Universidade Federal de Goiás
Faculdade de Filosofia

Investigações em Semânticas Construtivas

Hermógenes Hebert Pereira Oliveira

Goiânia
2014

TERMO DE CIÊNCIA E DE AUTORIZAÇÃO PARA DISPONIBILIZAR AS TESES E DISSERTAÇÕES ELETRÔNICAS (TEDE) NA BIBLIOTECA DIGITAL DA UFG

Na qualidade de titular dos direitos de autor, autorizo a Universidade Federal de Goiás (UFG) a disponibilizar, gratuitamente, por meio da Biblioteca Digital de Teses e Dissertações (BDTD/UFG), sem ressarcimento dos direitos autorais, de acordo com a Lei nº 9610/98, o documento conforme permissões assinaladas abaixo, para fins de leitura, impressão e/ou *download*, a título de divulgação da produção científica brasileira, a partir desta data.

1 **1. Identificação do material bibliográfico**: **[X] Dissertação** **[ ] Tese**

1

2 **2. Identificação da Tese ou Dissertação**

Autor (a):	Hermógenes Hebert Pereira Oliveira		
E-mail:	hhebert@sdf.org		
Seu e-mail pode ser disponibilizado na página? [ ]Sim [X] Não			
Vínculo empregatício do autor			
Agência de fomento:	Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior	Sigla:	CAPES
País: Brasil	UF: GO	CNPJ:	
Título:	Investigações em Semânticas Construtivas		
Palavras-chave:	validade lógica, intuicionismo lógico, teoria das demonstrações, teoria do significado		
Título em outra língua:	Investigations on Proof-Theoretic Semantics		
Palavras-chave em outra língua:	logical validity, logical intuitionism, proof theory, meaning theory		
Área de concentração:	Lógica		
Data defesa: (dd/mm/aaaa)	14/02/2014		
Programa de Pós-Graduação:	Programa de Pós-Graduação em Filosofia		
Orientador (a):	Prof. Dr. Wagner de Campos Sanz		
E-mail:	wsanz@uol.com.br		
Co-orientador (a):*			
E-mail:			

*Necessita do CPF quando não constar no SisPG

3. Informações de acesso ao documento:

Concorda com a liberação total do documento [X] SIM [ ] NÃO[1]

Havendo concordância com a disponibilização eletrônica, torna-se imprescindível o envio do(s) arquivo(s) em formato digital PDF ou DOC da tese ou dissertação.

O sistema da Biblioteca Digital de Teses e Dissertações garante aos autores, que os arquivos contendo eletronicamente as teses e ou dissertações, antes de sua disponibilização, receberão procedimentos de segurança, criptografia (para não permitir cópia e extração de conteúdo, permitindo apenas impressão fraca) usando o padrão do Acrobat.

____________________________________ Data: ____ / ____ / _____

Assinatura do (a) autor (a)

[1] Neste caso o documento será embargado por até um ano a partir da data de defesa. A extensão deste prazo suscita justificativa junto à coordenação do curso. Os dados do documento não serão disponibilizados durante o período de embargo.

HERMÓGENES HEBERT PEREIRA OLIVEIRA

Investigações em Semânticas Construtivas

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Filosofia da Universidade Federal de Goiás, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Filosofia.

Linha de Pesquisa: Filosofia
Orientador: Prof. Dr. Wagner de Campos Sanz

Goiânia
2014

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)
GPT/BC/UFG

O48i	Oliveira, Hermógenes Hebert Pereira Investigações em Semânticas Construtivas [manuscrito] / Hermógenes Hebert Pereira Oliveira. – 2014. 77f. Orientador: Prof. Wagner de Campos Sanz Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal de Goiás, Faculdade de Filosofia, 2014. Bibliografia. 1. Semântica (Filosofia) 2. Lógica 3. Teoria das demonstrações I. Título. CDU: 16:81'37

HERMÓGENES HEBERT PEREIRA OLIVEIRA

Investigações em Semânticas Construtivas

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Filosofia da Universidade Federal de Goiás como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Filosofia, aprovado em 14 de fevereiro de 2014, pela Banca Examinadora constituída pelos professores abaixo assinados.

Prof. Dr. Wagner de Campos Sanz
Presidente da Banca

Prof. Dr. Vaston Gonçalves da Costa
Universidade Federal de Goiás – UFG

Prof. Dr. Luiz Carlos Pinheiro Dias Pereira
Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro – PUC-Rio

Para Márcia, com amor

Agradecimentos

O Professor Wagner Sanz me concedeu acesso irrestrito à sua pesquisa e foi o meu principal interlocutor filosófico durante os últimos quatro anos. Pela paciência em suportar minha teimosia intelectual e pela liberdade que sempre gozei em nossas discussões e conversas, ele tem a minha sincera gratidão. Enquanto lutava com muitos problemas filosóficos e técnicos, eu me beneficiei muito com as discussões que mantive com Diego Pinheiro Fernandes e Bruno Rigonato Mundim. Ademais, reconheço o apoio financeiro concedido pela CAPES no período entre março de 2011 a fevereiro de 2012. Agradeço também aos Professores Alexandre Costa-Leite e Vaston Gonçalves Costa que leram um rascunho preliminar e fizeram sugestões e correções muito úteis.

Resumo

Oliveira, Hermógenes Hebert Pereira. **Investigações em Semânticas Construtivas**. Goiânia, 2014. 76 páginas. Dissertação de Mestrado. Faculdade de Filosofia, Universidade Federal de Goiás.

As semânticas construtivas oferecem uma nova abordagem semântica para as constantes lógicas. Essas semânticas gozam de fortes motivações filosóficas advindas da filosofia da linguagem e da filosofia da matemática. Nós investigamos essa nova abordagem semântica da lógica e sua concepção de validade lógica sob a luz de suas próprias aspirações filosóficas, em especial aquelas representadas pelo trabalho de Dummett (1991). Dentre nossos resultados, destacamos a validade da Regra de Peirce em relação ao procedimento justificatório baseado nas regras de introdução para as constantes lógicas proposicionais. Essa é uma situação indesejável, pois a Regra de Peirce não é considerada aceitável de um ponto de vista construtivo. Por outro lado, verificamos que o procedimento justificatório baseado nas regras de eliminação atesta a invalidade dessa mesma regra. Tecemos alguns comentários a respeito das consequências desse cenário para o projeto filosófico de Dummett e para as semânticas construtivas em geral.

Palavras-chave intuicionismo lógico, teoria das demonstrações, teoria do significado, validade lógica

Abstract

Oliveira, Hermógenes Hebert Pereira. **Investigações em Semânticas Construtivas**. Goiânia, 2014. 76 pages. Master's Dissertation. Faculdade de Filosofia, Universidade Federal de Goiás.

Proof-theoretic Semantics provides a new approach to the semantics of logical constants. It has compelling philosophical motivations which are rooted deeply in the philosophy of language and the philosophy of mathematics. We investigate this new approach of logical semantics and its perspective on logical validity in the light of its own philosophical aspirations, especially as represented by the work of Dummett (1991). Among our findings, we single out the validity of Peirce's rule with respect to a justification procedure based on the introduction rules for the propositional logical constants. This is an undesirable outcome since Peirce's rule is not considered to be constructively acceptable. On the other hand, we also establish the invalidity of the same inference rule with respect to a justification procedure based on the elimination rules for the propositional logical constants. We comment on the implications of this scenario to Dummett's philosophical programme and to proof-theoretic semantics in general.

Keywords logical intuitionism, proof theory, meaning theory, logical validity

O intuicionismo é um escândalo para aqueles que pensam que a filosofia não importa, ou que ela não pode afetar nada fora de si mesma, ou ainda que algumas coisas são sacrosantas e além do alcance da interferência filosófica, e que entre elas estão as práticas sedimentadas dos matemáticos.

Elementos do Intuicionismo
Michael Dummett

Sumário

Prefácio

O leitor tem em mãos a tradução de um texto escrito em outro idioma. Tivesse sido escrito originalmente em língua portuguesa, é provável que a ordem de apresentação, o foco argumentativo em algumas passagens e o emprego da terminologia técnica fossem diferentes. Como substituto imperfeito à dedicação e cuidado que um bom texto em língua portuguesa demanda, decidi apenas comentar as formulações insatisfatórias, a terminologia obscura e os períodos mal construídos nas páginas que se seguem.

A primeira dificuldade na adaptação do texto para a língua portuguesa aparece logo no nome da área de pesquisa, tema principal da dissertação, e, consequentemente, mencionada no título do trabalho. O termo empregado internacionalmente para se referir à área de pesquisa, "proof-theoretic semantics", faz uso de um recurso da língua inglesa para construção de locuções adjetivas que não encontra exato paralelo na língua portuguesa. Em inglês, é possível construirmos modificadores adjetivos mediante a união de duas palavras por hífen, como em "man-eating shark". Embora também possamos compor palavras com hífen em português, essas construções se limitam, em grande parte, a substantivos compostos, como em "guarda-chuvas". Podemos encontrar notáveis excessões em adjetivos pátrios como "greco-romano". Contudo, ainda que não introduza nenhuma catástrofe linguística ou comunicativa, uma transcrição demasiado literal para o português, digamos, "semântica prova-teórica", soa agudamente estranho a ouvidos lusófonos.

O termo que escolhi para designar o tema da dissertação possui acepção mais geral e refere-se a uma família de teorias semânticas inspiradas pela filosofia da matemática intuicionista, ou construtivista, especialmente teorias inspiradas pelas cláusulas BHK. A escolha não é de todo inadequada, uma vez que entre essas teorias certamente se enquadra a proposta de Dummett, investigada detalhadamente no trabalho, pois, embora temperada pelas ideias de Gentzen, ainda se apoia fortemente em BHK.

Porém, como consequência da minha escolha, o termo utilizado, em comparação ao termo original, indica menos ênfase à íntima relação entre as teorias semânticas abordadas na dissertação e os trabalhos da escola hilbertiana, entre eles a obra de Gentzen sobre dedução lógica. Essa relação, juntamente com o formalismo sintático tradicionalmente associado à escola hilbertiana, é responsável por boa parte da estranheza que sentem aqueles acostumados a uma semântica de modelos quando entram em contato com semânticas construtivas pela primeira vez. A dissolução dessa estranheza, que encontra-se estampada no termo original, fora uma importante motivação durante a confecção da introdução ao texto. Com a tradução para o português, parte dessa motivação se esvaneceu e a discussão tornou-se um pouco mais forçada.

Outro problema terminológico se apresentou na tradução do termo "proof", especialmente quando figura na expressão "proof theory" como nome dado a um importante campo de estudo da lógica moderna. Aqui optei pelo termo "demonstração" em português, ainda que a parca literatura em língua portuguesa sobre o tema indique um favorecimento do termo "prova". As minhas razões são as seguintes.

Em primeiro lugar, a palavra "demonstração", bem como sua ascendente latina "demonstratio" e sua parentela, tem sido tradicionalmente usadas nas línguas latinas para designar as construções linguísticas destinadas a estabelecer dedutivamente asserções, proposições, e teoremas no âmbito da lógica e da matemática. Carl Friedrich Gauss (1977–1855), por exemplo, a empregou dessa maneira em suas *Disquisitiones Arithmeticae*. É justamente nessa acepção que o termo "proof" é usado em "proof theory". Por outro lado, embora também possa ser utilizada com o significado pretendido, o termo "prova" carrega consigo outras acepções que, poderia-se arguir, são mais corriqueiras no uso cotidiano do português porém não são compartilhadas pelo termo em língua inglesa. Nesse outro sentido, a palavra "prova" está mais ligada aos conceitos de *teste* ou *experimentação*. Essa acepção pode ser observada em frases como "O professor aplicou a prova", "Por que não prova do nosso doce?" ou mesmo em palavras derivadas como "provação".

Em segundo lugar, reservando a palavra "demonstração" para as justificativas, razões e evidências de caráter exclusivamente dedutivo, poupamos a palavra "prova" para contextos mais gerais, onde também tratamos de evidências de caráter não dedutivo. Uma aplicação mais ampla da teoria verificacionista do significado, isto é, uma aplicação que não esteja limitada a sentenças lógicas e matemáticas, acomodaria exatamente esse tipo mais amplo de prova, ou evidência. Aqui, realmente, a palavra "prova" parece mais apropriada. Essa conotação mais frouxa já recebe melhor apoio no uso do termo, por exemplo, em frases como "O técnico forense produziu provas da autoria do crime".

No que concerne a estrutura da dissertação, tanto no projeto quanto na argumentação, creio que haveriam importantes mudanças, principalmente nas passagens que tratam de raciocínio hipotético, caso o texto tivesse sido escrito originalmente em língua portuguesa. Seria possível obter maior clareza na discussão dessas passagens, posto que nossa língua dispõe de maior sofisticação no tratamento do modo subjuntivo. Embora digno de nota, um comentário mais elaborado sobre o assunto seria inadequado no âmbito deste prefácio.

Todas as citações foram traduzidas por mim dos originais em inglês. Não alego sequer a mínima perícia nesse ofício tão importante e, ao mesmo tempo, tão ingrato. Alguns leitores familiarizados com a literatura talvez notem que me permiti certa liberdade em alguns pontos e que algumas das minhas traduções seriam, rigorosamente, paráfrases. A esses, asseguro que o sentido não foi prejudicado e que, dadas minhas pobres habilidades como tradutor, fora necessário sacrificar um pouco de fidelidade em prol da clareza.

Por fim, reconheço que algumas frases permanecem desconfortavelmente mal construídas devido à minha inépcia na adaptação da estrutura gramatical das frases originais para o português. Nada mais justo da parte do leitor do que censurar-me nesse quesito.

Introdução

A validade é um conceito fundamental nas investigações lógicas. Se entendermos a lógica como o estudo do raciocínio e da argumentação, por exemplo, então não há dúvidas de que a validade é uma condição necessária do raciocínio correto e da argumentação cogente. Como resultado, ao longo da história da lógica, a noção de validade sempre desempenhou um papel central.

A validade é um conceito semântico. Isso significa que, para mostrar a validade de um argumento ou classe de argumentos, é preciso levar em conta os significados das expressões lógicas envolvidas. É por apelo aos significados das expressões lógicas que estabelecemos a correção dos passos inferenciais que figuram em argumentos válidos. Portanto, o modelo geral que usamos para explicar o significado, i. e. nossa teoria do significado, tem um impacto fundamental sobre o correspondente conceito de validade.

Atualmente, a teoria do significado predominante é a teoria denotativa do significado: uma teoria que explica o significado com base nas noções de *referência* ou *denotação*. Hoje em dia, a maioria dos alunos de lógica estão familiarizados com os conceitos de *interpretação*, *valoração*, *satisfação*, *valor de verdade* e outros conceitos associados com a semântica de modelos, i. e. um tipo particular de semântica denotativa que empresta muito de suas noções técnicas da teoria de modelos, um ramo da matemática.

O desenvolvimento da semântica de modelos representou uma notável mudança de atitude nas investigações lógicas. Em primeiro lugar, é importante observar que a distinção entre sintaxe e semântica, uma parte essencial da semântica de modelos, estava ausente nos primeiros dias da lógica simbólica moderna. Assim, embora Frege e Russell fizessem uso pesado de notação simbólica, os símbolos de suas linguagens simbólicas nunca foram entendidos por esses autores como dissociados do seu significado: suas linguagens formais foram apresentadas como *uma notação* para expressar noções e relações lógicas. Se lermos atentamente seus trabalhos, podemos ver como tomaram muito cuidado, ao introduzir noções e relações lógicas, em explicar o significado dessas noções e relações por meio de exemplos e descrições do seu comportamento geral.

David Hilbert deu os primeiros passos importantes rumo à distinção entre sintaxe e semântica quando propôs, em sua tentativa de demonstrar a consistência das principais teorias matemáticas, que tratássemos os sistemas simbólicos de Russell e Frege como sistemas sintáticos, objetos de considerações metamatemáticas. Por essa via, a lógica simbólica que até então consistia de investigações lógicas tornadas mais precisas *com* uso de símbolos transformava-se em investigações *sobre* os próprios sistemas simbólicos. Um exemplo radical e interessante desse tipo de formalismo pode ser encontrado em Carnap (1964, p. 1):

> A opinião predominante é que a sintaxe e a lógica, apesar de alguns pontos de contato entre elas, são fundamentalmente teorias de um tipo muito diferente. [...] Mas o desenvolvimento da lógica durante os últimos dez anos mostrou claramente que a lógica só pode ser estudada com algum grau de precisão quando se baseia, não em julgamentos (pensamentos, ou o conteúdo dos pensamentos), mas sim em expressões linguísticas, dentre as quais as sentenças são as mais importantes, porque só para elas é possível estabelecer regras bem definidas.

Em *A Sintaxe Lógica da Linguagem*, Carnap tentou responder problemas lógicos tradicionais, desenvolvendo sua teoria pura da sintaxe lógica. Mais tarde, Tarski (1956) introduziu a noção de *modelo*[1], a fim de superar o que ele via como deficiências da "abordagem sintática da consequência lógica". Depois do trabalho de Tarski, a semântica de modelos juntou-se com a teoria hilbertiana das demonstrações (sintaxe) e tornou-se uma parte indispensável nas teorias lógicas modernas. A lógica tornou-se bipartida: sintaxe e semântica.

Uma vez que a teoria de modelos se encarrega da semântica, a concepção comum é que a sintaxe deve ser entendida como pura combinação de símbolos. A familiar definição do conjunto de fórmulas bem formadas, por exemplo, é uma porção conhecida da sintaxe. Mas, nas teorias lógicas modernas, a sintaxe não se preocupa apenas com a construção (ou especificação) de linguagens formais. As *demonstrações formais* em um sistema dedutivo, especialmente sistemas dedutivos de estilo hilbertiano, são entendidas como transformações e operações em cadeias de símbolos completamente desprovidas de significado e, portanto, também pertencem à porção sintática da teoria. No entanto, assim como a gramática

[1] É importante notar que a noção de *modelo*, como originalmente usada por Tarski (1956) difere substancialmente da noção de modelo atualmente utilizada na teoria de modelos. Não há dúvida, no entanto, que o trabalho de Tarski foi sua inspiração mais importante.

da linguagem formal é baseada no papel semântico de suas unidades sintáticas[2], a formulação das regras para a construção de demonstrações formais sempre mantém o significado em vista, seja como agente orientador ou corretor. A despeito disso, a teoria lógica de modelos geralmente assume uma postura formalista com relação à sintaxe[3] e procede como se esta fosse independente da semântica, i. e. do significado. Como resultado, sente-se uma dicotomia implícita entre sintaxe e semântica. Essa dicotomia dá origem à crença de que a sintaxe é, de alguma forma, contrária, ou oposta, ao significado. Mas será o formalismo a única abordagem possível para a sintaxe? Será mesmo que as regras e normas linguísticas (ainda que expressas formalmente) para uso e construção de expressões são essencialmente opostas, ou segregadas, do significado dessas expressões?

Como observado acima, alguns pioneiros importantes da lógica simbólica moderna não assumiram uma posição formalista em relação aos seus sistemas simbólicos. Além disso, a julgar por algumas passagens de sua obra, mesmo Hilbert (1928, p. 79), considerado por alguns como o pai do formalismo, considerava demonstrações formais como uma expressão, ou representação, do pensamento significativo:

> O jogo de fórmulas que Brouwer tanto critica tem, além de seu valor matemático, um importante significado filosófico geral. Pois esse jogo de fórmulas se realiza de acordo com certas regras definidas, nas quais a *técnica do nosso pensamento* está expressa.

Em outras palavras, Hilbert está dizendo que as regras sintáticas usadas para construir demonstrações formais não são meras regras de manipulação simbólica, mas também uma expressão de relações dedutivas.

Além da sua contribuição para a adoção de uma abordagem formalista da sintaxe, o teoria lógica de modelos também alterou significativamente a forma como se estabelece a validade lógica. Na Grécia antiga, Aristóteles (Primeiros Analíticos, 29b) argumentou intuitivamente pela validade de algumas relações dedutivas e, com base nelas, estabeleceu a validade de um outro grupo de formas dedutivas, reduzindo o problema da validade das segundas ao das primeiras. Em contraste, a teoria lógica de modelos explica a validade em termos de quantificação sob mo-

[2]Por exemplo, em uma gramática formal, os símbolos da linguagem formal são classificados em classes que indicam seu papel semântico geral — constantes particulares são utilizadas para denotar objetos do domínio, as constantes predicativas monádicas denotam subconjuntos do domínio cujos elementos são objetos que possuem uma determinada propriedade, e assim por diante.

