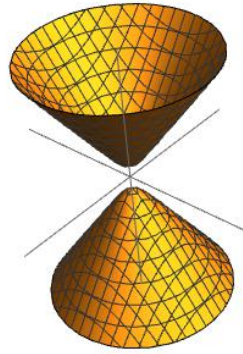


assim a curva solução admite uma linha tangente que passa pela origem, o que novamente contradiz a unicidade de soluções de uma equação diferencial ordinária.

Note que as superfícies garantidas pelo teorema são subconjuntos fechados do espaço completo  $\mathbb{E}_3$ , donde segue a completude das superfícies.  $\square$

À guisa de exemplo, a Figura (2.1) representa o hiperboloide de duas folhas  $x_3^2 - 2x_1^2 - 2x_2^2 = 1$  cujo parâmetro é  $c = 1$ , e a Figura (2.2) representa o cone  $x_3^2 = x_1^2 + x_2^2$  cujo parâmetro é  $c = 1$ .

**Figura 2.1:** Hiperboloide de duas folhas  $x_3^2 - 2x_1^2 - 2x_2^2 = 1$ .



Fonte: Wolfram Mathematica<sup>©</sup>.

**Teorema 2.4** *Existe uma família a um parâmetro de superfícies completas em  $\mathbb{E}_3$  com curvatura extrínseca constante negativa.*

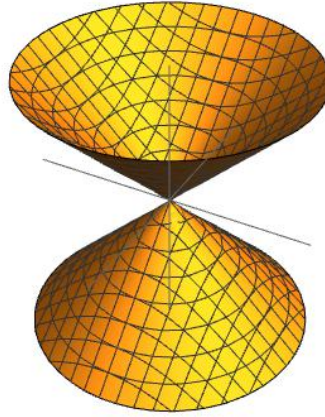
*Prova.* Temos, pelo Lema (2.2) que  $\tilde{K}_E = c_0$  se, e somente se,  $\psi$  satisfaz a equação diferencial ordinária de segunda ordem (2-9). Dada a condição inicial

$$\begin{cases} \psi(0) = b > 0 \\ \psi'(0) = 0 \end{cases}$$

para a equação, pelo Teorema (1.37) de Picard, existe uma solução  $\psi$  que é simétrica com respeito ao eixo  $x_1$ .

Com tal condição inicial, temos da Equação (2-9)

$$\begin{aligned} (-1 - 2b^2)(\psi''(0) - 2a^2b) &= c_0 a^4 b e^{2b^2} \\ \Leftrightarrow \psi''(0) - 2a^2b &= -\frac{c_0 a^4 b e^{2b^2}}{1+2b^2} \end{aligned}$$

**Figura 2.2:** Cone  $x_3^2 = x_1^2 + x_2^2$ .

Fonte: Wolfram Mathematica<sup>©</sup>.

note que  $a^2 = 1 + (\psi'(0))^2 = 1$ .

Assim, tomando  $c_0 < 0$  obtemos

$$\psi''(0) = 2b - \frac{c_0 b e^{2b^2}}{1 + 2b^2} > 0,$$

o que garante que numa vizinhança de zero a derivada de  $\psi$  é positiva.

Afirmamos que sempre que  $4c_0 b^2 e^{4b^2} < -1$ ,  $\psi$  é convexo. Para mostrar essa afirmação, note que, se existir  $u_0 > 0$  com  $\psi''(u_0) = 0$ , então  $\psi_0 := \psi(u_0) > \psi(0) = b$ ; assim, se  $\psi''(u_0) = 0$ , então, em  $u_0 > 0$ ,  $\psi_0 > b$  deve satisfazer a equação

$$\begin{aligned} & 2a^2(\psi_0 - u_0\psi'(u_0)) + 4a^2\psi_0(-\psi_0^2 + u_0\psi'(u_0))^2 = c_0 a^4 \psi_0 e^{2(\psi_0 + u_0^2)} \\ \Leftrightarrow & 2\psi_0 - 2u_0\psi'(u_0) + 4\psi_0(\psi_0^2 - 2u_0\psi_0\psi'(u_0) + u_0^2(\psi'(u_0))^2) = (1 + (\psi'(u_0))^2)c_0\psi_0 e^{2(\psi_0^2 + u_0^2)} \\ \Leftrightarrow & 2\psi_0 - 2u_0\psi'(u_0) + 4\psi_0^3 - 8\psi_0^2 u_0\psi'(u_0) + 4\psi_0 u_0^2 (\psi'(u_0))^2 = c_0\psi_0 e^{2(\psi_0^2 + u_0^2)} + \\ & + c_0(\psi'(u_0))^2 \psi_0 e^{2(\psi_0^2 + u_0^2)} \\ \Leftrightarrow & \psi_0(4u_0^2 - c_0 e^{2(\psi_0^2 + u_0^2)})(\psi'(u_0))^2 - 2u_0(1 + 4\psi_0^2)\psi'(u_0) + \psi_0(2 + 4\psi_0^2 - c_0 e^{2(\psi_0^2 + u_0^2)}) = 0 \end{aligned}$$

Logo,  $\psi'(u_0)$  é raiz da função quadrática

$$f(x) = \tilde{a}x^2 + \tilde{b}x + \tilde{c}$$

onde  $\tilde{a} = \psi_0(4u_0^2 - c_0 e^{2(\psi_0^2 + u_0^2)})$ ,  $\tilde{b} = -2u_0(1 + 4\psi_0^2)$  e  $\tilde{c} = \psi_0(2 + 4\psi_0^2 - c_0 e^{2(\psi_0^2 + u_0^2)})$ .