[3]Conforme acima, entendemos aqui por sintaxe, além das regras de formação, as demonstrações, derivações e etc.

delos e, como resultado, todas as formas válidas estão, conceitualmente, em um mesmo nível[4].

Em outras palavras, a ampla difusão da teoria lógica de modelos e sua dicotomia entre sintaxe e semântica deslocou a atenção dos lógicos para longe das inferências e deduções e, nos seus lugares, concentrou-a em valorações e modelos. Isso chegou a tal ponto que tornou-se necessário escrever um punhado de parágrafos explicativos antes que sequer seja possível se considerar como inferências, como etapas em uma demonstração ou argumento, podem atribuir significado a expressões lógicas e como uma teoria das demonstrações, como estudo dessas práticas dedutivas, pode servir de base para a semântica.

O tema principal desta dissertação são as semânticas construtivas. Essas semânticas baseiam-se na ideia de que o significado deve ser explicado não em termos de *denotação*, mas em termos do *uso*. Explicar o significado em termos de uso no contexto de uma semântica para a lógica é adotar a visão de que certas regras dedutivas determinam o significado das constantes lógicas. Assim, as semânticas construtivas são para a teoria do significado com base no uso o que as semânticas de modelos são para uma teoria do significado com base na denotação.

Podemos ilustrar melhor a abordagem construtiva à teoria do significado por meio de um exemplo envolvendo uma única constante lógica: a implicação. Uma vez que estamos em busca de uma semântica para a lógica, a prática relevante é a *prática dedutiva*, o uso relevante é o *uso dedutivo*. Há dois aspectos do uso de implicações em deduções: elas podem aparecer como conclusão ou como premissas em um passo de inferência.

Contudo, existem diversas maneiras pelas quais as implicações podem aparecer tanto como premissas ou como conclusões de inferências, mas nem todas elas são essenciais para o significado da implicação. Observamos que há usos canônicos, isto é, usos essenciais da implicação quer como premissa, quer como conclusão de uma inferência. Quando usada como conclusão, podemos expressar os usos canônicos especificando as condições necessárias e suficientes para concluir uma sentença onde a implicação é o principal conectivo lógico.

Podemos ler a regra de introdução em dedução natural (em (1), abaixo) como expressando exatamente essas condições necessárias e suficientes. Assim, uma condição necessária e suficiente para se fazer uma inferência cuja conclusão é $A \supset B$ é que tenhamos uma derivação de B a partir da hipótese A. Claro, existem outras situações em que $A \supset B$ pode aparecer como conclusão de uma inferência. Porém,

[4] Por exemplo, do ponto de vista da noção tarskiana de consequência lógica, não há diferença conceitual entre a validade de *modus ponens* e a de uma forma argumentativa com uma classe infinita K de premissas.

como veremos mais tarde (Seção 1.6), esses são usos inessenciais e podem ser explicados com referência ao uso canônico.

$$\frac{\begin{matrix}[A] \\ \vdots \\ B\end{matrix}}{A \supset B} \tag{1}$$

Da mesma forma, a regra de eliminação da implicação (2) pode ser vista como a forma canônica para se inferir consequências de sentenças onde a implicação seja o principal conectivo lógico. Aqui, a regra de eliminação expressa quais são as consequências que devem ser aceitas com base em $A \supset B$ e na premissa auxiliar A. Mais uma vez, existem outras conclusões que podem ser extraídas a partir de $A \supset B$ além daquelas autorizadas pela regra de eliminação correspondente. E, novamente, elas são dispensáveis.

$$\frac{A \quad A \supset B}{B} \tag{2}$$

Se transportarmos as considerações esboçadas acima para as demais constantes lógicas, podemos mostrar que quaisquer deduções válidas podem ser explicadas por referência apenas a inferências canônicas. Em outras palavras, quaisquer relações dedutivas entre sentenças podem ser estabelecidas usando as regras de introdução e eliminação das constantes lógicas envolvidas.

Além disso, podemos notar uma relação importante entre ambos os aspectos do uso da implicação: o que era necessário para a introdução de $A \supset B$, ou seja, um derivação de B (com base na hipótese A) pode ser restaurado aplicando-se a regra de eliminação. Isto é, o que é obtido pela aplicação da regra de eliminação à $A \supset B$ já estava em mãos se assumirmos que $A \supset B$ foi derivado por meio da regra de introdução.

A relação entre o comportamento dedutivo das regras de introdução e das regras de eliminação de uma constante lógica pode ser estudado a fim de se extrair importantes propriedades semânticas. Um estudo geral desse tipo constitui o núcleo da abordagem construtiva em semântica[5]. Nosso pequeno exemplo usando implicação foi projetado apenas para ilustrar, grosso modo, uma abordagem construtiva para a semântica da lógica. Uma discussão mais substancial requer um

[5]Há algumas décadas atrás, Prawitz (1971) delineou um programa de pesquisa nos mesmos moldes o qual ele chamou de "teoria geral das demonstrações" em contraste com a "teoria redutora das demonstrações" da escola de Hilbert. Mais tarde, Kahle e Schroeder-Heister (2006)) propôs o termo em inglês "proof-theoretic semantics" que é amplamente adotado hoje.

tratamento mais detalhado dos sistemas de dedução natural e algumas das suas propriedades (ver Capítulo 1).

Um dos desafios enfrentados pelas semânticas construtivas é o de determinar até que ponto podemos alcançar uma teoria lógica satisfatória, incluindo uma concepção bem definida de validade, por meio da reflexão sobre o uso dedutivo das constantes lógicas. No entanto, o interesse depositado nas semânticas construtivas não provém da lógica apenas, mas também da matemática. Na literatura, as semânticas construtivas tem sido associadas com o intuicionismo e construtivismo matemáticos em geral. Em particular, Dummett (1975b) acredita que podemos resolver a disputa metafísica na filosofia da matemática, avançando argumentos em favor de uma teoria do significado baseada no uso, o que por sua vez levará a uma justificação apenas de raciocínios intuicionistas e, assim, a uma confirmação da filosofia intuicionista da matemática (ver Capítulo 2).

Há razões para se duvidar de que o conflito na filosofia da matemática não envolva considerações estritamente *matemáticas* (não lógicas) mas gire apenas em torno de qual é a lógica subjacente correta[6]. No entanto, como veremos (Seção 2.2.2), de um ponto de vista filosófico, um problema ainda mais grave atinge algumas propostas construtivas atuais: a restrição da análise semântica ao conceito de *asserção* (ou afirmação) que, embora uma parte importante, não é suficiente para dar conta de nossas práticas dedutivas (em matemática e outras áreas de discurso). É bastante evidente, a partir da nossa prática linguística, que podemos fazer deduções a partir de suposições explícitas (abertas). No entanto, muitas abordagens construtivas da lógica adotam o que Schroeder-Heister (2013, Seção 2.2.2) chamou "o ponto de vista substitutivo das derivações abertas". De acordo com esse ponto de vista, as demonstrações hipotéticas, isto é, a partir de suposições abertas, devem ser explicadas em termos de derivações fechadas.

Como discutiremos no Capítulo 2, o ponto de vista substitutivo das derivações abertas baseia-se em alguns princípios filosóficos gerais que, embora persistentes em grande parte da discussão em torno das semânticas construtivas, podem ser contestados mesmo a partir de uma perspectiva construtiva. Em particular, destacamos as seguintes duas ideias como obstáculos importantes para a aceitação de deduções abertas como um conceito primitivo:

assertibilidade A ideia de que *asserções* são o conceito central de uma teoria linguística do significado baseada no uso e, consequentemente, a visão de

[6]As perspectivas filosóficas associadas com o construtivismo matemático podem ser muito ricas e diversificadas. Elas, às vezes, envolvem posições em relação a alguns conceitos estritamente matemáticos. Troelstra e van Dalen (Seção 1.4, 1988) oferecem um panorama conciso das posições filosóficas mais importantes associadas com o construtivismo na matemática do século XX.

que uma inferência é uma passagem de asserções a asserções. Isso é muitas vezes expresso no conhecido chavão de que uma teoria do significado com base no uso substitui, no quadro geral de uma teoria denotativa do significado, o conceito de *condições de verdade* pelo conceito de *condições de assertibilidade*.

semântica BHK A ideia de que a interpretação BHK das constantes lógicas deve ser tomada como ponto de partida para uma explicação semântica completa e coerente do significado das constantes lógicas e, em particular, a ideia de que a interpretação BHK corresponde de alguma forma às regras de introdução em dedução natural.

Uma vez que essas ideias são abandonadas, não há razão para se prender numa visão substitutiva das derivações abertas. Então, assim como viemos sugerindo, podemos, de forma consistente com os nossos princípios semânticos construtivos, entender o significado das constantes lógicas assim como elas são expressas em nossas práticas de argumentação dedutiva. Em particular, se um dos aspectos do significado de uma constante lógica é de fato expresso pelo seu uso em raciocínios hipotéticos, de modo que podemos extrair consequências a partir delas, então não existe qualquer razão intrínseca por que esse aspecto deva ser reduzido a uma noção absoluta de demonstração (demonstração sem nenhuma suposição).

Esperamos que a nossa desconfiança para com o ponto de vista substitutivo das derivações abertas seja reforçada no Capítulo 3, quando examinamos a semântica construtiva proposta por Dummett (1991, Capítulo 11–13). Ali fornecemos o Teorema 1 que afirma a validade da regra de Peirce em relação ao procedimento de justificação dummettiano baseado nas regras de introdução.

Capítulo 1

Dedução Natural

No que se segue, nos esforçaremos para extrair conteúdo semântico de sistemas de dedução natural[1]. Em sintonia com essa motivação, a discussão a seguir não contém um tratamento exaustivo ou autossuficiente. Peças técnicas excelentes, completas, e rigorosas sobre sistemas de dedução natural estão disponíveis em outros lugares[2] e muito pouco se aproveitaria em revê-los aqui. Embora recordaremos, de fato, as regras de introdução e eliminação para as constantes lógicas habituais, nosso foco estará na *explicação* semântica ao invés da especificação e apresentação dessas constantes. No entanto, antes de prosseguir, é necessário estabelecer brevemente alguma notação para evitarmos confusões.

Nós usamos os símbolos "$\supset$", "$\wedge$", "$\vee$", "$\neg$", "$\forall$" e "$\exists$" para significar *implicação*, *conjuncão*, *disjunção*, *negação*, *quantificação universal* e *quantificação existencial* respectivamente. As letras latinas maiúsculas "A","B", "C", e assim por diante, estão para sentenças arbitrárias (fechadas ou abertas). Nós usamos letras gregas minúsculas, como "φ" e "ψ", especialmente para indicar sentenças atômicas. Por outro lado, as letras gregas maiúsculas "Γ" e "Δ" denotam conjuntos de sentenças que normalmente são usados para representar as suposições das quais dependem a ocorrência de alguma sentença em uma derivação. As derivações, por sua vez, são ilustradas por árvores de sentenças nas quais indicamos o descarte de hipóteses por meio do uso de chaves como em "[A]". A letra grega maiúscula "Π" é reservada para árvores ou ramagens (subárvores) e a letra grega maiúscula "Σ" é usada para denotar sequências de ramagens (incluindo a vazia) que podem fazer parte de uma árvore completa. Ademais, algumas letras maiúsculas latinas (em fonte asserifada) são reservadas para indicar um conjunto de regras em dedução natural como em "I" para as regras de introdução e "E" para as

[1] A ideia não é nova e pode ser rastreada até a "gentzensemantik" de von Kutschera (1968).

[2] Ver, por exemplo, Prawitz (1965).

regras de eliminação. Dentre as letras minúsculas latinas, nós usamos "a", "b" e "c" como parâmetros particulares; variáveis particulares são denotadas por "x" e "y"; e, finalmente, reservamos "t" para termos. Quando necessário, empregamos subscritos com números naturais.

Um sistema de dedução natural é constituído por um conjunto de regras destinadas a capturar o conceito de dedução lógica. A característica mais interessante da dedução natural em comparação com outros sistemas dedutivos é a classificação de suas regras de inferência entre regras de introdução e regras de eliminação (pelo menos uma de cada tipo para cada uma das constantes lógicas). As regras de dedução natural para uma determinada constante lógica sempre apresentam uma fórmula com essa constante como o principal operador e também suas subfórmulas. Além disso, como um padrão geral, as subfórmulas ocorrem como premissas nas regras de introdução, enquanto que com as regras de eliminação normalmente ocorre o contrário[3].

Esse padrão geral naturalmente dá origem à interpretação de que as regras de introdução de uma constante lógica γ, denotada por "γI", expressa as condições necessárias e suficientes com base nas quais podemos inferir uma sentença contendo γ como operador lógico principal. Analogamente, a regra de eliminação para γ, denotada por "γE", expressa quais são as consequências que podem ser extraídas a partir de uma sentença contendo γ como o principal operador lógico, juntamente com outras, premissas menores, quando necessário. A seguir, apresentamos as regras de introdução e eliminação para as principais constantes lógicas. Também aproveitamos a oportunidade para fazer alguns comentários sobre os seus significados.

1.1 Implicação

Também chamada de "condicional", esse conectivo é talvez a mais complicada e controversa de todas as constantes lógicas. Em língua portuguesa, sua leitura mais comum é representado pela construção "se...então...". Em geral, quando usamos essa construção linguística, alegamos uma certa vinculação entre o antecedente e o consequente: um conduz ao outro por uma relação de causali-

[3]Na verdade, a situação com as regras de eliminação é um pouco mais complicada. A fórmula que contém a constante lógica como principal operador ocorre como *premissa maior* sendo que subfórmulas, algumas vezes, também figuram como *premissas menores*. Subfórmulas podem ocorrer (como em regras de inferência) ou não ocorrer (como em regras de dedução) como conclusão da regra. Adotamos de Prawitz (1965, § 2.B) a distinção entre regras de inferência e regras de dedução.

dade, dedução ou outro tipo de cadeia de razões plausíveis. Contudo, o significado conferido à implicação pela regra de introdução é um pouco mais fraco do que o significado geralmente associado com a construção “se. . . então. . . ”.

$$\dfrac{\begin{matrix}[A]\\ \vdots \\ B\end{matrix}}{A \supset B}\ \supset\mathrm{I} \qquad\qquad \dfrac{A \quad A \supset B}{B}\ \supset\mathrm{E}$$

Para ser mais exato, a regra de introdução acima *não requer* que a premissa da forma A realmente seja descartada. Assim, a regra permite a inferência de $A \supset B$ em condições nas quais A é irrelevante. Por outro lado, a regra de eliminação da implicação *requer* uma premissa da forma A para sua aplicação. Do ponto de vista da regra de introdução, o requerimento mais forte por parte da regra de eliminação é natural uma vez que, mesmo assumindo que a premissa maior $A \supset B$ tenha sido obtida por $\supset$I, não podemos garantir com antecedência que, na aplicação de $\supset$I, a premissa A é irrelevante. No entanto, do ponto de vista da regra de eliminação, um significado mais forte pode ser atribuído à implicação uma vez que A estará sempre disponível (como premissa menor), ainda que seja dispensável em uma dedução de B na qual A seja irrelevante.

O desequilíbrio entre as regras de introdução e eliminação para a implicação e o desacordo entre essas regras e as expressões tomadas como equivalentes nas línguas naturais tem levado alguns autores, notavelmente Tennant (1987, Capítulo 17), a favorecer uma leitura relevantista da implicação.

1.2 Conjunção

Especialmente em contraste com a implicação, as regras para a conjunção são, talvez, as mais simples e incontroversas. Isso não é surpresa, uma vez que o significado que as regras de introdução e de eliminação atribuem à conjunção é muito estreito.

$$\dfrac{A \quad B}{A \wedge B}\ \wedge\mathrm{I} \qquad\qquad \dfrac{A \wedge B}{A}\ \wedge\mathrm{E} \qquad\qquad \dfrac{A \wedge B}{B}\ \wedge\mathrm{E}$$

Uma explicação simples e intuitiva, embora um tanto imprecisa, das regras é dizer que uma conjunção permite transmitir, em uma *única sentença* da forma $A \wedge B$, exatamente a mesma informação veiculada por *ambas as sentenças*, A e B. Esse significado estreito é raramente, se não nunca, empregado no discurso cotidiano, no qual expressões como "e" e "mas" são mais frequentemente utilizados para transmitir mais informação do que a mera conjunção lógica, e.g. sequência temporal, surpresa, incredulidade e assim por diante.

1.3 Disjunção

Em português, a disjunção é geralmente associada com o significado da expressão "ou". No discurso cotidiano, frequentemente usamos "ou" para expressar uma escolha ou alternativa exclusiva, como em "devemos subir a taxa de juros ou aguardarmos inflação cada vez maior". Assim, é comum o uso do "ou" em contextos que envolvem agentes e ações. Contudo, a disjunção também aparece em contextos mais estáticos e descritivos, especialmente em situações em que não temos informações suficientes para determinar quais dos disjuntos se realiza. Por exemplo, em "embora distante, pude perceber que tratava-se de uma ema ou de um avestruz". Mesmo em semelhante estado informativo, ainda podemos extrair consequências da disjunção. Para tanto, mostramos ser possível obtê-la a partir de cada um dos disjuntos, como se exprime pela regra de eliminação abaixo.

$$\frac{A}{A \vee B}\ \vee\mathrm{I} \qquad\qquad \frac{B}{A \vee B}\ \vee\mathrm{I} \qquad\qquad \frac{A \vee B \quad \begin{array}{c}[A]\\ \vdots \\ C\end{array} \quad \begin{array}{c}[B]\\ \vdots \\ C\end{array}}{C}\ \vee\mathrm{E}$$

Por outro lado, pelo menos de um ponto de vista epistemológico, a regra de introdução para a disjunção é um tanto inútil. Como observado acima, a conclusão $A \vee B$ não diz qual dos disjuntos se obtém. Então, epistemologicamente, parece haver mais informação na premissa da regra do que em sua conclusão. Indiscutivelmente, isso também pode ser dito de $\wedge$E. Mas, uma vez que $\wedge$E é uma regra de eliminação e sua finalidade é extrair consequências das premissas, é de se esperar que essas consequências possam conter menos informações.

1.4 Negação

Em Prawitz (1965) e, na maioria dos textos modernos em dedução natural, a negação é um símbolo definido. Ela é definida em termos de uma constante sentencial $\perp$, chamada "absurdo" ou "falsum", e da implicação: $\neg A \equiv A \supset \perp$. Uma exceção notável é Gentzen (1935, p. 186), que fornece regras de introdução e eliminação independentes para a negação. Seguimos a prática mais comum e oferecemos regras para a constante $\perp$, permitindo que a negação fique definida como acima.

$$\frac{\perp}{A}$$

Assim como a implicação, a negação também é um operador lógico muito interessante e controverso. O entendimento clássico da negação remonta a Aristóteles (Da Interpretação, VI). O filósofo grego acreditava que cada sentença tinha a sua negação contraditória correspondente, que poderia, em princípio, ser afirmada. De fato, do ponto de vista de uma teoria denotativa do significado, essa concepção aristotélica da negação parece muito natural.

Contudo, se permanecermos neutros a respeito da concepção aristotélica e tentarmos chegar a algumas regras gerais sobre a negação, um dos princípios que vem à mente é a chamada lei da não-contradição. O princípio de não-contradição é geralmente entendido como uma proibição (entre seres racionais) de mantermos A e $\neg A$ simultaneamente. Usando a regra para $\perp$ e a definição de negação acima, podemos ter uma noção das consequências da violação ao princípio da não-contradição: qualquer sentença pode ser obtida e, assim, nossa prática dedutiva perde todo o sentido.

Se a nossa regra para $\perp$ é a melhor maneira de explicar o uso da negação, mesmo no discurso matemático, é de fato uma questão em aberto. Contudo, há uma questão muito mais preocupante com a nossa abordagem da negação: $\perp$ não segue o padrão das regras de introdução e eliminação estabelecidas pelas outras constantes. A fim de remediar a situação, Dummett (1991, p. 295) propôs a seguinte regra de introdução para $\perp$, onde A_i abrange todas as sentenças atômicas da linguagem:

$$\frac{A_1 \quad A_2 \quad A_3 \quad \ldots}{\perp}\ \perp\mathrm{I}$$

Quando a regra de dedução natural para $\perp$ é considerada como uma regra de eliminação, em símbolos "$\perp$E", Dummett acredita que a regra $\perp$I acima é a regra de introdução harmoniosa mais adequada. De fato, podemos ver que, assumindo A atômica sem perda de generalidade, uma aplicação de $\perp$E nos permitiria obter qualquer sentença atômica A. Portanto, uma regra de introdução harmoniosa com $\perp$E deve requerer nada menos que todas as sentenças atômicas A_i como premissas (ver Seção 1.6).

Bem, alguém pode se perguntar por que a regra $\perp/A$ é suficiente para um sistema de dedução natural completo, enquanto as outras constantes exigem ambas regras de introdução *e* regras de eliminação. Como observa Dummett (1991, p. 292), em face das consequências catastróficas de aceitarmos deduções de $\perp$, esperamos usá-las apenas em argumentos subordinados, partindo de hipóteses que não cremos serem mesmo realizáveis. Por exemplo, podemos mostrar a inaceitabilidade de uma alegação A, por meio de um argumento a partir de A cujo conclusão seja $\perp$ e, em seguida, inferirmos $A \supset \perp$ e descartar a hipótese inaceitável A. De qualquer forma, o significado da negação, como expresso em sistemas de dedução natural com a nossa regra para $\perp$, não parece envolver muito mais do que esses tipos de argumentos subordinados.

1.5 Quantificação

Desde o tempo de Aristóteles e de sua teoria silogística das sentenças categóricas, a quantificação está intrinsecamente ligada à predicação. Ela trata da relação lógica entre expressões como "alguns", "cada" e "todos" quando aplicadas aos predicados a fim de formar sentenças quantificadas. Além disso, ela relaciona sentenças quantificadas com suas sentenças singulares correspondentes. Na lógica moderna, os raciocínios que envolvem sentenças quantificadas são analisados com a ajuda de duas constantes lógicas: os quantificadores universal e existencial. As regras que regem o uso dessas constantes lógicas em um sistema de dedução natural distinguem-se pelas restrições à ocorrência de parâmetros individuais colocadas sobre suas aplicações. Nas figuras abaixo, escrevemos "$A^{t_1}_{t_2}$" para representar a operação de substituição de todas as ocorrências de t_1 por t_2 em A (se houver).

$$\frac{A}{\forall x A^a_x}\,\forall\mathrm{I} \qquad \frac{\forall x A}{A^x_t}\,\forall\mathrm{E} \qquad \frac{A^x_t}{\exists x A}\,\exists\mathrm{I} \qquad \frac{\exists x A \quad \begin{array}{c}[A^x_a]\\ \vdots\\ B\end{array}}{B}\,\exists\mathrm{E}$$

Os significados de $\exists$I e $\forall$E são muito simples. A primeira dessas regras autoriza a inferência de uma sentença quantificada existencialmente com base na informação de que um predicado (ou sentença aberta) A aplica-se a algum termo específico t. A segunda autoriza a inferência de um caso particular a partir de uma sentença universalmente quantificada. Por outro lado, $\forall$I e $\exists$E são mais difíceis de entender por causa das mencionadas restrições nos parâmetros individuais.

Na verdade, as restrições são destinadas a garantir que tenhamos um argumento geral sobre um indivíduo não especificado a tal que qualquer substituição de um termo ou constante individual por a, obtendo assim uma instância do argumento geral, não interfira com a sua correção. Caso contrário, se assumirmos que a possa ocorrer em uma das premissas das quais A depende, a aplicação de $\forall$I não produz um argumento geral, visto que o processo de instanciação acima descrito inevitavelmente alterará algumas das premissas. Por conseguinte, nas aplicações de $\forall$I, a não deve ocorrer em qualquer uma das premissas das quais A depende.

Ademais, um argumento geral semelhante é necessário para $\exists$E, pois, embora saibamos que, partindo de $\exists xA$, podemos afirmar corretamente A de alguns indivíduos (assumindo que x ocorra em A), não sabemos nada específico sobre eles. Portanto, em aplicações de $\exists$E, a não deve ocorrer em quaisquer outras premissas além das hipóteses descartadas, de modo que a inferência da conclusão B não assuma nenhuma característica específica do indivíduo que $\exists xA$ alega existir.[4]

1.6 Harmonia

Na seção anterior, vimos que podemos ler as regras de introdução para uma constante γ como expressão das condições necessárias e suficientes para se deduzir $A \gamma B$ (supondo o caso paradigmático onde γ é um conectivo binário). Uma vez que lidamos com *expressões lógicas*, há uma exigência muito plausível que podemos colocar sobre regras de eliminação correspondentes: as consequências extraídas de sua premissa maior $A \gamma B$ nunca podem extrapolar o que fora necessário para a conclusão de $A \gamma B$ por meio das regras de introdução. Uma exigência semelhante pode ser colocada sobre as regras de introdução a partir do ponto de vista das regras de eliminação: dado o contexto, o que quer possa ser deduzido a partir da conclusão por meio das regras eliminação já poderia ter sido deduzido a partir das premissas. Quando esses dois requisitos são cumpridos, podemos dizer que as regras de introdução e eliminação de uma constante lógica estão em *harmonia* umas com as outras.

O conceito de harmonia entre as regras lógicas remonta a uma passagem

[4]Nossa explicação das restrições sob parâmetros individuais foi baseada no trabalho de Sanz (2006, p. 499–502).

muito citada de Gentzen (1935, p. 189) no sentido de que “as regras de introdução são definições e as eliminações são apenas suas respectivas consequências.” Adotando a terminologia de Lorenzen (1969, p. 30), Prawitz (1965) tentou fazer as observações de Gentzen mais precisas por meio da formulação de um princípio de inversão. Além disso, a harmonia é uma parte fundamental dos processos de normalização para os sistemas de dedução natural. Esses procedimentos revelam a existência de derivações, denominadas *derivações normais*, com uma estrutura especial e propriedades importantes. Além disso, o teorema de normalização estabelece que se uma sentença A é de todo derivável das premissas Γ, então há uma derivação normal de A a partir de Γ.

Procedimentos de normalização são baseados em *reduções* que permitem a eliminação de rodeios numa derivação em dedução natural. Em outras palavras, quando temos uma regra de introdução cuja conclusão é premissa maior de uma regra de eliminação, existe uma redução que nos fornece uma derivação da mesma conclusão a partir das mesmas premissas, porém sem passar por esse passo. Um exemplo:

$$\begin{array}{c}\dfrac{\begin{array}{c}\Sigma_1\\ A\end{array}\qquad \dfrac{\begin{array}{c}[A]\\ \Sigma_2\\ B\end{array}}{A\supset B}}{B}\\ \Sigma_3\end{array} \qquad\qquad\qquad \begin{array}{c}\Sigma_1\\ A\\ \Sigma_2\\ B\\ \Sigma_3\end{array}$$

Do lado esquerdo, há uma derivação contendo um rodeio: uma implicação é introduzida apenas para ser, imediatamente depois, eliminada. Dado que $\supset$E está em harmonia com $\supset$I, a sua aplicação apenas restaurou o que já era exigido como premissa para a regra de introdução correspondente. Como consequência, ambos os passos da derivação podem ser evitados pelo rearranjo da derivação como mostrado à direita.

Além da possibilidade de serem reduzidas do modo descrito acima, existe uma outra propriedade interessante que podemos, de um modo geral, esperar de regras harmoniosas: sob determinadas condições[5], a sua adição a um sistema dedutivo produz uma extensão conservativa. Pois, suponha que as condições para a aplicação da regra de introdução para o conectivo recém adicionado foram satisfeitas. Por conseguinte, dada a harmonia, a regra de eliminação não permitirá a

[5]Essas condições se tornam mais precisas após a introdução da noção de estabilidade (veja página 50). Infelizmente, apesar de sua importância, não nos aprofundaremos na investigação da noção de estabilidade. Para um exemplo da adição de uma regra harmoniosa a um sistema sem que, contudo, se obtenha uma extensão conservativa, veja Dummett (1991, p. 290).

derivação de novas consequências para além daquelas que já eram deriváveis no sistema original.

O fato de que a adição de certas regras a um sistema dedutivo, ou a qualquer prática linguística coerente, produz uma extensão conservativa constitui um forte argumento a favor da *logicidade* dessas regras. Caso contrário, se a adição de regras para o uso de uma certa constante γ alterasse a lógica do sistema original, de tal maneira que uma sentença A, não contendo γ, torna-se agora derivável, então temos forte evidência de que γ incorpora algum conteúdo extralógico. Esse ponto pode ser mais facilmente observado quando consideramos um sistema original composto unicamente de expressões descritivas. Nesse caso, as regras para γ autorizariam a derivação de uma sentença descritiva (uma vez que não contém γ) que anteriormente não era derivável.

Com base no que investigamos até o momento, podemos resumir que, do ponto de vista de uma teoria do significado baseada no uso, a harmonia é, de perspectiva global, uma propriedade totalmente desejável para as constantes lógicas. Ademais, notamos também que, todas as consequências que viemos extraindo das regras harmoniosas de dedução natural foram reveladas *por reflexão sobre o significado das constantes lógicas*, conforme determinado pelo seu uso dedutivo: elas são, portanto, conclusões de natureza semântica.

Contudo, contrário à própria ideia de uma semântica baseada numa teoria das demonstrações, alguém poderia argumentar que o propósito de uma semântica para a lógica não é apenas verificar a validade, mas também fornecer um critério de invalidade, de modo que o conceito de consequência lógica seja completamente determinado. Porém, se nos restringirmos às deduções, isto é, àquilo que pode ser demonstrado, continua ele, e não podermos recorrer a modelos e interpretações com os quais fornecer contraexemplos, como podemos mostrar a invalidade de argumentos inválidos?

Certamente, produzir contraexemplos é um método importante de mostrar invalidade. No entanto, devemos ter em mente que o método oferecido por contraexemplos é primariamente usado para chamar a atenção para a *forma argumentativa*, como na teoria da consequência lógica de Bolzano. Portanto, nesse caso, faz-se necessário ainda um critério independente de invalidade. Em outras palavras, ao fornecer contraexemplo a um argumento, produzimos um outro argumento, este patentemente inválido, que compartilhe da mesma forma do argumento original (obtido, na teoria de Bolzano por substituição das expressões não lógicas). É bem certo que, de um ponto de vista denotativo, contraexemplos não são argumentos, mas são, na verdade, modelos. Contudo, para que uma explicação em termos de modelos seja efetiva, os modelos — que pressupõem a noção de verdade usada para explicar o significado clássico das constantes lógicas

— devem constituir um critério independente. Outrossim, a questão se modelos da realidade podem realmente serem aceitos como dados independentemente de nossas práticas dedutivas é, no entanto, motivo de muito debate. Prawitz (1974, p. 67) e Dummett (1975a), por exemplo, discutem esse problema e como ele afeta a capacidade da semântica de modelos em explicar e elucidar adequadamente o conceito de validade lógica.

Por outro lado, na perspectiva moderna com sua visão formalista da dedução, os prospectos de uma abordagem construtiva da invalidade lógica não parecem muito promissores. Porém, os métodos utilizados em semânticas construtivas não estão limitados a um estudo formalista das derivações. Prawitz (1973, p. 225, ênfase no original) entendeu muito bem a ampla gama de implicações teóricas implícitas na obra de Gentzen quando propôs seu estudo geral das demonstrações:

> Na teoria geral das demonstrações, estamos — em contraste — interessados em compreender as próprias demonstrações em si mesmas, isto é, na compreensão não apenas de *quais* conexões dedutivas se realizam, mas também *como* elas são estabelecidas, e nós não impomos quaisquer restrições sobre os meios que podem ser utilizados no estudo desses fenômenos.

De fato, a seguir veremos que, se continuarmos a nossa tarefa de extrair o conteúdo semântico de uma análise do comportamento dedutivo das constantes lógicas, seremos levados a uma abordagem muito plausível para a invalidade.

Como vimos, podemos especificar todos os meios legítimos de se deduzir uma conclusão $A\gamma B$ com base apenas na regra, ou regras, γI mediante apelo ao procedimento de normalização. Além disso, por meio da noção de harmonia, podemos também determinar os usos corretos do $A\gamma B$ como premissa maior de uma regra de eliminação e, consequentemente, determinar completamente o significado de γ como uma constante lógica. Observações semelhantes podem ser feitas com respeito a γE. Obviamente, podemos extrapolar esses métodos aplicados a uma única constante lógica γ a um conjunto I (E) de regras de introdução (eliminação) abrangendo um determinado grupo de constantes lógicas. Como resultado, é possível determinar exatamente quais são as formas legítimas de se obter uma dada conclusão no que diz respeito a um conjunto I (E) para as constantes lógicas. Finalmente, a invalidade de um argumento pode ser estabelecida mostrando que os critérios legítimos para se inferir a conclusão não foram atendidos.

Nós alcançaremos um melhor entendimento do processo de validação (ou invalidação) na Seção 3.2 e na Seção 3.3 quando investigaremos os procedimentos de justificação verificacionista e pragmatista, respectivamente. Como veremos nessas seções, para um argumento inválido, o procedimento de justificação produz uma suposição adicional que não figura no argumento, mas é, contudo, necessário para se inferir corretamente a conclusão.

No capítulo seguinte, vamos abordar como, dentre as motivações por trás da semânticas construtivas, encontra-se o desejo de fornecer uma semântica adequada para a lógica intuicionista. Por outro lado, além das semânticas construtivas, existem outras semânticas para a lógica intuicionista. A semântica de Kripke talvez seja a mais conhecida. Contudo, existem algumas objeções que podem ser levantadas, de um ponto de vista construtivo, contra as semânticas de Kripke. Por exemplo, é possível mostrar validade nas semânticas de Kripke sem realmente produzir uma derivação (ou "testemunha" como alguns autores usam nesse contexto, especialmente tratando-se de sentenças existenciais). Com relação a invalidade, a semântica de Kripke pode ser motivada por meio do método dos contraexemplos fracos de Brouwer. Como o próprio Kripke (1965, p. 104) observa:

> Um leitor atento da presente seção sobre a interpretação dos nossos modelos deve pensar ser plausível que, por outro lado, uma boa parte da interpretação, pelo menos para o cálculo proposicional, que acaba de ser realizado em FC, pode ser realizada utilizando o método brouweriano de ips com respeito a resolução de problemas.[6]

Em um modelo de Kripke[7], um contraexemplo é representado por um nó (estado informativo) no qual aceitamos as premissas, mas, contudo, não somos forçados a aceitar a conclusão. Se a conclusão não é refutável, supostamente existem outros nós (em que aceitamos outras premissas) de tal forma que somos obrigados a aceitar a conclusão. Assim, acreditamos que, em certo sentido, as premissas adicionais produzidas pelos procedimentos de justificação construtivos correspondem a contraexemplos fracos e contramodelos de Kripke.

[6]Em "método brouweriano de ips", Kripke está se referindo a sequências infinitamente procedentes de Brouwer. Para uma discussão detalhada, ver Heyting (1971, Seção 8.1). O sistema FC mencionado por Kripke trata-se de uma formalização proposta por Georg Kreisel.

[7]Para uma exposição completa e clara dos modelos de Kripke para a lógica intuicionista, consulte Troelstra e van Dalen (Capítulo 2.5, 1988).

Capítulo 2

Motivações Filosóficas

Há pelo menos duas motivações filosóficas distintas ligadas ao desenvolvimento das semânticas construtivas:

- Fornecer um argumento em favor da adoção da lógica intuicionista em detrimento da lógica clássica
- Desenvolver uma semântica para a lógica baseada na abordagem do "significado como uso" à teoria do significado

A primeira motivação deriva de uma posição construtivista na filosofia da matemática e procura ganhar apoio para a matemática construtiva por meio da substituição da lógica clássica pela lógica intuicionista. Uma exposição muito interessante dessa motivação pode ser encontrada em Dummett (1975b, p. 5).

A segunda motivação deriva de uma posição antirrealista na filosofia da linguagem e procura desenvolver uma semântica autêntica, para a lógica e outras áreas de discurso, que seja fiel à visão de que o significado deve ser explicado com base no uso.

Dummett (1991) também expressou a segunda motivação. Na verdade, uma característica notável de seu trabalho é a fusão de ambas as motivações em um programa filosófico coerente. De acordo com esse programa, certas considerações no âmbito da filosofia da linguagem podem ser usadas para resolver a disputa metafísica entre a posição clássica e a construtiva em filosofia da matemática.

Em linhas gerais, o programa de Dummett começa no nível da filosofia da linguagem, avançando argumentos contra as teorias denotativas do significado e semânticas verofuncionais. Em seguida, ele propõe uma alternativa, mais adequada, que é a concepção do significado com base no uso. O programa culmina no desenvolvimento de uma semântica completa para a lógica. Além disso, há uma expectativa de que a semântica privilegie a lógica intuicionista sobre a lógica clássica e, finalmente, *por meio da lógica*, resolva a controvérsia na filosofia da matemática.

Contudo, como podemos ver, não há nada na formulação do próprio programa que exclua a possibilidade de que uma teoria do significado com base no uso *não favoreça*, afinal, a lógica intuicionista sobre a lógica clássica. As razões para se esperar esse resultado baseiam-se principalmente na interpretação semântica que Dummett confere à disputa metafísica entre a matemática clássica e a intuicionista .

Dummett afirma que a disputa metafísica entre a matemática clássica e intuicionista é parte de uma ampla gama de disputas metafísicas entre dois campos opostos gerais: realismo e antirrealismo. Em sua interpretação dessa classe de disputas metafísicas, a diferença entre os campos se resume à questão de qual é a teoria do significado correta para a respectiva classe de sentenças e, em particular, se o princípio da bivalência se aplica a elas.

A conexão entre a teoria do significado e a metafísica tem sido muitas vezes criticada em termos gerais, por exemplo, por Pagin (1998) e Devitt (1983). Em contraste, a nossa preocupação será a de investigar o programa de Dummett em seus próprios termos e ver se o desenvolvimento de sua semântica construtiva é realmente capaz de resolver a disputa metafísica por meio da justificação única e exclusivamente de raciocínios intuicionistas.

Há uma outra questão importante sobre o programa de Dummett que pode ser razoavelmente respondida por meio da realização do programa em seus próprios termos: mostrar a viabilidade de uma teoria do significado baseada no uso que seja satisfatória e coerente. Como Dummett (1991, Capítulo 10) mesmo observa, não apenas a viabilidade de tal teoria do significado, mas também a sua capacidade de criticar, e talvez mesmo reformar, práticas linguísticas estabelecidas enfrenta ameaças importantes do holismo semântico.

Dadas as amplas conexões filosóficas do programa de Dummett, examinaremos algumas questões conceituais relevantes nas próximas seções antes de tratarmos dos detalhes de uma proposta semântica construtiva completa no Capítulo 3.

Com o objetivo de obter uma melhor compreensão de sua herança construtiva, precisamos examinar algumas raízes históricas já que grande parte da estrutura conceitual presente nas semânticas construtivas são um produto do debate sobre os fundamentos da matemática no final do século XIX (e início do século XX). Entre os vários assuntos debatidos, destacamos duas raízes históricas importantes. Primeiro, há a filosofia da matemática intuicionista de Brouwer. E em segundo lugar, os formalismos de Gentzen e sua análise conceitual do raciocínio dedutivo.

Já tratamos, em certa medida, dos sistemas de dedução natural gentzenianos no Capítulo 1. Na ocasião, vimos que Prawitz (1965) expandiu o trabalho de Gentzen em dedução natural e formulou o que chamou de *princípio de inversão*. Este princípio expressa uma *harmonia* entre o comportamento inferencial das regras de introdução e eliminação para uma dada constante lógica. Vimos também a importância da *harmonia* e como ela se tornou um marco importante em abordagens semânticas construtivas.

Na próxima seção, trataremos mais detalhadamente sobre o intuicionismo. Sua principal contribuição consistiu na crítica ao raciocínio matemático clássico, especialmente daquilo que é conhecido como o *princípio do terceiro excluído*. Essa crítica levou ao desenvolvimento dos cânones de raciocínio expressos na lógica intuicionista.

2.1 Lógica e Matemática

O final do século XIX testemunhou um vigoroso debate em torno dos fundamentos da matemática. Enquanto o logicismo de Frege, Russell e Whitehead decaia vítima de paradoxos, duas filosofias distintas surgiram como alternativas ao logicismo: o formalismo de Hilbert e o intuicionismo de Brouwer.

Por um lado, o programa de fundamentação de Hilbert teve como objetivo demonstrar a consistência da matemática por meio de "métodos finitistas". Se concretizada, Hilbert acreditava que uma demonstração da consistência poderia proporcionar um fundamento indireto para a matemática clássica face o fracasso da abordagem mais direta adotada pelos logicistas. Por outro lado, a filosofia de Brouwer rejeitava qualquer necessidade de fundamentação: ele caracterizou a matemática como um produto livre das construções mentais do matemático. Naquela época, a crítica intuicionista da matemática clássica repercutiu bem no contexto instável dos paradoxos. Apesar do fato de que, em termos práticos, tanto o formalista (em sua metamatemática) quanto o intuicionista tentaram restringir os princípios de raciocínio usados (se comparados com o logicista clássico), as suas filosofias permaneceram bastante distintas. Como observa Dummett (2000, p. 2):

> O intuicionismo tomou o fato de que a matemática clássica parecia necessitar de justificação, não como um desafio para a construção de uma justificação, direta ou indireta, mas como sinal de que algo estava errado com a matemática clássica. Do

ponto de vista intuicionista, a matemática, quando corretamente praticada, não necessita de qualquer justificação de fora, um suporte ao lado ou uma fundação abaixo: ela traria sua justificação na própria face.