Com isso, podemos calcular as condições para que  $\psi'(u_0)$  seja real. Temos que

$\Delta = \tilde{b}^2 - 4\tilde{a}\tilde{c}$  e portanto, fazendo  $\Lambda = c_0 e^{2(\psi_0^2 + u_0^2)}$ , tem-se que

$$\begin{aligned} \frac{1}{4}\Delta &= u_0^2(1 + 4\psi_0^2)^2 - \psi_0^2(4u_0^2 - c_0 e^{2(\psi_0^2 + u_0^2)})(2 + 4\psi_0^2 - c_0 e^{2(\psi_0^2 + u_0^2)}) \\ &= u_0^2(1 + 8\psi_0^2 + 16\psi_0^4) - \psi_0^2(8u_0^2 - 2\Lambda + 16\psi_0^2 u_0^2 - 4\Lambda\psi_0^2 - 4u_0^2\Lambda + \Lambda^2) \\ &= u_0^2(1 + 4\Lambda\psi_0^2) + \psi_0^2\Lambda(2 + 4\psi_0^2 - \Lambda) \end{aligned}$$

Para que  $u_0^2(1 + 4\Lambda\psi_0^2) = 0$ , é suficiente que  $\Lambda\psi_0^2 = -\frac{1}{4}$ ; como  $\Lambda < 0$  temos que, se  $\Lambda\psi_0^2 < -\frac{1}{4}$ , então  $\Delta < 0$ . Assim,

$$\begin{aligned} \Lambda\psi_0^2 &= c_0\psi_0^2 e^{2(\psi_0^2 + u_0^2)} < -\frac{1}{4} \\ \Leftrightarrow c_0 &< -\frac{1}{4} \left( \frac{1}{\psi_0^2 e^{2(\psi_0^2 + u_0^2)}} \right). \end{aligned}$$

Como  $\psi(0) = b$  e  $\psi_0 > b$ , temos

$$-\frac{1}{4b^2 e^{4b^2}} < -\frac{1}{4\psi_0^2 e^{2(\psi_0^2 + u_0^2)}}$$

Então, para toda constante fixada  $c_0 < 0$ , podemos escolher  $b$  tal que

$$c_0 < -\frac{1}{4b^2 e^{4b^2}}$$

e assim

$$4c_0 b^2 e^{4b^2} < -1$$

donde, nessas condições, não existe solução real  $\psi'(u_0)$  sendo raiz de  $f(x)$ , já que  $\Delta < 0$ , o que é uma contradição. Portanto,  $\psi$  é convexa quando  $4c_0 b^2 e^{4b^2} < -1$ , pois  $\psi''$  é contínua e não assume valor nulo, conseqüentemente, não assume também valores negativos.

O intervalo maximal de definição de  $\psi$  é  $(\omega_-, \omega_+)$  ou um intervalo aberto limitado  $(\omega_-, \omega_+)$  onde

$$\lim_{u \rightarrow \omega_{\pm}} \psi(u) = +\infty$$

Assim, tem-se uma família de superfícies completas com curvatura extrínseca negativa de parâmetro  $b$ .  $\square$

**Corolário 2.5** *Existe uma família a um parâmetro de superfícies completas em  $\mathbb{E}_3$  com curvatura gaussiana  $K_g \leq -\varepsilon < 0$ , onde  $\varepsilon > 0$  é constante.*

*Prova.* Do Teorema (2.4) temos que existe uma família de superfícies com curvatura extrínseca constante negativa  $\tilde{K}_E = c_0$ . Como a curvatura seccional  $K_{sec}$  de  $\mathbb{E}_3$  é negativa, segue da Equação de Gauss

$$K_g - K_{sec} = \tilde{K}_E$$

que a curvatura gaussiana  $K_g$  das superfícies dados pelo Teorema (2.4) satisfaz  $K_g \leq -\varepsilon < 0$ ,  $\varepsilon > 0$  constante.  $\square$

O Corolário (2.5) garante a existência de uma família de superfícies completas imersas isometricamente em  $\mathbb{E}^3$  munido de uma métrica conformemente flat com curvatura gaussiana negativa, isto garante que os Teoremas de Efimov (0.3) e Schlenker (0.4) não são satisfeitos no espaço  $\mathbb{E}_3$ .

# SUPERFÍCIES HELICOIDAIS MÍNIMAS NO ESPAÇO $\mathbb{F}_3$

Também como solução da Equação de Campo de Einstein

$$R_{ij} - \frac{1}{2}Kg_{ij} = T_{ij},$$

onde  $R_{ij}$  e  $K$  são o Tensor de Ricci e a curvatura escalar da métrica  $g_{ij}$ , respectivamente, Araújo, Cui e Pina [3] definem o espaço conformemente flat  $\mathbb{F}_3 = (\mathbb{R}^3, \langle \cdot, \cdot \rangle_g)$ , como sendo o Espaço Euclidiano tridimensional munido da métrica conformemente flat

$$g := g_{ij} = \frac{1}{\varphi^2} \delta_{ij}, \quad \text{onde } \varphi(x) = e^{-(x_1^2 + x_2^2)}, \quad x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3.$$

Neste espaço, os autores estudaram as superfícies helicoidais mínimas, conseguindo mostrar resultados muito interessantes utilizando o teorema análogo ao Teorema (2.1) enunciado por

**Teorema 3.1** *Tome  $\mathbf{x} : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ , com  $U \subset \mathbb{R}^2$  aberto, uma superfície parametrizada regular. Considere  $\mathbf{x}(U)$  como uma superfície em  $(\mathbb{R}^3, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  com a Métrica Euclidiana e denote  $N$  a sua aplicação normal de Gauss,  $\lambda_i$ ,  $H$  e  $K$  as suas curvaturas principais, média e gaussiana, respectivamente. Analogamente, considere  $\mathbf{x}(U)$  como uma superfície em  $\mathbb{F}_3$ , com a métrica conforme à Métrica Euclidiana, com fator conforme  $\varphi^{-2}$  e tome  $\tilde{N}$  a sua aplicação normal de Gauss,  $\tilde{\lambda}_i$ ,  $\tilde{H}$  e  $\tilde{K}_E$  as suas curvaturas principais, média e extrínseca, respectivamente. Então*

$$\tilde{\lambda}_i = \varphi \lambda_i - \langle N, \text{grad } \varphi \rangle,$$

$$\tilde{H} = \varphi H - \langle N, \text{grad } \varphi \rangle,$$

$$\tilde{K}_E = \varphi^2 K - 2H\varphi \langle N, \text{grad } \varphi \rangle + \langle N, \text{grad } \varphi \rangle^2,$$

onde  $\varphi$  denota a expressão de  $\varphi$  em  $\mathbf{x}(u, v)$ ,  $(u, v) \in U$ .

*Prova.* A demonstração do Teorema (3.1) segue de modo análogo à demonstração do Teorema (2.1).  $\square$

Analogamente ao espaço  $\mathbb{E}_3$ , segue-se que  $\mathbb{F}_3$  é um espaço completo. De fato, pelo Teorema (1.9), como  $g$  satisfaz

$$\text{Ric } g = T = \sum_{i,j=1}^n f_{ij} dx_i dx_j,$$

temos que  $g$  é uma métrica completa em  $\mathbb{R}^3$ , portanto,  $\mathbb{F}_3$  é um espaço completo.

### 3.1 Superfície helicoidal

Seja  $\gamma(u) = (u, 0, \lambda(u))$ ,  $u \in I$  uma curva de classe  $C^\infty$  em  $\mathbb{R}^3$  definida em um aberto  $I \subset \mathbb{R}^*$ . Aplicando uma translação helicoidal em  $\gamma$ , onde usualmente o grupo helicoidal é um grupo de isometria definido por uma rotação combinado com uma translação, obtemos a superfície helicoidal  $M^2$  em  $\mathbb{R}^3$  dada por

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(u, v) &= \begin{pmatrix} \cos(v) & -\text{sen}(v) & 0 \\ \text{sen}(v) & \cos(v) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ 0 \\ \lambda(u) \end{pmatrix} + h \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ v \end{pmatrix} \\ &= (u \cos(v), u \text{sen}(v), \lambda(u) + hv), \end{aligned}$$

onde  $h$  é uma constante chamada *passo*. Note que, se  $h = 0$ , a superfície helicoidal se torna uma superfície de rotação e se  $h \neq 0$  e  $\lambda \equiv \text{constante}$ , a superfície helicoidal passa a ser um helicóide.

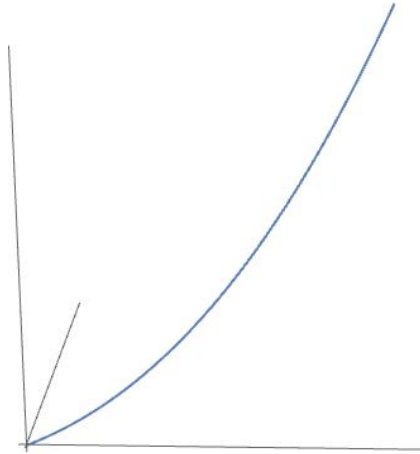
Como exemplo, a Figura (3.1) mostra a curva  $\gamma(u) = (u, 0, u^2)$ , onde tomamos particularmente  $\lambda(u) = u^2$  e  $I = (0, 1)$ .

A translação helicoidal da curva  $\gamma$  representada na Figura (3.1) com passo  $h = 1$  está representada na Figura (3.2), com  $u \in (0, 1)$  e  $v \in (0, 2\pi)$ .

Seja o Espaço Euclidiano  $(\mathbb{R}^3, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  munido da Métrica Euclidiana  $\delta = \langle \cdot, \cdot \rangle$ . A partir da parametrização da superfície helicoidal  $M^2$ , temos

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_{,u} &= (\cos(v), \text{sen}(v), \lambda'(u)) \\ \mathbf{x}_{,v} &= (-u \text{sen}(v), u \cos(v), h) \\ \mathbf{x}_{,uu} &= (0, 0, \lambda''(u)) \\ \mathbf{x}_{,uv} &= (-\text{sen}(v), \cos(v), 0) \\ \mathbf{x}_{,vv} &= (-\cos(v), -u \text{sen}(v), 0) \end{aligned}$$

Assim, a aplicação normal de Gauss e os coeficientes da primeira e segunda

**Figura 3.1:** Curva  $\gamma(u) = (u, 0, u^2)$ .

Fonte: Wolfram Mathematica<sup>©</sup>.

formas quadráticas de  $M^2$  em  $(\mathbb{R}^3, \delta)$  são dados respectivamente por

$$N = \frac{1}{\alpha} (h \operatorname{sen}(v) - u\lambda'(u) \cos(v), -u\lambda'(u) \operatorname{sen}(v) - h \cos(v), u)$$

onde  $\alpha = [u^2(1 + (\lambda'(u))^2) + h^2]^{\frac{1}{2}}$ ;

$$E = 1 + [\lambda'(u)]^2, \quad F = h\lambda'(u), \quad G = u^2 + h^2;$$

$$e = \frac{u\lambda''(u)}{\alpha}, \quad f = -\frac{h}{\alpha}, \quad g = \frac{u^2\lambda''(u)}{\alpha}.$$