A visão de Brouwer da matemática como mentalmente construída teve consequências drásticas para a prática matemática de sua época. Uma consequência óbvia era a rejeição do *infinito atual*, um conceito que se tornara amplamente aceito, especialmente após o trabalho de Cantor em teoria dos conjuntos. No que concerne o infinito atual, Brouwer estava expressando opiniões matemáticas que remontam, pelo menos, a Gauss (1977 - 1985), conforme citado por Kleene (1952, p. 48).

Além do projeto fundacionista em matemática, Brouwer (1908) também suspeitava da lógica. Ele entendera claramente que, se os princípios da lógica de seu tempo fossem, de fato, universalmente aplicáveis, os seus pontos de vista sobre como a matemática deveria ser praticada não poderiam ficar ilesos. Assim, ele acreditava que as construções mais elementares da matemática não necessitavam de qualquer fundamento, seja ele lógico ou de qualquer outra forma. Em vez disso, ele afirmava que as teorias lógicas defendidas pelos logicistas como fundamento para a matemática, na verdade, *pressupunham* técnicas matemáticas elementares. Portanto, quando Brouwer expressava sua desconfiança para os princípios da lógica, ele estava atacando os cânones de raciocínio associados com a lógica predominante em seu tempo.

2.1.1 O princípio do terceiro excluído

Dado que nosso tema central é a *lógica* em vez da matemática, a relevância da filosofia matemática de Brouwer para nossa discussão é que suas reflexões sobre a natureza da matemática levaram à rejeição do que parece ser um princípio puramente lógico. De fato, ele atribuia os paradoxos ao uso descuidado desse princípio lógico, o princípio do terceiro excluído, por parte dos matemáticos, especialmente quando o raciocínio envolvia séries potencialmente infinitas. Assim, de acordo com Heyting (1971, p. 1):

> Foi Brouwer quem primeiro descobriu um objeto que realmente exige uma forma diferente de lógica: a construção mental matemática (BROUWER, 1908). A razão é que, em matemática, desde o início lidamos com o infinito, enquanto que a lógica comum é feita para o raciocínio sobre coleções finitas.

Assim, de acordo com Brouwer, um dos principais problemas com a matemática clássica é a sua aceitação acrítica do princípio do terceiro excluído quando o raciocínio envolve coleções potencialmente infinitas. No entanto, se pensarmos bem, a ideia parece um pouco estranha. Por que a validade de um princípio *lógico* dependeria do fato, aparentemente contingente, do universo de discurso ser finito ou infinito?[1]

Porém, se olharmos mais de perto, a finitude não parece desempenhar um papel *essencial* na crítica intuicionista. Na verdade, a razão dada por Brouwer, e mais tarde por Heyting (1971, p. 1–3), de por que a validade universal do terceiro excluído deve ser rejeitada envolve a observação de que essa lei lógica incorpora um princípio metafísico injustificado: o princípio de que os objetos matemáticos existem independentemente do nosso conhecimento deles, i. e. independentemente de serem construídos. Assim, o que o intuicionista realmente alega é que não devemos *assumir* a metafísica clássica de objetos matemáticos e, ademais, que só com base nesse pressuposto adicional a lei do terceiro excluído pode ser justificada.

De fato, se o raciocínio do parágrafo acima está correto e se insistimos que os princípios lógicos devem ser universalmente aplicáveis, somos obrigados a aceitar a conclusão de que o princípio do terceiro excluído não é um princípio puramente lógico. Portanto, parece razoável interpretar a objeção intuicionista como uma objeção geral e, assim, como uma contribuição não só para o debate na filosofia da matemática, mas também para a filosofia da lógica.

Além disso, entendido em toda a sua generalidade, o contraste elaborado pelo intuicionista entre a matemática e outras matérias que lidam com coleções finitas também sugere que a disputa esteja centrada na hipótese de solvabilidade universal dos problemas matemáticos. Isto é, seja a respeito de coleções finitas de objetos concretos ou a respeito de objetos matemáticos platônicos, podemos supor que para cada problema ou questão há uma resposta definitiva, não importa se podemos encontrá-la ou não.

De fato, o método de contraexemplos fracos do Brouwer repousa na ideia de que, de uma perspectiva construtivista, o raciocínio clássico produziria resultados corretos somente sob a suposição de solvabilidade geral de todos os problemas matemáticos. Assim, ao apontar exemplos da aplicação do princípio do terceiro excluído que levam, em uma interpretação intuicionista, à conclusão de que possuímos a demonstração do que, de outra maneira, seria uma conjectura aberta, o

[1] O personagem chamado CLASS em Heyting (1971) aborda o problema sucintamente assim: “ Eu nunca entendi por que a lógica seria confiável em qualquer outro lugar, mas não em matemática”.

matemático holandês tentou mostrar a invalidade de alguns princípios clássicos de raciocínio. Brouwer (1908, p. 3) percebeu que esses princípios não poderiam ser demonstrados inválidos por meio dos contraexemplos clássicos familiares:

> Em sistemas infinitos o princípio do terceiro excluído ainda não é confiável. Ainda assim, nunca alcançaremos, por uma aplicação injustificada do princípio, uma contradição e *dessa maneira* descobrir que nossos raciocínios foram mal fundados. Pois então seria contraditório que determinada construção foi realizada, e, ao mesmo tempo, seria contraditório que fosse contraditório, e isso é proibido pelo princípio da não-contradição.

Para melhor ilustrar o método dos contraexemplos fracos de Brouwer, consideremos algumas conjecturas matemática. Assim, seja A uma sentença que expressa a conjectura de Goldbach. De um ponto de vista intuicionista, uma expressão matemática expressa a realização de uma construção mental. Consequentemente, $A \vee \neg A$ significa que ou bem temos uma demonstração ou uma refutação da conjectura de Goldbach. Infelizmente, não podemos afirmar, no momento, estarmos em posse seja de uma demonstração, seja de uma refutação. Por isso, o princípio do terceiro excluído é intuicionisticamente inválido.

Certamente, o intuicionista possui fortes argumentos. Por força de sua rejeição da visão metafísica clássica sobre a matemática, ele fora capaz de lançar dúvidas sobre um princípio lógico, sob pretexto de que esse princípio seria injustificável sem apelo à metafísica clássica. Mas, ao se opor à doutrina metafísica do matemático clássico, que postula um reino de objetos matemáticos platônicos, os intuicionistas avançam sua própria doutrina metafísica: a de uma realidade matemática composta unicamente de construções mentais .

Como é frequentemente o caso com a metafísica, especialmente quando apresentada de modo figurativo como viemos fazendo, a concepção intuicionista de construção matemática necessita seriamente de uma explicação mais cuidadosa e detalhada. Não por acaso, alguns autores propuseram diferentes cenários de como a matemática deveria desenvolver-se de acordo com a doutrina intuicionista. Um exemplo interessante é a matemática sem negação de Griss (1946). Outra questão importante é saber se um intuicionista deveria aceitar como justificação construções que são possíveis de efetuar em princípio mas não foram realizadas, e, talvez não possam ser efetivamente realizadas. Por exemplo, seja B uma sentença que expressa a seguinte alegação

(1) A sequência de dígitos "49027365293754" ocorre na expansão decimal de π em algum lugar antes da casa decimal número $10^{10^{10}}$.

Podemos, de um ponto de vista intuicionista, afirmar corretamente $B \vee \neg B$? Algumas pessoas podem dizer que prender a matemática a construções completamente efetuadas, levadas à cabo por pessoas reais, ainda que toda a raça humana (passada, presente e futura), é fazer com que a matemática dependa demasiadamente de fatos contingentes casuais. Segundo eles, a existência de um método geral pertinente a (1), por exemplo, utilizando o método de Arquimedes para calcular a expansão decimal de π, justifica a afirmação de $B \vee \neg B$. Para evitar de nos perdermos em terminologia e exegese, vamos apenas assumir que a posição que descrevemos como sendo a posição intuicionista adequada. Mas, então, por que parar no intuicionismo? Por que não adotar algum tipo de finitismo? Afinal, o finitismo parece estar perfeitamente de acordo com a posição construtiva geral de que as afirmações matemáticas expressam a realização de uma construção mental.

Essas questões não são retóricas, embora nós não tentaremos respondê-las. Na verdade, essas são questões filosóficas importantes sobre a objetividade e a natureza da matemática. Porém, mencionamo-las aqui apenas com o objetivo de chamar a atenção para o fato de que o intuicionismo é, primariamente, uma doutrina metafísica na filosofia da *matemática* e, apesar de ser razoável a sua influência na filosofia da lógica, o exato escopo de suas contribuições no âmbito da lógica não é fácil de se distinguir.

2.1.2 A interpretação BHK

Como discípulo de Brouwer, Heyting (1930) tentou codificar os princípios de raciocínio aceitáveis para o matemático intuicionista. Sua primeira formulação foi um sistema axiomático no estilo de hilbertiano. Houve também algumas tentativas por parte do matemático russo Kolmogoroff (1932) de oferecer uma interpretação para a compreensão intuitiva das constantes lógicas intuicionistas em termos de soluções para problemas. Finalmente, Heyting (1971, p. 102) alcançou uma formulação definitiva que ficou conhecida como a interpretação BHK das constantes lógicas. Abaixo, temos a formulação de Heyting do significado dos conectivos proposicionais intuicionistas[2]

[2]Heyting (1971, p. 103) insiste que as cláusulas BHK se aplicam a proposições reais e ele usa letras germânicas para distinguir entre proposições e variáveis proposicionais. Nesse contexto, a generalidade é alcançada por uma cláusula adicional: "Podemos asserir uma fórmula lógica com variáveis proposicionais, digamos $\mathfrak{U}(p,q,\ldots)$, se, e somente se, podemos asserir $\mathfrak{U}(\mathfrak{p},\mathfrak{q},\ldots)$ para proposições arbitrárias $\mathfrak{p},\mathfrak{q},\ldots$, isto é, se possuirmos um método de construção que, por especialização, resulte na construção exigida para $\mathfrak{U}(\mathfrak{p},\mathfrak{q},\ldots)$". Mantemos a notação de Heyting na transcrição das cláusulas semânticas de BHK de modo a chamar a atenção para o fato de que as cláusulas referem-se a sentenças reais (ou proposições). A posição intuicionista sobre esse assunto é mais tarde abraçada por Dummett (1991), como podemos ver na Seção 3.1.

$p \wedge q$ pode ser asserido se, e somente se, ambos p e q podem ser asseridos.

$p \vee q$ pode ser asserido se, e somente se, pelo menos uma das proposições p e q podem ser asseridas.

$p \supset q$ pode ser asserido se, e somente se, nós possuirmos uma construção r, que, juntamente com qualquer construção que prove p (supondo-se que esta seja efetivada), resultaria automaticamente numa construção que prove q.

$\neg p$ pode ser asserido, se, e somente se, possuirmos uma construção que, partindo da suposição de que uma construção que demonstra p foi realizada, leva a uma contradição.

Às vezes, as cláusulas de Heyting são adaptadas. Troelstra e van Dalen (p. 9, 1988), por exemplo, definem a negação como fizemos na Seção 1.4 e adicionam uma cláusula no sentido de que não há nenhuma demonstração de $\perp$. Eles também substituem a noção de *asserção* de Heyting por uma noção de *demonstração*, assim assumindo tacitamente que podemos asserir corretamente uma proposição quando temos uma demonstração dela. Usando essa adaptação e uma noção intuitiva de demonstração, podemos argumentar pela validade de algumas leis lógicas.

$A \supset \neg\neg A$ Não existe demonstração de $\perp$. Daí, uma vez em posse de uma demonstração de A, é impossível obter uma demonstração de $\neg A$, isto é, uma demonstração de $A \supset \perp$, pois isso resultaria justamente numa demonstração de $\perp$.

Não obstante a sua plausibilidade inicial como uma explicação do significado atribuído às constantes lógicas intuicionistas, as cláusulas BHK enfrentam muitos problemas como cláusulas semânticas satisfatórias para uma teoria sistemática do significado. Certamente, em contextos matemáticos, é muito difícil negar que só temos o direito de asserir A quando possuímos uma demonstração de A. Ainda assim, o conceito de *demonstração* não pode, sozinho, exaurir o significado dos raciocínios matemáticos. Caso contrário, qual seria o significado de uma conjectura matemática?[3]

Ademais, a interpretação BHK, especialmente a cláusula de implicação, também sofre de alguns problemas técnicos (ver Capítulo 3). Do ponto de vista do

[3] Alguns matemáticos poderiam dizer que a coisa mais sábia a se fazer com uma conjectura é permanecer em silêncio sobre o assunto até que tenhamos algo relevante a dizer, isto é, até que tenhamos uma demonstração. Ao que parece, então, a prática matemática nem sempre tem tomado o caminho mais sábio.

desenvolvimento de uma semântica adequada, que seja fiel à ideia de que o significado deve ser baseado no uso, não vemos qualquer razão para dar um estatuto especial para a interpretação BHK. Contudo, como discutimos no início deste capítulo, as semânticas construtivas também tem sido associadas com a matemática construtiva. Assim, a fim de também atingir o objetivo de fornecer uma semântica que justificasse a lógica intuicionista, concepções construtivas de validade com base nas regras de introdução (como veremos na Seção 3.2) foram desenvolvidas sob a sombra da interpretação BHK. Como Dummett (2000, p. 269) diz:

> Não há dúvida, no entanto, de que as explicações intuitivas padrão das constantes lógicas [BHK] determinam seus significados intuicionistas pretendidos, de modo que qualquer coisa que possa ser aceita como a semântica correta para a lógica intuicionista deve incorporá-las ou, pelo menos, deve-se poder mostrar que, sob os pressupostos complementares adequados, resultam delas.

É certo que, se compararmos as cláusulas BHK acima com as regras de dedução natural no Capítulo 1, especialmente as regras de introdução, veremos que elas são muito similares. A semelhança, contudo, é enganadora. Há diferenças significativas o suficiente para alertar que dedução natural e BHK devem ser mantidos seguramente à parte. Listamos abaixo duas diferenças notáveis entre a interpretação BHK e dedução natural.

- as cláusulas BHK são formuladas em termos de asserções (apoiadas em suas respectivas demonstrações), enquanto que as regras de dedução natural especificam as condições para se inferir uma sentença com base em *suposições* ou hipóteses
- a cláusula BHK para a implicação é substancialmente distinta da regra $\supset$I em dedução natural[4]

Certamente, o primeiro ponto acima é de importância central para o ponto de vista substitutivo das derivações abertas. Existem alguns problemas com essa visão, alguns dos quais já mencionados. Como dissemos há pouco, um dos problemas é como explicar o significado de conjecturas. Em contraste, uma abordagem centrada, desde o início, em deduções a partir de premissas não enfrenta o mesmo

[4]Prawitz (1971, Seção 2.1.1) também observa que o significado de $\supset$I é mais estreito do que a cláusula BHK correspondente e conclui: "Não há, portanto, um acordo completo, mas apenas uma estreita correspondência entre o significado construtivo das constantes e as regras de introdução".

problema: conjecturas, embora ainda não estabelecidas, ainda podem ser usadas em nossas deduções como premissas a fim de se extrair consequências.

Outro problema refere-se ao significado da constante $\perp$. Mesmo admitindo-se que o significado seja definido em termos de demonstrações, ou demonstrações condicionais, qual seria o significado dessa constante que, por definição, não possui demonstração? Confrontado com esse problema, Griss (1946) abandonou a negação por completo. Mas, como vimos na Seção 1.4, esperamos usar $\perp$ somente em deduções subordinadas. Neste sentido, a incorporação de suposições tal como presente em sistemas de dedução natural também parece oferecer uma saída para o dilema. Na medida em que a intenção por trás de ambas era diferente, não é de estranhar que houvesse diferenças entre dedução natural e BHK.[5]

> Meu ponto de partida foi o seguinte: A formalização da dedução lógica, especialmente no que foi desenvolvido por Frege, Russell, e Hilbert, está muito distante das formas de dedução utilizadas na prática em demonstrações matemáticas. Consideráveis vantagens formais são alcançadas em troca. Por outro lado, eu busquei, em primeiro lugar, criar um sistema formal que acompanhasse, tão perto quanto possível, o próprio raciocínio. O resultado foi um "cálculo de dedução natural". (GENTZEN, 1935, p. 176)

Além de sua forte inclinação por BHK, um aspecto importante das propostas atuais em semânticas construtivas que foi diretamente inspirado pela dedução natural é a noção de *canonicidade*. Essa noção tem sua inspiração nos procedimentos de harmonia e de normalização. Contudo, parece que ela foi trazida para o cenário apenas para recuperar as cláusulas BHK de seu carácter impreciso e da impredicatividade na formulação de algumas de suas cláusulas. Sem dúvida, as semânticas construtivas enfrentam o desafio de determinar o papel conceitual e as respectivas contribuições da interpretação BHK e da dedução natural em forma de uma semântica satisfatória e adequada.

[5]von Plato (§ 5, 2012) investigou a origem da formulação dos sistemas de dedução natural por Gentzen a partir de uma perspectiva histórica e conceitual. Ele explora a possibilidade de que Gentzen tenha se inspirado não na interpretação BHK diretamente, mas em sistemas axiomáticos de Hilbert, Bernays e Heyting. Segundo ele, esses sistemas axiomáticos foram acoplados com a intuição gentzeniana de que "na realidade, os raciocínios matemáticos procedem por hipóteses ou suposições, ao invés de instâncias de axiomas."

2.2 Significado e uso

A ideia de que o significado de uma expressão se relaciona com seu uso é realmente simples, mas a sua correta compreensão requer alguma explicação. Um equívoco comum é entender que devemos, de alguma forma, igualar o significado de uma expressão com o seu uso, qualquer uso. Essa abordagem simplória enfrenta dois problemas: em primeiro lugar, ela não é capaz de distinguir sistematicamente entre uso correto e incorreto, e, em segundo lugar, ela não distingue entre os usos essenciais (ou canônicos) e os não essenciais, de modo que os significados das expressões ficam instáveis.

Em vez disso, uma abordagem mais adequada seria associar o significado com uma *formulação geral* das regras que regem o uso das expressões da linguagem. Para linguagens em geral, a formulação exaustiva dessas regras pode de fato ser muito difícil, pois, na maioria das vezes, elas não podem simplesmente ser extraídas a partir de padrões explícitos de uso. No entanto, toda a nossa prática linguística e nossa crença de que existem alguns padrões objetivos para o uso correto de expressões sugere que seus usos são regidos por regras gerais que estão implícitas em nossa capacidade linguística e que constituem os seus significados.

Apesar do fato de que nós podemos, razoavelmente, reconhecer o uso correto e incorreto das mesmas, não está claro quais são as regras gerais que regem o uso da maioria das expressões comuns nas línguas naturais. Por outro lado, a questão parece ser mais acessível quando se trata unicamente das constantes lógicas. Pois, no contexto de constantes lógicas, é plausível supor duas propriedades semânticas gerais: composicionalidade e harmonia.

A composicionalidade é indispensável para uma explicação sistemática e geral do significado, pois permite-nos explicar o uso de expressões em qualquer sentença de forma recursiva, por referência aos seus componentes naquela sentença. No caso das constantes lógicas, a especificação recursiva é geralmente feita em termos de alguma noção semântica central como *verdade* ou *assertibilidade*. Quanto à harmonia, é certamente o mais razoável dos requisitos a serem aplicados às regras gerais para o uso de uma expressão, se essa expressão tem qualquer pretensão em ser considerada uma legítima constante *lógica* (ver Seção 1.6).

Nas próximas seções, vamos discutir algumas teses e argumentos filosóficos sobre a linguagem e o seu uso que são relevantes para o estudo das semânticas construtivas. Em particular, vamos examinar a noção de *assertibilidade* de Dummett como base satisfatória para a teoria do significado e os seus argumentos para abandonar as teorias de significado construídas em torno da noção clássica de *verdade*. Discutimos, também, o efeito que algumas das posições filosóficas de

Dummett exerce em sua própria proposta de semântica construtiva.