Com isso, temos que a curvatura média de  $M^2$  em  $(\mathbb{R}^3, \delta)$  é expressa por

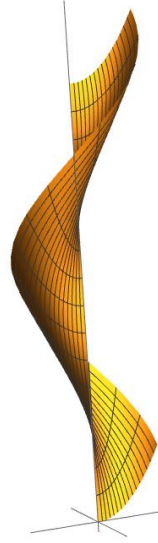
$$H = \frac{[1 + (\lambda'(u))^2]u^2\lambda''(u) + 2h^2\lambda''(u) + (u^2 + h^2)u\lambda''(u)}{2\alpha^{\frac{3}{2}}}. \quad (3-1)$$

## 3.2 Superfícies helicoidais mínimas em $\mathbb{F}_3$

Por definição, uma superfície é dita mínima quando sua curvatura média é identicamente nula (ver Definição 1.35). Assim, se considerarmos uma superfície mínima  $S$  no Espaço Euclidiano  $\mathbb{R}^3$  tal que  $H$  é sua curvatura média, temos, pelo Teorema (3.1), que esta superfície em  $\mathbb{F}_3$  continuará sendo uma superfície mínima<sup>1</sup> se, e somente se,

$$\langle N, \operatorname{grad} \varphi \rangle = 0.$$

<sup>1</sup>Isto é,  $H = \tilde{H} = 0$ .

**Figura 3.2:** *Translação helicoidal da curva  $\gamma$ .*

Fonte: Wolfram Mathematica<sup>©</sup>.

Como

$$\begin{aligned}\langle N, \text{grad } \varphi \rangle &= \langle N, (-2x_1\varphi, -2x_2\varphi, 0) \rangle \\ &= -2\varphi \langle N, (x_1, x_2, 0) \rangle\end{aligned}$$

Temos que a superfície mínima no Espaço Euclidiano  $S$  é mínima em  $\mathbb{F}_3$  se, e somente se,

$$\langle N, (x_1, x_2, 0) \rangle = 0.$$

Note que  $-2\varphi$  não se anula em nenhum ponto de  $\mathbb{R}^3$ .

Assim, tomando uma superfície helicoidal  $M$  em  $\mathbb{F}_3$ , como restringimos  $\varphi$  a  $M$ , temos que se a superfície helicoidal  $M$  é mínima no Espaço Euclidiano,  $M$  também será mínima em  $\mathbb{F}_3$  se, e somente se,

$$\begin{aligned}\langle N, (x_1, x_2, 0) \rangle &= 0 \\ \Leftrightarrow \langle N, (u \cos(v), u \sin(v), 0) \rangle &= 0 \\ \Leftrightarrow \frac{1}{\alpha} [(h \sin(v) - u\lambda'(u) \cos(v))u \cos(v) + (-u\lambda'(u) \sin(v) - h \cos(v))u \sin(v)] \\ \Leftrightarrow \frac{1}{\alpha} (-u^2\lambda'(u)) &= 0,\end{aligned}$$

ou seja, quando  $\lambda'(u) = 0$ , o que implica em  $\lambda(u) = k$  constante. Isto é justamente o caso dos helicoides.

Pela Equação (3-1), temos que se uma superfície helicoidal  $M$  possui a condição de  $\lambda'(u) = 0$ ,  $M$  é mínima no Espaço Euclidiano e portanto é mínima em  $\mathbb{F}_3$ .

O Teorema (3.3) irá tratar mais especificamente destas superfícies helicoidais



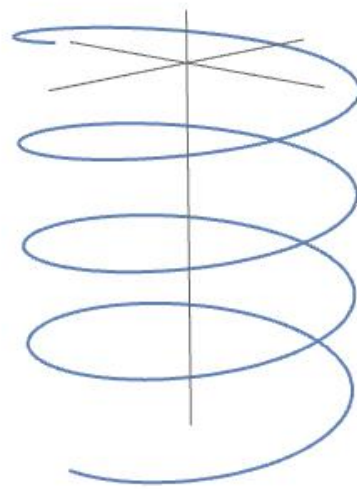
chamadas helicoides<sup>2</sup>. Os helicoides são formados por semirretas que partem do eixo  $x_3$  e interceptam a hélice

$$\psi(v) = (\cos v, \sin v, k + hv),$$

com  $k$  é constante. Elas são superfícies mínimas regulares completas no Espaço Euclidiano. Além dos helicoides, tem-se conhecimento de mais três classes de superfícies mínimas regulares completas no Espaço Euclidiano. São elas: o plano, a catenoide e a superfície Costa.

A Figura (3.3) mostra uma hélice com  $k = h = 1$  e  $v \in (-4\pi, 4\pi)$ .

**Figura 3.3:** Hélice  $\psi(v) = (\cos v, \sin v, 1 + v)$ .



Fonte: Wolfram Mathematica<sup>©</sup>.

Para os resultados desta seção, será necessário o Lema (3.2), a seguir. Este lema caracteriza as superfícies helicoidais em  $\mathbb{F}_3$ .