2.2.1 Manifestabilidade

Na Introdução, mencionamos que as teorias semânticas podem ser classificadas de acordo com as teorias do significado subjacentes. Assim, as teorias denotativas do significado fornecem uma base para as semânticas de modelos, enquanto que as teorias do significado com base no uso fornecem uma base para as semânticas construtivas. Em geral, as teorias do significado estão preocupadas com a seguinte pergunta:

(2) Qual é o significado de uma sentença?

Formulada dessa maneira geral, a questão é um pouco vaga. Podemos estar nos perguntando, por exemplo, "como uma sentença (como uma seqüência de símbolos) obtém o seu significado?". Essa maneira específica de ler (2) faz dela uma questão muito ampla na filosofia da linguagem : ela exige uma teoria geral do significado para a linguagem em questão. Semelhante teoria geral pode não produzir uma resposta direta aos casos particulares como "Qual é o significado de '2+2=4'?" (esse é o papel da semântica). Contudo, a teoria do significado se compromete em fornecer um quadro geral no qual essas questões podem ser respondidas. Esse quadro geral fornece as diretrizes para o desenvolvimento de uma semântica para uma classe específica de expressões da linguagem.

Se nos limitarmos às sentenças lógicas e matemáticas, a questão principal para uma teoria do significado é

(3) Qual é o significado de uma sentença matemática (lógica)?

Há, pelo menos, duas respostas. Em primeiro lugar, podemos pensar em um quadro geral para explicar o significado de um enunciado matemático ao longo das linhas estabelecidas por Frege e outros logicistas. Nesse contexto, as expressões matemáticas ou lógicas referem-se a certos objetos atemporais e imateriais. Esses objetos têm uma realidade própria, independente do conhecimento da raça humana, sua prática e até mesmo sua existência. Esta é a resposta realista.

Outra abordagem, que está em clara oposição à primeira, defende que o significado de uma expressão matemática ou lógica deve ser explicado em termos do seu uso. E, embora essas expressões possam ser utilizadas em muitos contextos e situações diferentes, os usos que têm sido focados são em sentenças lógicas e em cálculos e demonstrações matemáticas. Esta é a resposta antirrealista.

No que concerne a teoria do significado para as sentenças lógicas e matemáticas, Dummett (1978, p. 216–218) apresentou duas razões para se aliar com o antirrealista. Primeiro, ele mostra que, do ponto de vista da filosofia da linguagem, a posição do realista permite a possibilidade de uma falha comunicativa generalizada e, pior de tudo, indetectável. Em segundo lugar, ele ressalta que a posição do antirrealista é mais adequada a um cenário de ensino e aprendizagem da linguagem, permitindo acomodar mais claramente essas práticas.

Vejamos com um pouco mais de detalhe as razões apresentadas por Dummett. O argumento que alega a possibilidade de uma falha comunicativa generalizada sob uma teoria realista do significado funciona aproximadamente como se segue. Suponha que o *significado* de um enunciado matemático é de fato dado pela realidade matemática que ele descreve. Admitindo-se que essa realidade matemática seja objetiva e imaterial (não é dada aos sentidos), a nossa compreensão do significado de um enunciado matemático particular, deve consistir em algum conteúdo mental privado, possivelmente obtido por intuição intelectual (ou algo do tipo). Agora, o problema é como podemos ter certeza de que nós associamos o mesmo conteúdo, ou seja, o mesmo significado, ao mesmo enunciado? Em outras palavras, como pode um falante da língua ter certeza de que ele associa a um determinado termo matemático, por exemplo “2^3”, o mesmo significado que os outros falantes? A resposta é simples: se tudo o que importa para se determinar o *significado* de um enunciado matemático é sua correspondência a uma realidade matemática imaterial, um falante nunca pode ter certeza de compreender esse enunciado da mesma forma que outro falantes[6].

Basicamente, pelas mesmas razões acima, um professor da língua não pode ter certeza de tê-la ensinado corretamente. O aluno também não pode ter certeza de tê-la aprendido corretamente. Contudo, é um fato bem estabelecido que ensinamos e aprendemos matemática. E fazemos isso observando e corrigindo uns aos outros quanto ao uso de expressões matemáticas. Assim, qualquer modelo do significado que seja completamente estranho ao uso que fazemos das expressões não pode fornecer uma explicação satisfatória do ensino e aprendizagem da matemática.

Toda essa discussão entre realismo e antirrealismo é bem conhecida e tem sido revisada muitas vezes na literatura. No entanto, ela levanta mais perguntas do que fornece respostas. Por exemplo, o que significa para o realista afirmar que

[6]Esse argumento não é exatamente o mesmo oferecido por Dummett (1978, p. 216–218). Lá, Dummett *pressupõe* a tese de que o significado de um enunciado matemático é determinado pelo seu uso e prossegue daí. Em contrapartida, adaptamos o argumento de forma a caracterizar uma espécie de redução ao absurdo da posição realista.

há objetos matemáticos imateriais e atemporais que habitam uma realidade independente de nós mesmos? Qual é o efeito do apelo ao uso como um elemento fundamental do significado? Como, exatamente, a teoria do significado do antirrealista difere da do realista? Sem dúvida, uma das contribuições mais notáveis de Dummett para a filosofia da linguagem e para a metafísica foi sua tentativa de trazer algumas disputas metafísicas para o campo semântico. Segundo ele, o cerne da disputa entre o realista e o antirrealista pode ser entendido como uma disputa em torno da legitimidade do princípio de bivalência, quando aplicada a uma determinada classe de sentenças, a classe de sentenças em disputa. Por exemplo, na filosofia da matemática, na qual o antirrealismo é representado pelo intuicionismo e outras formas de construtivismo, a classe em disputa é, obviamente, a classe de sentenças matemáticas.

A rejeição do princípio de bivalência segue-se do compromisso semântico do antirrealista com o uso da linguagem. Ou seja, uma teoria adequada do significado com base no uso não pode justificar o princípio de bivalência como um princípio semântico válido. Dessa forma, o apelo ao uso por parte do antirrealista pode ser visto na forma de um requisito geral colocado sob a teoria de significado. Essa exigência, chamada de exigência de manifestabilidade, é projetada para excluir concepções do significado baseadas em uma noção transcendente da verdade.

Manifestabilidade Em uma teoria do significado, a explicação do significado de uma expressão deve ser feita apenas em termos de conceitos e distinções que são completamente manifestáveis no comportamento linguístico da comunidade de falantes.

É importante entender claramente qual perigo o antirrealista está tentando evitar. Em outras palavras, precisamos compreender exatamente quais são esses significados transcendentes que podem ser atribuídos às expressões pelas teorias denotativas do significado. Nessa direção, em relação às diferenças entre o antirrealista (nesse caso, representado pela posição intuicionista) e as teorias realistas do significado, Dummett (1975b, p. 22) observa:

> Não há desacordo substancial entre os dois modelos do significado enquanto estamos lidando apenas com sentenças decidíveis: a divergência fundamental ocorre quando consideramos aquelas que não são efetivamente decidíveis.

O que o antirrealista tem a dizer sobre as sentenças indecidíveis e seu significado? Elas não fazem sentido? Bem, de acordo com Dummett (1991, p. 315), algumas características da nossa linguagem permitem a construção de afirmações indecidíveis a partir de expressões comuns, cujo significado pode ser totalmente explicado por referência à sua utilização em sentenças decidíveis. Essas características são:

- Nossa capacidade de nos referirmos a regiões inacessíveis do espaço-tempo, como o passado e o espacialmente remoto.
- O uso de quantificação ilimitada sobre totalidades infinitas.
- Nosso uso do condicional subjuntivo.

Portanto, a exigência de manifestabilidade não priva afirmações indecidíveis de significado, uma vez que são construções linguísticas naturais possibilitadas por alguns dispositivos gerais da nossa linguagem. Contudo, ela priva afirmações indecidíveis do privilégio do princípio de bivalência.

2.2.2 Asserção

Dentre os atos de fala que utilizamos, as asserções são os mais relevantes quando se trata de conhecimento em geral e, em particular, da lógica. Nas teorias verificacionistas do significado, a assertibilidade é trazida para o primeiro plano. Assim, em vez do conceito de verdade, familiar em teorias realistas do significado, uma teoria do significado comprometida com o uso da linguagem terá a assertibilidade como seu conceito semântico central. Quando discute os usos que fazemos de asserções, Dummett (1991, p. 103) freqüentemente menciona os aspectos já tratados em conexão com o uso dedutivo das constantes lógicas:

> Há dois aspectos do uso de qualquer sentença assertiva, que fornecem as respostas para as perguntas "Quando devo usá-la?" e "O que posso fazer com ela?". Saber quando devo usar a sentença é saber quais evidências a estabelecem como verdadeira e de quais premissas pode ser inferida. Saber o que fazer com ela é saber qual impacto a sua verdade pode ter sobre minhas ações, e isso envolve saber quais as consequências que dela decorrem, em conjunto com outras sentenças aceitas como verdadeiras, e como tais consequências podem afetar o resultado de minhas ações.

Além disso, em contraste com o conceito abstrato de *proposição*, asserções, como atos de fala, carregam com elas um compromisso implícito, pela pessoa que faz a asserção, de se responsabilizar pela sua correção. Em outras palavras, a pessoa que faz a asserção pode ser contestada a oferecer justificativas para ela e, assim, explicitar os motivos sobre os quais apoiam sua convicção de que está correta. Claramente, então, as condições para se asserir corretamente uma proposição e as condições para que ela seja verdadeira (no sentido clássico) são diferentes.

A distinção entre condições de verdade e condições de assertibilidade é importante para a compreensão das diferenças entre as teorias clássicas e verificacionista do significado. Por exemplo, Martin-Löf (1996, p. 23) formula a distinção da seguinte maneira:

> Ainda que todo número par seja a soma de dois números primos, seria errado da minha parte dizê-lo, a menos que eu o saiba, isto é, a menos que eu o tenha demonstrado. [...] Assim, a condição para que seja correto de minha parte afirmar uma proposição A, isto é, dizer que A é verdadeira, não é que A *seja* verdadeira, mas que eu *saiba* que A é verdadeira.

Um problema que discutimos na Seção 2.1.2 reaparece aqui: se o critério para uma asserção ser correta é nós termos uma justificação dela, e, se o significado deve ser explicado em termos de assertibilidade, então, o que dizer das conjecturas ou, semelhantemente, das hipóteses? O segundo aspecto mencionado por Dummett na citação acima, "O que posso fazer com ela?", talvez possa explicá-las. Assim, porém, entramos em conflito com a ideia de que a asserção correta de uma sentença exige prova ou evidência conclusiva da pessoa que faz a asserção.

Uma maneira de conciliar as nossas intuições é introduzir a noção de *asserção condicional*. Assim, podemos dizer que a asserção de uma certa sentença A está condicionada à asserção de B e C, por exemplo. Em outras palavras, em um argumento subordinado, estamos *condicionalmente* asserindo a conclusão, ou seja, afirmamos que seria correto asserir A caso fosse correto asserir B e C. Em geral, a ideia implica que cada frase assertiva da linguagem deve estar acompanhada de suas condições de assertibilidade. Assim, a noção de *asserção* influenciou consideravelmente as abordagens semânticas construtivas. A influência pode ser sentida, por exemplo, na noção de *regras básicas* B que proporcionam condições de assertibilidade para sentenças atômicas. Essas regras autorizam a asserção de sentenças atômicas a partir de sentenças atômicas.

Consequentemente, a maioria das semânticas construtivas apresenta uma noção de *argumentos canonicamente válidos* representados como árvores construídas a partir das folhas. As folhas contém premissas atômicas, ou derivações atômicas por meio de regras básicas. Cada sentença que compõe esses argumentos representa uma asserção, ou asserção condicional, e cada passo da construção desses argumentos é uma passagem de asserções para asserções. Certamente, essa abordagem tem a generalidade necessária a uma completa abordagem verificacionista da linguagem inteira (sentenças puramente descritivas incluídas). Em uma teoria da validade lógica, no entanto, tem o efeito incômodo de que, em princípio, teríamos de lidar com bases e regras básicas. Contudo, as condições de assertibilidade de qualquer sentença atômica descritiva *particular* têm pouco, ou nada, a ver com validade lógica[7]. Não obstante, as definições construtivas de validade, como a de Prawitz (1971), terminam por manter a noção de regras básicas e relativizam as formulações semânticas a qualquer base B (ou arbitrárias extensões monotônicas delas). Contudo, mesmo com a ajuda do conceito de *asserção condicional* algumas dificuldades persistem. Permanece, ainda, o problema dos argumentos subordinados para $\perp$: não estamos dispostos a asserir $\perp$ sob absolutamente nenhuma condição.

Se abandonarmos a noção de argumento canônico válido tal como descrita acima e, em vez disso, tentarmos explicar a validade com base na inferência correta a partir de premissas, ou hipóteses, ao longo das linhas delineadas no Capítulo 1, podemos evitar a necessidade de bases ou regras básicas completamente.

[7]Nós aceitamos que, concernente aos sistemas básicos, a principal preocupação não são com sentenças puramente descritivas, mas certa classe especial de sentenças não lógicas, embora não descritivas: as sentenças matemáticas. Como mencionado anteriormente, estamos interessados exclusivamente na lógica e nos abstemos de considerar questões matemáticas fundamentais diretamente (exceto nossa discussão sobre a influência histórica da matemática no desenvolvimento das semânticas construtivas).

Capítulo 3

Validade Construtiva

A explicação construtiva padrão das constantes lógicas, a chamada interpretação BHK, não se presta facilmente para o tratamento indutivo necessário para uma definição de validade. A cláusula BHK para a implicação, por exemplo, parece ser fortemente impredicativa. Ela refere-se a *qualquer* construção do antecedente, o que pode envolver uma construção da própria implicação (por exemplo, numa derivação "redundante"). Esse problema é apontado por muitos autores , entre os quais estão Gödel (1995) e Dummett (2000, Seção 7.2). Díez (2000, p. 410), por exemplo, formula o problema como se segue:

> A construção que está sendo definida, e que demonstra $p \supset q$, deve ser capaz de transformar qualquer possível demonstração de p em uma demonstração de q; como nenhum limite é colocado sobre a complexidade dessas possíveis demonstrações de p, dentre elas podem haver algumas complicadas derivações redundantes que envolvam referência à própria sentença $p \supset q$ e, portanto, à mesma demonstração a ser definida. Em suma: a definição de uma demonstração de $p \supset q$ apela a um conjunto de derivações, com algumas das quais a própria demonstração de $p \supset q$ poderia estar intimamente relacionada.

No entanto, baseando-se na noção de *canonicidade* viabilizada pelo comportamento harmônico das regras de dedução natural, Prawitz (1971) e Dummett (1991) propuseram definições construtivas indutivas destinadas a justificar a lógica de predicados intuicionista. Contudo, tem havido algum debate em torno da correção dessas definições. Sandqvist (2009), por exemplo, afirma que algumas abordagens semânticas na verdade propiciam uma justificação construtiva da lógica clássica. Sanz, Piecha e Schroeder-Heister (2013), em particular , argumentam que a proposta de Prawitz resulta em uma confluência entre admissibilidade[1] e derivabilidade para o fragmento $\{\supset\}$ da lógica proposicional. Eles mostraram que a Lei de Peirce para sentenças básicas é admissível e, portanto, válida de acordo com a definição de Prawitz. Como vimos no Capítulo 2, uma justificação construtiva da lógica clássica faria grande impacto sobre o programa de Dummett.

O objetivo desse capítulo é avaliar a aplicabilidade dessas mesmas críticas à proposta de Dummett. No que se segue, vamos rever a definição de validade de Dummett em detalhes, dando referências sempre que necessário para apoiar as formulações[2]. Às vezes, simplificamos as referências adotando a convenção de que as referências não qualificadas (contendo apenas números de páginas) neste capítulo referem-se sempre Dummett (1991). Porem, antes de passarmos às definições, vamos explicar brevemente algumas particularidades da abordagem de Dummett.

Dummett (1991) considera justificativas construtivas de primeiro, segundo e terceiro grau para as leis lógicas. Cada uma é um procedimento de justificação mais poderoso do que a anterior. Justificativas do primeiro grau consistem apenas na derivação de uma regra a partir de outras tomadas como dadas. Em outras palavras, para esse tipo de justificação supomos que algum dado conjunto de regras são válidas e tentamos justificar outras regras *derivando-as* do conjunto dado.

Por outro lado, justificativas de segundo grau já introduzem a ideia principal das semânticas construtivas: as regras de introdução (ou eliminação) fixam o significado das constantes lógicas que governam. Como vimos na Seção 1.6, essa percepção remonta a algumas observações de Gentzen no sentido de que “as regras de introdução são definições de quais as regras de eliminação são apenas conseqüências”. Da perspectiva verificacionista adotada por Dummett (1991, p. 246), a legitimidade dessa ideia baseia-se no fato de que, se as regras de introdução e eliminação para uma certa constante estão em harmonia (as regras de eliminação são apenas “consequências” das regras de introdução, ou vice-versa), então, a adição dessas regras produz uma extensão conservativa da linguagem.

Com o objetivo de fornecer um conteúdo mais preciso para as observações de Gentzen, Dummett desenvolve um procedimento de justificação geral tal que, dado um conjunto I de regras de introdução, validaria todas as outras regras relativamente a elas, incluindo as regras de eliminação correspondentes. Assim, o procedimento justificatório determina uma definição de validade *relativamente a*

[1] Uma regra r é *admissível* em um sistema formal S se, para cada sentença A, sempre que houver uma demostração absoluta de A no sistema S estendido pela regra r, então há uma demonstração absoluta de A no sistema S, sem a regra r (assumindo que r inicialmente não pertencia a S).

[2] Evitamos citações explícitas de modo a manter o capítulo dentro de proporções razoáveis. Em caso de dúvida, o leitor é aconselhado a consultar por si mesmo as passagens relevantes.

um dado conjunto I de regras de introdução. Nós não seguimos a terminologia de Dummett quando o chamamos de *procedimento justificatório verificacionista*. Outro procedimento, o *procedimento justificatório pragmatista*, valida regras de inferência relativamente a um determinado conjunto E de regras de eliminação.

Justificativas construtivas de terceiro grau são introduzidas para lidar com o descarte de hipóteses (p. 259–260) e certos tipos de premissas auxiliares (p. 282–283), no caso das regras de introdução e de eliminação, respectivamente. Por causa da maneira como foram definidos, Dummett (1991, p. 286) argumenta que ambos os procedimentos de justificação nos asseguram *harmonia intrínseca*, isto é, a harmonia entre as regras de introdução e de eliminação para uma dada constante γ, como discutimos na Seção 1.6.

No entanto, existe ainda um outro requisito: o *requisito de estabilidade*. Essa exigência apela a ambos os tipos de procedimentos de justificação como meio de garantir que o conjunto I [E] de regras determinam, coletivamente, uma prática inferencial coerente (p. 287–289). Dummett acredita que, nesse caso, conseguimos não apenas harmonia intrínseca, mas também *harmonia total*. Portanto, segundo Dummett, para que obtenhamos uma formulação adequada e coerente de nossas práticas dedutivas, o *requisito de estabilidade* precisa ser satisfeito.

3.1 Noções preliminares e definições

As definições seguintes serão usadas na nossa discussão de ambos os procedimentos de justificação, verificacionista e pragmatista. Elas lidam com as noções de argumento e regra de inferência. Na verdade, uma compreensão intuitiva dessas noções foram assumidas em nossa discussão até agora. As definições não são destinadas a substituir as intuições, mas sim a evitar confusões com o conteúdo técnico das próximas seções.

Um *argumento* Π é uma árvore composta de sentenças. A sentença na raiz da árvore é chamada de *conclusão* do argumento. Se um argumento Π é composto de acordo com um sistema de regras S, dizemos que Π é uma *dedução* em S. Entendemos os argumentos como sendo construídos de cima para baixo, isto é, das folhas para a raiz. Cada sentença A que ocorre no trajeto de uma folha até a raiz de um argumento Π determina, da forma óbvia, um subargumento Π_1 com A como sua conclusão. Uma ocorrência topo de uma sentença A pode ser *descartada* pela aplicação de uma regra r produzindo uma conclusão B, que, juntamente com todas as outras sentenças abaixo, não dependem de A. Até o ponto de descarte (caso haja descarte), todas as sentenças abaixo de uma folha A dependem dela como suposição. Informalmente, nós tendemos a usar “hipóteses” para ocorrências de sentenças que foram descartadas em algum ponto do argumento em consideração e “premissas” para aquelas que não foram descartadas. Na discussão esquemática de derivações, quando o foco da discussão se concentrar numa regra ou num passo inferencial específico, eventualmente também usamos “premissas” para significar as sentenças acima da linha de inferência.

É importante notar que, seguindo Heyting (1971, p. 101), Dummett (1991, p. 255–256) considera argumentos dedutivos compostos de sentenças reais (em contraste com esquemas compostos de variáveis) e, portanto, suas definições se aplicam a esses argumentos concretos. Assim, para mostrar a validade de um esquema que representa uma regra de inferência, precisamos estabelecer a validade de qualquer aplicação do mesmo, isto é, de qualquer argumento resultante da substituição das variáveis esquemáticas por sentenças reais. Porém, como a lógica proposicional deve ser suficiente para os nossos propósitos, o uso de variáveis esquemáticas para representar sentenças reais não levanta quaisquer problemas sérios[3]. Pela mesma razão, omitimos complicações e cláusulas nas definições que lidam com quantificação e sentenças abertas.

Definição 1. Um *sequente* é um par ordenado $\Gamma \rightarrow A$ no qual Γ, chamado *antecedente*, é um conjunto de sentenças e A, chamado *sucedente*, é uma única sentença (p. 185).

Um sequente $\Gamma \rightarrow A$ representa uma dedução da conclusão A a partir de premissas Γ. Eles não são considerados entre as sentenças que aparecem nas árvores argumentativas, mas são apenas um dispositivo destinado a simplificar nossa notação, soletrando a cada passo do argumento quais são as premissas das quais depende (p. 254).

Definição 2. Um *passo argumentativo* é representado por um par ordenado $\langle \Gamma_1 \rightarrow A_1 \ldots \Gamma_n \rightarrow A_n, \Delta \rightarrow B \rangle$ composto de um conjunto de sequentes $\Gamma_1 \rightarrow A_1 \ldots \Gamma_n \rightarrow A_n$, chamados *sequentes base*, e um único sequente $\Delta \rightarrow B$, chamado *sequente resultante*.

Uma *regra de inferência* é representada por um passo argumentativo. A definição de passo argumentativo, que sugere que os argumentos sejam uma transição de sequentes à sequentes faz-se necessária, principalmente, no caso geral: por exemplo, quando estamos lidando com regras que descartam hipóteses (p. 186 e 264). Nesses casos, em geral, podemos nos referir ao sucedente B do sequente

[3] Uma vez que não precisamos nos preocupar com sentenças abertas, apenas deixamos as variáveis esquemáticas representar sentenças fechadas arbitrárias. Desse modo, o nosso raciocínio está garantido em produzir um método geral aplicável a qualquer dedução real.

resultante simplesmente como *conclusão* e seu antecedente Δ simplesmente como o conjunto de *premissas*. Chamamos *hipótese descartada* a qualquer sentença A tal que A está na união $\Gamma_1 \cup \cdots \cup \Gamma_n$, mas não está em Δ. Caso contrário, quando estamos lidando com regras de um tipo mais simples, podemos representá-las simplesmente como um único sequente $\Delta \to B$, onde as sentenças em Δ são as premissas e B é a conclusão. Essa distinção entre regras também é empregada por Prawitz (1965, p. 22–23), na distinção entre "regras de inferência" e "regras de dedução".

Usamos as representações familiares de argumentos em dedução natural sem nos preocuparmos em explicitar as premissas em cada passo usando sequentes. No que concerne as regras de inferência, desde que não empreguem descarte de hipóteses, a representação habitual em dedução natural é suficiente e mais clara. Por exemplo, a regra de Peirce pode ser representada com $(A \supset B) \supset A$ como premissa e A como conclusão, conforme ilustrado abaixo.

$$\frac{(A \supset B) \supset A}{A}$$

De acordo com a perspectiva semântica construtiva padrão, para uma especificação semântica completa, além das regras de inferência que regem a assertibilidade das sentenças complexas, precisamos também de critérios para a assertibilidade de sentenças atômicas. Normalmente, esses critérios são dados por um conjunto de regras B, chamadas *regras básicas* ou *regras limítrofes*, da forma $\alpha_1 \ldots \alpha_{n-1}/\alpha_n$ que permitam a inferência de sentenças atômicas a partir de sentenças atômicas. Na verdade, a forma exata das regras básicas é tópico controverso. Prawitz (1971, p. 276) as considera como regras de produção que não descartam hipóteses e cujas conclusões são sempre atômicas. Dummett (1991, p. 186), por outro lado, permite conclusões complexas em regras básicas, contudo, as suas definições de validade com relação a um determinado conjunto $\mathsf{I}[\mathsf{E}]$ de regras de introdução [eliminação regras] são tais que assumem, tacitamente, que as regras básicas sejam regras de produção com conclusões atômicas, como pode ser visto pelas definições dadas abaixo[4].

3.2 Verificacionismo

Em seu artigo, Sanz, Piecha e Schroeder-Heister (2013) demonstram, no fragmento $\{\supset\}$ de dedução natural, que dada uma derivação da premissa da Regra de

[4]De acordo com a Definição 3 na página seguinte, todo argumento canônico com conclusão complexa foi obtido com uma regra de introdução como último passo.

Peirce para φ e ψ atômicos, temos uma derivação da conclusão. Devido à forma como Prawitz (1971) caracteriza sua cláusula indutiva para $\supset$, isso equivale a uma validação da Regra de Peirce em sua semântica. Adaptando o argumento para a abordagem de Dummett, precisamos mostrar se a Regra de Peirce é válida ou inválida dada qualquer base B de regras de produção (ou, como Dummett as chama, regras limítrofes) e o conjunto I, cuja única regra é $\supset$I. Como $\supset$I pode descartar hipóteses, usaremos o procedimento justificatório de terceiro grau. Esse mesmo grau do procedimento justificatório será usado no restante do texto. Agora, antes de prosseguir para a definição verificacionista de validade, é preciso fixar alguma terminologia.

Definição 3. A ocorrência de uma sentença pertence ao *caule principal* de um argumento Π se toda sentença na trajetória entre ela e a conclusão de Π (inclusive) depende no máximo das premissas de Π. Caso contrário, se uma sentença fora do caule principal se encontra imediatamente acima de uma no caule principal, então essa sentença é a conclusão de um *subargumento crítico* (p. 260).

Como podemos facilmente observar, o propósito do conceito de *caule principal* é o de manter o controle do descarte de hipóteses à medida que avançamos, a partir da raiz do argumento, em direção às suas folhas. Enquanto fazemos esse percurso rumo às folhas do argumento — examinando, por sua vez, cada uma das possíveis trajetórias — identificamos os subargumentos cuja conclusão depende de premissas adicionais. Lembramos que , no que diz respeito ao descarte de hipóteses, como mencionamos na Seção 1.1, a regra $\supset$I especifica duas condições distintas para a sua aplicação. Assim, quando confrontados com uma aplicação de $\supset$I com conclusão, digamos $A \supset B$, a ocorrência de B imediatamente acima de $A \supset B$ pode pertencer, ou não pertencer, ao caule principal, dependendo se as hipóteses da forma A foram efetivamente descartadas.

Exemplo 1. No exemplo seguinte, apenas a conclusão $(B \wedge C) \supset (A \wedge B)$ está no caule principal. Toda a dedução até esse ponto constitui um subargumento crítico.

$$\dfrac{\dfrac{A \qquad \dfrac{[B \wedge C]}{B}}{A \wedge B}}{(B \wedge C) \supset (A \wedge B)}$$

É interessante notar que, quando considera o exemplo acima, Dummett (1991, p. 263) não segue sua própria definição. Ele afirma que tanto a premissa A quanto a conclusão final $(B \wedge C) \supset (A \wedge B)$ estão no caule principal. No entanto, uma vez que a sentença $A \wedge B$ (que depende da hipótese $B \wedge C$) ocorre no trajeto entre A e a conclusão, temos de admitir que A não está, afinal de contas, no caule principal. Ainda assim, esse erro não afeta a validade da inferência de $(B \wedge C) \supset (A \wedge B)$ a partir da premissa A pela qual Dummett argumentava nessa passagem.

Definição 4. Nós dizemos que um argumento é *canônico*, válido ou não, se as seguintes condições são satisfeitas:

(i) todas as suas premissas (não descartadas) são atômicas;

(ii) toda sentença atômica no caule principal ou bem é uma premissa ou encontra-se derivada por regras básicas;

(iii) toda sentença complexa no caule principal encontra-se derivada por meio de uma das regras de introdução.

A noção de argumento canônico, conforme expresso pela definição acima, possui algumas propriedades importantes. Como consequência do item (iii), podemos ter certeza de que os argumentos canônicos sempre tenham a aplicação de uma regra de introdução como a sua última etapa (supondo que a conclusão seja uma sentença complexa). Essa propriedade também é enfatizada por Prawitz (1971, 2006). Se examinarmos o item (ii), também notamos que os argumentos canônicos, cuja conclusão sejam sentenças atômicas procedem apenas por regras básicas partindo de premissas atômicas (se houver alguma), pois a conclusão atômica se encontra, pela Definição 3, no caule principal. Com relação ao item (i), contudo, Dummett se distancia de outros autores, em especial de Prawitz (1971), quando aceita que premissas atômicas permaneçam abertas (não descartadas) em argumentos canônicos.

Definição 5. Uma *suplementação* de um dado argumento arbitrário é o resultado da substituição de todas suas premissas complexas por argumentos canonicamente válidos tendo essas premissas como conclusões (p. 261).

Como observaremos posteriormente, na Definição 6, transformações de suplementações são o elemento principal no processo de justificação verificacionista. Além disso, de acordo com a definição, para todos os fins e efeitos, suplementações são *argumentos canônicos válidos*. Consequentemente, a noção de suplementação vai se tornar completamente clara apenas após definirmos argumentos canonicamente válidos. Estritamente falando, porém, suplementações são o resultado de uma substituição e aqui vemos claramente a aderência inabalável de Dummett à visão substitutiva das derivações abertas.

Exemplo 2. Ao avaliar a validade de uma regra de inferência, a fim de chegar a um procedimento geral, precisamos considerar todas as possíveis suplementações de suas premissas. Então, refletindo sobre as definições, podemos obter algumas propriedades que podem nos ajudar a realizar as transformações necessárias. Assim, vamos considerar a seguinte regra de inferência.

$$\frac{B \vee C}{(A \supset B) \vee (A \supset C)}$$

Bem, se considerarmos que nosso conjunto I esteja munido das regras $\vee$I e $\supset$I, qualquer suplementação que seja resultado da substituição de sentenças reais pelas variáveis esquemáticas da regra de inferência acima, terá uma das formas abaixo, onde $\alpha_1 \ldots \alpha_n$ e $\beta_1 \ldots \beta_n$ são premissas atômicas.

$$\dfrac{\dfrac{\begin{array}{c}\alpha_1 \ldots \alpha_n \\ \Sigma_1 \\ B\end{array}}{B \vee C}}{(A \supset B) \vee (A \supset C)} \qquad \dfrac{\dfrac{\begin{array}{c}\beta_1 \ldots \beta_n \\ \Sigma_2 \\ C\end{array}}{B \vee C}}{(A \supset B) \vee (A \supset C)}$$

Também observamos que, se A e C são atômicas, então, pelo item (ii) da Definição 4, ambos subargumentos determinados por Σ_1/A e Σ_2/C são derivações partindo das premissas atômicas $\alpha_1 \ldots \alpha_n$ e $\beta_1 \ldots \beta_n$, respectivamente, procedendo unicamente por regras básicas.

Definição 6. Um argumento arbitrário é *válido* se podemos efetivamente transformar qualquer suplementação sua em um argumento canonicamente válido com as mesmas premissas e conclusão. Por sua vez, um argumento é *canonicamente válido* se todos os seus subargumentos críticos são válidos (p. 261).

Embora Dummett (1991, p. 64) exija que um argumento seja uma dedução completa composta de sentenças, ele assegura que sua definição "não se apoia em nada além das premissas iniciais e da conclusão final do argumento". Em outras palavras, apesar de ser diretamente aplicável aos *argumentos*, a Definição 6 pode ser utilizada como um procedimento geral capaz de validar passos argumentativos (ou regras de inferência) com respeito a um determinado conjunto I de regras de introdução.

Resta ainda a caracterização de uma parte crucial do procedimento verificacionista antes que nossa definição de validade esteja completa. Tratam-se das regras básicas. Como vimos, essas regras autorizam a derivação de sentenças atômicas a partir de sentenças atômicas. Acredita-se que, com uma escolha adequada de regras básicas, seria possível sistematizar as relações dedutivas em teorias matemáticas. Disso emana boa parte do prestígio de que gozam essas regras, ainda que, poderíamos arguir, não estejam diretamente envolvidas na justificação de inferências meramente lógicas.

Contudo, as definições oferecidas por Dummett (1991) para o procedimento justificatório verificacionista não nos permitem escapar da consideração explícita de regras básicas, mesmo durante o procedimento de validação de inferências puramente lógicas. Ao longo de seu texto, ele parece oscilar entre os benefícios oferecidos pelas regras básicas numa teoria verificacionista, por um lado, e, por outro lado, a intuição de que essas regras são irrelevantes na justificação de inferências puramente lógicas. De fato, Dummett (1991, p. 273, grifo nosso) afirma explicitamente a independência entre as regras básicas (ou limítrofes) e a noção de validade *lógica*:

> Nós originalmente admitimos, como ocorrendo dentro das derivações dedutivas do tipo com o qual estamos preocupados, regras limítrofes, permitindo a inferência de uma conclusão atômica a partir de premissas atômicas: essas foram, por necessidade, deixadas indeterminadas. Nossa intenção original era que as regras limítrofes fossem dedutivamente válidas. Se agora incluirmos dentre elas princípios não dedutivos (e, portanto, falíveis) de inferência, isso terá o efeito que um argumento válido, mesmo se canônico, poderá ter premissas iniciais verdadeiras, mas uma conclusão final falsa. *Isso, obviamente, não afetará o procedimento justificativo, no entanto, como um meio de determinar a validade das leis lógicas.*

Porém, uma vez que as definições de Dummett adotam uma visão substitutiva das derivações abertas, as regras básicas se tornam parte indispensável ao procedimento justificatório. A questão que se impõe, agora, é como generalizar o procedimento de tal maneira que obtenhamos validade lógica em vez de validade relativa a um determinado conjunto ou classe de regras básicas. No que concerne essa questão, o próprio Dummett (1991) não fornece muitos subsídios. A julgar pela passagem acima, ele assume apenas que as regras básicas são dadas e que o procedimento justificatório possa ser aplicado sem que se assuma qualquer particularidade a respeito delas. Contudo, com o procedimento justificatório que emerge após as definições é impossível evitar a consideração explícita de regras básicas. Isso porque, pela definição de validade, devemos considerar a forma geral das suplementações com o objetivo de transformá-las em argumentos canônicos válidos para a conclusão. Por sua vez, as suplementações, sendo argumentos canonicamente válidos, somente estão efetivamente determinadas após a consideração de regras básicas (pela Definição 4).

Há três maneiras distintas de generalizarmos o procedimento com respeito às bases de modo a alcançar uma noção lógica de validade.

base vazia uma maneira de evitar que qualquer característica específica de bases adentre o procedimento justificatório é considerar uma base vazia, isto é, $\mathsf{B} = \emptyset$.

todas as bases outra maneira seria exigir que, para que uma inferência seja logicamente válida, o procedimento deve ser capaz de justificá-la em todas as bases.

extensões monotônicas de bases ainda outra maneira seria adotar a estratégia de Prawitz (1971) baseada em extensões monotônicas de bases. Uma vantagem dessa estratégia é que ela incorpora a intuição de que uma sentença, uma vez demonstrada, permanece demonstrada. Por outro lado, a estratégia mantém a generalidade, pois a base B a ser estendida é uma base qualquer.

Vejamos quais das propostas acima parece mais adequada. À luz das definições, considere a seguinte inferência, onde φ e ψ são atômicas.

$$\frac{\varphi \supset \psi}{\psi} \tag{3.1}$$

Pela Definição 6, para que (3.1) seja válido, qualquer suplementação da premissa deve poder ser transformada num argumento canonicamente válido para a conclusão com base nas mesmas premissas. Se considerarmos a base vazia, todas as suplementações possíveis envolverão a assunção de ψ como premissa[5]. A mais simples delas é da seguinte forma:

$$\cfrac{\cfrac{\psi}{\varphi \supset \psi}}{\psi}$$

Pela Definição 4, a assunção de ψ acima é um argumento canonicamente válido. Portanto, na base vazia, podemos estabelecer a validade de (3.1), resultado deveras estranho. E assim, se a base vazia fosse a forma privilegiada de determinar validade, validaríamos logicamente a regra (3.1) acima, o que é inaceitável[6]. Por

[5] Ao contrário de Prawitz (1971), Dummett (1991) aceita premissas atômicas abertas em argumentos canônicos (ver Definição 4).

[6] Essa crítica, originalmente atribuída a Warren Goldfarb, é bem conhecida na comunidade de pesquisadores da área.

outro lado, não faz sentido requerer que as suplementações a serem consideradas sejam aquelas que pertencem a todas as bases, pois seu denominador comum seria a base vazia e recairíamos no mesmo problema.

Restam duas alternativas. A primeira delas é a de que a definição de validade lógica requer quantificação sobre todas as bases possíveis. Ou seja, uma inferência só será logicamente válida se ela pode ser validada em todas as base possíveis. A regra (3.1) acima não é validável na base que contém a regra φ/ψ. Portanto, ela não é logicamente válida. Essa posição requer que interpretemos o procedimento delineado por Dummett como um procedimento para determinar validade relativa a uma base. Mas, se devemos considerar todas as bases possíveis, estaremos a considerar um reticulado de bases cujo elemento mínimo é a base vazia e o elemento máximo a base que contém todas as combinações possíveis de regras atômicas. Os elementos do reticulado estarão relacionados por inclusão, ou ainda, por extensão (pela adição de regras básicas). Ora, essa alternativa é equivalente a se considerar extensões monotônicas da base quando da suplementação, pois, dada a estrutura reticulada do conjunto de todas as bases, a validade em todas as bases coincide com a validade por extensões da base vazia. Desse modo, uma inferência será validada em uma base B se ela for validável em todas as extensões de B (aí incluída a extensão idêntica). Portanto, ao considerarmos a validade de uma inferência, devemos mostrar que um conjunto qualquer de suplementações de uma extensão C qualquer da base B pode ser transformado em um argumento canônico para a conclusão nessa base C.

Daí, a segunda e única alternativa real é a das extensões monotônicas da base. Nesse caso, uma inferência é logicamente válida se, dada uma base qualquer B, podemos efetivamente transformar todas as suplementações em qualquer extensão C de B num argumento canonicamente válido, para a conclusão, em C. Porém, infelizmente, essa alternativa valida inferências não construtivas.

Teorema 1. *Sejam φ e ψ sentenças atômicas. Dado qualquer conjunto B de regras de produção, a Regra de Peirce*

$$\frac{(\varphi \supset \psi) \supset \varphi}{\varphi}$$

é válida em B pelo procedimento justificatório verificacionista com respeito a $\supset$I.

Demonstração. Devemos mostrar como podemos transformar qualquer suplementação da Regra de Peirce num argumento canonicamente válido para φ que dependa das mesmas premissas. Suponha uma suplementação Π_1, dada numa extensão C de B, que dependa das premissas $\alpha_1 \ldots \alpha_n$ e tenha sido obtida por substituição de $(\varphi \supset \psi) \supset \varphi$ por um argumento canonicamente válido, conforme especificado pela Definição 5. Desse modo, o penúltimo passo em Π_1 é uma aplicação de $\supset$I como abaixo.

$$\dfrac{\dfrac{\begin{array}{c}\alpha_1 \dots \alpha_n \\ \Sigma_1 \\ \varphi\end{array}}{(\varphi \supset \psi) \supset \varphi}}{\varphi} \qquad (\Pi_1)$$

Nós temos duas possibilidade a considerar: ou (1) a penúltima ocorrência de φ pertence ao caule principal e nós já temos um argumento canonicamente válido para φ que depende das mesmas premissas, pelo item (ii) da Definição 4; ou (2) φ não pertence ao caule principal e nós temos um subargumento crítico Π_2 onde φ é a conclusão (pela Definição 3).