**Lema 3.2** Tome  $M^2$  a superfície helicoidal  $\mathbf{x} : U \rightarrow \mathbb{F}_3$ , com  $U \subset \mathbb{R}^2$  dada por

$$\mathbf{x}(u, v) = (u \cos(v), u \sin(v), \lambda(u) + hv),$$

onde  $h \in \mathbb{R}$  é uma constante e  $\lambda : I \rightarrow \mathbb{R}$  é uma função  $C^\infty$ , com  $I \subset \mathbb{R}^*$ , um intervalo aberto. Então,  $M^2$  é uma superfície mínima em  $\mathbb{F}_3$  se, e somente se, a equação diferencial ordinária

$$\frac{(u^2 + h^2)u\lambda''(u) + (1 + (\lambda'(u))^2)u^2\lambda'(u) + 2h^2\lambda'(u)}{2[u^2(1 + (\lambda'(u))^2) + h^2]^{\frac{3}{2}}} = 2u^2A, \quad (3-2)$$

<sup>2</sup>Se  $\lambda \equiv 0$ , temos justamente a parametrização do helicoides dada em [6, p. 111].

onde  $A = \lambda'(u)[u^2(1 + (\lambda'(u))^2) + h^2]^{-\frac{1}{2}}$ , é satisfeita.

*Prova.* Pelo Teorema (3.1), a curvatura média  $\tilde{H}$  de  $M^2$  em  $\mathbb{F}_3$  é dada por

$$\tilde{H} = \varphi H - \langle N, \text{grad } \varphi \rangle,$$

onde  $\varphi$  denota a expressão de  $\varphi$  em  $\mathbf{x}(u, v)$ ,  $H$  é a curvatura média e  $N$  é a aplicação normal de Gauss de  $M^2$  em  $(\mathbb{R}^3, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ . Pela definição de  $\mathbb{F}_3$ , temos que  $\text{grad } \varphi = -2\varphi(x_1, x_2, 0)$ . Assim,

$$\text{grad } \varphi(\mathbf{x}(u, v)) = -2u\varphi(\cos(v), \text{sen}(v), 0).$$

Com isso, temos

$$\begin{aligned} \langle N, \text{grad } \varphi \rangle &= -\frac{2u\varphi}{\alpha}(h \text{sen}(v) \cos(v) - u\lambda'(u) \cos^2(v) - u\lambda'(u) \text{sen}^2(v) - h \text{sen}(v) \cos(v)) \\ &= \frac{2u^2\lambda'(u)\varphi}{\alpha} \end{aligned}$$

Logo,  $\mathbf{x}(u, v)$  é superfície mínima se, e somente se,

$$\begin{aligned} \tilde{H} &= 0 \\ \Leftrightarrow \frac{F}{\alpha} \left( \frac{(u^2+h^2)u\lambda''(u) + (1+(\lambda'(u))^2)u^2\lambda'(u) + 2h^2\lambda'(u)}{2\alpha^{\frac{1}{2}}} - 2u^2\lambda'(u) \right) &= 0 \\ \Leftrightarrow (u^2+h^2)u\lambda''(u) + (1+(\lambda'(u))^2)u^2\lambda'(u) + 2h^2\lambda'(u) - 4\alpha^{\frac{1}{2}}u^2\lambda'(u) &= 0 \\ \Leftrightarrow \frac{(u^2+h^2)u\lambda''(u) + (1+(\lambda'(u))^2)u^2\lambda'(u) + 2h^2\lambda'(u)}{2[u^2(1+(\lambda'(u))^2) + h^2]^{\frac{3}{2}}} &= 2u^2A, \end{aligned}$$

onde  $A = \lambda'(u)[u^2(1 + (\lambda'(u))^2) + h^2]^{-\frac{1}{2}}$ . □

Utilizando o valor de  $A$  é possível simplificar ainda mais a Equação Diferencial Ordinária (3-2), contudo, pela importância que  $A$  desempenhará no Teorema (3.4), não simplificamos ainda mais esta equação.

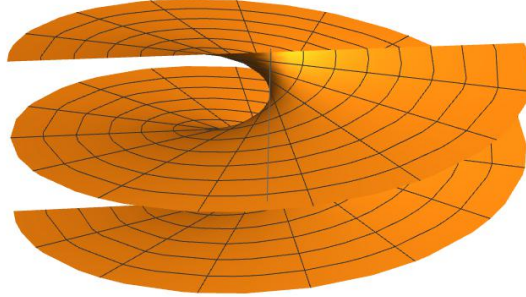
**Teorema 3.3** Tome  $M^2$  um helicóide cuja parametrização  $\mathbf{x} : U \rightarrow \mathbb{F}_3$ , com  $U \subset \mathbb{R}^3$  aberto, é dada por

$$\mathbf{x}(u, v) = (u \cos v, u \text{sen } v, k + hv),$$

onde  $h \neq 0$  e  $k$  são constantes. Então,  $M^2$  é uma superfície mínima completa em  $\mathbb{F}_3$ .

*Prova.* Temos que  $\lambda(u) = k$  é solução trivial para a Equação Diferencial Ordinária (3-2), portanto, pelo Lema (3.2), o helicóide  $M^2$  é uma superfície mínima em  $\mathbb{F}_3$ . Como  $M^2$  é fechada em  $\mathbb{F}_2$ , que é uma variedade completa, temos que  $M^2$  é uma superfície mínima completa em  $\mathbb{F}_3$ . □

Fazendo  $k = h = 1$ , com  $u \in (-10, 10)$  e  $v \in (0, 2\pi)$ , temos a Figura (3.4).

**Figura 3.4:** Helicoide  $\mathbf{x}(u, v) = (u \cos v, u \sin v, 1 + v)$ .

Fonte: Wolfram Mathematica<sup>©</sup>.

**Teorema 3.4** Tome  $M^2$  uma superfície helicoidal em  $\mathbb{F}_3$  cuja parametrização  $\mathbf{x}: U \rightarrow \mathbb{F}_3$ , onde  $U \subset \mathbb{R}^2$  aberto, é dada por

$$\mathbf{x}(u, v) = (u \cos(v), u \sin(v), \lambda(u) + hv), \quad (3-3)$$

onde  $\lambda(u)$  é uma função de classe  $C^2$ ,  $h \in \mathbb{R}$  é uma constante. Então, para qualquer  $K_1 \in \left(0, \frac{1}{2}e^{(-\frac{1}{2})}\right)$  existe  $\delta(K_1) > 0$  e um intervalo aberto  $I_\delta = \left(\frac{1}{2} - \delta, \frac{1}{2} + \delta\right)$ , tal que a função  $\lambda$  é dada explicitamente por

$$\lambda(u) = \pm \int \frac{K_1 e^{2u^2[u^2+h^2]^{\frac{1}{2}}}}{u[u^2 - K_1^2 e^{4u^2}]^{\frac{1}{2}}} du + K_2, \quad \forall u \in I_\delta,$$

onde  $K_2$  é uma constante.

*Prova.* Da Equação Diferencial Ordinária (3-2), temos que a expressão de  $A$  é dada por

$$A(u) = \frac{\lambda'(u)}{[u^2(1 + (\lambda'(u))^2) + h^2]^{\frac{1}{2}}} = \frac{\lambda'(u)}{\alpha}$$

donde podemos calcular sua derivada, obtendo

$$A'(u) = \frac{\alpha \lambda''(u) - \alpha' \lambda'(u)}{\alpha^2},$$

onde  $\alpha = [u^2(1 + (\lambda'(u))^2) + h^2]^{\frac{1}{2}}$ .

Da expressão de  $\alpha$  temos também que

$$\alpha'(u) = \frac{u(1 + (\lambda'(u))^2) + u^2\lambda'(u)\lambda''(u)}{\alpha}$$

Com isso,

$$\begin{aligned} 2A + uA' &= 2\frac{\lambda'}{\alpha} + \frac{u}{\alpha^2}(\alpha\lambda'' - \alpha'\lambda') \\ &= \frac{2\lambda' + u\lambda''}{\alpha} - \frac{u\alpha'\lambda'}{\alpha^2} \\ &= \frac{2\lambda' + u\lambda''}{\alpha} - \frac{u[u(1 + (\lambda')^2) + u^2\lambda'\lambda'']\lambda'}{\alpha^3} \\ &= \frac{2\lambda'\alpha^2 + u\alpha^2\lambda'' - \lambda'u^2(1 + (\lambda')^2) - (\lambda')^2u^3\lambda''}{\alpha^3} \\ &= \frac{u\lambda''(\alpha^2 - u^2(\lambda')^2) - \lambda'u^2(1 + (\lambda')^2) + 2\lambda'\alpha^2}{\alpha^3} \\ &= \frac{u\lambda''(u^2 + h^2) + 2\lambda'(u^2 + u^2(\lambda')^2 + h^2) - \lambda'u^2(1 + (\lambda')^2)}{\alpha^3} \\ &= \frac{u\lambda''(u^2 + h^2) + 2\lambda'u^2 + 2u^2(\lambda')^3 + 2\lambda'h^2 - \lambda'u^2 - u^2(\lambda')^3}{\alpha^3} \\ &= \frac{u\lambda''(u^2 + h^2) + 2\lambda'h^2 + u^2\lambda'(1 + (\lambda')^2)}{\alpha^3} \\ &= 4u^2A, \end{aligned}$$

pelo Lema (3.2), já que  $M^2$  é uma superfície mínima em  $\mathbb{F}_3$ .

Daí,

$$\begin{aligned} A + \frac{u}{2}A' &= 2u^2A \\ \Leftrightarrow A' &= 2A(2u - \frac{1}{u}). \end{aligned}$$

Logo,

$$\frac{A'}{A} = 4u - \frac{2}{u}. \quad (3-4)$$

Integrando a Equação (3-4) com respeito a  $u$ , obtemos

$$\begin{aligned} \ln|A| &= 2u^2 - \ln u^2 + K_0 \\ \Leftrightarrow |A| &= K_1 e^{2u^2 - \ln u^2}, \quad K_1 = e^{K_0} > 0 \\ \Leftrightarrow \frac{(\lambda')^2}{\alpha^2} &= K_1^2 e^{2(2u^2 - \ln u^2)} \\ \Leftrightarrow (\lambda')^2 &= \alpha^2 K_1^2 e^{2(2u^2 - \ln u^2)} \\ \Leftrightarrow (\lambda')^2 \left(1 - K_1^2 u^2 e^{2(2u^2 - \ln u^2)}\right) &= K_1^2 e^{2(2u^2 - \ln u^2)} (u^2 + h^2). \end{aligned}$$

onde  $K_0$  é uma constante de integração.

Para mostrar a existência de  $\delta(K_1) > 0$ , note que  $1 - K_1^2 u^2 e^{2(2u^2 - \ln u^2)} > 0$  se, e somente se,  $K_1 < \frac{u}{e^{2u^2}}$ . Do processo de integração, temos que para qualquer  $K_1 > 0$ , é possível escolher uma constante  $K_0$  tal que  $e^{K_0} = K_1$ .