No caso (2), φ depende de hipóteses posteriormente descartadas (novamente, pela Definição 3). Dado que foi descartada por uma aplicação de $\supset$I cuja conclusão é $(\varphi \supset \psi) \supset \varphi$, a hipótese só pode ser $\varphi \supset \psi$.

$$\begin{array}{c}\varphi \supset \psi, \alpha_1 \dots \alpha_n \\ \Sigma_1 \\ \varphi\end{array} \qquad (\Pi_2)$$

Pela Definição 6, o subargumento crítico Π_2 é *válido*. Com base nessa informação, mostraremos como obter um argumento canonicamente válido para φ, a partir de $\alpha_1 \dots \alpha_n$, na base C. Posto que Π_2 é válido, nós temos um procedimento efetivo que transforma qualquer suplementação Π_3, dada numa extensão D de C, num argumento canonicamente válido para φ com premissas $\alpha_1 \dots \alpha_n, \beta_1 \dots \beta_n$.

$$\begin{array}{c}\dfrac{\begin{array}{c}\beta_1 \dots \beta_n \\ \Sigma_2 \\ \psi\end{array}}{\varphi \supset \psi}\ , \quad \alpha_1 \dots \alpha_n \\ \Sigma_1 \\ \varphi\end{array} \qquad (\Pi_3)$$

Em particular, na extensão $\mathsf{D}^* = \mathsf{C} \cup \{\varphi/\psi\}$ obtemos um argumento canonicamente válido para φ com base apenas nas premissas $\alpha_1 \dots \alpha_n$, porém na base D^*. Contudo, uma vez que φ é atômico, pela Definição 4, o argumento procede das premissas $\alpha_1 \dots \alpha_n$ apenas pelas regras básicas de D^*.

$$\begin{array}{c}\alpha_1 \dots \alpha_n \\ \Sigma_4 \\ \dfrac{\varphi}{\psi} \\ \Sigma_5 \\ \varphi\end{array} \qquad (\Pi_4)$$

Nós examinamos o argumento canônico para φ em questão. Caso a regra φ/ψ não ocorra no argumento, então trata-se de um argumento na base C e nossa demonstração está concluída. Caso a regra ocorra, tomamos sua primeira aplicação como ilustrado em Π_4 acima. Como no subargumento Σ_3/φ não ocorre a regra φ/ψ, obtemos justamente o argumento canonicamente válido que necessitávamos para φ na base C, a partir das premissas $\alpha_1 \ldots \alpha_n$. $\square$

Como podemos notar pela validação da regra de Peirce, a definição verificacionista de validade não só oferece um critério para distinguir regras válidas de regras inválidas, mas, de fato, equivale a um procedimento de justificação. Contudo, Dummett (1991, p. 270) aparentemente não previra a possibilidade de que o procedimento de justificação verificacionista validaria a Regra de Peirce. Algumas páginas depois da definição de validade, ele observa:

> Em uma teoria do significado realista, no entanto, a lógica correta será clássica, e haverá muitas leis válidas classicamente envolvendo essas constantes lógicas que não podem ser validadas por apelo às regras de introdução que as regem, como aquelas expressas pelos esquemas clássicos válidos $(A \supset B) \vee (B \supset A)$, $(A \supset B) \vee A$, $((A \supset B) \supset A) \supset A$."[7]

De fato, uma vez que a Regra de Peirce é válida, podemos obter todas as tautologias clássicas no fragmento $\{\supset\}$ da lógica proposicional. Se somarmos $\wedge$I e $\perp$E (ou $\perp$I) como regra adicionais ao fragmento implicativo — fragmento esse que, uma vez que a Regra de Peirce é válida, se comporta classicamente — obtemos um conjunto completo de constantes lógicas poderoso o suficiente para englobar todos os raciocínios proposicionais válidos classicamente (com as outras constantes definidas em termos da implicação, conjunção e $\perp$). Esse estado de coisas certamente frustra a expectativa de que semânticas construtivas justificam apenas raciocínios construtivos (ver Capítulo 2). Será que uma abordagem do significado com base no uso conduz, necessariamente, a justificação dos mesmos raciocínios clássicos que a abordagem denotativa clássica? Quais poderiam ser as razões para esse resultado um tanto indesejável?

Pelo Teorema 1, a suposição de que temos um certo argumento válido canônico para $(\varphi \supset \psi) \supset \varphi$ conduz, necessariamente, à conclusão de que temos um argumento canonicamente válido para φ a partir das mesmas premissas. O ponto

[7]Note que o último esquema nesta citação é a chamada Lei de Peirce, que pode ser obtida a partir de Regra de Peirce por $\supset$I. Os esquemas mencionados por Dummett são escritos em nossa própria notação.

crítico da demonstração encontra-se após a primeira suplementação, quando assumimos que φ não pertence ao caule principal e consideramos um subargumento crítico desde $\varphi \supset \psi$ (possivelmente com algumas premissas atômicas). A suposição de que φ não pertence ao caule principal sinaliza o descarte de hipóteses e, na maioria dos casos, indica que φ depende de mais premissas do que a conclusão da suplementação. Porém, mesmo sob a suposição de que φ não pertence ao caule principal, descobrimos, após a aplicação das definições, que podemos construir um argumento canonicamente válido no qual nenhuma hipótese foi efetivamente descartada e, consequentemente, o nosso argumento canônico válido para φ depende apenas das mesmas premissas atômicas que a conclusão de nossa instância da Regra de Peirce. Cremos que a razão para esse resultado é que, numa abordagem adequada, suplementações *não* deveriam ser limitadas a argumentos canonicamente válidos a partir de premissas atômicas.

Se abandonarmos o ponto de vista substitutivo das derivações abertas e nos concentrarmos na noção de *harmonia* discutida na Seção 1.6, obteremos uma compreensão um tanto distinta de como a Regra de Peirce deve ser abordada: todas as condições necessárias para inferirmos $(A \supset B) \supset A$, assumindo que tenha sido inferida por $\supset$I, devem autorizar a inferência de A (não há necessidade de supormos que A e B sejam atômicas). As condições para obtermos $(A \supset B) \supset A$ por $\supset$I estão ilustradas abaixo. Elas se distinguem pela relevância, ou irrelevância, de $A \supset B$ na derivação de A.

$$\begin{array}{c} \Gamma \\ \Sigma_1 \\ A \end{array} \qquad\qquad\qquad \begin{array}{c} A \supset B, \Gamma \\ \Sigma_2 \\ A \end{array}$$

Do lado esquerdo, A pertence ao caule principal e não houve descarte de hipóteses. Do lado direito, A não pertence ao caule principal e $A \supset B$ foi descartada. Nós também podemos representar as condições para aplicação de $\supset$I ilustradas acima pelos sequentes $\Gamma \to A$ e $\Gamma, A \supset B \to A$, respectivamente. Assim, em vez de argumentos canonicamente válidos a partir de premissas atômicas, podemos considerar que suplementações, quando necessárias, consistam nas condições para se aplicar a regra de introdução correspondente.

Para suplementações com A no caule principal, como na esquerda acima, já temos o argumento canônico válido necessário para A. Para suplementações com A fora do caule principal, nós temos um argumento válido para A (que é a conclusão de um subargumento crítico), mas não está garantido que ele dependa das mesmas premissas Γ. De fato, além de Γ, o argumento válido para A depende ainda de $A \supset B$. Nesse ponto, a Regra de Peirce seria válida apenas se as condições necessárias para se concluir $A \supset B$ por $\supset$I envolvessem, de modo geral, uma dedução (entre elas a assunção) de A. Claramente, esse não é o caso. Portanto, se abandonássemos a visão substitutiva das derivações abertas, poderíamos expandir o conceito de suplementação de maneira a obter uma definição mais adequada de validade.

Além da vantagem de podermos evitar a consideração das bases, uma diferença notável desse conceito expandido de suplementação é que ele não reduz validade a uma transformação de argumentos canônicos válidos em argumentos canônicos válidos. Em contraste, as suplementações seriam, no caso mais geral, conjuntos de deduções (que podem ser representadas por sequentes). Por outro lado, a definição verificacionista de Dummett, baseada na ideia de mostrar que, se tivermos uma demonstração das premissas, então temos uma demonstração da conclusão, assemelha-se à noção de admissibilidade. Ao que parece, o processo de justificação verificacionista, na presença de $\supset$I, validaria qualquer regra admissível envolvendo essa constante lógica[8]. Como forma de aumentar a plausibilidade dessa conjectura, vamos tentar aplicar o procedimento de justificação verificacionista a uma conhecida regra admissível introduzida por Mints (1976).

Teorema 2. *Sejam* φ, ψ *e* χ *sentenças atômicas. Dado qualquer conjunto* B *de regras de produção, a Regra de Mints*

$$\frac{(\varphi \supset \psi) \supset (\varphi \vee \chi)}{((\varphi \supset \psi) \supset \varphi) \vee ((\varphi \supset \psi) \supset \chi)}$$

é válida em B *pelo procedimento justificatório verificacionista com respeito a* $\supset$*I e* $\vee$*I.*

Demonstração. Nós mostramos que qualquer suplementação fornece um argumento canonicamente válido, a partir das mesmas premissas, para a conclusão da Regra de Mints. Suponha uma suplementação Π_1, dada numa extensão C de B, como abaixo.

$$\cfrac{\cfrac{\begin{array}{c}\alpha_1 \ldots \alpha_n \\ \Sigma_1 \\ \varphi \vee \chi\end{array}}{(\varphi \supset \psi) \supset (\varphi \vee \chi)}}{((\varphi \supset \psi) \supset \varphi) \vee ((\varphi \supset \psi) \supset \chi)} \qquad (\Pi_1)$$

Há duas possibilidades. Ou (1) $\varphi \vee \chi$ pertence ao caule principal e nós temos argumentos canonicamente válidos para φ ou para χ apoiados nas mesmas premissas.

[8] Esse é, basicamente, o argumento de Sanz, Piecha e Schroeder-Heister (2013) para a semântica de Prawitz (1971).

Com qualquer um deles, nós podemos obter facilmente um argumento canonicamente válido para $((\varphi \supset \psi) \supset \varphi) \vee ((\varphi \supset \psi) \supset \chi)$ aplicando $\supset$I e $\vee$I. Alternativamente, (2) $\varphi \vee \chi$ não pertence ao caule principal e, nesse caso, o subargumento Π_2 abaixo é válido.

$$\begin{array}{c} \varphi \supset \psi, \alpha_1 \ldots \alpha_n \\ \Sigma_1 \\ \varphi \vee \chi \end{array} \qquad (\Pi_2)$$

Pela Definição 6, qualquer suplementação Π_3, dada numa extensão D de C, do subargumento crítico Π_2 pode ser transformada num argumento canônico válido para $\varphi \vee \chi$, nenhuma premissa adicional sendo necessária, além daquelas porventura introduzidas pela suplementação. Semelhante ao que fizemos no Teorema 1, consideramos a extensão $\mathsf{D}^* = \mathsf{C} \cup \{\varphi/\psi\}$. Nessa base, temos um argumento canonicamente válido para $\varphi \vee \chi$ a partir de $\alpha_1 \ldots \alpha_n$. Em seguida, ainda com base nos procedimentos descritos no Teorema 1, obtemos um argumento canônico válido para φ, a partir das mesmas premissas $\alpha_1 \ldots \alpha_n$, desta vez na base C. Finalmente, mediante a aplicação de $\supset$I, construímos um argumento canonicamente válido para $((\varphi \supset \psi) \supset \varphi) \vee ((\varphi \supset \psi) \supset \chi)$, a partir das premissas $\alpha_1 \ldots \alpha_n$, na base C. $\square$

Como é o caso com a Regra de Peirce, a Regra de Mints não é derivável em sistemas de dedução natural (sem a regra clássica para $\perp$). Essas falhas localizadas do procedimento justificatório verificacionista podem apresentar sérias dificuldades para o programa filosófico defendido por Dummett. Em seu artigo, Sandqvist (2009) caminhou alguns passos no sentido de questionar a crença generalizada entre os antirrealistas de que os cânones clássicos de raciocínio pressupõem o princípio da bivalência. Ele mostrou como uma determinada semântica construtivas poderia validar a regra de eliminação da dupla negação, justificando assim a lógica clássica. Não obstante, ele observa (p. 215):

> Nesse esforço para produzir uma lógica clássica usando apenas ingredientes estritamente construtivos, eu não estou tentando estabelecer essa lógica como a única justificável. Em particular, eu não quero sugerir que as constantes lógicas, como os intuicionistas as interpretam, estão realmente sujeitas às leis clássicas de inferência. Nosso tratamento dos condicionais, do absurdo e da quantificação universal certamente diferem em alguns aspectos das abordagens intuicionistas padrão, foi assim que conseguimos obter a classicalidade.

Se as nossas definições são uma formulação apropriada daquilo que é proposto por Dummett (1991), então temos razões para crer que as críticas se aplicam muito bem, pelo menos no nível proposicional[9]. De fato, a cláusula de Sandqvist para o constante do absurdo $\perp$ é exatamente aquela de Dummett (1991, p. 295). Assim, dado que a implicação se comporta classicamente, poderíamos, como Sandqvist (2009), justificar a regra de eliminação da dupla negação. Se essa regra é, de fato, válida sob a semântica de Dummett, então, usando da definição das outras constantes clássicas com a ajuda de $\supset$, $\wedge$ e $\perp$, temos uma abordagem construtiva dos princípios clássicos de raciocínio, aparentemente sem assumir bivalência .

3.3 Pragmatismo

Apesar da ênfase nas regras de introdução e no verificacionismo, Dummett crê que poderíamos muito bem, em vez disso, tomar uma atitude pragmática e considerar regras de eliminação. Então, assim como fez com as regras de introdução, ele oferece um procedimento justificatório destinado a validar regras de inferência, dado um conjunto E de regras de eliminação. Nesta seção, transportamos o nosso propósito de avaliar a validade das regras admissíveis na semântica de Dummett para esse novo processo de justificação.

Definição 7. Em uma regra de eliminação para uma determinada constante γ a premissa contendo γ é chamada de *premissa maior*. As demais, se houverem, chamamos *premissas menores*. Uma regra de eliminação pode ser *vertical*, quando a conclusão de alguma das suas premissas menores coincide com a conclusão da regra, ou *redutora* caso contrário. Nós exigimos que as premissas menores de regras verticais, que podemos chamar de *premissas verticais*, realmente dependam das hipóteses descartadas pela regra. Caso uma premissa menor não seja vertical, dizemos que é *horizontal* (p. 283).

Exemplo 3. Recordamos nossa discussão no Capítulo 1 em que as regras de eliminação expressam o uso dedutivo das sentenças como premissas de onde extraímos consequências. Algumas regras de eliminação são aplicáveis apenas na presença de um contexto específico representado pelas premissas menores da regra. Por sua vez, as premissas menores podem ser deduções cuja conclusão coincide com a conclusão da regra, caso em que, como versa a definição, nós as chamamos

[9] Algumas pessoas notarão que os nossos exemplos de validação de regras não são semelhantes o suficiente dos próprios exemplos de Dummett. Contudo, cremos que um exame cuidadoso mostra que os exemplos de Dummett estão, por vezes, em conflito com as suas definições. Fora necessário que nós, então, que fizéssemos uma escolha. Decidimos acompanhar as definições de Dummett em vez de tentar extrair de seus exemplos quaisquer que fossem suas reais intenções a respeito do funcionamento dos procedimentos justificatórios.

de premissas verticais. Reproduzimos algumas regras de eliminação em dedução natural, de modo a ilustrar a definição acima.

$$\dfrac{A \vee B \quad \begin{array}{c}[A]\\ \vdots\\ C\end{array} \quad \begin{array}{c}[B]\\ \vdots\\ C\end{array}}{C}\ \vee\mathrm{E} \qquad\qquad \dfrac{A \quad A \supset B}{B}$$

Como podemos observar, $\vee$E é vertical e, portanto, suas duas premissas menores são premissas verticais. Em contrapartida, a regra de eliminação para $\supset$ é redutora e sua premissa menor é horizontal.

Definição 8. Nós chamamos a ocorrência de uma sentença de *diretora* se todas as sentenças na trajetória entre si e a conclusão são, ou premissa maior de uma regra de eliminação, ou premissa de uma regra básica. Assim, se uma sentença diretora é premissa de um determinado argumento, chamamos esse argumento de *adequado*. Ademais, uma sentença é *plácida* quando não há nenhuma premissa horizontal na trajetória entre ela e a conclusão do argumento (p. 284).

Exemplo 4. No argumento abaixo, as ocorrências de C como premissa menor de $\vee$E não são plácidas, uma vez que a conclusão da regra **C** (em negrito) é também premissa menor horizontal de $\supset$E.

$$\dfrac{\dfrac{A \vee B \quad \begin{array}{c}[A]\\ \Sigma_1\\ C\end{array} \quad \begin{array}{c}[B]\\ \Sigma_2\\ C\end{array}}{\mathbf{C}} \qquad C \supset D}{D}$$

Definição 9. Um argumento canônico possui as seguintes propriedades (p. 284):

(i) sua conclusão é uma sentença atômica

(ii) ele é adequado

(iii) os subargumentos para quaisquer premissas verticais plácidas são adequados

Outrosim, um subargumento que não seja canônico e cuja conclusão seja ainda uma premissa horizontal é chamado *subargumento crítico*.

O item (iii) da definição acima se destina a evitar que argumentos para premissas verticais de regras de eliminação que não sejam adequadas e cuja conclusão, que se repete na conclusão da regra, seja, dessa maneira, premissa maior de uma eliminação. Porém, é possível transformar argumentos que violam o item (iii) da Definição 9 em argumentos canônicos por meio do familiar procedimento de redução de segmentos para normalização em lógica intuicionista. Assim, consideremos novamente o argumento no Exemplo 4. Suponha que o subargumento para as premissas verticais de $\vee$E não sejam adequados. Ele pode tornar-se adequado se rearranjado como abaixo .

$$\dfrac{A \vee B \qquad \dfrac{\begin{matrix}[A]\\ \Pi_1\\ C\end{matrix} \quad C \supset D}{D} \qquad \dfrac{\begin{matrix}[B]\\ \Pi_2\\ C\end{matrix} \quad C \supset D}{D}}{D}$$

Após rearranjarmos, as premissas verticais apresentam $C \supset D$ como premissa diretora e assim, pela Definição 8, são adequadas. A mesma transformação pode ser repetida, de modo que não há nenhuma perda de generalidade se assumirmos as conclusões de premissas verticais sejam sempre atômicas.

Em certo ponto do livro, durante a discussão do processo justificatório pragmatista, Dummett (1991, p. 284) ocupa-se com argumentos canônicos cujos subargumentos críticos têm o mesmo grau de complexidade dos argumentos canônicos em que ocorrem. Isso obriga-o a fazer uma distinção entre validade em um sentido amplo e validade em um sentido restrito, quando aplicada aos argumentos canônicos. Apesar da distinção, Prawitz (2007, nota 15) faz o que cremos ser uma crítica injustificada do procedimento justificatório pragmático de Dummett. Prawitz alega que o procedimento, como definido por Dummett, não reconhece a validade geral de *modus ponens*. Ele oferece como contraexemplo uma aplicação de *modus ponens* na qual o argumento para a premissa horizontal da regra procede a partir de premissas de maior complexidade do que aquelas no restante do argumento. De acordo com Prawitz, essa instância particular de *modus ponens* não será válida pela definições de Dummett, uma vez que viola as limitações de complexidade necessárias para se evitar circularidade.

Bem, no que diz respeito às críticas de Prawitz, gostaríamos de observar, em primeiro lugar, que Dummett (1991, p. 284) considera explicitamente um argumento semelhante ao exemplo do próprio Prawitz. Em segundo lugar, podemos mostrar que o procedimento é bem fundado, mesmo que alguns subargumentos críticos Π_2 detenham o mesmo grau de complexidade que o argumento original Π_1, pois a validade de Π_2 pode depender, no máximo, da validade de outro argumento Π_3 de menor complexidade, depois que a premissa mais complexa seja tomada como premissa diretora. No entanto, por mais desconcertante que seja, Dummett (2007, p. 484) parece aceitar as críticas de Prawitz quando, em sua resposta, ele escreve: "Aceito plenamente a correção de Dag Prawitz da minha manipulação da noção de um válido argumento quando as regras de eliminação são tomadas como base".

A circularidade se torna um perigo tangente quando consideramos algumas regras de eliminação incomuns, especialmente aquelas que não respeitam as limitações de complexidade impostas por Dummett. Na maioria dos casos, no entanto, não há problemas. Assim, supomos como certo que as transformações eventualmente diminuirão o grau de complexidade dos subargumentos críticos e prosseguiremos com as definições, deixando de lado uma discussão mais profunda do problema de circularidade.

Definição 10. A complementação de um argumento resulta da substituição de sua conclusão A, se complexa, por um argumento canonicamente válido do qual A é a premissa diretora (p. 285).

Na complementação de um argumento Π_1, quando substituímos um argumento canonicamente válido Π_2 pela conclusão, o argumento resultante Π_3 terá a mesma conclusão atômica de Π_2 e suas premissas serão aqueles de Π_1 em conjunto com aquelas de Π_2. Não haveria nenhuma perda de generalidade, caso o conjunto E contenha $\vee$E, em assumirmos que sua conclusão seja sempre atômica.