Agora, defina a função  $f := \frac{u}{e^{2u^2}}$ . Note que  $f$  é contínua em toda a reta. Sua derivada, dada por

$$f'(u) = \frac{1 - 4u^2}{e^{2u^2}},$$

se anula em  $u = \pm \frac{1}{2}$ . Assim,  $f$  assume seu máximo em  $u = \frac{1}{2}$ , já que  $f(-\frac{1}{2}) < f(\frac{1}{2})$ , e é dado por  $f(\frac{1}{2}) = \frac{1}{2}e^{-\frac{1}{2}}$ . Portanto, se  $K_1 \in (0, \frac{1}{2}e^{-\frac{1}{2}})$  existe  $\delta = \delta(K_1) > 0$  tal que  $K_1 < f(u)$ ,  $\forall u \in I_\delta = (\frac{1}{2} - \delta, \frac{1}{2} + \delta)$ .

Com isso, temos que para todo  $u \in I_\delta$

$$\begin{aligned} (\lambda'(u))^2 &= \frac{K_1^2 e^{2(2u^2 - \ln u^2)} (u^2 + h^2)}{1 - K_1^2 u^2 e^{2(2u^2 - \ln u^2)}} \\ &= \frac{K_1 e^{4u^2} (u^2 + h^2)}{u^4 (1 - K_1^2 \frac{1}{u^2} e^{4u^2})} \\ &= \frac{K_1^2 e^{4u^2} (u^2 + h^2)}{u^2 (u^2 - K_1^2 u^2 e^{4u^2})} \end{aligned}$$

Integrando com respeito a  $u$ , temos a solução geral para  $\lambda(u)$  dada por

$$\lambda(u) = \pm \int \frac{K_1 e^{2u^2} (u^2 + h^2)^{\frac{1}{2}}}{u (u^2 - K_1^2 e^{4u^2})^{\frac{1}{2}}} du + K_2,$$

onde  $K_2$  é uma constante de integração, provando, assim, o teorema.  $\square$

O próximo teorema mostra que a recíproca do Teorema (3.4) é válida.

**Teorema 3.5** Tome  $h$  e  $K_2$  constantes arbitrárias. Então, para qualquer  $K_1 \in (0, \frac{1}{2}e^{-\frac{1}{2}})$  existe  $\delta = \delta(K_1) > 0$  e um intervalo aberto  $I_\delta = (\frac{1}{2} - \delta, \frac{1}{2} + \delta)$  tal que a função

$$\lambda_{h, K_2} = \int \frac{K_1 e^{2u^2} (u^2 + h^2)^{\frac{1}{2}}}{u (u^2 - K_1^2 e^{4u^2})^{\frac{1}{2}}} du + K_2$$

está bem definida em  $I_\delta$ . Mais ainda, após aplicar uma translação helicoidal sobre a curva  $\gamma(u) = (u, 0, \lambda_{h, K_2}(u))$ ,  $u \in I_\delta$ , uma superfície helicoidal dada por (3-3) com  $U = I_\delta \times \mathbb{R} \subset \mathbb{R}^2$  é obtida. Em particular, essa superfície é mínima em  $\mathbb{F}_3$ .

*Prova.* Para qualquer  $K_1 \in (0, \frac{1}{2}e^{-\frac{1}{2}})$  existe um número  $K_0$  tal que  $K_1 = e^{K_0}$ . Como a função  $f := \frac{u}{e^{2u^2}}$  é contínua e assume seu máximo em  $f(\frac{1}{2}) = \frac{1}{2}e^{-\frac{1}{2}}$ , existe  $\delta = \delta(K_1) > 0$  tal que  $K_1 < f(u)$ ,  $\forall u \in I_\delta := (\frac{1}{2} - \delta, \frac{1}{2} + \delta)$ . Portanto,

$$u^2 - K_1^2 e^{4u^2} > 0, \quad \forall u \in I_\delta,$$

e a função

$$\lambda_{h, K_2} = \int \frac{K_1 e^{2u^2} (u^2 + h^2)^{\frac{1}{2}}}{u (u^2 - K_1^2 e^{4u^2})^{\frac{1}{2}}} du + K_2 \quad (3-5)$$

está bem definida em  $I_\delta$ .

Pelo Teorema (3.3), temos que a Função (3-5) é solução de (3-4), logo, aplicando uma translação helicoidal sobre a curva  $\gamma(u) = (u, 0, \lambda_{h, K_2}(u))$ ,  $u \in I_\delta$ , temos uma superfície helicoidal de deslocamento  $h$  dado por (3-5), onde  $U = I_\delta \times \mathbb{R} \subset \mathbb{R}^2$ . Pelo Lema (3.2), temos que essa superfície helicoidal é uma superfície mínima em  $\mathbb{F}_3$ .  $\square$

---

## CONCLUSÃO

---

A Geometria Riemanniana vem sendo estudada e desenvolvida ao longo do tempo. Gauss, Riemann, Hilbert e inúmeros outros matemáticos deram contribuições de suma importância para a teoria; definindo objetos que até hoje são estudados; mostrando resultados que foram e ainda são fundamentais para o estudo. No caso de superfícies de dimensão 2 em  $\mathbb{R}^3$  e mais geralmente em hipersuperfícies, um destes conceitos é o de curvatura extrínseca que vem sendo estudado largamente nos espaços conformemente flat.

As superfícies de dimensão 2 em  $\mathbb{R}^3$  recebem o nome de *Superfícies Abstratas* em [6]. Os resultados a cerca destas superfícies foram fundamentais para a realização deste trabalho, onde fizemos uso de conceitos importantes como primeira e segunda formas fundamentais, e, de curvaturas, como curvatura gaussiana, curvatura extrínseca e curvatura média.

No espaço conformalmente flat  $\mathbb{E}_3$ , vimos a existência de superfícies de rotação com curvatura extrínseca constante negativa. Como o espaço  $\mathbb{E}_3$  possui curvatura seccional também negativa, mostramos, utilizando a equação de Gauss, que em tal espaço existem superfícies completas (de rotação) com curvatura gaussiana limitada por uma constante negativa. Este fato se mostra de grande importância, pois garante a não validade de teoremas importantes no espaço  $\mathbb{E}_3$ , como é o caso dos teoremas de Efimov e de Schlenker, que são generalizações do famoso Teorema de Hilbert.

No espaço conformemente flat  $\mathbb{F}_3$ , mostramos resultados importantes a cerca das superfícies helicoidais mínimas, ou seja, as superfícies helicoidais que possuem curvatura média identicamente nula. Neste sentido, tais superfícies foram caracterizadas e, além do mais, expressamos explicitamente a função  $\lambda$  que fornece garantias de que uma superfície helicoidal é mínima. Notamos também, que somente os helicoides, ou seja, as superfícies helicoidais cuja função  $\lambda$  é constante, são as superfícies helicoidais mínimas simultaneamente em  $\mathbb{R}^3$  e  $\mathbb{F}_3$ .

Naturalmente, os estudos a cerca dos espaços conformemente flat e, especificamente, sobre os espaços  $\mathbb{E}_3$  e  $\mathbb{F}_3$  continuam. Podemos citar, por exemplo, o trabalho *On Helicoidal Surfaces in a Conformally Flat 3-Space* [12] que explicita parametrizações de superfícies helicoidais no espaço conformemente flat  $\mathbb{E}_F^3$ .

---

## Referências Bibliográficas

---

- [1] ALVAREZ, Y. N. **Superfícies mínimas completas e limitadas em  $\mathbb{R}^3$** . Master's thesis, Departamento de Matemática, PUC-Rio, 2015.
- [2] AMORIM, R. G. G.; ULHOA, S.; ROCHA, P. M. M.; PAIVA, R. A. S. **Elementos de geometria riemaniana: Análise da esfera  $S^2$** . *Revista Brasileira de Ensino de Física*, 37(2):2302–1–2302–9, 2015.
- [3] ARAÚJO, K. O.; CUI, N.; PINA, R. **Helicoidal minimal surfaces in a conformally flat 3-space**. *Bull. Korean Math. Soc.*, 53(2):531–540, 2015.
- [4] BERGER, M. **Riemannian geometry during the second half of the twentieth century**. American Mathematical Society, Providence, 2002.
- [5] CORRO, A. V.; PINA, R.; SOUZA, M. **Surfaces of rotation with constant extrinsic curvature in a conformally flat 3-space**. *Results. Math*, 60:225–234, 2011.
- [6] DoCARMO, M. P. **Geometria diferencial de curvas e superfícies**. IMPA, Rio de Janeiro, 2012.
- [7] DoCARMO, M. P. **Geometria riemanniana**. SBM, Rio de Janeiro, 2015.
- [8] EFIMOV, N. V. **Generation of singularities on surfaces of negative curvature**. *Mat. Sb.*, 64(2):286–320, 1964.
- [9] EFIMOV, N. V. **Surfaces with a slowly changing negative curvature**. *Russian Math. Surv.*, 5(131):01–56, 1966.
- [10] ESPINAR, J. M.; GÁLVEZ, J. A.; ROSENBERG, H. **Complete surfaces with positive extrinsic curvature in product spaces**. *Comm. Math. Helv.*, 84(2):351–386, 2009.
- [11] FERNANDEZ, I.; MIRA, P. **Harmonic maps and constant mean curvature surfaces in  $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$** . *American Journal of Mathematics*, 129(4):1145–1181, 2007.



- [12] LEE, C. W.; LEE, J. W.; YOON, D. W. **On helicoidal surfaces in a conformally flat 3-space**. *Medt. J. of Math*, 14(164), 2017.
- [13] LIMA, E. L. **Variedades diferenciáveis**. IMPA, Rio de Janeiro, 2011.
- [14] MENDES, R. O. **O teorem de efimov**. Master's thesis, Departamento de Matemática, UFPE, 2006.
- [15] OLIVEIRA, P. R.; NETO, J. X. C. **Elementos de Geometria Riemanniana**. COPPE, Rio de Janeiro, 1994.
- [16] PINA, R.; TENENBLAT, K. **On solutions of the ricci curvature equation and the einstein equation**. *Israel J. Math.*, 171(1):61–76, 2009.
- [17] ROQUE, T. **História da Matemática: uma visão crítica, desfazendo mitos e lendas**. Zahar, Rio de Janeiro, 2012.
- [18] SCHLENKER, J. M. **Surfaces à courbure extrinsèque négative dans l'espace hyperbolique**. *Ann. Scient. Éc. Norm. Sup. 4<sup>e</sup>*, 34:079–130, 2001.
- [19] SOTOMAYOR, J. **Lições de equações diferenciais ordinárias, IMPA, Rio de Janeiro**. 1979.
- [20] STEPHANI, H.; KRAMER, D.; MACCALLUM, M.; HOENELAERS, C.; HERLT, E. **Exact solutions of Einstein field equations**. Cambridge University Press, Cambridge, 2003.
- [21] VIEIRA, B. V. M. **Superfícies de rotação com curvatura extrínseca constante em um espaço tridimensional conformemente plano**. Master's thesis, Centro de Ciências da Natureza, UFPI, 2014.