Às vezes, na complementação de um argumento Π_1, precisamos de premissas adicionais para usar como premissas menores de eliminações. Quando essas premissas adicionais não são deriváveis a partir das premissas originais de Π_1, as premissas menores de $\supset$I são adicionadas às premissas da complementação. Ademais, Dummett (1991, p. 285–286) pressupõe que os argumentos para as premissas verticais C de uma aplicação de $\vee$E, cuja premissa maior é $A \vee B$, são derivados por $\supset$E com a ajuda das premissas adicionais $A \supset C$ e $B \supset C$, onde A e B são descartados, como mostramos no exemplo a seguir.

Exemplo 5. A complementação de um argumento para $A \vee B$ a partir da premissa $A \wedge B$ assume a forma abaixo.

$$\dfrac{\dfrac{A \wedge B}{A \vee B} \qquad \dfrac{A \supset C \qquad [A]}{C} \qquad \dfrac{B \supset C \qquad [B]}{C}}{C}$$

Após a complementação, as premissas do argumento são $A \wedge B$, $A \supset C$ e $B \supset C$. Não há nenhuma perda de generalidade em assumir que C seja atômico. Regras básicas podem ser aplicadas a C para se obter outras conclusões atômicas.

Definição 11. Um argumento arbitrário é *válido* se houver um método efetivo de se encontrar, para qualquer complementação do mesmo, um argumento canonicamente válido com as mesmas premissas e conclusão (p. 286). E um argumento canônico é válido se todos os seus subargumentos críticos são válidos (p. 284).

Exemplo 6. Uma vez que os teoremas adiante são dedicados a demonstrar a invalidade, nós fornecemos como ilustração uma justificativa pragmática para se inferir $A \supset \neg\neg B$ a partir de $\neg\neg(\neg A \vee B)$. Em primeiro lugar, obedecendo à Definição 10, nós consideramos uma complementação do argumento.

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\neg\neg(\neg A \vee B)^{\text{①}}}{A \supset \neg\neg B} \qquad A^{\text{②}}}{\neg\neg B} \qquad \neg B^{\text{③}}}{\bot}$$

Nós indicamos as premissas da complementação por meio dos números circulados "①", "②", "③", e assim por diante. Pela Definição 11, nós devemos obter um argumento canonicamente válido para a mesma conclusão $\bot$ apoiado nas mesmas premissas. Todo argumento canonicamente válido, pela Definição 9, é adequado. Isso significa que pelo menos uma de suas premissas é diretora, pela Definição 8. Nós escolhemos ① como premissa diretora do nosso argumento canônico válido e aplicamos a regra de eliminação correspondente.

$$\dfrac{\neg\neg(\neg A \vee B) \qquad \boxed{\dfrac{A \qquad \neg B}{\neg(\neg A \vee B)}}}{\bot}$$

Pela Definição 11, o argumento acima é válido caso todos seus subargumentos críticos, envolvidos por retângulos, sejam válidos. Assim, repetimos o procedimento para os subargumentos críticos.

$$\dfrac{\dfrac{A^{\text{①}} \qquad \neg B^{\text{②}}}{\neg(\neg A \vee B)} \qquad \neg A \vee B^{\text{③}}}{\bot}$$

Desta vez, escolhemos ③ como premissa diretora do nosso argumento canonicamente válido.

$$\dfrac{\neg A \vee B \qquad \dfrac{[\neg A] \qquad \boxed{\dfrac{A}{\neg\neg A}}}{\bot} \qquad \dfrac{[B] \qquad \neg B}{\bot}}{\bot}$$

O subargumento crítico de premissa A e conclusão $\neg\neg A$ no argumento canônico acima é obviamente válido. E assim concluímos nosso exemplo.

Há algumas notáveis diferenças entre os procedimentos justificatórios verificacionista e pragmatista. Em comparação, o procedimento pragmatista é muito mais favorável à concepção da dedução como procedendo a partir de suposições. De fato, o procedimento justificatório, para o caso proposicional, não muda essencialmente se simplesmente desconsiderarmos a exigência de que a complementação percorra todo o caminho até as conclusões atômicas. Além disso, não há necessidade de se considerar explicitamente regras básicas. E mais, percebe-se que, após a complementação, repousa sobre nós a responsabilidade de mostrar a validade do subargumento crítico no procedimento justificatório pragmatista. Essa situação contrasta com a do verificacionista, na qual as suplementações, sendo argumentos canônicos válidos, já nos fornece, por definição, subargumentos críticos válidos.

No que se segue, vamos avaliar a validade das mesmas regras discutidas na Seção 3.2 com respeito ao procedimento justificatório pragmático. A fim de permanecer completamente fiel às definições de Dummett e também por uma questão de uniformidade, mantemos a suposição de que as sentenças são atômicas nos teoremas adiante.

Teorema 3. *Sejam φ e ψ sentenças atômicas. Dado qualquer conjunto* B *de regras de produção, a Regra de Peirce*

$$\frac{(\varphi \supset \psi) \supset \varphi}{\varphi}$$

não é valida em B *com respeito a* $\supset$*E.*

Demonstração. Dado que a conclusão φ é uma sentença atômica, não há nada relevante para complementar. Em outras palavras, uma instância da Lei de Peirce para sentenças atômicas pode ser considerada sua própria complementação. Agora, precisamos nos perguntar se é possível obter um argumento canonicamente válido com premissa $(\varphi \supset \psi) \supset \varphi$ e conclusão φ. Qualquer argumento canonicamente válido com premissa $(\varphi \supset \psi) \supset \varphi$, por ser adequado, terá essa mesma sentença como premissa maior de uma aplicação de $\supset$E (pela Definição 9).

$$\frac{\varphi \supset \psi \qquad (\varphi \supset \psi) \supset \varphi}{\varphi}$$

Aqui, o argumento para $\varphi \supset \psi$ é um subargumento crítico (novamente, pela Definição 9). Nessa situação, a Regra de Peirce seria válida apenas se pudéssemos inferir $\varphi \supset \psi$ sem nos apoiarmos em nenhuma premissa. Esse não é o caso, uma vez que uma complementação de $\varphi \supset \psi$, ao mesmo tempo em que apresenta ψ como conclusão, exige a presença de φ como premissa menor. □

Parece que Dummett está a salvo de validar regras inderiváveis no contexto das eliminações em conjunto com o procedimento justificatório pragmatista. Em seguida, veremos o que o procedimento justificatório pragmatista diz sobre a Regra de Mints.

Teorema 4. *Sejam φ, ψ e χ sentenças atômicas. Dado qualquer conjunto* B *de regras de produção, a Regra de Mints*

$$\frac{(\varphi \supset \psi) \supset (\varphi \vee \chi)}{((\varphi \supset \psi) \supset \varphi) \vee ((\varphi \supset \psi) \supset \chi)}$$

não é válida em B *com respeito a* $\supset$*E e* $\vee$*E.*

Demonstração. Ao complementar uma instância da Regra de Mints, temos que substituir sua conclusão por um argumento canonicamente válido que parta de $((\varphi \supset \psi) \supset \varphi) \vee ((\varphi \supset \psi) \supset \chi)$ como premissa *diretora* rumo a conclusões atômicas (pela Definição 10). Assim, esse argumento deve apresentar $((\varphi \supset \psi) \supset \varphi) \vee ((\varphi \supset \psi) \supset \chi)$ como premissa maior de $\vee$E. Conforme ilustramos no Exemplo 5, após a complementação temos um argumento com uma conclusão atômica, digamos ω, e as premissas $(\varphi \supset \psi) \supset (\varphi \vee \chi)$, $((\varphi \supset \psi) \supset \varphi) \supset \omega$ e $((\varphi \supset \psi) \supset \chi) \supset \omega$.

$$\dfrac{\dfrac{(\varphi \supset \psi) \supset (\varphi \vee \chi)}{((\varphi \supset \psi) \supset \varphi) \vee ((\varphi \supset \psi) \supset \chi)} \quad \dfrac{((\varphi \supset \psi) \supset \varphi) \supset \omega \quad [(\varphi \supset \psi) \supset \varphi]}{\omega} \quad \dfrac{((\varphi \supset \psi) \supset \chi) \supset \omega \quad [(\varphi \supset \psi) \supset \chi]}{\omega}}{\omega}$$

Contudo, não importa quais premissas tomemos como diretoras, não há nenhuma maneira de obtermos um argumento canônico válido para a conclusão ω apelando apenas às mesmas três premissas da complementação . □

A acentuada disparidade nos casos da Regra de Peirce e da Regra de Mints é suficiente para mostrar um desequilíbrio entre os procedimentos justificatórios verificacionista e pragmatista, ao menos em relação às familiares regras de introdução e eliminação para as constantes lógicas proposicionais. A seguir, exploramos algumas consequências de nossas investigações.

Conclusão

Como vimos no Capítulo 1, a noção de harmonia entre os usos de uma expressão lidam com dois aspectos específicos. Em primeiro lugar, as condições para a inferência correta de sentenças que contenham essa expressão. Em segundo lugar, quais conclusões podemos extrair a partir da suposição de uma sentença que contenha essa expressão. Esses dois aspectos são harmoniosos se o que extraímos de uma sentença não é mais, nem menos, do que aquilo que necessitamos para inferir corretamente a mesma sentença. Essa relação, quando aplicada às regras que regem o uso de uma única expressão, é chamada de *harmonia intrínseca*.

Contudo, Dummett generaliza a noção de harmonia, introduzindo assim um conceito mais forte: a harmonia total. A *harmonia total* refere-se a um equilíbrio entre os dois aspectos acima referidos, quando aplicado a todo um conjunto de expressões, podendo quaisquer uma delas ocorrer numa mesma sentença. Reconhecendo que a harmonia intrínseca entre as regras para cada expressão é insuficiente, Dummett (1991, p. 287–288) propôs o requisito de estabilidade como critério para detectar a harmonia total em uma prática inferencial determinada por um conjunto de regras que regem as constantes lógicas. De acordo com esse critério, se, dado um conjunto de regras de introdução [eliminação], temos o mesmo conjunto após a aplicação de ambos os procedimentos justificatórios, então, obtemos estabilidade.

A única restrição que Dummett (1991, p. 258) coloca sobre regras de introdução e de eliminação é aquilo que podemos chamar de restrições de complexidade. Para as regras de introdução, isso significa que as premissas e hipóteses descartadas pela regra devem ser de complexidade menor do que a conclusão. Por outro lado, Dummett (1991, p. 283) exige que a conclusão, as premissas menores e as hipóteses descartadas de uma regra de eliminação tenham complexidade inferior àquela da premissa maior.

No capítulo anterior, vimos que o procedimento justificatório verificacionista justifica a Regra de Peirce como uma regra de eliminação adicional (além do habitual *modus ponens*). Não obstante, a Regra de Peirce não é justificada pelo processo de justificação pragmatista. Assim, partindo de um conjunto E contendo $\supset$E, depois de aplicarmos ambos os procedimentos justificatórios, obtemos um outro conjunto que contém, pelo menos, a Regra de Peirce como uma regra de eliminação adicional. Portanto, não se obtém estabilidade.

Há pelo menos duas maneiras de enfrentarmos essa dificuldade. Podemos aceitar os procedimentos gerais de justificação propostos por Dummett e procurar diferentes regras de introdução e eliminação que são estáveis em relação a esses procedimentos. Ou podemos tentar reformular os procedimentos de Dummett, guiados pelo objetivo de oferecer uma melhor abordagem dos raciocínios hipotéticos. Ao longo de nossas discussões, tentamos indicar um curso alternativo ao longo da segunda linha. A esse respeito, comentaremos brevemente alguns fatos positivos que surgiram de nossas investigações.

Em primeiro lugar, chamamos a atenção para o relativo sucesso do procedimento justificatório pragmatista. Além de parecer funcionar como esperado, o procedimento justificatório pragmatista tem uma aplicação algorítmica clara. Além disso, se refletirmos bem, é fácil ver como obter, a partir do procedimento justificatório, uma derivação normal em dedução natural. A construção inversa (obter uma justificação a partir de uma derivação normal), no entanto, aparenta ser mais complicada. Tais construções poderiam ser usadas para fornecer argumentos de completude e correção semântica com relação aos sistemas de dedução natural (se estivermos interessados nesses resultados). Por outro lado, ainda não conseguimos antever uma forma clara, geral e algorítmica de aplicar nossas sugestões para adequação do procedimento justificatório verificacionista. Contudo, esperamos que a nossa discussão tenham ajudado a trazer à luz os problemas relacionados com a visão substitutiva das derivações abertas. Enfim, nós esperamos sinceramente que novas investigações sobre esses temas sejam fecundos o suficiente para que seja solucionada positivamente a questão da estabilidade.

Referências Bibliográficas

ARISTOTLE. On interpretation. In: ____. *Aristotle*. Cambridge, Massachusetts: Harvard University Press, 1938. (Loeb Classical Library, 1), cap. 2. Translated by Harold P. Cooke.

BROUWER, L. E. J. De onbetrouwbaarheid der logische principes. *Tijdschrift voor Wijsbegeerte*, v. 2, p. 152–158, 1908. Translated in Brouwer (1975).

BROUWER, L. E. J. *Collected Works*: Philosophy and foundations of mathematics. Amsterdam: North Holland, 1975.

CARNAP, R. *The Logical Syntax of Language*. London: Routledge and Kegan Paul, 1964.

DEVITT, M. Dummett's anti-realism. *The Journal of Philosophy*, v. 80, n. 2, p. 73–99, 1983.

DÍEZ, G. F. Five observations concerning the intended meaning of the intuitionistic logical constants. *Journal of Philosophical Logic*, v. 29, p. 409–424, 2000.

DUMMETT, M. The justification of deduction. *Proceedings of the British Academy*, LIX, p. 201–232, 1975. Reprinted in Dummett (1978).

DUMMETT, M. The philosophical basis of intuitionistic logic. In: ROSE, H.; SHEPHERDSON, J. (Ed.). *Logic Colloquium '73 Proceedings of the Logic Colloquium*. Amsterdam: North Holland, 1975, (Studies in Logic and the Foundations of Mathematics, v. 80). p. 5–40. Reprinted in Dummett (1978).

DUMMETT, M. *Truth and Other Enigmas*. Cambridge, Massachussetts: Harvard University Press, 1978.

DUMMETT, M. *The Logical Basis Of Metaphysics*. Cambridge, Massachusetts: Harvard University Press, 1991.

DUMMETT, M. *Elements of Intuitionism*. 2. ed. Great Claredon Street, Oxford: Oxford University Press, 2000. (Oxford Logic Guides, v. 39).

DUMMETT, M. Reply to Dag Prawitz. In: AUXIER, R. E.; HAHN, L. E. (Ed.). *The Philosophy of Michael Dummett*. Chicago and La Salle, Illinois: Open Court Publishing Company, 2007, (The Library of Living Philosophers, XXXI). cap. 13, p. 482–489.

GENTZEN, G. Untersuchungen über das logische schließen I. *Mathematische Zeitschrift*, v. 39, n. 1, p. 176–210, 1935. Translated in Gentzen (1969).

GENTZEN, G. *The Collected Papers of Gerhard Gentzen*. Amsterdam: North-Holland Publishing Company, 1969.

GÖDEL, K. In what sense is intuitionistic logic constructive? In: FEFERMAN, S. (Ed.). *Collected Works*. [S.l.]: Oxford University Press, 1995. III, p. 189–200.

GRISS, G. F. C. Negationless intuitionistic mathematics. *Indagationes Mathematicae*, v. 8, p. 675–681, 1946.

HEIJENOORT, J. van (Ed.). *From Frege to Gödel*: A source book in mathematical logic: 1879–1931. Cambridge, Massachusetts: Harvard University Press, 1967.

HEYTING, A. Die formalen regeln der intuitionische logik. *Sitzungsberichte der Preuszischen Akademie der Wissenschaften*, p. 42–56, 1930.

HEYTING, A. *Intuitionism: An Introduction*. 3. ed. Amsterdam: North-Holland Publishing Company, 1971.

HILBERT, D. Die grundlagen der mathematik. *Abhandlungen aus dem Mathematischen Seminar der Universität Hamburg*, v. 6, n. 1, p. 65–85, 1928. Translated in Heijenoort (1967).

KAHLE, R.; SCHROEDER-HEISTER, P. Introduction: Proof-theoretic semantics. *Synthese*, Springer, v. 148, n. 3, p. 503–506, 2006.

KLEENE, S. C. *Introduction to Metamathematics*. Amsterdam: North Holland, 1952.

KOLMOGOROFF, A. Zur deutung der intuitionistischen logik. *Mathematische Zeitschrift*, v. 35, n. 1, p. 58–65, 1932.

KRIPKE, S. A. Semantical analysis of intuitionistic logic I. In: DUMMETT, M.; CROSSLEY, J. N. (Ed.). *Formal Systems and Recursive Functions*. Amsterdam: North Holland Publishing Company, 1965, (Studies in Logic and The Foundations of Mathematics, v. 40). p. 92–130.

KUTSCHERA, F. von. Die vollständigkeit des operatorsystems $\{\neg, \wedge, \vee, \supset\}$ für die intuitionistische aussagenlogik im rahmen der gentzensemantik. *Archiv für Matematische Logik und Grundlagenforschung*, v. 12, p. 3–16, 1968.

LORENZEN, P. *Einführung in die Operative Logik und Mathematik*. 2. ed. Berlin: Springer, 1969. First edition published in 1955.

MARTIN-LÖF, P. On the meanings of the logical constants and the justifications of the logical laws. *Nordic Journal of Philosophical Logic*, v. 1, n. 1, p. 11–60, 1996.

MINTS, G. E. Derivability of admissible rules. *Journal of Mathematical Sciences*, v. 6, n. 4, p. 417–421, 1976. First published in Russian in 1972.

PAGIN, P. Bivalence: Meaning theory vs metaphysics. *Theoria*, v. 64, n. 2-3, p. 157–186, 1998.

PLATO, J. von. Gentzen's proof systems: Byproducts in a work of genius. *The Bulletin of Symbolic Logic*, v. 18, n. 3, p. 313–367, September 2012.

PRAWITZ, D. *Natural Deduction: A Proof-Theoretical Study*. Stockholm: Almqvist & Wiksell, 1965.

PRAWITZ, D. Ideas and results in proof theory. *Studies in Logic and the Foundations of Mathematics*, v. 66, p. 235–307, 1971.

PRAWITZ, D. Towards a foundation of a general proof theory. In: SUPPES, P. et al. (Ed.). *Logic, Methodology and Philosophy of Science IV*. Amsterdam: North Holland, 1973. (Studies in Logic and the Foundations of Mathematics, v. 74), p. 225–250.

PRAWITZ, D. On the ideia of a general proof theory. *Synthese*, v. 27, n. 1, p. 63–77, 1974.

PRAWITZ, D. Meaning approached via proofs. *Synthese*, v. 148, n. 3, p. 507–524, 2006.

PRAWITZ, D. Pragmatist and verificationist theories of meaning. In: AUXIER, R. E.; HAHN, L. E. (Ed.). *The Philosophy of Michael Dummett*. Chicago and La Salle, Illinois: Open Court Publishing Company, 2007, (The Library of Living Philosophers, XXXI). cap. 13, p. 455–481.

SANDQVIST, T. Classical logic without bivalence. *Analisys*, v. 69, n. 2, p. 211–218, April 2009.

SANZ, W. de C. *Uma Investigação Acerca das Regras para a Negação e o Absurdo em Dedução Natural*. Tese (Doutorado) — Universidade Estadual de Campinas, Campinas, 2006.

SANZ, W. de C.; PIECHA, T.; SCHROEDER-HEISTER, P. Constructive semantics, admissibility of rules and the validity of Peirce's law. *Logic Journal of the IGPL*, 2013.

SCHROEDER-HEISTER, P. Proof-theoretic semantics. In: ZALTA, E. N. (Ed.). *The Stanford Encyclopedia of Philosophy*. Spring 2013. [S.l.: s.n.], 2013.

TARSKI, A. On the concept of logical consequence. In: *Logic, Semantics, Metamathematics*. Oxford: The Claredon Press, 1956. p. 409–420.

TENNANT, N. *Anti-Realism and Logic*: Truth as eternal. Oxford: Claredon Press, 1987.

TROELSTRA, A. S.; DALEN, D. van. *Constructivism in Mathematics: An Introduction*. 1. ed. Amsterdam: Elsevier, 1988. (Studies in Logic and the Foundations of Mathematics, v. 121). Volume I.